HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **BỘ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO**

OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN TOÀN QUỐC LẦN THỨ XIV NĂM 2006

Môn thi: Đại số

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2006 & 1 & -2006 \\ 2005 & 2 & -2006 \\ 2005 & 1 & -2005 \end{pmatrix}$. Xác định các phần tử trên đường chéo chính của ma trận

$$S = I + A + A^2 + \ldots + A^{2006}$$

Giải: Ta có $A = I + B$ với $B = \begin{pmatrix} 2005 & 1 & -2006 \\ 2005 & 1 & -2006 \\ 2005 & 1 & -2006 \end{pmatrix}$. Dễ dàng tính ra $B^2 = 0$

=> $A^k = I + kB \ \ \forall k \in \mathbb{N}$. Từ đó suy ra $S = 2007I + 1003.2007B$

Do đó các phần tử trên đường chéo chính là

$$a_{11} = 2007(1 + 1003.2005), \qquad a_{22} = 1004.2007, \qquad a_{33} = 2007(1 - 1003.2006)$$

Câu 2: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Chứng minh rằng $\det(I - A^{2006}) \neq 0$

Giải: Tính toán, ta thấy ma trận A chéo hóa được. Do đó, tồn tại ma trận P khả nghịch sao cho

$A = PDP^{-1}$, trong đó $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$ là ma trận chéo.

Suy ra

$$I - D^{2006} = \begin{pmatrix} 1 - 2^{2006} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - (-2)^{2006} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 14^{2006} \end{pmatrix}$$

=> $\det(I - D^{2006}) \neq 0$

Ta có: $\det(I - A^{2006}) = \det(PP^{-1} - PD^{2006}P^{-1}) = \det P \det(I - A^{2006}) \det P^{-1} \neq 0$ do cả 3 định thức này đều khác 0.

Câu 3: Xác định n để hệ phương trình sau có 3 nghiệm độc lập tuyến tính

$$\begin{cases} 1^2x_1 + 2^2x_2 + \ldots + n^2x_n = 0 \\ 2^2x_1 + 3^2x_2 + \ldots + (n+1)^2x_n = 0 \\ 3^2x_1 + 1^2x_2 + \ldots + (n+2)^2x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n^2x_1 + (n+1)^2x_2 + \ldots + (2n-1)^2x_n = 0 \end{cases}$$

Giải: Gọi A là ma trận hệ số của phương trình

$$A = \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & \dots & (n+1)^2 \\ 3^2 & 4^2 & \dots & (n+2)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2 & (n+1)^2 & \dots & (2n-1)^2 \end{pmatrix}$$

Nhân dòng k với -1 rồi cộng vào dòng $k+1$ $(k = 2, \dots, n-1)$, ta được

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ 3 & 5 & \dots & 2n+1 \\ 5 & 7 & \dots & 2n+3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2n-1 & 2n+1 & \dots & 4n-3 \end{pmatrix}$$

Nhân dòng k với -1 rồi cộng vào dòng $k+1$ $(k = 2, \dots, n-1)$, ta được

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ 3 & 5 & \dots & 2n+1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

Dễ dàng suy ra rằng hệ phương trình có 3 nghiệm độc lập tuyến tính thì $n \geq 3$.

Câu 4: Cho A là ma trận vuông cấp n sao cho mỗi dòng của nó chứa đúng 2 phần tử khác 0, trong đó phần tử nằm ở đường chéo chính là 2006, phần tử còn lại là 1. Chứng minh ma trận A khả nghịch.

Giải: Đặt $A = \left(a_{ij}\right)_{nxn}$. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử ngược lại, A suy biến. Kí hiệu c_i là cột thứ i của A, khi đó có thể coi các cột $c_1, c_2, \dots, c_n$ của A la2 n vector phụ thuộc tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$. Do vậy phải có một tổ hợp tuyến tính

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \ldots + \lambda_n c_n = 0 \ \ (1)$$

trong đó ít nhất một hệ số khác 0. Giả sử $|\lambda_m| = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_m|\}$. Đương nhiên $|\lambda_m| > 0$. Giả sử hai phần tử khác không của dòng thứ m là$a_{mm} = 2006,\ a_{mp} = 1,\ (1 \leq p \leq n, p \neq m)$. Từ (1) suy ra

$$\lambda_1 a_{m1} + \lambda_2 a_{m2} + \ldots + \lambda_n a_{mn} = \lambda_m 2006 + \lambda_p = 0$$

Suy ra

$$|\lambda_p| = 2006|\lambda_m| > |\lambda_m|$$

mâu thẫn với cách chọn $|\lambda_m|$. Vậy A khả nghịch.

Câu 5: Cho A là ma trận vuông cấp n thỏa mãn các điều kiện $A^{2006} = A$ và $rankA = 1$. Chứng minh rằng $I - A$ là ma trận suy biến.

Giải: Nếu $n = 1$ thì hiển nhiên

Nếu $n \geq 2$, xét ánh xạ $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ được xác định như sau

$$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$x \mapsto \varphi(x) = Ax$$

Khi đó $\varphi(\mathbb{R}^n)$ là không gian con của $\mathbb{R}^n$ có số chiều là 1 (do $rankA = 1$). Gọi $\{e_0\}$ là một vector khác 0 bất kì của $\varphi(\mathbb{R}^n)$. Khi đó $Ae_0 = ae_0,\ a \in \mathbb{R}^*$. Bằng quy nạp, ta thu được đẳng thức

$$ae_0 = a^{2006}e_0 \; hay \; (a - a^{2006})e_0 = 0$$

Suy ra $a - a^{2006} = 0 \; hay \; a = 1$. Như vậy $Ae_0 = ae_0 \; hay \; (I - A)e_0 = 0$. Nghĩa là hệ phương trình tuyến tính $(I - A)X = 0$ có nghiệm không tầm thường. Vậy $I - A$ là ma trận suy biến.

Câu 6: Cho đa thức $P(x)$ bậc n có n nghiệm thực phân biệt lớn hơn 1. Chứng minh rằng đa thức

$$Q(x) = (x+1)P(x)P'(x) + P^2(x) + x\big(P'(x)\big)^2$$

có ít nhất $2n - 1$ nghiệm thực phân biệt.

Giải: Ta có $Q(x) = F(x)G(x)$ với $F(x) = P(x) + P'(x)$, $G(x) = P(x) + xP'(x)$. Gọi $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các nghiệm của $P(x)$ và $1 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Khi đó phương trình $e^{xP(x)} = 0$ cũng có n nghiệm này. Theo định lí Rolle, phương trình $\big(e^x P(x)\big)' = 0$ hay đa thức $F(x) = P(x) + P'(x)$ có nghiệm b_i trong mỗi khoảng $(a_i, a_{i+1}), i = 1,2, \dots, n-1$:

$$1 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < b_{n-1} < a_n$$

Mặt khác, đa thức $xP(x)$ có $n+1$ nghiệm là $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n$. Lại áp dụng định lí Rolle, phương trình $\big(xP(x)\big)' = 0$ hay đa thức $G(x)$ có nghiệm trong mỗi khoảng (a_i, a_{i+1}), $i = 1,2, \dots, n-1$ nên

$$0 < c_1 < a_1 < c_2 < a_2 < \dots < c_n < a_n$$

Nếu $b_i \neq c_{i+1} \; \forall i = 1,2, \dots, n-1$ thì đa thức $Q(x)$ có ít nhất $2n - 1$ nghiệm thực phân biệt. Bây giờ, giả sử tồn tại i sao cho

$$b_i = c_{i+1} = r$$

Thế thì

$$P(r) + P'(r) = 0 = P(r) + rP'(r)$$

Do đó $(r-1)P'(r) = 0$ hay $P'(r) = 0$. Suy ra $P(r) = 0$, với $a_i < r < a_{i+1}$, Như vậy đa thức $P(x)$ có $n+1$ nghiệm phân biệt (!). Vậy, đa thức $Q(x)$ có $2n - 1$ nghiệm thực phân biệt.

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **BỘ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO**

OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN TOÀN QUỐC LẦN THỨ XV NĂM 2007

Môn thi: Đại số

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1: Cho $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông cấp n có các tính chất sau: $a_{ij} = 2007$ $a_{ij} = \{4; 20\}$, $i \neq j$, $i, j = 1,2, \dots n$. Giải hệ phương trình đại số tuyến tính $Ax = 0$

Giải: Ta có $A \equiv I \ (mod\, 2)$ với I là ma trận đơn vị cấp n, do đó $\det(A) \neq 0$. Vậy hệ phương trình chỉ có nghiệm tầm thường.

Câu 2: Giả sử A, B là các ma trận vuông cấp $n \geq 2$ thỏa mãn điều kiện $AB + aA + bB = 0$ trong đó a, b là hai số thực khác 0. Chứng minh rằng $AB = BA$.

Giải: Theo giả thiết ta có:

$$0 = AB + aB + bB = (A + bI)(B + aI) - abI$$

Suy ra $\frac{1}{ab}\big(A + bI\big)\big(B + bI\big) = I$ hay $\frac{1}{ab}\big(B + aI\big)\big(A + bI\big) = I$

Do đó $BA + aA + bB = 0 = AB + aA + bB$ hay $AB = BA$.

Câu 3: Cho $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ trong đó phần tử $a_{ij} = i + j$, $i, j = 1, \dots, n$. Tính $rank(A)$

Giải: Nếu $n = 1$ thì $A = [2]$ nên $rank(A) = 1$

Nếu $n \geq 2$ thì

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 3 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & \dots & n-1 & n-1 \\ n & n & \dots & n & n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} = B_1 + B_2$$

Dễ thấy $rankB_1 = rankB_2 = 1$ => $rankA = rank(B_1 + B_2) \leq rankB_1 + rankB_2 = 2$. Kí hiệu C là ma trận con cấp 2 nằm bên trái phía trên của A, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Khi đó $\det C = -1$ nên $rankA = 2$.

Vậy $rankA = 1$ nếu $n = 1$ và $rankA = 2$ nếu $n \geq 2$.

Câu 4: Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa $1 + P(x) = \frac{1}{2}[P(x-1) + P(x+1)]$

Giải: Ta chứng minh $\deg P \leq 2$. Thật vậy, giả sử tồn tại đa thức

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,\ \deg P \geq 2$$

thỏa mãn giả thiết bài toán. Xét hệ số của x^{n-2} ở hai vế của đẳng thức bài toán, ta thu được: $a_{n-2} = \frac{1}{2}\left(2a_n C_n^2 + 2a_{n-2}\right)$ => $a_n = 0$. Điều này mâu thuẫn với $\deg P > 2$.

Trường hợp 1: $P(x) = ax + b$, thay vào hệ thức đã cho, ta thu được

$$1+ax+b=\frac{1}{2}[a(x-1)+b+a(x+1)+b]=ax+b\ \ (!)$$

Trường hợp 2: $P(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$. Theo giả thiết, ta có

$$1+ax^2+bx+c=\frac{1}{2}[a(x+1)^2+b(x+1)+c+a(x-1)^2+b(x-1)+c]$$

Suy ra $a=1$. Vậy $P(x)=x^2+bx+c$. Thử lại, mọi đa thức bậc hai có dạng trên đều thỏa mãn bài Toán.

Câu 5: Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\0&2&-1&0\\0&0&2&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$. Tìm tất cả các ma trận vuông X cấp 4 sao cho $AX=XA$.

Giải: $AX=XA$ <=> $(A-2I)X=X(A-2I)$

$$\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}X=X\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\ \ (1)$$

Kí hiệu:

$$B=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=(b_{ij});\ \ C=BX=(c_{ij});\ \ D=XB=(d_{ij})$$

Khi đó (1) tương đương $C=D$ hay $c_{ij}=d_{ij},\ 1\leq i,j\leq 4$. Ta thấy $c_{ij}=0\ \forall j$ và $d_{ij}=0\ \forall i$. Mặt khác với $i\leq 3$ và $j\geq 2$ ta có: $c_{ij}=d_{ij}$. Do đó

$$\sum_{k=1}^{4}b_{ik}x_{kj}=\sum_{k=1}^{4}x_{ik}b_{kj}\ hay\ x_{(i+1)j}=x_{i(j-1)}$$

Tóm lại, ta thu được $x_{ij}=x_{i+1,j+1},\ 1\leq i,j\leq 3$. Vậy ma trận X có dạng

$$X=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\0&a&b&c\\0&0&a&b\\0&0&0&a\end{pmatrix},\ \ a,b,c,d\in\mathbb{R}$$

Ngược lại, dễ dàng kiểm tra được mọi ma trận X có dạng như trên đều thỏa mãn điều kiện bài Toán.

Câu 6: Giả sử $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ là ma trận vuông cấp 2 khả nghịch. Chứng minh rằng nếu B là ma trận vuông cấp 2 khả nghịch thì ma trận D cấp 4 được xác định bởi hệ thức

$$D=\begin{pmatrix}aB&bB\\cA&dA\end{pmatrix}$$

cũng khả nghịch.

Giải: Giả sử $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ thỏa mãn hệ phương trình $D\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aA&bB\\cA&dB\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0\ \ (1)$

Khi đó

$$\begin{cases}aAx+bBy=0\\cAx+dBy=0\end{cases}$$

Nhân phương trình đầu với d, phương trình hai với b rồi trừ vế, ta được $(ad-dc)Ax=0$

Do A khả nghịch nên det $A=ad-dc\neq 0$ => $x=0$. Lập luận tương tự ta cũng có $y=0$.

Vậy hệ (1) chỉ có nghiệm tầm thường. Do đó D là ma trận khả nghịch.

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **BỘ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO**

OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN TOÀN QUỐC LẦN THỨ XVI NĂM 2008

Môn thi: Đại số

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1: Cho a_0, d là các số thực, dãy $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ lập thành cấp số cộng công sai d. Tính định thức của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_0 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

Giải: Ta có

$$\det A = D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_0 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{vmatrix}$$

Cộng cột đầu vào cột cuối, ta được

$$D = (a_0 + a_n)\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & 1 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_{n-3} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_0 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \end{vmatrix}$$

Do $a_k + a_{n-k} = a_0 + kd + a_n - kd = a_0 + a_n, k = 1, \dots, n-1$

Tiếp tục nhân hàng thứ $n-1$ với -1 rồi cộng vào hàng cuối cùng, nhân hàng thứ $n-2$ với -1 rồi cộng vào hàng thứ $n-1, \dots$ nhân hàng 1 với -1 rồi cộng vào hàng 2 ta được

$$D = (a_0 + a_n)\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ d & -d & -d & \dots & -d & 0 \\ d & d & -d & \dots & -d & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d & d & d & \dots & -d & 0 \\ d & d & d & \dots & d & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n(a_0 + a_n)\begin{vmatrix} d & -d & -d & \dots & -d & -d \\ d & d & -d & \dots & -d & -d \\ d & d & d & \dots & -d & -d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d & d & d & \dots & d & -d \\ d & d & d & \dots & d & d \end{vmatrix}$$

Cộng hàng cuối vào các hàng còn lại, ta được:

$$D = (-1)^n(a_0 + a_n)\begin{vmatrix} 2d & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2d & 2d & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2d & 2d & 2d & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2d & 2d & 2d & \dots & 2d & 0 \\ d & d & d & \dots & d & d \end{vmatrix} = (-1)^n(2a_0 + nd)2^{n-1}d^n$$

Câu 2: Cho A là ma trận thực vuông cấp 2 thỏa mãn điều kiện $\det A < 0$. Chứng minh rằng tồn tại hai số thực phân biệt λ_1, λ_2 và hai ma trận A_1, A_2 sao cho

$$A^n = \lambda_1^n A_1 + \lambda_2^n A_2,\ \ \forall n = 1,2,\dots$$

Giải:

Cách 1: Đa thức đặc trưng của A

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - trace(A)\lambda + \det A$$

Do $\det A < 0$ nên $\Delta > 0$ => phương trình có hai nghiệm thực phân biệt λ_1, λ_2. Khi đó, đặt

$$A_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(A - \lambda_2 I),\ \ A_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(A - \lambda_1 I)$$

Suy ra $A_1 + A_2 = I,\ \ \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = A,\ \ A_1 A_2 = A_2 A_1 = 0$

Vậy $A^n = \lambda_1^n A_1 + \lambda_2^n A_2,\ \ \forall n = 1,2,\dots$

Cách 2: Đa thức đặc trưng của A

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - trace(A)\lambda + \det A$$

Do $\det A < 0$ nên $\Delta > 0$ => phương trình có hai nghiệm thực phân biệt λ_1, λ_2 hay A có 2 giá trị riêng λ_1, λ_2 nên A chéo hóa được

$$A = PBP^{-1} = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\Rightarrow A^n = PB^nP^{-1} = P\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}P^{-1} = P\left[\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}\right]P^{-1}$$

$$= P.\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.P^{-1} + P.\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}.P^{-1} = \lambda_1^n P.\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.P^{-1} + \lambda_2^n P.\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.P^{-1}$$

Đặt $A_1 = P.\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.P^{-1},\ \ A_2 = P.\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.P^{-1}$.

Vậy ta đã tìm được hai số thực phân biệt λ_1, λ_2 là hai giá trị riêng của A và hai ma trận A_1, A_2 trên sao cho

$$A^n = \lambda_1^n A_1 + \lambda_2^n A_2,\ \ \forall n = 1,2,\dots$$

Câu 3: Cho A là ma trận vuông thực cấp 3, vết là 8. Tổng các phần tử trên mỗi hàng của A bằng 4 và $\det A = 16$. Xác định các giá trị riêng của A.

Giải: Ta có $\det A = 16$, $traceA = 8$, và tổng các phần tử trên mỗi hàng của ma trận A là 4. Do đó đa thức đặc trưng của A:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^3 - (traceA)\lambda^2 + a\lambda - \det A = \lambda^3 - 8\lambda^2 + a\lambda - 16 \quad (1)$$

Mặt khác

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix}-a_{11}+\lambda & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & -a_{22}+\lambda & -a_{23}\\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33}+\lambda\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}\lambda - a_{11} - a_{12} - a_{13} & -a_{12} & -a_{13}\\ \lambda - a_{21} - a_{22} - a_{23} & -a_{22}+\lambda & -a_{23}\\ \lambda - a_{31} - a_{32} - a_{33} & -a_{32} & -a_{33}-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 4)\begin{vmatrix}1 & -a_{12} & -a_{13}\\ 1 & -a_{22}+\lambda & -a_{23}\\ 1 & -a_{32} & -a_{33}+\lambda\end{vmatrix}$$

Suy ra $\lambda = 4$ là một giá trị riêng của A. Thay vào (1), ta được $a = 20$

$$\varphi(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 20\lambda - 16 = (\lambda - 4)(\lambda - 2)^2$$

Vậy ma trận A có 4 là giá trị riêng đơn và 2 là giá trị riêng kép.

Câu 4: Cho các số thực $a_1, a_2, \dots, a_{2008}$. Chứng minh rằng tồn tại các ma trận thực vuông cấp $n > 1$ $A_1, A_2, \dots, A_{2008}$ thỏa mãn

$$\det A_k = a_k \,, k = 1, \dots, 2008 \;\; và \;\; \det\left(\sum_{K=1}^{2008} A_k\right) = 2009$$

Giải: Đặt $s = \sum_{k=1}^{2008} a_k\,,\; b = 2008s - \frac{2009}{2008^{n-2}}$. Xét các ma trận cấp n sau

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},\; A_1 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},\; A_1 = \begin{pmatrix} a_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \;\; (k = 3,4, \dots 2008)$$

Do đó $\det A_k = a_k\,,\; k = 1, \dots, 2008$. Mặt khác:

$$\sum_{k=1}^{2008} A_k = \begin{pmatrix} s & 1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ b & 2008 & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & 2008 & \dots\dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2008 \end{pmatrix}$$

Khai triển Laplace theo cột thứ nhất, ta được:

$$\det\left(\sum_{k=1}^{2008} A_k\right) = s.2008^{n-1} - b.2008^{n-2} = 2009$$

Câu 5: Cho A là ma trận vuông cấp n khả nghịch. Mọi phần tử của các ma trận A, A^{-1} là số nguyên. Chứng minh rằng nếu A có n giá trị riêng đều là các số thực thì $|\det(A + A^{-1})| \geq 2^n$.

Giải: Do các phần tử của A, A^{-1} đều là số nguyên nên $\det A$, $\det A^{-1}$ cũng là số nguyên. Mặt khác

$$|\det A||\det A^{-1}| = |\det A \det A^{-1}| = 1$$

=> $|\det A| = |\det A^{-1}| = 1$

Với mỗi ma trận M, đặt $P_M(t)$ là đa thức đặc trưng của nó. Gọi $a_1, a_2, \dots, a_n$ là tất cả các giá trị riêng thực của A. Khi đó $P_A(t) = \prod_{j=1}^{n}(t - a_j)$. Xét đa thức

$$Q(t) = \prod_{j=1}^{n}\left(t - \left(1 + a_j^2\right)\right)$$

Ta có $\deg Q(t) = n$ và

$$Q(I + A^2) = \prod_{j=1}^{n}\left(I + A^2 - \left(1 + a_j^2\right)I\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(A^2 - a_j^2 I\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(A - a_j I\right)\left(A + a_j I\right) = 0$$

Từ đó suy ra rằng $P_{I+A^2}(t)$ là ước của $Q(t)$. Do $\deg Q(t) = n$ nên $Q(t) \equiv P_{I+A^2}(t)$. Vậy

$$|\det C| = |\det A^{-1}.\det D| = |\det A^{-1}||\det D|$$

$$= 1.(1 + a_1^2)(1 + a_2^2) \dots (1 + a_n^2)$$
$$\geq 2^n |a_1 a_2 \dots a_n| = 2^n$$

Câu 6: Tồn tại hay không đa thức $P(x)$ bậc 2008 thỏa mãn điều kiện $P(k) = 2^k$ với $k = 0,1, \dots 2008$? Tại sao?

Giải: Với mỗi $x = 0,1,2 \dots$ xét biểu thức

$$Q(x) = C_x^0 + C_x^1 + C_x^2 + \dots + C_x^{x-2} + C_x^{x-1} + C_x^x$$

Biểu thức nói trên cho ta xác định đa thức $P(x) = Q(x)$ và đa thức này thỏa mãn yêu cầu bài Toán.

Có thể giải theo cách khác như sau:

Với mỗi $k = 0,1,2, \dots$ đặt

$$\omega_k(x) = \frac{x(x-1) \dots \big(x-(k-1)\big)\big(x-(k+1)\big) \dots (x-2008)}{(k-0)(k-1) \dots \big(k-(k-1)\big)\big(k-(k+1)\big) \dots (k-2007)}$$

Dễ dàng chứng minh đa thức

$$P(x) = \sum_{k=0}^{2008} \omega_k(x).2^k$$

thỏa mãn điều kiện bài Toán.

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **BỘ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO**

OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN TOÀN QUỐC LẦN THỨ XVII NĂM 2009

Môn thi: Đại số

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1: Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn các đẳng thức sau:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 0 \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên n, ta có $x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} = 0$

Giải: Từ các hệ thức đã cho: $xy + yz + zx = -1,\ \ xyz = 0$. Theo định lí Viete, chúng là nghiệm của phương trình $t(t^2 - 1) = 0$. Dễ dàng thấy rằng bộ ba số là $1, -1, 0$

Vậy $x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} = 0$.

Câu 2: Tồn tại hay không một ma trận thực A vuông cấp 2 sao cho

$$A^{2010} = \begin{pmatrix} -2008 & 2010 \\ 0 & -2009 \end{pmatrix}$$

Giải:

<u>Cách 1</u>: Giả sử tồn tại ma trận A thỏa mãn yêu cầu đề bài. Kí hiệu $P_A(t)$ là đa thức đặc trưng của ma trận A. Theo định lí Caley-Hamilton ta có:

$$A^2 = \alpha A + \beta E,\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \ \textbf{(1đ)}$$

Bằng quy nạp: $A^{2010} = aA + bE,\ \ a, b \in \mathbb{R}$ **(1đ)**

1/ Xét $a = 0$: $A^2 = bE$. Khi đó

$$\begin{pmatrix} -2008 & 2010 \\ 0 & -2009 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\ (!)\ \textbf{(1đ)}$$

2/ Xét $a \neq 0$:

Đặt $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, từ giả thiết suy ra $a_{21} = 0$. Vậy $A^{2010} = \begin{pmatrix} a_{11}^{2010} & x \\ 0 & a_{22}^{2010} \end{pmatrix}$ **(1đ)** =>$a_{11}^{2010} = -2008(!)$ **(1đ)**

Kết luận: không tồn tại ma trận A thỏa mãn điều kiện bài Toán.

<u>Cách 2</u>: Giả sử tồn tại ma trận A thỏa mãn yêu cầu đề bài. Đặt $A^{1005} = B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **(1đ)**. Ta có:

$$B^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & (a+d)b \\ (a+d)c & d^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2008 & 2010 \\ 0 & -2009 \end{pmatrix}\ \textbf{(1đ)}$$

Theo giả thiết, ta có: $(a + d)c = 0$ **(1đ)**

1/ Xét $c = 0$:

$$B^2 = \begin{pmatrix} a^2 & (a+d)b \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -2008 & 2010 \\ 0 & -2009 \end{pmatrix}\ \textbf{(1đ)}$$

2/ Xét $a + d = 0$ hay $a = -d$: khi đó $a^2 + bc = d^2 + bc = l$

$$B^2 = \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -2008 & 2010 \\ 0 & -2009 \end{pmatrix} \textbf{(1đ)}$$

Kết luận: không tồn tại ma trận A thỏa mãn điều kiện bài Toán.

Câu 3: Cho A, B, C là các ma trận vuông cấp n sao cho C giao hoán với A và B, $C^2 = E$ (ma trận đơn vị) và $AB = 2(A+B)C$

a) Chứng minh rằng $AB = BA$

b) Nếu có thêm điều kiện $A + B + C = 0$ hãy chứng tỏ $rank(A - C) + rank(B - C) = n$

Giải:

a) Theo giả thiết, ta có:

$AB = 2(A+B)C$ <=> $AB - 2AC - 2CB + 4C^4 = 4C^4 = 4E$ <=> $\left[\frac{1}{2}(A-2C)\right]\left[\frac{1}{2}(B-2C)\right] = E$

Suy ra $\left[\frac{1}{2}(A-2C)\right]$ và $\left[\frac{1}{2}(B-2C)\right]$ là nghịch đảo của nhau nên chúng giao hoán

$$\left[\frac{1}{2}(A-2C)\right]\left[\frac{1}{2}(B-2C)\right] = \left[\frac{1}{2}(B-2C)\right]\left[\frac{1}{2}(A-2C)\right] = E$$

Nhân phân phối lại, ta được $AB = BA$.

b) Nếu có thêm điều kiện $A + B + C = 0$ thì

$$AC + BC + C^2 = 0$$

=> $(A+B)C + C^2 = 2(A+B)C - (A+B)C + C^2 = AB - AC - CB + C^2 = (A-C)(B-C) = 0$

Ta có:

$$n = rank(-3C) = rank(A + B - 2C) = rank[(A-C) + (B-C)]$$
$$\leq rank(A-C) + rank(B-C) \leq n + rank[(A-C)(B-C)] = n$$

Câu 4: Tính A^{2009}, trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -9 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Giải: Đổi chỗ các dòng, cột, ta thấy ma trận A đồng dạng với ma trận

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & -9 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ma trận P của phép biến đổi tuyến tính (không suy biến) là:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Khi đó ma trận $P^{-1} = P^T$. Ta có $A = P.diag(C, D).P^{-1}$

Trong đó $C = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ và $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Ta có $C^3 = C^2$ và $A^{2009} = P.diag(C^{2009}, D^{2009}).P^{-1}$. Do đó

$$A^{2009} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Câu 5: Tìm tất cả các ma trận vuông A cấp $n \geq 2$ sao cho với mọi ma trận vuông B cấp n, ta đều có $\det(A + B) = \det A + \det B$

Giải:

Chọn ma trận $B = A$, ta có $2^n \det A = \det(2A) = 2 \det A$ => $(2^n - 2)\det A = 0$ => $\det A = 0$ do $(n \geq 2)$.

Giả sử $A = (a_{ij})_{n\times n}$, ta chọn ma trận tam giác trên $B = (b_{ij})_{nxn} = \begin{cases} b_{11} = 0 \\ b_{ij} = 0 \ (i > j) \\ b_{ij} = -a_{ij} \ (i \leq j) \\ b_{ii} = 1 - a_{ii} \ (i > 1) \end{cases}$

Khi đó ta thu được $a_{11} = 0$. Bằng cách đổi vị trí hàng hay cột để đưa phần tử bất kì a_{ij} của A về vị trí góc trái trên cùng và lặp lại phép chứng minh trên ta được $a_{ij} = 0$.

Vậy ma trận cần tìm là ma trận O.

Câu 6: Thí sinh chọn một trong hai câu sau:

a) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 1 \end{cases}$$

b) Ứng với mỗi đa thức $P(x)$ với hệ số thực và có nhiều hơn một nghiệm thực, gọi $d(P)$ là khoảng cách nhỏ nhất giữa hai nghiệm thực bất kì của nó. Giả sử các đa thức với hệ số thực $P(x)$ và $P(x) + P'(x)$ đều có bậc $k > 1$ và có k nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng $d(P + P') \geq d(P)$

Giải:

a) Từ hai phương trình đầu: $3x_1 - x_2 = 3x_3 - x_4$. Từ phương trình 3, 4: $3x_1 - x_2 = x_4 - 3x_3$
=> $3x_1 - x_2 = 0$
Từ phương trình 1, 3: $x_1 + 3x_2 = 3x_3 - x_4$. Từ phương trình 2, 4: $x_1 + 3x_2 = x_4 - 3x_3$
=> $x_1 + 3x_2 = 0$
Vậy ta có $x_1 = x_2 = 0$ => $x_4 = x_6 = 1$, $x_3 = x_5 = \frac{1}{3}$

b) Gọi nghiệm của $P(x)$ là $x_1, x_2, \dots, x_k$ sao cho $x_1 < x_2 < \dots < x_k$. Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử $d(P+P') = b - a < d(P)$, trong đó β, α là hai nghiệm gần nhau nhất trong số các nghiệm của $P(x) + P'(x)$. Khi đó b, a không là nghiệm của $P(x)$ nên

$$\frac{P'(a)}{P(a)} = \frac{P'(b)}{P(b)} = -1 \quad (1)$$

Đặt $P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k)$. Suy ra

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{x - x_j} \quad (2)$$

Dễ dàng nhận thấy hàm số $\frac{P'(x)}{P(x)}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó. Kết hợp với (1) suy ra tồn tại duy nhất j_0 sao cho $x_{j0} \in (a, b)$. Khi đó $x_{i+1} - x_i > b - a\ \forall i = 1, \dots, n$. Hay $a - x_i > b - x_{i+1}$. Dễ dàng kiểm tra được $(a - x_i)(b - x_j) > 0$ và do đó

$$\frac{1}{a - x_i} < \frac{1}{b - x_{i+1}} \ \forall i = 1, \dots k - 1 \text{ và } a - x_k < 0 < b - x_1$$

Như vậy, ta có

$$-1 = \frac{P'(a)}{P(a)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a - x_j} + \frac{1}{a - x_k} < \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{b - x_j} + \frac{1}{b - x_k} = -1 \ (!)$$

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **BỘ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO**

OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN TOÀN QUỐC LẦN THỨ XVIII NĂM 2010

Môn thi: Đại số

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1: Cho A, B là các ma trận vuông cấp 2010 với hệ số thực sao cho

$$\det A = \det(A+B) = \det(A+2B) = \ldots = \det(A+2010B) = 0.$$

a) Chứng minh rằng $\det(xA+yB) = 0\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Tìm ví dụ chứng tỏ kết luận trên không còn đúng nếu chỉ có

$$\det A = \det(A+B) = \det(A+2B) = \ldots = \det(A+2009B) = 0.$$

Giải:

a) Nhận xét rằng định thức $P(t) = \det(A+tB)$ là một đa thức bậc 2010 của t có 2011 nghiệm nên $P(t) \equiv 0$. Định thức $Q(t) = \det(tA+B)$ cũng là đa thức bậc 2010 của t. Mà $Q(t) = t^{2010}P(t^{-1}), t \neq 0$. Do đó ta cũng có $Q(t) \equiv 0$.

- Với $x = y = 0$ thì $\det(xA+yB) = \det 0 = 0$
- Với $x = 0, y \neq 0$ thì $\det(xA+yB) = \det(yB) = y^{2010}\det B = y^{2010}Q(0) = 0$
- Với $x \neq 0, y = 0$ thì $\det(xA+yB) = \det(xA) = x^{2010}\det A = y^{2010}P(0) = 0$
- Với $x \neq 0, y \neq 0$ thì ta có $\det(xA+yB) = x^{2010}\det\left(A+\frac{y}{x}B\right) = P\left(\frac{y}{x}\right) = 0$

Vậy $\det(xA+yB) = 0\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Chọn $A = diag(0,1,2,\ldots,2009) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2009 \end{pmatrix}$ và $B = -I$

Khi đó $\det A = \det(A+B) = \det(A+2B) = \ldots = \det(A+2009B) = 0$ nhưng $\det(A+2010B) \neq 0$

Câu 2: Cho $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ là các dãy số thực được xác định bởi $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ và $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n - 7v_n + 5w_n \\ v_{n+1} = -2u_n - 8v_n + 6w_n \\ w_{n+1} = -4u_n - 16u_n + 12w_n \end{cases}$$

Chứng minh rằng $v_n - 2$ là số nguyên chia hết cho 2^n.

Giải:

Đặt $A = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 5 \\ -2 & -8 & 6 \\ -4 & -16 & 12 \end{pmatrix}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ $(n \in \mathbb{N})$. Ta có $\forall n \in \mathbb{N}: X_{n+1} = AX_n \Rightarrow X_n = A^nX_0$

Đa thức đặc trưng của A là: $P_A(x) = -x(x-1)(x-2)$. Do đó A chéo hóa được và

$$A = PBP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Suy ra $\forall n \in \mathbb{N}: X_n = A^nX_0 = PB^nP^{-1}X_0$

Tính toán ta được $v_n = -3.2^n + 2$.

Câu 3:

a) Chứng minh rằng ứng với mỗi số n nguyên dương, biểu thức $x^n + y^n + z^n$ có thể biểu diễn dưới dạng đa thức $P_n(s,p,q)$ bậc không quá n của các biến $s = x + y + z,\ p = xy + yz + zx,\ q = xyz$.

b) Hãy tìm tổng các hệ số của đa thức $P_{2010}(s,p,q)$.

Giải:

a) Ta chứng minh đẳng thức $P_n(s,p,q) = sP_{n-1}(s,p,q) - pP_{n-2}(s,p,q) + qP_{n-3}(s,p,q)$ là đa thức bậc không quá n của các biến $s = x + y + z,\ p = xy + yz + zx,\ q = xyz$

- Với $n = 1$: $P_1(s,p,q) = s$
- Với $n = 2$: $P_2(s,p,q) = s^2 - 2p$
- Với $n = 3$: $P_3(s,p,q) = s^3 - 3s^2p + 3p$
- Giả sử đẳng thức đúng với $n \geq 4$, ta chứng minh nó cũng đúng với $n + 1$, tức là

$$P_{n+1}(s,p,q) = sP_n(s,p,q) - pP_{n-1}(s,p,q) + qP_{n-2}(s,p,q)$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp, ta có các đa thức $P_n(s,p,q), P_{n-1}(s,p,q), P_{n-2}(s,p,q)$ bậc không quá n của các biến s,p,q. Suy ra $P_{n+1}(s,p,q)$ là các đa thức bậc không quá $n+1$ của các biến s,p,q.

b) Ta có $P_{2010}(s,p,q) = x^{2010} + y^{2010} + z^{2010}$. Ta tìm tổng các hệ số của $P_{2010}(s,p,q)$ tức là tìm $P_{2010}(1,1,1)$. Từ định lí Viete, x, y, z là nghiệm của phương trình $t^3 - t^2 + t - 1 = 0$. Từ đó chỉ việc chọn $x = 1, y = i, z = -i$, ta được $P_{2010}(1,1,1) = -1$.

Câu 4: Xác định các đa thức thực $P(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$P(x)P(x^2) = P(x^3 + 2x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Giải: Ta nhận thấy đa thức hằng $P(x) \equiv 0$ và $P(x) \equiv 1$ thỏa mãn bài Toán. Ta chứng minh các đa thức bậc dương không thỏa. Chú ý rằng đẳngthức trong bài Toán cũng đúng với giá trị phức.

Giả sử x_0 là một nghiệm (thực hoặc phức) của $P(x)$. Nếu $x_0 = 0$ thì $P(x) = x^sQ(x)$, trong đó $s \geq 1, Q(0) \neq 0$

Thế vào điều kiện đã cho, ta thu được:

$$x^{2s}Q(x)Q(x^2) = (x^2 + 2)^sQ(x^3 + 2x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Điều này mâu thuẫn $Q(0) \neq 0$

Vậy $x_0 \neq 0$. Ta có thể giả thiết modulo $|x_0|$ có giá trị lớn nhất trong các nghiệm của $P(x)$. Khi đó $x_0^3 + 2x_0$ và $\sqrt{(x_0)}^3 + 2\sqrt{x_0}$ cũng là nghiệm. Do đó $\left|x_0^3 + 2x_0\right| \leq |x_0|$ và $\left|\sqrt{(x_0)}^3 + 2\sqrt{x_0}\right| \leq 0$

Đặt $x_0 = a + bi$:

$$\left|x_0^3 + 2x_0\right| \leq |x_0|$$

$$<=> (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 + 4(a^2 - b^2) + 3 \leq 0$$

$$<=> 3 + 4a^2 \leq 4b^2$$

Thay vào tiếp, ta lại có $4b^2 \geq 4a^2b^2 + 4a^2 + 3 \geq a^2.3 + 4b^2 + 3 = 7a^2 + 3 \quad (*)$

$$\left|\sqrt{(x_0)}^3 + 2\sqrt{x_0}\right| \leq 0$$

$$<=> [(a+2)^2 + b^2]^2 \leq a^2 + b^2$$

$$<=> (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + 8a + 7) + (4a + 4)^2 \leq 0\ (**)$$

Theo $(*)$, ta có:

$$a^2+b^2+8a+7 \geq \frac{1}{4}\left[\left(3a+\frac{16}{3}\right)^2+2a^2+\frac{23}{9}\right]>0$$

Mâu thuẫn với $(**)$.

Câu 5: Chọn một trong hai câu sau:

5a) Cho A là ma trận thực, vuông cấp $n \geq 2$, có vết là 10 và $rankA = 1$. Tìm đa thức đặc trưng và đa thức tối tiểu của A.

5b) Cho A, B, C là các ma trận thực, vuông cấp n, trong đó A khả nghịch và đồng thời giao hoán B, C. Giả sử $C(A+B) = B$. Chứng minh B, C giao hoán với nhau.

Giải:

5a) <u>Cách 1</u>: Tính trực tiếp

Vì $rankA = 1$ nên tồn tại vector khác 0 sao cho các vector dòng còn lại đều biểu diễn tuyến tính được qua nó. Do đó ma trận A có dạng sau:

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1x_1 & \lambda_1x_2 & \dots & \lambda_1x_n \\ \lambda_2x_1 & \lambda_2x_2 & \dots & \lambda_nx_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_ix_1 & \lambda_ix_2 & \dots & \lambda_ix_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_nx_1 & \lambda_nx_2 & \dots & \lambda_nx_n \end{pmatrix}$$

Đặt $U=\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_i \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \neq 0,\ V=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0.$

Khi đó $A = U^TV$ và $VU^T = \lambda_1x_1 + \lambda_2\, x_2 + \ldots + \lambda_ix_i + \ldots + \lambda_nx_n = traceA = 10$

- Ta có $A^2 = (U^TV)(U^TV) = U^T(VU^T)V = U^T(traceA)V = (traceA)U^TV = (traceA)A = 10A$

  Vậy đa thức tối tiểu của A là $P(t) = t^2 - 10t$.

- Tính định thức $D_n(t) = \det(A + tI)$

$$D_n=\begin{vmatrix} \lambda_1x_1+t & \lambda_1x_2 & \dots & \lambda_1x_n \\ \lambda_2x_1 & \lambda_2x_2+t & \dots & \lambda_nx_n \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \lambda_ix_1 & \lambda_ix_2 & \dots & \lambda_ix_n \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \lambda_nx_1 & \lambda_nx_2 & \dots & \lambda_nx_n+t \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda_1x_1+t & \lambda_1x_2 & \dots & \lambda_1x_n \\ \lambda_2x_1 & \lambda_2x_2+t & \dots & \lambda_nx_n \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ \lambda_ix_1 & \lambda_ix_2 & \dots & \lambda_ix_n \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ \lambda_nx_1 & \lambda_nx_2 & \dots & \lambda_nx_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \lambda_1x_1 & \lambda_1x_2 & \dots & \lambda_1x_n \\ \lambda_2x_1 & \lambda_2x_2 & \dots & \lambda_nx_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_ix_1 & \lambda_ix_2 & \dots & \lambda_ix_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_n x_n \begin{vmatrix} \lambda_1 x_1 + t & \lambda_1 x_2 & \dots & \lambda_1 \\ \lambda_2 x_1 & \lambda_2 x_2 + t & \dots & \lambda_n \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ \lambda_i x_1 & \lambda_i x_2 & \dots & \lambda_i \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{vmatrix} + tD_{n-1}$$

$$= \lambda_n x_n \begin{vmatrix} t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & \dots & 1 \end{vmatrix} + tD_{n-1} = \lambda_n x_n t^{n-1} + tD_{n-1}$$

Dễ dàng chứng minh bằng quy nạp rằng: $D_n = t^{n-1}(\lambda_n x_n + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \dots + \lambda_2 x_2 + D_1)$

$$= t^{n-1}(traceA + t) = t^{n-1}(t + 10)$$

Vậy đa thức đặc trưng của A là $(-1)^n t^{n-1}(t - 10)$.

Cách 2: Vì $rankA = 1$ hay $(\dim\ker A = n - 1)$ nên A có đúng $n - 1$ vector riêng ứng với 0. Do vậy mà giá trị riêng còn lại là một số thực. Từ đó A chéo hóa được và trên đường chéo chỉ có một phần rử khác 0 là 10.Suy ra ngay đa thức đặc trưng và đa thức tối tiểu.

5b) Từ giả thiết, suy ra $A + C(A + B) = A + B$ hay $A = (I - C)(A + B)$

Do A khả nghịch và đồng thời giao hoán cả B, C nên $I = (I - C)(A + B)A^{-1} = (I - C)A^{-1}(A + B)$

Suy ra $(I - C)$ và $A^{-1}(A + B)$ là nghịch đảo của nhau nên

$$I = (I - C)A^{-1}(A + B) = A^{-1}(A + B)(I - C)$$

$$\Leftrightarrow A = (A + B)(I - C)$$

$$\Leftrightarrow B = (A + B)C$$

Vậy $(A + B)C = C(A + B)$ tức $BC = CB$.

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **BỘ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO**

OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN TOÀN QUỐC LẦN THỨ XIX NĂM 2011

Môn thi: Đại số

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1: Xét không gian trên trường số thực $\mathbb{R}$, chứng minh rằng tập hợp $\{e^x, e^{x^2}, \dots, e^{x^n}\}$ độc lập tuyến tính trong không gian các hàm liên tục $C(0, +\infty)$.

Giải: Giả sử ta có hệ thức tuyến tính: $a_1 e^x + \dots + a_n e^{x^n} = 0$ **(2đ)**

Chia 2 vế cho e^{x^n} và lấy giới hạn $x \to \infty$ suy ra $a_n = 0$

Quy nạp được $a_i = 0$. **(3đ)**

Bài 2: Cho 3 dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ xác định như sau: $x_0 = y_0 = z_0$ và $\begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - y_n - 5z_n \\ y_{n+1} = 2x_n - 2z_n \\ z_{n+1} = x_n - 2z_n \end{cases}$. Tính x_{2011}.

Giải: Đặt $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Khi đó $X_n = A^n X_0$ **(1đ)**

Đa thức đặc trưng của A là $g(t) = -(t-1)(t+1)(t-2)$ nên A có 3 gtr $\pm 1, 2$ **(1đ)**

<u>Cách 1</u>: $t^{2011} = g(t)h(t) + at^2 + bt + c$ suy ra $A^{2011} = aA^2 + bA + cI$ **(1đ)**

Lập hpt cho a, b, c bằng cách thay các giá trị đặc biệt của t và giải ta tìm được $b = 1, a = -c = (2^{2011} - 2)/3$ **(1đ)**

Suy ra $x_{2011} = \frac{2}{3}(1 - 2^{2013})x_0$ **(1đ)**

<u>Cách 2</u>: Chéo hóa A kèm ma trận biến đổi cơ sở **(2đ)**

Tính $A^{2011} => x_{2011}$ **(1đ)**

Bài 3: Cho các ma trận thực A, B vuông cùng cấp n. Đặt $C = AB - BA$. Chứng minh rằng nếu ma trận C giao hoán với cả hai ma trận A và B thì tồn tại số nguyên dương m sao cho $C^m = 0_n$ (với 0_n là ma trận không cấp n)

Giải:

* Chứng minh quy nạp $AB^k - B^k A = kB^{k-1}C,\ \forall k \in \mathbb{N}\ (*)$ **(2đ)**

Với $k = 1$: ok

Giả sử ta có $AB^k - B^k A = kB^{k-1}C,\ \forall k \in \mathbb{N}$, ta chứng minh $AB^{k+1} - B^{k+1}A = (k+1)B^k C,\ \forall k \in \mathbb{N}$

Thật vậy
$$\begin{aligned} AB^{k+1} - B^{k+1}A &= AB^{k+1} - BAB^k + BAB^k - B^{k+1}A \\ &= (AB - BA)B^k + B\left(AB^k - B^k A\right) = CB^k + B(kB^{k-1}C) \\ &= B^k C + kB^k C = (k+1)B^k C \end{aligned}$$

* Lấy $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ là đa thức bậc n bất kì.

Ta có $f'(x) = a_0 n x^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \dots + a_{n-2}2x + a_{n-1}$

Từ $(*)$ suy ra $Af(B) - f(B)A = f'(B)C\ (**)$ **(1đ)**

Xét đa thức đặc trưng của B: $p(x) = \det(B - xI_n)$

Ta có $p(B) = O_n$ **(2đ)**

Theo $(**)$ ta có $Ap(B) - p(B)A = p'(B)C\ hay\ O_n = p'(B)C$

Lại chọn $q(x) = p'(x)$ và nhờ vào tính giao hoán của C, ta có $Ap'(B)C - p'(B)CA = p''(B)C^2 = 0_n$

Tiếp tục quá trình này ta được: $0_n = (-1)^n n!\,C^n$.

Bài 4: Tìm điều kiện cần và đủ đối với các tham số $u, v \in \mathbb{R}$ sao cho nếu đa thức $P(x)$ bậc $n \geq 2$ có n nghiệm thực (kể cả bội) thì đa thức $P(x) + uP'(x) + vP''(x)$ cũng có n nghiệm thực.

Giải:

* Điều kiện cần: lấy $P(x) = x^n$ suy ra $v \leq 0$ hoặc $u^2/_{4v} > n - 1/_n$ **(1đ)**

Qua giới hạn suy ra $u^2 - 4v \geq 0$ **(1đ)**

* Điều kiện đủ: bổ đề $Q(x) = P(x) \neq P'(x)$ có đủ n nghiệm thực **(1đ)**

Để chứng minh, xét $R(x) = e^{\frac{x}{a}}P(x)$ cũng có n nghiệm thực, nên $R'(x)$ có $n - 1$ nghiệm thực nên $Q(x)$ có n nghiệm thực. **(1đ)**

Áp dụng lần nữa, $Q(x) + bQ'(x)$ có n nghiệm thực từ đó chọn a, b thích hợp để $a^2 - 4v \geq 0$ là điều kiện đủ. **(1đ)**

Bài 5: Hai sinh viên A và B chơi trò chơi như sau: Cho một bảng vuông n x n ô, $n \geq 2$. Mỗi lượt, A chọn một số nguyên điền vào vị trí (i, j) nào đó (tùy chọn nhưng không lặp lại). Sau đó B được quyền chỉnh sửa giá trị đó bằng cách giữ nguyên hoặc thêm bớt 1 đơn vị. Trò chơi kết thúc sau khi điền xong bảng để nhận được ma trận X. B khẳng định luôn có cách để nhận được ma trận X khả nghịch và không có điểm bất động (tức là không có vector $v \neq 0$ để $Xv = v$).

Khẳng định của B đúng hay sai? Hãy chứng minh nhận định của bạn.

Giải: B chọn $x_{ii} \equiv -1\ (mod\ 3)$; $x_{ij} \equiv 0\ (mod\ 3) với\ i \neq j$. **(2đ)**

$|X| \equiv (-1)^n\ (mod\ 3)\ \neq 0$ **(1đ)**

Nếu X có vector riêng v tương ứng với 1 thì có thể chọn $v \in \mathbb{Z}^n$, nên vector đồng dư $\bar{v} \in \mathbb{Z}_3$ (tức là các phần tử đều lấy mod 3) là vector riêng **(1đ)**

Nhưng $|X| = -I$ chỉ có giá trị riêng là -1. **(1đ)**

Bài 6: Thí sinh chọn một trong hai câu sau:

6a. Tìm điều kiện của các tham số a, b, c, d để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + (1+a^2)x_2 + (1+a^3)x_3 + (1+a^4)x_4 = 0 \\ (1+b)x_1 + (1+b^2)x_2 + (1+b^3)x_3 + (1+b^4)x_4 = 0 \\ (1+c)x_1 + (1+c^2)x_2 + (1+c^3)x_3 + (1+c^4)x_4 = 0 \\ (1+d)x_1 + (1+d^2)x_2 + (1+d^3)x_3 + (1+d^4)x_4 = 0 \end{cases}$$

6b. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hãy tính A^{2012}.

Giải:

6a) Định thức tương ứng bằng

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 1+a^2 & 1+a^3 & 1+a^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1+d & 1+d^2 & 1+d^3 & 1+d^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \end{pmatrix} (\mathbf{1}\text{đ})$$

$$= P(a-b)\dots(c-d)\ (\mathbf{3}\text{đ})$$

Trong đó $P = [2abcd - (a-1)(b-1)(c-1)(d-1)]$ => $P \neq 0, a, b, c, d$ đôi một phân biệt **(1đ)**

6b) Cách 1: $A = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ **(2đ)** => $A^n = \sqrt{2}^n \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{4} & -\sin\frac{n\pi}{4} \\ \sin\frac{n\pi}{4} & \cos\frac{n\pi}{4} \end{pmatrix}$ **(2đ)**

=> $A^{2012} = -2^{1006} I$ **(1đ)**

Cách 2:

Đặt $B = \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ => $P^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$

Khi đó: $A = PBP^{-1}$

$$A^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (1-i)^n & 0 \\ 0 & (1+i)^n \end{pmatrix}\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = -\sqrt{2}^n \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = -\sqrt{2}^n I$$

=> $A^{2012} = -2^{1006} I$