

Người làm: Vũ Thị Hiền

Zalo: Vu Thi Hien

- số đt zalo:0352605810

Email: vuhien27578@gmail.com

CD1: TÌM ẨN CHƯA BIẾT**Dạng 1. Tìm x thông thường.****Câu 1. (HSG 7 thị xã Thái Hòa Nghệ An 2022 - 2023)**

Tìm x biết: $\frac{3}{4} - (2x - 1)^2 = 50\%$

Lời giải

$$\frac{3}{4} - (2x - 1)^2 = 50\% \Rightarrow (2x - 1)^2 = \frac{1}{4}$$

Ta có

$$\Rightarrow 2x - 1 = \frac{1}{2} \quad \text{hoặc} \quad 2x - 1 = -\frac{1}{2}$$

Trường hợp 1: $2x - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

Trường hợp 2: $2x - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

Vậy $x \in \left\{ \frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right\}$

Câu 2. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\frac{6}{7} + \frac{1}{7} : x = \frac{2}{21}$

Lời giải

$$\frac{6}{7} + \frac{1}{7} : x = \frac{2}{21}$$

$$\frac{1}{7} : x = \frac{2}{21} - \frac{6}{7}$$

$$\frac{1}{7} : x = \frac{2}{21} - \frac{18}{21}$$

$$\frac{1}{7} : x = -\frac{16}{21}$$

$$x = \frac{1}{7} : -\frac{16}{21}$$

$$x = \frac{1}{7} \cdot -\frac{21}{16}$$

$$x = -\frac{3}{16}$$

Vậy $x = -\frac{3}{16}$

Câu 3. (HSG 7 huyện Đô Lương 2022 - 2023)

Tìm x thoả mãn. $2x = \frac{3}{2}x + 25\%$

Lời giải

$$2x = \frac{3}{2}x + 25\%$$

Ta có:

$$2x - \frac{3}{2}x = \frac{25}{100}$$

$$\left(2 - \frac{3}{2}\right)x = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Vậy $x = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 4. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2022 – 2023)

Tìm x biết rằng: $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} : x = -3$.

Lời giải

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} : x = -3$$

$$\frac{1}{4} : x = -3 - \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{4} : x = \frac{-12}{4} - \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{4} : x = \frac{-15}{4}$$

$$x = \frac{1}{4} : \frac{-15}{4}$$

$$x = \frac{1}{4} \cdot \frac{-4}{15}$$

$$x = \frac{-1}{15}$$

Vậy $x = \frac{-1}{15}$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Ứng Hòa 2022 - 2023).

Tìm x , biết: $\left(-1\frac{3}{5} + x\right) : \frac{12}{13} = 2\frac{1}{6}$.

Lời giải

$$\left(-1\frac{3}{5} + x\right) : \frac{12}{13} = 2\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{8}{5} + x\right) : \frac{12}{13} = \frac{13}{6}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{8}{5} + x\right) = \frac{13}{6} \cdot \frac{12}{13}$$

$$\Rightarrow -\frac{8}{5} + x = 2$$

$$\Rightarrow x = 2 + \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{18}{5}$$

$$x = \frac{18}{5}$$

Vậy

Câu 6. (HSG 7 huyện Liên Trường 2022 - 2023).

Tìm x , biết: $3\frac{1}{2} : (2x - 1) = \frac{21}{22}$.

Lời giải

$$3\frac{1}{2} : (2x - 1) = \frac{21}{22}$$

$$2x - 1 = \frac{7}{2} : \frac{21}{22}$$

$$2x = \frac{11}{3} + 1$$

$$x = \frac{14}{3} : 2 = \frac{7}{3}$$

$$x = \frac{14}{3} : 2$$

$$x = \frac{7}{3}$$

$$x = \frac{7}{3}$$

Vậy

Dạng 3. Sử dụng tính chất lũy thừa.

Câu 1. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2022 - 2023).

Địa y là một dạng kết hợp giữa nấm (*mycobiont*) và một loại sinh vật có thể quang hợp (*photobiont* hay *phycobiont*) trong mối quan hệ cộng sinh. Khi trái đất nóng dần lên làm cho băng trên các dòng sông bị đóng băng tan dần. Mười hai năm sau khi băng tan, Địa y bắt đầu phát triển và nếu mỗi nhóm Địa y phát triển trên một khoảng đất hình tròn thì mối quan hệ giữa đường kính d (tính bằng *mi-li - mét*) của hình tròn đó và tuổi t của Địa y có thể biểu diễn theo công thức: $d = 7\sqrt{t - 12}$ (với $t \geq 12$). Năm 2022, người ta đã đo được đường kính của một nhóm Địa y cạnh một dòng sông là $42mm$. Với kết quả đo trên, em hãy tính xem băng trên dòng sông đó đã tan năm nào?

Lời giải

Vì đường kính của Địa y là $42mm$ nên ta có :

$$7\sqrt{t - 12} = 42 \Rightarrow \sqrt{t - 12} = 6 \Rightarrow (\sqrt{t - 12})^2 = 6^2 \Rightarrow t - 12 = 36 \Rightarrow t = 48 \text{ (thỏa mãn } t \geq 12)$$

Do đó băng trên dòng sông đã tan vào năm: $2022 - 48 - 12 = 1962$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2022 - 2023).

Tìm x biết: $\left(\frac{1}{5} - x\right)^2 = 3^2$.

Lời giải

$$\frac{1}{5} - x = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{5} - 3 \Rightarrow x = \frac{-14}{5}$$

TH1

$$\frac{1}{5} - x = -3 \Rightarrow x = \frac{1}{5} + 3 \Rightarrow x = \frac{16}{5}$$

TH2

$$x = \frac{16}{5}; x = \frac{-14}{5}.$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Lập Thạch, Vĩnh Phúc 2022 - 2023).

Tìm x , biết $3^{-1} \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x = 28$.

Lời giải

Tìm x , biết $3^{-1} \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x = 28$

$$3^{-1} \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x = 28$$

$$3^x \cdot \frac{1}{3} + \frac{10}{3} \cdot 3^x = 28$$

$$3^x \cdot \frac{28}{3} = 28$$

$$3^x = 3$$

$$x = 1$$

$$\text{Vậy } x = 1.$$

Câu 4. (HSG 7 thành phố Ninh Bình 2022 - 2023).

Giải các phương trình sau: $(x+2)^{n+1} = (x+2)^{n+11}$ (với n là số tự nhiên).

Lời giải

$$(x+2)^{n+1} = (x+2)^{n+11}$$

$$(x+2)^{n+1} - (x+2)^{n+11} = 0$$

$$(x+2)^{n+1} \cdot \frac{1}{3} - (x+2)^{10} \cdot \frac{1}{3} = 0$$

$$\text{TH1: } (x+2)^{n+1} = 0 \text{ suy ra } x = -2$$

$$\text{TH2: } 1 - (x+2)^{10} = 0$$

$$(x+2)^{10} = 1$$

$$x+2 = 1 \text{ suy ra } x = -1$$

$$x+2 = -1 \text{ suy ra } x = -3$$

$$\text{Vậy } x = -2; x = -1; x = -3.$$

Câu 5. (HSG 7 -TP Thanh Hóa, 2022 - 2023).

Tìm x biết: $5^{2x-1} = 5^{2x-3} + 125 \cdot 24$.

Lời giải

$$5^{2x-1} = 5^{2x-3} + 125.24$$

$$5^{2x-1} - 5^{2x-3} = 5^3.24$$

$$5^{2x-3}.5^2 - 5^{2x-3} = 5^3.24$$

$$5^{2x-3}.(5^2 - 1) = 5^3.24$$

$$5^{2x-3} = 5^3$$

$$2x - 3 = 3$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Vậy $x = 3$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Lương Tài tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)

Tìm x biết $5^{x+2} + 5^{x+3} = 750$.

Lời giải

$$5^{x+2} + 5^{x+3} = 750$$

$$5^x \cdot 5^2 + 5^x \cdot 5^3 = 750$$

$$5^x = 5$$

$$x = 1$$

Vậy $x = 1$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2022 - 2023)

Tìm x biết: $(x+1)^{x^2+x+2} - (x+1)^{x^2+x} = 0$.

Lời giải

$$(x+1)^{x^2+x+2} - (x+1)^{x^2+x} = 0$$

$$(x+1)^{x(x+1)} \left[(x+1)^2 - 1 \right] = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^{x(x+1)} = 0 \text{ hoặc } (x+1)^2 - 1 = 0$$

$$\text{Trường hợp 1: } (x+1)^{x(x+1)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x(x+1) \neq 0 \end{cases} \text{ (VL)}$$

$$\text{Trường hợp 2: } (x+1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow x+1=1 \text{ hoặc } x+1=-1$$

$$+) x+1=1 \Rightarrow x=0$$

$$+) x+1=-1 \Rightarrow x=-2$$

Vậy $x=0$ hoặc $x=-2$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Liên Trường 2022 - 2023)

Tìm x biết: $3^{x+1} + 3^{x+2} - 2.3^x = 270$.

Lời giải

$$3^{x+1} + 3^{x+2} - 2.3^x = 270$$

$$3^x(3+3^2-2) = 270$$

$$3^x = 270 : 10 = 27 = 3^3$$

$$\Rightarrow x = 3$$

Câu 9. (HSG 7 huyện Diễn Châu 2022 - 2023)

Tìm x biết: $|-2|.3^x + 3^{x+2} = 99$.

Lời giải

Tìm x biết: $|-2|.3^x + 3^{x+2} = 99$

$$\begin{aligned} |-2| \cdot 3^x + 3^{x+2} &= 99 \Leftrightarrow 2 \cdot 3^x + 3^{x+2} = 99 \\ &\Rightarrow 3^x (2 + 3^2) = 99 \\ &\Rightarrow 3^x \cdot 11 = 99 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Câu 10. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\frac{1}{5^{x-1}} + 3 \cdot 5^{2-x} = \frac{16}{125}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{1}{5^{x-1}} + 3 \cdot 5^{2-x} &= \frac{16}{125} \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} = \frac{16}{125} \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \cdot 5 = \frac{16}{125} \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \\ &\Rightarrow x - 1 = 3 \\ &\Rightarrow x = 4 \\ &\text{Vậy } x = 4. \end{aligned}$$

Dạng 4. Tìm ẩn dạng phân thức.

Câu 1. (HSG 7 thị xã Thái Hòa Nghệ An 2022 - 2023)

Tìm x ; y biết: $\frac{2+y}{3} = \frac{7-2y}{5} = \frac{3+y}{4x}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{2+y}{3} &= \frac{7-2y}{5} = \frac{3+y}{4x} \\ \text{Từ } \frac{2+y}{3} &= \frac{7-2y}{5} \Rightarrow 5(2+y) = 3(7-2y) \Rightarrow y = 1 \\ \text{Suy ra: } \frac{2+1}{3} &= \frac{3+1}{4x} \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Dạng 5. Tìm x dạng chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Câu 1. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2022 – 2023)

Tìm x biết: $|x+2| + |x+3| = 4(x-1) - |x-1|$.

Lời giải

$$|x+2| + |x+3| = 4(x-1) - |x-1| \text{ Suy ra } |x+2| + |x+3| + |x-1| = 4(x-1)$$

Do vế trái luôn lớn hơn hoặc bằng 0 nên vế phải cũng phải lớn hơn hoặc bằng 0 nên $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

Với $x \geq 1 \Rightarrow x+2 > 0$; $x+3 > 0$; $x-1 \geq 0$ nên ta có:

$$\begin{aligned} x+2+x+3+x-1 &= 4(x-1) \\ &\Rightarrow x = 8 \text{ (t/m).} \end{aligned}$$

Vậy $x = 8$.

Câu 2. (HSG 7 thị xã Thái Hòa Nghệ An 2022 - 2023)

Tìm x biết: $2x - |x-3| = 2$.

Lời giải

$$2x - |x - 3| = 2 \quad (1)$$

Nếu $x \geq 3$. Từ (1) ta có: $2x - x + 3 = 2 \Rightarrow x = -1$ (loại)

Nếu $x < 3$. Từ (1) ta có: $2x + x - 3 = 2 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$ (thỏa mãn)

Vậy $x = \frac{5}{3}$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\left|x - \frac{2}{5}\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{20}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \left|x - \frac{2}{5}\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{20} \Rightarrow \left|x - \frac{2}{5}\right| = \frac{11}{20}$$

$$\Rightarrow x - \frac{2}{5} = \frac{11}{20} \quad \text{hoặc} \quad x - \frac{2}{5} = -\frac{11}{20}$$

$$+ \text{ Nếu } x - \frac{2}{5} = \frac{11}{20} \Rightarrow x = \frac{2}{5} + \frac{11}{20} = \frac{19}{20}$$

$$+ \text{ Nếu } x - \frac{2}{5} = -\frac{11}{20} \Rightarrow x = \frac{2}{5} - \frac{11}{20} = -\frac{3}{20}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{19}{20} \quad \text{hoặc} \quad x = -\frac{3}{20}$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Đô Lương 2022 - 2023)

Tìm $x \in \mathbb{N}$ thỏa mãn. $|x - 4| - |x + 1| = -1$ (*)

Lời giải

Xét $x \geq 4$: (*) $\Rightarrow x - 4 - (x + 1) = -1 \Rightarrow -4 = 0$ (vô lí) hay (*) vô nghiệm.

Xét $-1 \leq x < 4$: (*) $\Rightarrow -(x - 4) - (x + 1) = -1 \Rightarrow -2x = -4 \Rightarrow x = 2$ (thỏa điều kiện).

Xét $x < -1$: (*) $\Rightarrow -(x - 4) + (x + 1) = -1 \Rightarrow 6 = 0$ (vô lí) hay (*) vô nghiệm.

Vậy $x = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 5. (HSG 7 huyện Nghi Sơn 2022 - 2023)

Tìm x biết: $|x + 5| + |x - 3| = 9$.

Lời giải

$$|x + 5| + |x - 3| = 9 \quad (1)$$

$$* \text{ Xét } x < -5 \Rightarrow \begin{cases} x + 5 < 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x + 5| = -x - 5 \\ |x - 3| = -x + 3 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó (1)} \Rightarrow -x - 5 - x + 3 = 9 \Rightarrow -2x = 11 \Rightarrow x = -\frac{11}{2} \quad (\text{thỏa mãn})$$

$$* \text{ Xét } -5 \leq x \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} x + 5 \geq 0 \\ x - 3 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x + 5| = x + 5 \\ |x - 3| = -x + 3 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó (1)} \Rightarrow x + 5 - x + 3 = 9 \Rightarrow 0 \cdot x = 1 \quad (\text{vô lí})$$

$$x > 3 \Rightarrow \begin{cases} x+5 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x+5| = x+5 \\ |x-3| = x-3 \end{cases}$$

* Xét

Khi đó (1) $\Rightarrow x+5+x-3=9 \Rightarrow 2x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy $x \in \left\{ \frac{-11}{2}; \frac{7}{2} \right\}$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Đông Hưng 2022 - 2023)

Tìm x , biết $3\frac{1}{2} : \left(4 - \frac{1}{3} \cdot |2x-1| \right) = \frac{21}{22}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} 3\frac{1}{2} : \left(4 - \frac{1}{3} \cdot |2x-1| \right) &= \frac{21}{22} \\ \Rightarrow \left(4 - \frac{1}{3} \cdot |2x-1| \right) &= 3\frac{1}{2} : \frac{21}{22} \\ \Rightarrow 4 - \frac{1}{3} \cdot |2x-1| &= \frac{11}{3} \\ \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot |2x-1| &= \frac{1}{3} \\ \Rightarrow |2x-1| &= 1 \\ \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=1 \\ 2x+1=-1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ 2x=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $x \in \{0; -1\}$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Hà Trung 2022 - 2023)

Tìm x biết: $3\frac{1}{2} : |2x-1| = \frac{21}{22}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} 3\frac{1}{2} : |2x-1| &= \frac{21}{22} \\ |2x-1| &= 3\frac{1}{2} : \frac{21}{22} \\ |2x-1| &= \frac{7}{2} \cdot \frac{22}{21} \\ |2x-1| &= \frac{11}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 = \frac{11}{3} \\ 2x-1 = -\frac{11}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{14}{3} \\ 2x = -\frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases} \\ \text{Vậy } x &\in \left\{ \frac{-4}{3}; \frac{7}{3} \right\}. \end{aligned}$$

Câu 8. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2022 – 2023)

Tìm x biết rằng: $|x-1| = 2-x$.

Lời giải

$|x-1| = 2-x$ điều kiện $2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$

Trường hợp 1: $1 \leq x \leq 2$ ta có :

$$|x - 1| = 2 - x$$

$$x - 1 = 2 - x$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ (tm)}$$

Trường hợp 2: $x < 1$ ta có:

$$|x - 1| = 2 - x$$

$$1 - x = 2 - x$$

$$1 = 2 \text{ (vô lý)}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Vậy

Câu 9. (HSG 7 thành phố Ninh Bình 2022 - 2023)

Giải các phương trình sau: $|x^2 + |x + 1|| = x^2 + 2$

Lời giải

$$|x^2 + |x - 1|| = x^2 + 2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + |x - 1| = x^2 + 2 \\ x^2 + |x - 1| = -x^2 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 1| = 2 \\ |x - 1| = -2x^2 - 2 \end{cases}$$

Ta có $|x - 1| = -2x^2 - 2$ (vô lý vì $VT \geq 0$; $VP \leq 0$)

$$\text{Ta có } |x - 1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 \\ x - 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{3; -1\}$.

Câu 10. (HSG 7 tỉnh Quảng Ninh 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $|x + 3| - 2x = 5$.

Lời giải

$$|x + 3| - 2x = 5 \Leftrightarrow |x + 3| = 5 + 2x \quad (1)$$

TH1: Nếu $x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3 \Leftrightarrow |x + 3| = x + 3$

Khi đó (1) có dạng: $x + 3 = 5 + 2x$

$\Leftrightarrow x = -2$ (thỏa mãn điều kiện)

TH2: Nếu $x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -3 \Leftrightarrow |x + 3| = -x - 3$

Khi đó (1) có dạng: $-x - 3 = 5 + 2x$

$$\Leftrightarrow 3x = -8$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{8}{3} \text{ (Không thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $x = -2$.

Câu 11. (HSG 7 -TP Thanh Hóa, 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\left|2x + \frac{1}{2}\right| + \left|2x - \frac{3}{2}\right| = 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \left|2x + \frac{1}{2}\right| + \left|2x - \frac{3}{2}\right| = \left|2x + \frac{1}{2}\right| + \left|\frac{3}{2} - 2x\right| \geq \left|2x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2x\right| = 2$$

Dấu “ $\geq$ ” xảy ra khi và chỉ khi: $\left(2x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} - 2x\right) \geq 0$

Giải ra được: $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$

Câu 12. (HSG 7 huyện Than Uyên tỉnh Lai Châu 2022 - 2023)

Tìm x biết: $|x+1| + |x+3| + \dots + |x+2023| = 2024x$

Lời giải

Vì vế trái luôn lớn hơn hoặc bằng 0 với x nên $2024x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Khi đó: $|x+1| + |x+3| + \dots + |x+2023| = 2024x$

$$\Rightarrow x+1 + x+3 + \dots + x+2023 = 2024x$$

$$\Rightarrow (x+x+\dots+x) + (1+3+\dots+2023) = 2024x$$

$$\Rightarrow 1012x + \frac{2023+1}{2} \cdot 1012 = 2024x$$

$$\Rightarrow 1024144 = 2024x - 1012x$$

$$\Rightarrow 1012x = 1024144$$

$$\Rightarrow x = 1012$$

Vậy $x = 1012$

Câu 13. (HSG 7 huyện Lương Tài tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\left|\frac{39}{2} - 3x^2\right| = \frac{15}{2}$

Lời giải

$$\left|\frac{39}{2} - 3x^2\right| = \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{39}{2} - 3x^2 = \frac{15}{2} \quad \text{hoặc} \quad \frac{39}{2} - 3x^2 = -\frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow 3x^2 = \frac{39}{2} - \frac{15}{2} \quad \text{hoặc} \quad 3x^2 = \frac{39}{2} + \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow 3x^2 = 12 \quad \text{hoặc} \quad 3x^2 = 27$$

$$\Rightarrow x = \pm 2 \quad \text{hoặc} \quad x = \pm 3$$

Vậy $x \in \{\pm 2; \pm 3\}$

Câu 14. (HSG 7 huyện Bình Xuyên, tỉnh Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\left(3 - \frac{9}{10} - |x+2|\right) : \left(\frac{19}{10} - 1 - \frac{2}{5}\right) + \frac{4}{5} = 1$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \left(3 - \frac{9}{10} - |x+2|\right) : \left(\frac{19}{10} - 1 - \frac{2}{5}\right) + \frac{4}{5} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{30}{10} - \frac{9}{10} - |x+2|\right) : \left(\frac{19}{10} - \frac{10}{10} - \frac{4}{10}\right) = 1 - \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{21}{10} - |x+2|\right) : \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{21}{10} - |x+2|\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{21}{10} - |x+2| \right) = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow |x+2| = \frac{21}{10} - \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow |x+2| = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=2 \Rightarrow x=0 \\ x+2=-2 \Rightarrow x=-4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \{0; -4\}$$

Câu 15. (HSG 7 huyện Liên Trường 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x, y, z \text{ biết: } \left| x - \frac{1}{2} \right| + \left| y + \frac{2}{3} \right| + |x^2 + xz| = 0$$

Lời giải

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| + \left| y + \frac{2}{3} \right| + |x^2 + xz| = 0$$

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| \geq 0; \left| y + \frac{2}{3} \right| \geq 0; |x^2 + xz| \geq 0$$

Ta có:

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = 0 \\ y + \frac{2}{3} = 0 \\ x^2 + xz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu 16. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } \left(3 - \left| x - \frac{1}{2} \right| \right) \cdot \left(\frac{8}{15} - \frac{1}{5} \right) + \frac{2}{3} = 1$$

Lời giải

$$\left(3 - \left| x - \frac{1}{2} \right| \right) \cdot \left(\frac{8}{15} - \frac{1}{5} \right) + \frac{2}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \left(3 - \left| x - \frac{1}{2} \right| \right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3 - \left| x - \frac{1}{2} \right| = 1$$

$$\Rightarrow \left| x - \frac{1}{2} \right| = 2$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{2} = 2 \quad \text{hoặc} \quad x - \frac{1}{2} = -2$$

$$\text{TH1: } x - \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$\text{TH 2: } x - \frac{1}{2} = -2 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{5}{2}; -\frac{3}{2} \right\}.$$

Câu 17. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023).

Tìm x biết: $\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{9900} \right| = 10x$

Lời giải

$$\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{9900} \right| = 100x \quad (1)$$

Ta thấy $\left| x + \frac{1}{2} \right| \geq 0; \left| x + \frac{1}{6} \right| \geq 0; \left| x + \frac{1}{12} \right| \geq 0; \dots; \left| x + \frac{1}{9900} \right| \geq 0$

nên $\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{9900} \right| \geq 0$

mà $\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{9900} \right| = 100x$

suy ra $100x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$$\Rightarrow \left| x + \frac{1}{2} \right| = x + \frac{1}{2}; \left| x + \frac{1}{6} \right| = x + \frac{1}{6}; \left| x + \frac{1}{12} \right| = x + \frac{1}{12}; \left| x + \frac{1}{9900} \right| = x + \frac{1}{9900} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + \dots + x + \frac{1}{9900} = 100x$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{1.2} + x + \frac{1}{2.3} + x + \frac{1}{3.4} + \dots + x + \frac{1}{99.100} = 100x$$

$$\Rightarrow 99x + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 100x$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} \quad (\text{tmđk})$$

$$\text{Vậy } x = \frac{99}{100}$$

Dạng 6. Sử dụng công thức tính tổng có quy luật.

Câu 1. (HSG 7 huyện Hà Trung 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\frac{x-4}{2019} + \frac{x-3}{2020} = \frac{x-2}{2021} + \frac{x-1}{2022}$.

Lời giải

$$\frac{x-4}{2019} + \frac{x-3}{2020} = \frac{x-2}{2021} + \frac{x-1}{2022}$$

$$\frac{x-4}{2019} - 1 + \frac{x-3}{2020} - 1 = \frac{x-2}{2021} - 1 + \frac{x-1}{2022} - 1$$

$$\frac{x-2023}{2019} + \frac{x-2023}{2020} = \frac{x-2023}{2021} + \frac{x-2023}{2022}$$

$$(x-2023) \left(\frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} \right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} \right) \neq 0 \quad \text{nên } x-2023 = 0 \Rightarrow x = 2023.$$

Vậy $x = 2023$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Yên Định 2022 - 2023)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{4044}{2023}$$

Tìm x biết:

Lời giải

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{4044}{2023}$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{6065}{4046}$$

$$\frac{2}{1.2} + \frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{6065}{4046}$$

$$2 \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{6065}{4046}$$

$$1 - \frac{1}{x+1} = \frac{6065}{8092} \Rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{2027}{8092}$$

$$\Rightarrow x+1 = \frac{8092}{2027}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6065}{2027}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{6065}{2027}$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2022 – 2023)

$$\frac{x-1}{2021} + \frac{x-2}{2020} = \frac{x-5}{2017} + \frac{x-7}{2015}$$

Tìm x biết rằng:

Lời giải

$$\frac{x-1}{2021} + \frac{x-2}{2020} = \frac{x-5}{2017} + \frac{x-7}{2015}$$

$$\left(\frac{x-1}{2021} - 1 \right) + \left(\frac{x-2}{2020} - 1 \right) = \left(\frac{x-5}{2017} - 1 \right) + \left(\frac{x-7}{2015} - 1 \right)$$

$$\frac{x-2022}{2021} + \frac{x-2022}{2020} = \frac{x-2022}{2017} + \frac{x-2022}{2015}$$

$$\frac{x-2022}{2021} + \frac{x-2022}{2020} - \frac{x-2022}{2017} - \frac{x-2022}{2015} = 0$$

$$(x-2022) \left(\frac{1}{2021} + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2017} - \frac{1}{2015} \right) = 0$$

$$x-2022=0 \quad \left(\text{vì } \frac{1}{2021} + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2017} - \frac{1}{2015} \neq 0 \right)$$

$$x=2022$$

$$\text{Vậy } x=2022$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Bá Thước, tỉnh Thanh Hóa, trường THCS Thị Trấn Càng Nàng 2022 - 2023)

$$\frac{x-10}{30} + \frac{x-14}{43} + \frac{x-5}{95} + \frac{x-148}{8} = 0$$

Tìm x , biết:

Lời giải

$$\frac{x-10}{30} - 3\frac{2}{3} + \frac{x-14}{43} - 2\frac{2}{3} + \frac{x-5}{95} - 1\frac{2}{3} + \frac{x-148}{8} + 6\frac{2}{3} = 0$$

Ta có

$$\Rightarrow \frac{x-100}{30} + \frac{x-100}{43} + \frac{x-100}{95} + \frac{x-100}{8} = 0$$

$$\Rightarrow (x-100) \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{43} + \frac{1}{95} + \frac{1}{8} \right) = 0 \quad \text{mà} \quad \frac{1}{30} + \frac{1}{43} + \frac{1}{95} + \frac{1}{8} > 0$$

Suy ra $x-100=0$

Vậy $x=100$.

Câu 5. (HSG 7 Trường THCS Võ Thị Sáu 2022 - 2023).

Tìm x biết: $\frac{x+2}{327} + \frac{x+3}{326} + \frac{x+4}{325} + \frac{x+5}{324} + \frac{x+349}{5} = 0$

Lời giải

$$\frac{x+2}{327} + \frac{x+3}{326} + \frac{x+4}{325} + \frac{x+5}{324} + \frac{x+349}{5} = 0$$

$$\frac{x+2}{327} + 1 + \frac{x+3}{326} + 1 + \frac{x+4}{325} + 1 + \frac{x+5}{324} + 1 + \frac{x+349}{5} - 4 = 0$$

$$\frac{x+329}{327} + \frac{x+329}{326} + \frac{x+329}{325} + \frac{x+329}{324} + \frac{x+329}{5} = 0$$

$$(x+329) \left(\frac{1}{327} + \frac{1}{326} + \frac{1}{325} + \frac{1}{324} + \frac{1}{5} \right) = 0$$

Vì $\frac{1}{327} + \frac{1}{326} + \frac{1}{325} + \frac{1}{324} + \frac{1}{5} > 0$ nên $x+329=0 \Rightarrow x=-329$

Vậy $x=-329$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\frac{x-10}{30} + \frac{x-14}{43} + \frac{x-5}{95} + \frac{x-148}{8} = 0$;

Lời giải

$$\frac{x-10}{30} + \frac{x-14}{43} + \frac{x-5}{95} + \frac{x-148}{8} = 0$$

$$\frac{(x-100)+90}{30} + \frac{(x-100)+86}{43} + \frac{(x-100)+95}{95} + \frac{(x-100)-48}{8} = 0$$

$$(x-100) \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{43} + \frac{1}{95} + \frac{1}{8} \right) = 0$$

$$x-100=0 \quad \text{do} \quad \frac{1}{30} + \frac{1}{43} + \frac{1}{95} + \frac{1}{8} > 0$$

$$x=100$$

Vậy $x=100$

Dạng 7. Tổng các biểu thức không âm bằng không.

Câu 1. (HSG 7 huyện Yên Phong 2022 - 2023)

Tìm giá trị của biểu thức $P = 28a^2b - 9ab^2$ với $a; b$ thỏa mãn $(a-3)^2 + (3b+1)^{100} \leq 0$.

Lời giải

Do $(a-3)^2 \geq 0$ với mọi a và $(3b+1)^{100} \geq 0$ với mọi b nên

$$(a-3)^2 + (3b+1)^{100} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} (a-3)^2 = 0 \\ (3b+1)^{100} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-3=0 \\ 3b+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$P = 28a^2b - 9ab^2 = ab(28a - 9b) = 3 \cdot \frac{-1}{3} \left(28 \cdot 3 - 9 \cdot \frac{-1}{3} \right) = -87$$

Khi đó

Vậy $P = -87$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2022 - 2023).

Cho 2 số $x; y$ thỏa mãn $(x + 2022)^{2024} + |y - 2023| = 0$. Tính $D = x + y$

Lời giải

Vì $(x + 2022)^{2024} \geq 0$ với mọi x

$|y - 2023| \geq 0$ với mọi x

Nên $(x + 2022)^{2024} + |y - 2023| = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x + 2022)^2 = 0 \\ |y - 2023| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2022 = 0 \\ y - 2023 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2022 \\ y = 2023 \end{cases}$

Vậy $x = -2022$ và $y = 2023$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Lập Thạch, Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Cho các số $x; y$ thỏa mãn $|2x - 1| + (y - 2)^{2022} \leq 0$. Tính giá trị của biểu thức $B = 12x^2y + 3xy^2$.

Lời giải

Ta có $|2x - 1| + (y - 2)^{2022} \leq 0$

Vì $|2x - 1| \geq 0; (y - 2)^{2022} \geq 0$

$\begin{cases} |2x - 1| = 0 \\ (y - 2)^{2022} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,5 \\ y = 2 \end{cases}$

Thay $x = 0,5; y = 2$ ta có $B = 12 \cdot 0,5^2 \cdot 2 + 3 \cdot 0,5 \cdot 2^2 = 6 + 6 = 12$

Vậy giá trị của biểu thức $B = 12$ tại $x; y$ thỏa mãn $|2x - 1| + (y - 2)^{2022} \leq 0$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Ứng Hòa 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức $B = 21x^2y + xy^2$ với $x; y$ thỏa mãn điều kiện: $(x - 2)^2 + (2y - 1)^{2024} \leq 0$

Lời giải

Ta có: $(x - 2)^2 + (2y - 1)^{2024} \leq 0$

$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

$B = 21 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{85}{2}$

Thay vào biểu thức ta được

Câu 5. (HSG 7 huyện Diễn Châu 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên $x; y$ biết: $7(x - 2023)^2 = 23 - y^2$.

Lời giải

Vì $x; y$ là các số tự nhiên nên $(x - 2023)^2; y^2$ là các số chính phương nên không âm do đó $23 - y^2 \leq 23 \Rightarrow 0 \leq 7(x - 2023)^2 \leq 23$

$$\begin{cases} (x-2023)^2=0 \\ (x-2023)^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2023 \\ x=2024 \end{cases}$$

Do đó

+ Với $x=2023$ thì không có giá trị của y tự nhiên thỏa mãn.

+ Với $x=2024$ thì $y^2=16 \Rightarrow y=4$.

Vậy $(x,y)=(2024;4)$.

Dạng 10. Tìm ẩn với điều kiện nguyên.

Câu 1. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên $\overline{ab}$ sao cho $\overline{ab}^2=(a+b)^3$.

Lời giải

Do $\overline{ab}^2=(a+b)^3$ nên suy ra $(a+b)^3$ là số chính phương $\Rightarrow (a+b)$ cũng là số chính phương

$(a+b)=k^2$ (với $k \in \mathbb{N}$) nên $\overline{ab}^2=k^6 \Rightarrow \overline{ab}=k^3$ mà $10 \leq \overline{ab} \leq 99 \Rightarrow 10 \leq k^3 \leq 99$

Từ đó suy ra $k \in \{3,4\} \Rightarrow \overline{ab} \in \{27;64\}$.

Thử lại:

+ $\overline{ab}=27$ nên $a=2, b=7$ thỏa mãn $\overline{ab}^2=(a+b)^3$.

+ $\overline{ab}=64$ nên $a=6, b=4$ không thỏa mãn $\overline{ab}^2=(a+b)^3$.

Vậy $\overline{ab}=27$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2xy - y = 2x + 2$.

Lời giải

Ta có:

$$2xy - y = 2x + 2 \Rightarrow 2xy - y - 2x - 2 = 0 \Rightarrow 2xy - 2x - y + 1 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2x(y-1) - (y-1) - 3 = 0 \Rightarrow (y-1)(2x-1) = 3$$

Do $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (y-1), (2x-1)$ là các ước nguyên của 3

Ta có bảng sau

$(2x-1)$	- 3	- 1	1	3
$(y-1)$	- 1	- 3	3	1
x	- 1	0	1	2
y	0	- 2	4	2
	Thoả mãn	Thoả mãn	Thoả mãn	Thoả mãn

Vậy các cặp (x,y) thỏa mãn là $(-1;0), (0;-2), (1;4), (2;2)$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y biết $2xy - 6x - y = 21$.

Lời giải

Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết $2xy - 6x - y = 21$

Ta có :

$$2xy - 6x - y = 21$$

$$(2xy - 6x) - (y - 3) = 24$$

$$2x(y - 3) - (y - 3) = 24$$

$$(y - 3)(2x - 1) = 24$$

Mà $x, y \in \mathbb{Z}$

Nên

$y - 3$	24	8	- 24	- 8
y	27	11	- 21	- 5
$(2x - 1)$	1	3	- 1	- 3
x	1	2	0	- 1

Vậy các cặp $(x; y)$ thỏa mãn là $(- 1; - 5); (0; - 21); (1; 27); (2; 11)$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Đô Lương 2022 - 2023)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - 3xy + 2 = y$.

Lời giải

Ta có: $x^2 - 3xy + 2 = y \Rightarrow x^2 + 2 = y(3x + 1) \Rightarrow y = \frac{x^2 + 2}{3x + 1}$

$$9y = \frac{9x^2 + 18}{3x + 1} = \frac{9x^2 - 1 + 19}{3x + 1} = 3x - 1 + \frac{19}{3x + 1}$$

Mà $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{19}{3x + 1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (3x + 1)$ là ước của 19

Hay $3x + 1 = 19$ hoặc $3x + 1 = - 19$ hoặc $3x + 1 = 1$ hoặc $3x + 1 = - 1$.

Suy ra $x = 6$ (nhận) hoặc $x = -\frac{20}{3}$ (loại) hoặc $x = 0$ (nhận) hoặc $x = -\frac{2}{3}$ (loại).

Với $x = 6 \Rightarrow y = 2$.

Với $x = 0 \Rightarrow y = 2$.

Vậy có 2 cặp số $(x; y)$ thỏa là $(0; 2)$ và $(6; 2)$.

cặp $(x; y)$ thỏa mãn là $(- 1; - 5); (0; - 21); (1; 27); (2; 11)$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Nghi Sơn 2022 - 2023)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $3x - y + xy - 10 = 0$.

Lời giải

Ta có: $3x - y + xy - 10 = 0$

$$\Rightarrow xy + 3x - y - 10 = 0$$

$$\Rightarrow x(y + 3) - y - 3 - 7 = 0$$

$$\Rightarrow x(y + 3) - (y + 3) = 7 \quad (1)$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 1 \in \mathbb{Z}; y + 3 \in \mathbb{Z}$ nên từ (1) $\Rightarrow 7 : x - 1 \Rightarrow x - 1 \in \{ \pm 1; \pm 7 \}$

Ta có bảng giá trị sau:

$x - 1$	1	- 1	7	- 7
$y + 3$	7	- 7	1	- 1
x	2	0	8	- 6
y	4	- 10	- 2	- 4

Vậy $(x; y) \in \{(2; 4), (0; - 10), (8; - 2), (- 6; - 4)\}$

Câu 6. (HSG 7 huyện Vĩnh Yên 2022 - 2023)

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $x + y + z = xyz$

Lời giải

Vì x, y nguyên dương nên giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$

$$1 = \frac{1}{yz} + \frac{1}{yx} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2} \Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow x = 1$$

Theo bài ra ta có: $1 + y + z = yz \Rightarrow y - yz + 1 + z = 0$

$$\Rightarrow y(1 - z) - (1 - z) + 2 = 0 \Rightarrow (y - 1)(z - 1) = 2$$

$$+) y - 1 = 1 \Rightarrow y = 2; z - 1 = 2 \Rightarrow z = 3$$

$$+) y - 1 = 2 \Rightarrow y = 3; z - 1 = 1 \Rightarrow z = 2 \quad y - 1 = 1 \Rightarrow y = 2; z - 1 = 2 \Rightarrow z = 3$$

Vậy có hai cặp nghiệm nguyên thỏa mãn $(1, 2, 3), (1, 3, 2)$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Hà Trung 2022 - 2023)

Tìm giá trị nguyên dương của $x; y$ sao cho: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5x + 5y = xy \quad (x > 0; y > 0)$$

$$\Rightarrow xy - 5x - 5y = 0$$

$$\Rightarrow x(y - 5) - 5(y - 5) = 25$$

$$\Rightarrow (x - 5)(y - 5) = 25$$

Vì x, y nguyên dương nên $x - 5, y - 5$ là các ước của 25.

$$\text{Ta có: } U(25) = \{\pm 1; \pm 5; \pm 25\}$$

Ta có bảng giá trị:

$x - 5$	1	- 1	5	- 5	25	- 25
$y - 5$	25	- 25	5	- 5	1	- 1
x	6	4	10	0	30	- 20
y	30	- 20	10	0	6	4

Vì x, y nguyên dương nên ta có: $(x, y) \in \{(6; 30); (10; 10); (30; 6)\}$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Lập Thạch, Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x và y biết: $\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{40}{8x} + \frac{2xy}{8x} = \frac{x}{8x}$$

$$40 + 2xy = x$$

$$40 = x(1 - 2y)$$

Suy ra x và $1 - 2y$ là ước của 40 ta có

$$40 = 1.40 = (-1).(-40) = 2.20 = (-2).(-20) = 5.8 = (-5).(-8)$$

mà $1 - 2y$ là số lẻ nên ta có các trường hợp sau

$$\text{TH1: } \begin{cases} 1 - 2y = 1 \\ x = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 40 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 1 - 2y = -1 \\ x = -40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -40 \end{cases}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} 1 - 2y = 5 \\ x = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 8 \end{cases}$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} 1 - 2y = -5 \\ x = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = -8 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (x; y) = \{(40; 0), (-40; 1), (8; -2), (-8; 3)\}$$

Câu 9. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2022 - 2023)

Cho các số nguyên $x; y$ thỏa mãn $|x - 1| + y^2 = 1$ và $|y| < |x|$. Tính giá trị biểu thức $M = (x + y - 1)^{2023}$

Lời giải

Do $x, y \in \mathbb{Z}; |x - 1| \geq 0; y^2 \geq 0$ và $|x - 1| + y^2 = 1$ nên ta có các trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} |x - 1| = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 1 \end{cases} \quad (\text{Loại vì không thỏa mãn điều kiện } |y| < |x|)$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} |x - 1| = 1 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \quad (\forall |y| < |x|)$$

Thay $x = 2; y = 0$ vào biểu thức $M = (2 + 0 - 1)^{2023} = 1^{2023} = 1$

Câu 10. (HSG 7 huyện Yên Định 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $|x + 2| + |x - 1| = 3 - (y + 2)^2$

Lời giải

$$\forall |x + 2| + |1 - x| \geq |x + 2 + 1 - x| = 3$$

$$\text{Mặt khác: } 3 - (y + 2)^2 \leq 3$$

$$|x + 2| + |x - 1| = 3 - (y + 2)^2 \Rightarrow \begin{cases} |x + 2| + |x - 1| = 3 \\ 3 - (y + 2)^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (x; y) = \{(-2; -2), (-1; -2), (0; -2), (1; -2)\}$$

Câu 11. (HSG 7 huyện Yên Phong 2022 - 2023)

Tìm tất cả các giá trị $x; y$ nguyên thỏa mãn: $5x^2 - 2xy + y^2 = 17$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 4 \equiv -1 \pmod{5} \Rightarrow 4^{2(n+1)} \equiv (-1)^{2(n+1)} \pmod{5}$$

$$\Rightarrow 4^{2(n+1)} \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 4^{2(n+1)} - 1 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow (4^{2(n+1)} - 1) : 5 \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } 4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 4^{2(n+1)} \equiv (1)^{2(n+1)} \pmod{3} \Rightarrow 4^{2(n+1)} - 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow (4^{2(n+1)} - 1) : 3 \quad (2)$$

$$\text{Mà: } 3 \text{ và } 5 \text{ là hai số nguyên tố cùng nhau} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) suy ra } (4^{2(n+1)} - 1) : 15$$

$$\text{Ta có: } 5x^2 - 2xy + y^2 = 17 \Rightarrow (x - y)^2 + 4x^2 = 17 \Rightarrow (x - y)^2 = 17 - 4x^2 \quad (*)$$

$$\text{Ta có: } (x - y)^2 \geq 0 \quad \forall x, y \Rightarrow 17 - 4x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq \frac{17}{4}$$

$$\text{Mà } x \text{ là số nguyên nên } x^2 \in \{0; 1; 4\}$$

$$+ \text{ Với } x^2 = 0 \Rightarrow (x - y)^2 = 17 \text{ (loại)}$$

$$+ \text{ Với } x^2 = 1 \Rightarrow (x - y)^2 = 13 \text{ (loại)}$$

$$+) \text{ Với } x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2. \text{ Khi đó } x^2 = 4 \Rightarrow (x - y)^2 = 1$$

$$\text{Với } x = 2 \Rightarrow (2 - y)^2 = 1 \Rightarrow 2 - y = 1 \text{ hoặc } 2 - y = -1$$

$$2 - y = 1 \Rightarrow y = 1$$

+)

$$+) 2 - y = -1 \Rightarrow y = 3$$

$$\text{Với } x = -2 \Rightarrow (-2 - y)^2 = 1 \Rightarrow (2 + y)^2 = 1 \Rightarrow 2 + y = 1 \text{ hoặc } 2 + y = -1$$

$$2 + y = 1 \Rightarrow y = -1$$

+)

$$+) 2 + y = -1 \Rightarrow y = -3$$

$$\text{Vậy: } (x; y) \in \{(2; 1); (2; 3); (-2; -1); (-2; -3)\}$$

Câu 12. (HSG 7 thị xã Tân Kỳ 2022 - 2023)

Lời giải

$$\text{Tìm } x, y \in \mathbb{N} \text{ biết } 6x^2 + 5y^2 = 104$$

$$\text{vì } x \in \mathbb{N} \text{ nên } 6x^2 \geq 0 \Rightarrow 5y^2 \leq 104 \Rightarrow y^2 \leq \frac{104}{5} \Rightarrow y \leq 4 \quad (1)$$

$$\text{ta thấy } 104 : 2; 6x^2 : 2 \text{ và } 6x^2 + 5y^2 = 104 \text{ nên } y : 2 \Rightarrow y \text{ chẵn} \quad (2)$$

$$6x^2 : 3; 104 \not: 3 \text{ nên } 5y^2 \not: 3 \Rightarrow y \not: 3 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1); (2) và (3) suy ra } y \in \{2; 4\}$$

$$\text{Với } y = 2 \text{ thì } 6x^2 + 5 \cdot 2^2 = 104 \Rightarrow x^2 = 14 \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$$

$$\text{Với } y = 4 \text{ thì } 6x^2 + 5 \cdot 4^2 = 104 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{Vậy } x = 2; y = 4 \text{ thì } 6x^2 + 5y^2 = 104$$

Câu 13. (HSG 7 thành phố Ninh Bình 2022 - 2023)

$$\text{Tìm số tự nhiên } n \text{ và chữ số } a \text{ biết rằng: } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \overline{aaa}$$

Lời giải

$$1 + 2 + 3 + \frac{1}{4} + n = \overline{aaa}$$

$$\text{Đ } n(n+1) : 2 = 111.a$$

$$\text{Đ } n(n+1) = 37.2.3.a \quad (1)$$

Ta có vế trái ⁽¹⁾ là tích hai số tự nhiên liên tiếp nên $2.3.a = 36$ suy ra được $a = 6$ và $n = 36$.

Câu 14. (HSG 7 huyện Bá Thước, tỉnh Thanh Hóa, trường THCS Thị Trấn Càng Nàng 2022 - 2023).

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - 3xy + 2 = y$.

Lời giải

$$\text{Ta có } x^2 - 3xy + 2 = y \Rightarrow 9x(x - 3y) + 3(x - 3y) - 3x + 18 = 0$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 27xy - 9y + 18 = 0$$

$$\Rightarrow 3(3x+1)(x - 3y) - (3x+1) + 19 = 0$$

$$\Rightarrow (3x+1)(3x - 9y - 1) = -19$$

Do x, y nguyên nên $3x + 1$ và $3x - 9y - 1$ là ước của 19.

Mà $3x + 1$ là số chia 3 dư 1 nên $3x + 1$ chỉ nhận 1 hoặc 19

Giải ra ta được $(x; y) = (0; -2); (6; 2)$

Câu 15. (HSG 7 huyện Hoằng Hóa, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tìm x, y nguyên biết $xy + 3x - y - 10 = 0$.

Lời giải

$$3x - y + xy - 10 = 0 \Rightarrow 3x + (xy - y) = 10$$

Ta có:

$$\Rightarrow 3x + y(x - 1) = 10 \Rightarrow (3x - 3) + y(x - 1) = 10 - 3$$

$$\Rightarrow 3(x - 1) + y(x - 1) = 7 \Rightarrow (x - 1)(y + 3) = 7$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 1; y + 3 \in \mathbb{Z}$. Do đó: $x - 1; y + 3 \in \{1, 7\}$

Mà: $\{1, 7\} = \{-7; -1; 1; 7\}$

Ta có bảng:

$x - 1$	- 7	- 1	1	7
$y + 3$	- 1	- 7	7	1
x	- 6	0	2	8
y	- 4	- 10	4	- 2
KL	Chọn	Chọn	Chọn	Chọn

Vậy: $(x; y) \in \{(-6; -4); (0; -10); (2; 4); (8; -2)\}$

Câu 16. (HSG 7 quận Hà Đông, tỉnh Hà Nội 2022 - 2023)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2y + 2xy - 27x + y = 0$.

Lời giải

$$x^2y + 2xy - 27x + y = 0 \Rightarrow (x+1)^2y = 27x \Rightarrow 27x : (x+1)^2$$

Ta có:

$$\text{mà } (x, x+1) = 1 \Rightarrow 27 : (x+1)^2$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 \in U(27) \text{ mà } (x+1)^2 \text{ là số chính phương} \Rightarrow (x+1)^2 \in [1;9] \Rightarrow x+1 \in \{-3; -1; 1; 3\}$$

$$\Rightarrow x \in \{-4; -2; 0; 2\}$$

Ta có bảng sau:

x	- 4	- 2	0	2
y	- 12	- 54	0	6

Vậy phương trình có nghiệm: $(x; y) \in \{(-4; -12); (-2; -54); (0; 0); (-2; 6)\}$

Câu 17. (HSG 7 Trường THCS Võ Thị Sáu 2022 - 2023)

Tìm $x; y$ nguyên biết rằng: $\frac{x}{8} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{8} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{x-2}{8} = \frac{1}{y} \Rightarrow (x-2).y = 8$

Vì $x; y$ nguyên nên $x-2; y$ nguyên $\Rightarrow x-2; y \in U(8) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$

Ta có bảng:

$x-2$	1	- 1	- 2	2	4	- 4	8	- 8
y	8	- 8	- 4	4	2	- 2	1	- 1
x	3	1	0	4	6	- 2	10	- 6

Vậy các cặp $x; y$ thỏa mãn là: $(3; 8); (1; -8); (4; 4); (0; -4); (6; 2); (-2; -2); (10; 1); (-6; -1)$

Câu 18. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^3 - xy + 1 = 2y - x$

Lời giải

$$x^3 - xy + 1 = 2y - x$$

$$\Rightarrow x^3 + x + 1 = xy + 2y$$

$$\Rightarrow x^3 + x + 1 = y(x+2)$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^3 + x + 1}{x+2}$$

Vì x, y là các số nguyên nên:

$$(x^3 + x + 1) : (x+2)$$

$$\Rightarrow (x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + 5x + 10 - 9) : (x+2)$$

$$\Rightarrow [x^2(x+2) - 2x(x+2) + 5(x+2) - 9] : (x+2)$$

$$\Rightarrow [(x+2)(x^2 - 2x + 5) - 9] : (x+2)$$

$$\text{Vì } (x+2)(x^2 - 2x + 5) : (x+2)$$

$$\Rightarrow 9 : (x+2)$$

$$\Rightarrow (x+2) \in \{1; 3; 9; -1; -3; -9\}$$

$$\Rightarrow x \in \{-1; 1; 7; -3; -5; -11\} \quad (\text{tmđk})$$

$$* \text{ Với } x = -1 \text{ thì } y = \frac{(-1)^3 + (-1) + 1}{(-1) + 2} = -1 \quad (\text{tmđk})$$

* Với $x=1$ thì $y = \frac{1^3 + 1 + 1}{1 + 2} = 1$ (tmđk)

* Với $x=7$ thì $y = \frac{7^3 + 7 + 1}{7 + 2} = 39$ (tmđk)

* Với $x=-5$ thì $y = \frac{(-5)^3 + (-5) + 1}{(-5) + 2} = 43$ (tmđk)

* Với $x=-11$ thì $y = \frac{(-11)^3 + (-11) + 1}{(-11) + 2} = 149$ (tmđk)

Câu 19. (HSG 7 huyện Thọ Xuân 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $\left| (x-y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) \right| = xy + y^2 - 4y$

Lời giải

$$\left| (x-y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) \right| = xy + y^2 - 4y \quad (1)$$

Ta có:

Mà $\left| (x-y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) \right| \geq 0$ nên suy ra $xy + y^2 - 4y \geq 0$

Do đó $(x-y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) \geq 0$ vì $(x-y)^2 \geq 0$ với mọi giá trị của x, y .

Khi đó, từ (1) suy ra:

$$(x-y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) = xy + y^2 - 4y$$

$$\Rightarrow (x-y)^2 + xy + y^2 - 4y = 0$$

$$\Rightarrow (x-y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) - (xy + y^2 - 4y) = 0$$

Ta lại có: $(x-y)^2 + xy + y^2 - 4y \geq 0$ với mọi giá trị của x, y .

Do đó $(x-y)^2 + xy + y^2 - 4y = 0$ khi $(x-y)^2 = 0$ và $xy + y^2 - 4y = 0$

Từ $(x-y)^2 = 0$ suy ra: $x = y$

Thay $x = y$ vào $xy + y^2 - 4y = 0$, ta được: $y^2 + y^2 - 4y = 0$

$$\Rightarrow 2y^2 - 4y = 0 \Rightarrow 2y(y-2) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ hoặc } y = 2.$$

Vậy $(x; y) \in \{(0; 0); (2; 2)\}$

Câu 20. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2022 - 2023)

Tìm cặp số (x, y) nguyên thỏa mãn: $x^2 - x(y+5) = -4y - 9$.

Lời giải

Ta có: $x^2 - x(y+5) = -4y - 9 \Rightarrow x^2 - 5x + 9 = xy - 4y \Rightarrow x^2 - 5x + 9 = y(x-4)$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 9 : x-4 \Rightarrow x(x-4) - (x-4) + 5 : x-4 \Rightarrow 5 : x-4 \Rightarrow x-4 \in \{\pm 1; \pm 5\}$$

$$\Rightarrow x \in \{-1; 3; 5; 9\}$$

Ta có bảng sau:

x	-1	3	5	9
y	-3	-3	9	9

Kết luận	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy $(x, y) \in \{(-1; -3), (3; -3), (5; 9), (9; 9)\}$

Cách khác: Có thể viết đẳng thức đã cho về dạng: $(x - 4)(x - y - 1) = -5$

$x - 4$	- 5	- 1	1	5
x	- 1	3	5	9
$x - y - 1$	1	5	- 5	- 1
y	- 3	- 3	9	9
Kết luận	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy $(x, y) \in \{(-1; -3), (3; -3), (5; 9), (9; 9)\}$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
<https://www.vnteach.com>