

SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THÀNH A THIÊN HƯNG

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BỒI DƯỠNG PTTH
NĂM HỌC 1999-2000.

ĐỀ CHÍNH THỨC
SBD:

MÔN: TOÁN BỒI DƯỠNG A VÒNG 1.
(180 phút, không kể thời gian giao đề)

Bài 1: (2.5 điểm) Cho phương trình:

$$\sqrt[5]{x^2 - 34x + a} - \sqrt[4]{(x-1)(x-33)} = 1$$

a/ Giải phương trình khi $a = 64$.

b/ Tìm a để phương trình có nghiệm.

Bài 2: (2.5 điểm) Cho hai số a_1, b_1 với $0 < b_1 = \sqrt{a_1} < 1$. Lập hai dãy số $(a_n), (b_n)$ với $n = 1, 2, \dots$ theo quy tắc sau:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} \cdot b_n}$$

Tính: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Bài 3: (2.5 điểm) Trong không gian cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng và ba điểm A, B, C (khác điểm O) lần lượt trên Ox, Oy, Oz .

Dãy số (a_n) là một cấp số cộng có $a_1 > 0$ và công sai $d > 0$. Với mọi n nguyên dương, trên các tia Ox, Oy, Oz theo thứ tự lấy các điểm A_n, B_n, C_n sao cho $OA = a_n \cdot OA_n$; $OB = a_{n+1} \cdot OB_n$; $OC = a_{n+2} \cdot OC_n$.

Chứng minh các mặt phẳng (A_n, B_n, C_n) luôn luôn đi qua một đường thẳng cố định.

Bài 4: (2.5 điểm) Tập hợp M gồm m điểm phân biệt trên một đường thẳng sao cho với mọi điểm X thuộc M tồn tại đúng 4 điểm thuộc M có khoảng cách đến X bằng 1.

Hỏi tập hợp M có thể chứa ít nhất là bao nhiêu phần tử?

SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THÀNH A THIÊN HƯNG

KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẮC PHƯƠNG
NĂM HỌC 1999-2000.

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI MÔN TOÁN
BẮC PHƯƠNG A – VÒNG 1.

Bài 1: (2.5 điểm)

Câu a: (2 điểm)

+(0.25 điểm) Đặt $u = \sqrt[5]{x^2 - 34x + a}$ và $v = \sqrt[4]{(x-1)(x-33)}$

+(0.25 điểm) Ta có hệ
$$\begin{cases} u^5 - (u-1)^4 = a - 33 \\ v = u - 1 \geq 0 \end{cases} \quad (I).$$

+(1.00 điểm) Hàm số $f(u) = u^5 - (u-1)^4$ có $f'(u) = 5u^4 - 4(u-1)^3 > 0 \forall u \in [1; +\infty)$, nên $f(u)$ tăng trên $[1; +\infty)$.

+(0.50 điểm) $a = 64$, $f(u) = 31 = f(2)$ và $f(u)$ tăng nên hệ (I) chỉ có một nghiệm: $(u = 2, v = 1)$ từ đó ta có nghiệm của phương trình là: $x = 17 \pm \sqrt{257}$.

Câu b: (0.5 điểm)

+ $f(u)$ tăng trên $[1; +\infty)$ mà $f(1) = 1$ nên phương trình có nghiệm khi $a - 33 \geq 1$ hay $a \geq 34$.

Bài 2: (2.5 điểm)

+(0.50 điểm) Tính a_2, b_2 với $0 < b_1 = \sqrt{a_1} < 1$ ta có thể chọn $0 < a < \frac{\pi}{2}$ sao cho: $b_1 = \cos a$,

suy ra $a_1 = \cos^2 a$.

$$a_2 = \frac{1}{2}(\cos^2 a + \cos a) = \frac{1}{2}\cos a(\cos a + 1) = \cos a \cdot \cos^2 \frac{a}{2}$$

$$b_2 = \sqrt{\cos a \cos^2 \frac{a}{2} \cos a} = \cos a \cos \frac{a}{2}$$

+(0.75 điểm) Bằng quy nạp, chứng minh được:

$$a_n = \cos a \cos \frac{a}{2} \dots \cos \frac{a}{2^{n-1}} \cos \frac{a}{2^{n-1}} \quad (1) \quad b_n = \cos a \cos \frac{a}{2} \dots \cos \frac{a}{2^{n-1}} \quad (2)$$

+(0.75 điểm) Nhân hai vế của (1) và (2) cho $\sin \frac{a}{2^{n-1}}$ và áp dụng công thức $\sin 2a$ được:

$$a_n = \frac{\sin 2a \cdot \cos \frac{a}{2^{n-1}}}{2^n \cdot \sin \frac{a}{2^{n-1}}}, \quad b_n = \frac{\sin 2a}{2^n \cdot \sin \frac{a}{2^{n-1}}}.$$

+(0.50 điểm) Tính giới hạn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\sin 2a}{2a}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\sin 2a}{2a}$$

Bài 3: (2.5 điểm)

+(0.50 điểm) Phát biểu và chứng minh mệnh đề:

Nếu hai điểm X, Y phân biệt. Điểm K nằm trên và đường thẳng S thuộc đường thẳng XY là điểm tiếp xúc của hai đường x, y thì:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OS} = x\overrightarrow{OX} + y\overrightarrow{OY} \\ x + y = 1 \end{cases}, \text{ với } i \text{ tùy ý.}$$

+(0.25 đ) Từ giả thiết: (a_n) là cấp số cộng công sai $d > 0$ nên: $a_{n+1} = a_n + d \frac{a_{n+1}}{d} - \frac{a_n}{d} = 1$.

+(0.75 đ) áp dụng nhữn xét trên, ta có:

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a_{n+1}}{d} \overrightarrow{OB_n} - \frac{a_n}{d} \overrightarrow{OA_n} \text{ thì } I \in A_n B_n.$$

$$\text{và } \overrightarrow{OA} = a_n \overrightarrow{OA_n}; \overrightarrow{OB} = a_{n+1} \overrightarrow{OB_n} \text{ (do } a_n, a_{n+1} > 0)$$

$$\text{Thế vào trên ta được: } \overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{OB}}{d} - \frac{\overrightarrow{OA}}{d} = \frac{1}{d} \overrightarrow{AB}, \forall n=1,2,\dots \text{ suy ra } I \text{ cố định, nên đường thẳng}$$

$A_n B_n$ luôn đi qua một điểm cố định I .

+(0.50 đ) Từ giả thiết, chứng minh được:

- $B_n B_n$ luôn đi qua một điểm cố định J xác định bởi: $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{d} \overrightarrow{BC}$.

- $A_n C_n$ luôn đi qua một điểm cố định K xác định bởi: $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2d} \overrightarrow{AC}$

Vậy các đường thẳng $A_n B_n, B_n C_n, A_n C_n$ luôn đi qua ba điểm I, J, K cố định.

+(0.50 đ) Chứng minh ba điểm thẳng hàng:

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{OI} = \frac{1}{d} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{d} \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OK} = \frac{1}{2d} \overrightarrow{AC}.$$

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{OK} = \frac{1}{2d} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2d} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2d} (d\overrightarrow{OI} + d\overrightarrow{OJ}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ})$$

Vậy I, J, K thẳng hàng. Điều này chứng tỏ một phnng $A_n B_n C_n$ luôn đi qua một đường thẳng cố định.

Bài 4: (2.5 điểm)

+(0.50 đ) Rõ ràng có ít nhất hai điểm P, Q thuộc $\mathcal{M}$ sao cho $PQ \neq 1$.

Ký hiệu: $M_P = \{X \in \mathcal{M} / PX = 1\}$. Từ giả thiết $|M_P| = 4$ ta có: $|M_P \cap M_Q| \leq 2$.

Nếu tồn tại P, Q sao cho $|M_P \cap M_Q| \leq 1$ thì $\mathcal{M}$ chứa ít nhất 9 điểm.

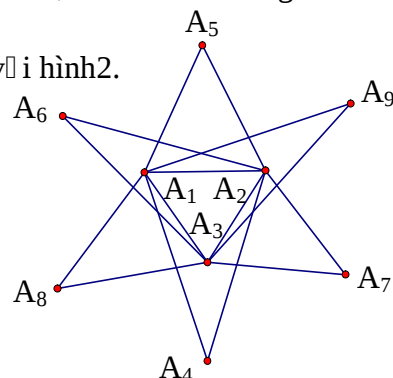
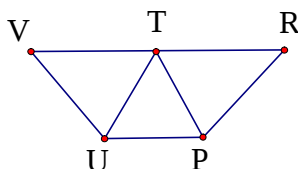
+(1.50 đ) Trường hợp hai điểm P, Q sao cho $PQ \neq 1$ và $|M_P \cap M_Q| = 2$.

Khi đó $M_P \cap M_Q = \{R, S\}$, lúc đó $M_P = \{R, S, T, U\}$ và $M_Q = \{R, S, V, W\}$ và giả sử $\mathcal{M} = \{P, Q, R, S, T, U, V, W\}$ ta có $TQ \neq 1, UQ \neq 1, VP \neq 1, WP \neq 1$.

- Nếu TR, TS, UR, US khác 1: suy ra $M_T \cap M_Q = M_U \cap M_Q = \{V, W\}$ suy ra T hay U trùng với Q , vô lý.
- Nếu TR, TS, UR, US có một số bằng 1: Không giả thiết tính tổng quát, giả sử $TV = 1$ lúc đó $TS \neq 1$ và $TV = 1$ hay $TW = 1$. Giả sử $TV = 1$ lúc đó $TW \neq 1$ suy ra $TU = 1$, và $M_T = \{P, R, U, V\}$ và $M_U = \{P, T, V, W\}$ lúc đó UTV, RPT, UTV là các tam giác đều cạnh 1, ta có hình 1. Điều này mâu thuẫn vì $VR > 2$.

+(0.50 đ) Vậy $\mathcal{M}$ chứa ít nhất là 9 điểm. Dấu bằng xảy ra với hình 2.

Vậy $\mathcal{M}$ có thể chứa ít nhất là 9 điểm.



SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC PTTH
NĂM HỌC 1999-2000.

ĐỀ CHÍNH THỨC
SBD:

MÔN: TOÁN BẬC A VÒNG 2.
(180 phút, không kể thời gian giao đề)

Bài 1: (2.5 điểm) Chứng minh rằng nếu 3 số thực a, b, c thỏa mãn: $|a| + |b| + |c| \leq \sqrt{2}$ thì hàm số
 $y = \frac{x^5}{5} + a \frac{x^4}{4} + b \frac{x^3}{3} + c \frac{x^2}{2} + x$ không có cực trị.

Bài 2: (2.5 điểm) Ký hiệu H_n là tập hợp các đa thức bậc n dạng:

$$f(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$$\text{Chứng minh: } \min_{f \in H_n} \left\{ \max_{x \in [-1;1]} |f(x)| \right\} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Bài 3: (2.5 điểm) Cho tam giác ABC có góc A nhọn. M là điểm di động trên BC. P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên AB, AC.

Tìm tập hợp các điểm S không phụ thuộc mặt phẳng (ABC) sao cho:

$$g(SA, PQ) = g(SP, AQ) = g(SQ, AP).$$

(ký hiệu $g(a,b)$ là góc giữa hai đường thẳng a, b)

Bài 4: (2.5 điểm) Cho parabol (P): $y^2 = 2x$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$.

Chứng minh rằng có vô số tam giác với ba đỉnh trên (P) mà các cạnh tiếp xúc với (C).

SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THÀNH A THIÊN HUỖ

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC PTTH
NĂM HỌC 1999-2000.

HỌC SINH NGÀNH N CHỌN M ĐỀ THI MÔN TOÁN
BẬC NG A – VÒNG 2.

Bài 1: (2.5 điểm)

+(0.25 đ) $f(x) = y' = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$, với $|a| + |b| + |c| \leq \sqrt{2}$.

+(0.50 đ) $|f(x)| \geq |x^4 + 1| - |ax^3 + bx^2 + cx| \geq x^4 + 1 - |x|(|a|x^3 + |b|x^2 + |c||x|)$

+(1 đ) Nếu $|x| \leq 1$ thì $|x^k| \leq 1$ ($k \in \mathbb{Z}^+$) do đó:

$$(|a||x^3| + |b||x^2| + |c||x|) \leq |a| + |b| + |c| \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Suy ra: } -|x|(|a|x^3 + |b|x^2 + |c||x|) \geq -\sqrt{2}|x|$$

$$\text{Suy ra: } |f(x)| \geq x^4 - \sqrt{2}|x| + 1 \text{ mà } \min_{0 \leq u \leq 1} (u^4 - 2\sqrt{2}u + 1) = \frac{1}{4} > 0$$

$$\text{Nên } |f(x)| > 0 \quad \forall x, |x| \leq 1.$$

+(0.50 đ) Nếu $|x| > 1$. Đặt $t = \frac{1}{x}$ thì $|t| < 1$. Theo trên ta suy ra được:

$$|f(x)| = \frac{1}{t^4} |1 + at + bt^2 + ct^3 + t^4| > 0$$

+(0.25 đ) Tóm lại $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị.

Bài 2: (2.5 điểm)

+(0.25 đ) Xét đa thức Trêbô sép $T(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$.

+(0.50 đ) Chứng minh $T(x)$ là đa thức bậc n có hệ số bậc n là 2^{n-1} .

$$\text{Chứng minh bằng quy nạp đưa vào công thức: } \cos nt + \cos(n-1)t = 2\cos t \cdot \cos(n-1)t.$$

+(0.50 đ) Do đó: $\frac{T(x)}{2^{n-1}} \in H_n$. Ta có $\max_{x \in [-1,1]} \left| \frac{T(x)}{2^{n-1}} \right| = \frac{1}{2^{n-1}}$. Nếu t là nghiệm của $f(x) \in H_n$ sao cho $f(x) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$,

$$\forall x \in [-1,1]. \text{ Lúc đó ta xét } g(x) = f(x) - \frac{T(x)}{2^{n-1}} \text{ đa thức bậc nhỏ hơn hay bằng } n-1, g(x) \text{ đồng nhất}$$

$$n+1 \text{ lần thì các điểm } \cos k\pi/n, k = 0, n.$$

+(0.50 đ) Do đó $\max f(x) \geq \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \forall y \min_{f \in H_n} \left\{ \max_{x \in [-1,1]} |f(x)| \right\} = \frac{1}{2^{n-1}}.$

Bài 3: (2.5 điểm).

+(0.75 đ) Với tứ diện ABCD ta chứng minh:

$$g(AB, CD) = g(AD, BC) = g(AC, BD) \Leftrightarrow AB \perp CD \text{ và } AD \perp BC, AC \perp BD.$$

Thật vậy ta có đẳng thức: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Từ đó suy ra:

$$g(AB, CD) = g(AD, BC) = g(AC, BD) = \varphi \text{ thì } (AB \cdot CD + \varepsilon_1 AC \cdot DB + \varepsilon_2 AD \cdot BC) \cos \varphi = 0$$

Với $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ nhận giá trị 1 hay -1. Mặt khác ta có đẳng thức đối với các cặp cạnh là:

$$AB \cdot CD + \varepsilon_1 AC \cdot DB + \varepsilon_2 AD \cdot BC \neq 0, \text{ nên } \varphi = 90^\circ.$$

+(0.50 đ) $g(SA, PQ) = g(SP, AQ) = g(SP, AQ) = g(SQ, AP) = 90^\circ$ khi và chỉ khi hình chiếu S lên (ABC) là trọng tâm tam giác APQ.

+(1 đ) Đặt $BM/BC = t$. Gọi E, F là hình chiếu của B và C lên AC, AB. Ta có:

$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CQ} \text{ mà ta có:}$$

$$\overrightarrow{BP} = t\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CQ} = (1-t)\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{MB} = (1-t)\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MH} = t\overrightarrow{BF} + (1-t)\overrightarrow{BE}$$

+(0.25 đ) Suy ra: $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{BE} = t\overrightarrow{EF}$. Tập hợp các điểm H là đoạn EF.

Vậy tập hợp các điểm S là đường thẳng song song với hai đường thẳng a, b lần lượt đi qua E, F và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Bài 4: (2.5 điểm).

+(0.25 đ) Đường tròn (C) có tâm I(4,0), bán kính R = 2.

+(0.50 đ) Lấy A(x₁ ; y₁), B(x₂ ; y₂) tùy ý (y₁ ≠ y₂) thuộc (P), phương trình đường thẳng AB là:

$$AB: (y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$

Do A, B ∈ (P) nên y₁² = 2x₁, y₂² = 2x₂ do đó: AB: 2x - (y₁ + y₂)y + y₁·y₂ = 0.

+(0.50 đ) Tìm điều kiện tiếp xúc:

$$AB \text{ tiếp xúc } (C) \Leftrightarrow \frac{|8 + y_1 y_2|}{\sqrt{4 + (y_1 + y_2)^2}} = 2 \Leftrightarrow (8 + y_1 y_2)^2 = 4[4 + (y_1 + y_2)^2] \quad (1).$$

+(0.25 đ) Tương tự, nếu C(x₃ ; y₃) thuộc (P) và y₁ ≠ y₃, ta có:

$$AC \text{ tiếp xúc } (C) \Leftrightarrow (8 + y_1 y_3)^2 = 4[4 + (y_1 + y_3)^2] \quad (2).$$

+(0.5 đ) Do đó nếu AB và AC tiếp xúc (C) ta được (1) và (2). Điều này chứng tỏ y₁ và y₃ là hai nghiệm của phương trình ẩn y:

$$(8 + y_1 y)^2 = 4[4 + (y_1 + y)^2] \text{ hay } (y_1^2 - 4)y^2 + 8y_1 y + 48 - 4y_1^2 = 0 \quad (3)$$

+(0.25 đ) Vì y₁ ≠ ± 2, (3) là phương trình bậc hai có Δ' > 0 nên (3) luôn có hai nghiệm y₂ và y₃:

$$y_2 + y_3 = \frac{8y_1}{4 - y_1^2} \text{ và } y_2 \cdot y_3 = \frac{48 - 4y_1^2}{y_1^2 - 4}$$

+(0.25 đ) Do đó, thay vào ta được: (8 + y₂y₃)² = 4[4 + (y₂ + y₃)²]. Vậy theo điều kiện tiếp xúc ta được BC tiếp xúc (C). Và tất cả các kết quả trên chứng tỏ rằng có vô số tam giác thỏa đề bài.

SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC PTTH
NĂM HỌC 1999-2000.

ĐỀ CHÍNH THỨC
SBD:

MÔN: TOÁN BẬC NG B VÒNG 1.
(180 phút, không kể thời gian giao đề)

Bài 1: (2.5 điểm) Giải và biện luận phương trình theo tham số m :
 $(lg \cos x)^2 - m lg \cos^2 x - m^2 + 2 = 0$.

Bài 2: (2.5 điểm) Cho phương trình:

$$\sqrt[5]{x^2 - 34x + a} - \sqrt[4]{(x-1)(x-33)} = 1$$

a/ Giải phương trình khi $a = 64$.

b/ Tìm a để phương trình có nghiệm.

Bài 3: (2.5 điểm) Cho tứ diện ABCD có diện tích các tam giác ADB và ADC là S_b và S_c . Mặt phẳng phân giác của nhị diện tạo bởi hai mặt (ADB) và (ADC) cắt BC tại M. α là góc giữa hai mặt (ADB) và (ADC).

Chứng minh:

$$a/ \frac{MB}{MC} = \frac{S_b}{S_c}$$

$$b/ \text{Diện tích } S_m \text{ của tam giác ADM là: } S_m = \frac{2S_b \cdot S_c \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{S_b + S_c}.$$

Bài 4: (2.5 điểm) Cho hai số a_1, b_1 với $a_1 = \cos^2 \frac{\pi}{8}$, $b_1 = \cos \frac{\pi}{8}$. Lập hai dãy số $(a_n), (b_n)$ với $n = 1,$

2, ... theo quy tắc sau: $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} \cdot b_n}$

Tính: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

TH **A THIÊN HU**NĂM H **C 1999-2000.**

H $\square$ NG D $\square$ N CH $\square$ M Đ $\square$ THI MÔN TOÁN
B $\square$ NG B – VÒNG 1.

Bài 1: (2.5 điểm) $(\lg \cos x)^2 - m \lg \cos^2 x - m^2 + 2 = 0$ (1)

+(0.50 đ) Điều kiện: $\cos x > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đặt $t = \lg \cos x$. Phương trình trở thành:
$$\begin{cases} t^2 - 2mt - m^2 + 2 = 0 \\ t \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Xét tam thức bậc hai $f(t) = t^2 - 2mt - m^2 + 2 = 0$ có: $a = 1, S/2 = m, \Delta' = 2(m^2 - 1), f(0) = -m^2 + 2$.

+(0.25 đ) Trường hợp 1: $t = 0$ là nghiệm của (2). Khi đó ta có $m = \pm\sqrt{2}$.

$+ m = \sqrt{2} : (2) \Leftrightarrow t = 0$ hay $t = 2\sqrt{2}$ nên (1) $\Leftrightarrow \lg \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$+ m = -\sqrt{2} : (2) \Leftrightarrow t = 0$ hay $t = -2\sqrt{2}$ nên (1)

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg \cos x = 0 \\ \lg \cos x = -2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \pm \arccos 10^{-2\sqrt{2}} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

+(0.25 đ) Trường hợp 2: Phương trình (2) có 2 nghiệm t_1, t_2 khác 0 ($t_1 \leq t_2$):

$t_1 = m - \sqrt{2(m^2 - 1)}; t_2 = m + \sqrt{2(m^2 - 1)}$

Vì điều kiện (1) có nghiệm nên ta chỉ cần xét 2 trường hợp sau: a/ $t_1 \leq t_2 < 0$; b/ $t_1 < 0 < t_2$.

+(0.50 đ) a/ $t_1 \leq t_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S/2 < 0 \\ f(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(m^2 - 1) \geq 0 \\ m < 0 \\ -m^2 - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m \leq -1.$

Khi đó (2) có hai nghiệm t_1, t_2 âm nên (1) có các nghiệm: $x = \pm \arccos 10^{m \pm \sqrt{2(m^2 - 1)}} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

+(0.50 đ) b/ $t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow af(0) < 0 \Leftrightarrow -m^2 + 2 < 0 \Leftrightarrow m < -\sqrt{2}$ hay $m > \sqrt{2}.$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \lg \cos x = t_1 \Leftrightarrow x = \pm \arccos 10^{m - \sqrt{2(m^2 - 1)}} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

+(0.50 đ) Kết quả:

$+ m < -\sqrt{2} :$ (1) có nghiệm: $x = \pm \arccos 10^{m - \sqrt{2(m^2 - 1)}} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$+ m = -\sqrt{2} :$ (1) có nghiệm: $x = 2k\pi; x = \pm \arccos 10^{-2\sqrt{2}} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$+ -\sqrt{2} < m < -1 :$ (1) có nghiệm: $x = \pm \arccos 10^{m \pm \sqrt{2(m^2 - 1)}} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$+ m = -1:$ (1) có nghiệm $x = \pm \arccos 0,1 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$+ -1 < m < \sqrt{2} :$ (1) vô nghiệm.

$+ m = \sqrt{2} :$ (1) có nghiệm $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$+ m > \sqrt{2} :$ (1) có nghiệm: $x = \pm \arccos 10^{m - \sqrt{2(m^2 - 1)}} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Bài 2: (2.5 điểm)

Câu a: (2 điểm)

+(0.25 đ) Đặt $u = \sqrt[5]{x^2 - 34x + a} \quad v = \sqrt[4]{(x-1)(x-33)}$

+(0.25 đ) Ta có hệ
$$\begin{cases} u^5 - (u-1)^4 = a - 33 \\ v = u - 1 \geq 0 \end{cases} \quad (I).$$

+(1.00 đ) Hàm số $f(u) = u^5 - (u-1)^4$ có $f'(u) = 5u^4 - 4(u-1)^3 > 0 \forall u \in [1; +\infty)$, nên $f(u)$ tăng trên $[1; +\infty)$.

+(0.50 đ) $a = 64$, $f(u) = 31 = f(2)$ và $f(u)$ tăng nên hàm (I) chỉ có một nghiệm: $(u = 2, v = 1)$ thì đó là nghiệm của phương trình là: $x = 17 \pm \sqrt{257}$.

Câu b: (0.5 điểm)

+ $f(u)$ tăng trên $[1; +\infty)$ mà $f(1) = 1$ nên phương trình có nghiệm khi $a - 33 \geq 1$ hay $a \geq 34$.

Bài 3: (2.5 điểm)

Câu a: (1 điểm)

+(0.25 đ) Do M nằm trên mặt phẳng phân giác của góc nhọn đỉnh A nên khoảng cách từ M đến hai mặt phẳng (ADB), (ADC) bằng nhau và kí hiệu là d.

+(0.75 đ) Do đó:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{dt(DBM)}{dt(DCM)} = \frac{V_{ADBM}}{V_{ADCM}} = \frac{S_b \cdot d}{S_c \cdot d} = \frac{S_b}{S_c}$$

Câu b: (1.5 điểm)

+(0.75 đ) Tính công thức tính thể tích:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_c \cdot BH = \frac{1}{3} S_c \cdot BK \cdot \sin \alpha = \frac{1}{3} S_c \cdot BK \cdot AD \cdot \frac{\sin \alpha}{AD} = \frac{2S_b \cdot S_c \cdot \sin \alpha}{3AD}$$

+(0.75 đ) $V_{ABCD} = V_{ADBM} + V_{ADCM}$, áp dụng công thức tính thể tích trên ta suy ra:

$$\frac{2S_b \cdot S_c \cdot \sin \alpha}{3AD} = \frac{2S_b \cdot S_m \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{3AD} + \frac{2S_c \cdot S_m \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{3AD}$$

$$\text{Rút gọn, được: } S_m = \frac{2S_b \cdot S_c \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{S_b + S_c}.$$

Bài 4: (2.5 điểm)

+(0.50 đ) Tính a_2, b_2 :

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8} \right) = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{8} \left(\cos \frac{\pi}{8} + 1 \right) = \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{16}$$

$$b_2 = \sqrt{\cos \frac{\pi}{8} \cos^2 \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8}} = \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{16}$$

+(0.75 đ) Bằng quy nạp, chứng minh được:

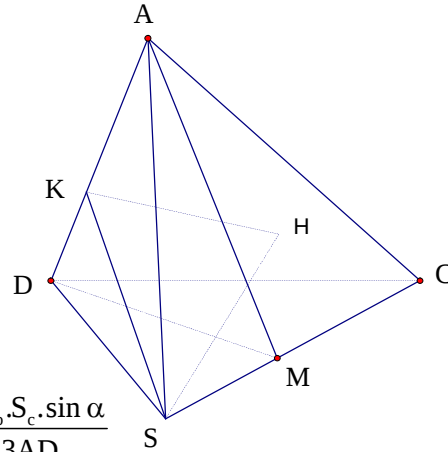
$$a_n = \cos \frac{\pi}{2 \cdot 4} \cos \frac{\pi}{2^2 \cdot 4} \dots \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 4} \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 4} \quad (1) \quad b_n = \cos \frac{\pi}{2 \cdot 4} \cos \frac{\pi}{2^2 \cdot 4} \dots \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 4} \quad (2)$$

+(0.75 đ) Nhân hai vế của (1) và (2) cho $\sin \frac{\pi}{2^n \cdot 4}$ và áp dụng công thức $\sin 2a$ được:

$$a_n = \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 4}}{2^n \cdot \sin \frac{\pi}{2^n \cdot 4}}, \quad b_n = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{2^n \cdot \sin \frac{\pi}{2^n \cdot 4}}.$$

+(0.50 đ) Tính giới hạn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{4 \sin \frac{\pi}{4}}{\pi}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{4 \sin \frac{\pi}{4}}{\pi}.$$



SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THÀNH A THIÊN HUỖ

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BỒI DƯỠNG
NĂM HỌC 1999-2000.

ĐỀ CHÍNH THỨC
SBD:

MÔN: TOÁN BỒI DƯỠNG VÒNG 2.
(180 phút, không kể thời gian giao đề)

Bài 1: (2.5 điểm) Với n là số nguyên dương. Giải phương trình:

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = 0$$

Bài 2: (2.5 điểm) A, B, C là ba góc của một tam giác. Chứng minh:

$$1 < \frac{\sin A}{\sin B + \sin C} + \frac{\sin B}{\sin C + \sin A} + \frac{\sin C}{\sin A + \sin B} < 2$$

Bài 3: (2.5 điểm) Cho hàm số $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

(1) $f(n+1) > f(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

(2) $f[f(n)] > n + 2000$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

a/ Chứng minh: $f(n+1) = f(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

b/ Tìm biểu thức $f(n)$.

Bài 4: (2.5 điểm) Cho parabol (P): $y^2 = 2x$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$.

Chứng minh rằng có vô số tam giác nội tiếp ba đỉnh trên (P) mà các cạnh tiếp xúc với (C).

SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THÀNH A THIÊN HƯ

KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BỒI DƯỠNG
NĂM HỌC 1999-2000.

HỌC SINH NGÀNH MATHS
BỒI DƯỠNG A – VÒNG 1.

Bài 1: (2.5 điểm)

+(0.50 đ) Điều kiện: $\sin 2^m x \neq 0 \Leftrightarrow 2^m x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2^m}, k \in \mathbb{Z} \quad (m = 1, n).$

$$+(0.50 \text{ đ}) \cot gx - \cot g2x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\sin x}{\sin x \cdot \sin 2x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

+(0.25 đ) Do đó ta có công thức tổng quát: $\cot g2^{m-1}x - \cot g2^m x = \frac{1}{\sin 2^m x}.$

+(0.75 đ) Phân tích trình đã cho trở thành:

$$(\cot gx - \cot g2x) + (\cot g2x - \cot g4x) + \dots + (\cot g2^{n-1}x - \cot g2^n x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cot gx - \cot g2^n x = 0 \Leftrightarrow \cot g2^n x = \cot gx \Leftrightarrow x = \frac{h\pi}{2^n - 1}, h \in \mathbb{Z}.$$

+(0.50 đ) Số điều kiện ta có nghiệm: $x = \frac{h\pi}{2^n - 1}, h \in \mathbb{Z} \text{ và } h \neq p(2^n - 1), \forall p \in \mathbb{Z}.$

Bài 2: (2.5 điểm)

+(0.50 đ) Áp dụng định lý hàm số sin, bất đẳng thức trình cần chứng minh trở thành:

$$1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2 \quad (1), \text{ với } a, b, c \text{ là ba cạnh của tam giác.}$$

+(0.50 đ) Với $0 < x < y$ và $z > 0$, ta có bất đẳng thức: $\frac{x}{y+z} < \frac{x}{y} < \frac{x+z}{y+z} \quad (2).$

+(0.50 đ) Chứng minh bất đẳng thức (2).

+(1.00 đ) Vì a, b, c là ba cạnh của tam giác nên: $0 < a < b + c; 0 < b < a + c; 0 < c < a + b$ nên ta áp dụng bất đẳng thức (2) và ta có:

$$\frac{a}{a+b+c} < \frac{2a}{a+b+c}; \frac{b}{a+b+c} < \frac{2b}{a+b+c}; \frac{c}{a+b+c} < \frac{2c}{a+b+c}.$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được (1), nên bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Bài 3: (2.5 điểm)

Câu a (1.5 đ)

+(0.5 đ) Vì $f(n) \in \mathbb{Z}^+$ nên từ giả thiết (1) ta được: $f(n+1) \geq f(n) + 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$

+(1.0 đ) Xét hàm giả thiết (2) ta được $\forall n \in \mathbb{Z}^+:$

$$n + 2001 = (n+1) + 2000 = f[f(n+1)] \geq f[f(n)] + 1 = n + 2001$$

$$\text{do đó: } f(n+1) = f(n) + 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Câu b (1.0 đ)

+(0.75 đ) $f(n) = f(1) + n - 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow f\{f(1)\} = f(1) + f(1) - 1$

$$\text{Suy ra: } 1 + 2000 = 2f(1) - 1 \Rightarrow f(1) = 1001 \Rightarrow f(n) = n + 1000, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

+(0.25 đ) Thay thế các điều kiện, nên $f(n) = n + 1000, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$

Bài 4: (2.5 điểm).

+(0.25 đ) Đường tròn (C) có tâm I(4,0), bán kính R = 2.

+(0.50 đ) Lấy A(x₁; y₁), B(x₂; y₂) tùy ý (y₁ ≠ y₂) thuộc (P), phân tích trình đẳng thức AB là:

$$AB: (y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$

Do $A, B \in (P)$ nên $y_1^2 = 2x_1, y_2^2 = 2x_2$ do đó: $AB: 2x - (y_1 + y_2)y + y_1 \cdot y_2 = 0$.
 +(0.50 đ) Tìm điều kiện tiếp xúc:

$$AB \text{ tiếp xúc } (C) \Leftrightarrow \frac{|8 + y_1 y_2|}{\sqrt{4 + (y_1 + y_2)^2}} = 2 \Leftrightarrow (8 + y_1 y_2)^2 = 4[4 + (y_1 + y_2)^2] \quad (1).$$

+(0.25 đ) Tương tự, nếu $C(x_3; y_3)$ thuộc (P) và $y_1 \neq y_3$, ta có:

$$AC \text{ tiếp xúc } (C) \Leftrightarrow (8 + y_1 y_3)^2 = 4[4 + (y_1 + y_3)^2] \quad (2).$$

+(0.5 đ) Do đó nếu AB và AC tiếp xúc (C) ta được (1) và (2). Điều này chứng tỏ y_1 và y_3 là hai nghiệm của phương trình ẩn y :

$$(8 + y_1 y)^2 = 4[4 + (y_1 + y)^2] \text{ hay } (y_1^2 - 4)y^2 + 8y_1 y + 48 - 4y_1^2 = 0 \quad (3)$$

+(0.25 đ) Với $y_1 \neq \pm 2$, (3) là phương trình bậc hai có $\Delta' > 0$ nên (3) luôn có hai nghiệm y_2 và y_3 :

$$y_2 + y_3 = \frac{8y_1}{4 - y_1^2} \quad \text{và} \quad y_2 \cdot y_3 = \frac{48 - 4y_1^2}{y_1^2 - 4}$$

+(0.25 đ) Do đó, thay vào ta được: $(8 + y_2 y_3)^2 = 4[4 + (y_2 + y_3)^2]$. Với y theo điều kiện tiếp xúc ta được BC tiếp xúc (C) . Và từ các kết quả trên chứng tỏ rằng có vô số tam giác thỏa đề bài.