Tài liệu ôn thi Olympic Đại số tuyến tính.

Trần Thị Thúy-Bộ môn Đại số XSTK

==

Chương trình Olympic Toán Đại số tuyến tính bao gồm các phần

Phần 1. Ma trận

+ Các phép toán về ma trận

+ Ma trận nghịch đảo

+ Hạng của ma trận

Phần 2. Định thức

Phần 3. Phương trình và hệ phương trình

Phần 4. Véctơ riêng và giá trị riêng

Phần 5. Đa thức

==

Phần I.1 Luỹ thừa ma trận.

Bài toán 1: Cho A là ma trận vuông cấp s. Hãy tính A^n.

1. Tr- ờng hợp s = 2.

Phương pháp 1. Dùng định lí Hamilton-Cayley.

Mọi ma trận $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in C$ đều là nghiệm của ph- ơng trình bậc hai $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$.

Ví dụ áp dụng

VD1. Tính $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2006}$

LG. Đặt $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Theo định lí trên ta có $A^2 - (0+0)A + 1.E = 0 \Leftrightarrow A^2 = -E$

Vậy $A^{2006} = (A^2)^{1003} = (-E)^{1003} = -E.$

Có thể suy ra kết quả tổng quát $A^n = \begin{cases} E & \text{nếu n chẵn} \\ A & \text{nếu n lẻ} \end{cases}$.

VD2. Cho $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Tính A^n.

LG. Theo định lí Hamilton-Cayley ta có $A^2-4A+3E=0$. (*)

Xét phép chia của đa thức x^n cho đa thức x^2-4x+3., giả sử đ- ợc th- ơng là đa thức q(x) và d- là đa thức ax+b.

$$x^n=\left(x^2-4x+3\right)q(x)+ax+b$$

Ta hoàn toàn có thể tìm đ- ợc hệ số a và b bằng cách thay x = 1, 3 vào đẳng thức trên. Ta đạt đ- ợc kết quả là $\begin{cases} a=\dfrac{3^n-1}{2}\\ b=\dfrac{3-3^n}{2}\end{cases}$

Vậy $A^n=\left(A^2-4A+3E\right)q(A)+aA+bE$. Kết hợp với (*) ta có

$$A^n=aA+bE=\frac{3^n-1}{2}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\frac{3-3^n}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

VD3.(OL2002) Cho $A=\begin{pmatrix}1+\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{5}{2}\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\end{pmatrix}$. Tính A^{2002}.

LG. Làm hoàn toàn t- ơng tự nh- các ví dụ trên ta có kết quả là

$$A^{2004}=(A^2-\sqrt{3}A+E)q(A)+(-\sqrt{3}A+2E)=-\sqrt{3}A+2E=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}-\sqrt{3} & \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2}+\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

VD4. Tìm tất cả các ma trận vuông cấp 2 mà bình ph- ơng của nó bằng E.

LG. Giả sử $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Do $A^2=E\Rightarrow |A|^2=1\Rightarrow |A|=\pm 1$.

- Nếu $|A|=1\Leftrightarrow ad-bc=1$khi đó theo định lí Hamilton-cayley ta có

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=0$$
$$\Leftrightarrow E-(a+d)A+E=0$$
$$\Leftrightarrow A=\frac{2}{a+d}E$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{a+d} & 0\\ 0 & \dfrac{2}{a+d}\end{pmatrix}\Leftrightarrow \begin{cases} b=c=0\\ a=d=\dfrac{2}{a+d}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} b=c=0\\ a=d=\pm 1\end{cases}\Leftrightarrow A=\pm E$$

- Nếu $|A|=-1\Leftrightarrow ad-bc=-1$khi đó theo định lí Hamilton-cayley ta có

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=0$$
$$\Leftrightarrow E-(a+d)A-E=0$$
$$\Leftrightarrow (a+d)A=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+d=0 \\ A=0(\text{loại do } |A|=-1) \end{array}\right.$$

Vậy $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ với $-a^2-bc=-1$.

VD5. Tìm tất cả các ma trận vuông cấp hai, thực A mà $A^3=E$.

LG. Giả sử $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Do $A^2=E \Rightarrow |A|^3=1 \Rightarrow |A|=1 \Leftrightarrow ad-bc=1$.

Theo định lí Hamilton-cayley ta có

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=0 \quad (1)$$
$$\Rightarrow A^3-(a+d)A^2+A=0$$
$$\Rightarrow E-(a+d)A^2+A=0 \quad (2)$$

Trừ (1) cho (2) ta có

$$(1+a+d)A^2-(1+a+d)A=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 1+a+d=0 & (3) \\ A^2=A & (4) \end{array}\right.$$

Từ (3) suy ra $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -1-a \end{pmatrix}$ với $\text{a - a}^2-bc=1$. Thử lại kết quả này ta thấy đúng.

Từ (4) suy ra $A^3=A^2=A=E$.

Kết luận ma trận A cần tìm là

$$\left[\begin{array}{l} A=E \\ A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -1-a \end{pmatrix} \text{ với } a-a^2-bc=1 \end{array}\right.$$

VD6. Tìm tất cả các ma trận vuông cấp hai mà luỹ thừa 4 bằng E.

LG. Giả sử $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Do $A^4=E \Leftrightarrow (A^2-E)(A^2+E)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |A^2-E|=0 \\ |A^2+E|=0 \end{array}\right.$

Nếu $|A^2-E|=|A^2+E|=0$, ta giả sử $A^2=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ thì suy ra

$$\begin{cases} (a'-1)(d'-1)-b'c'=0 \\ (a'+1)(d'+1)-b'c'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a'd'-b'c'-a'-d'+1=0 \\ a'd'-b'c'+a'+d'+1=0 \end{cases}$$

Cộng hai vế của hai ph- ơng trình trong hệ trên ta có

$2(a'd'-b'c')=-2 \Leftrightarrow a'd'-b'c'=-1=|A|^2$ (vô lí do A thực)

Vậy nếu $|A^2-E|=0$ thì $|A^2+E|\neq 0$ hoặc $|A^2-E|\neq 0$ thì $|A^2+E|=0$.

Vậy $A^4=E \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A^2=E \\ A^2=-E \end{array}\right.$

Trở về bài toán nh- ở VD2.

VD7. Cho A là ma trận vuông cấp hai thực thoả mãn $A^n=0\,(n\geq 3)$. Chứng minh rằng $A^2=0$.

LG. Do $A^n=0 \Rightarrow |A|=ad-bc=0$. Kết hợp với định lí Hamilton-Kelly ta suy ra

$$A^2-(a+d)A=0 \Leftrightarrow A^2=(a+d)A$$
$$\Rightarrow A^n=A^{n-2}A^2=(a+d)A^{n-1}=...=(a+d)^{n-1}A=0$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+d=0 \Rightarrow A^2=(a+d)A=0 \\ \quad A=0 \Rightarrow A^2=0 \end{array}\right. \text{ (ĐPCM)}$$

VD8. (OL 96) Cho $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, Chứng minh rằng nếu $A^{1996}=0$ thì $A^2=0$.

LG. VD này là tr- ờng hợp đặc biệt của ví dụ 7 trên.

VD9. (OL 99) Cho ma trận $A=\begin{pmatrix} \frac{x}{1998} & 1999 \\ 0 & \frac{x}{2000} \end{pmatrix}$. Giả sử $A^n=(a_{ij}(n,x))$. Hãy tính $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to 1} a_{ij}(n,x)$.

LG. Tính A^n bằng ph- ơng pháp nh- các VD trên. Sau đó đi tính lim của từng số hạng.

Phương pháp 2. Sử dụng kết quả sau: nếu $A=\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ thì $A^n=\begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix} \quad \forall n\in \mathbb{N}^*$.

VD10. Tính $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2003}$

LG. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2003}=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} \\ -\sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}^{2003}=\begin{pmatrix} \cos\frac{2003\pi}{2} & \sin\frac{2003\pi}{2} \\ -\sin\frac{2003\pi}{2} & \cos\frac{2003\pi}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

VD10. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{n} \\ -\frac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}$ $n \in N$. Tính $I = \lim\limits_{x \to 0} \left(\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{x}\left(A^n - E\right)\right)$.

LG. Ta có $A = \sqrt{1 + \frac{x^2}{n^2}} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ với $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{n^2}}}$, $\sin\varphi = \frac{x/n}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{n^2}}}$

$$\left(\frac{1}{x}\left(A^n - E\right)\right) = \frac{1}{x}\left[\left(\sqrt{1 + \frac{x^2}{n^2}} \right)^n \begin{pmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix} - 1 \right]$$

Mặt khác $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = 1$

Và $tg\varphi = \frac{x}{n} \Rightarrow n\varphi = \frac{x\varphi}{tg\varphi} \to x$ khi $n \to \infty$

Do đó $I = \lim\limits_{x \to 0} \left(\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{x}\left(A^n - E\right)\right) = \lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} \begin{pmatrix} \cos x - 1 & \sin x \\ -\sin x & \cos x - 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

VD11. Cho $A_j = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\Pi j}{n} & \sin\frac{2\Pi j}{n} \\ -\sin\frac{2\Pi j}{n} & \cos\frac{2\Pi j}{n} \end{pmatrix}$, hãy tính $S = A_0^p + A_1^p + ... + A_{n-1}^p$.

LG. Đặt $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ và $A = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & \sin\frac{2\pi}{n} \\ -\sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}$. Suy ra

$A^n = E$ và $S = E + A^{1.p} + A^{2.p} + ... + A^{(n-1)p}$

Nếu p chia hết cho n thì S = nE

Nếu p không chia hết cho n thì nhân cả hai vế của đẳng thức trên với A^p ta có $SA^p = A^p + A^{2p} + ... + E = S \Leftrightarrow S(A^p - E) = 0$. Nh- ng do p không chia hết cho n nên dễ dàng kiểm tra đ- ợc $\left|A^p - E\right| \neq 0$. Do đó S = 0.

Bài toán 2. Cho A là ma trận vuông cấp 3. Hãy tính luỹ thừa bậc n của A.

Phương pháp 1. Tìm đa thức bậc hai nhận ma trận A là nghiệm bằng cách : tính A^2 và tìm hai số α, β sao cho $A^2 = \alpha A + \beta E$.

Khi đó ph- ơng trình bậc hai cần tìm là $x^2 - \alpha x - \beta = 0$.

Các b- ớc tiếp theo làm giống nh- bài toán 1.

VD1. Tính $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^n$

VD2.(OL97) Giả sử $\begin{cases} x_{n+1} = -x_n + y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases}$. Hãy xác định x_n, y_n, z_n theo x_0, y_0, z_0.

GY. Bài toán quy về việc tính luỹ thừa ma trận $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^n$

VD3. Tính $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{100}$

Phương pháp 2. Dùng nhị thức Newton: Nếu A và B là hai ma trận giao hoán thì $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$.

Ta áp dụng ph- ơng pháp 2 khi ph- ơng pháp 1 không làm đ- ợc.

VD4. Tính A^{100} với $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

GY. Ta có A = E + B với $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}, B^3 = 0$

Khi đó $A^{100} = (E+B)^{100} = E + 100B + \frac{100.99}{2} B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -200 & 100 \\ -100 & 9901 & -4950 \\ -200 & 19800 & -9899 \end{pmatrix}$

VD5. Tính $A^{100} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{100}$

LG. Tách A = E + N với nhận xét là $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N^2 = N, ..., N^k = N$

Ta có $A^{100}=(E+N)^{100}=\sum_{k=0}^{100}C_{100}^{k}N^{k}=E+\left(\sum_{k=1}^{100}C_{100}^{k}N^{k}\right)=E+\left(\sum_{k=1}^{100}C_{100}^{k}\right)N=E+(2^{200}-1)N$.

Phần I.2 Ma trận nghịch đảo.

<u>*Bài toán cơ bản 1:*</u> Cho A là ma trận vuông cấp n thoả mãn $A^{k}=0 \quad (k\in N^{*})$. Chứng minh rằng các ma trận E + A và E - A là các ma trận khả nghịch.

CM.

Xét

$$(E-A)(E+A+A^2+...+A^{k-1})=(E+A+A^2+...+A^{k-1})-(A+A^2+...+A^{k-1}+A^{k})=E-A^{k}=E$$

Suy ra ma trận E - A là ma trận khả nghịch và $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+...+A^{k-1}$

T- ơng tự E + A cũng là ma trận khả nghịch với chú ý là $A^{k}=0\Rightarrow(-A)^{k}=0$.

Bài tập áp dụng .

Bài 1. Cho các ma trận vuông A, B thoả mãn $AB=BA, A^{1999}=B^{2000}=0$. Chứng minh rằng ma trận E+A+B là trận khả nghịch.

CM.

Có $(A+B)^{3999}=\sum C_{3999}^{k}A^{k}B^{3999-k}=0$ (Vì nếu $k\geq 2000$ thì $A^{k}=0$, nếu $k\leq 2000\Rightarrow 3999-k\geq 1999\Rightarrow B^{3999-k}=0$).

Bài 2. Cho A và B là các ma trận vuông câp n thực thoả mãn $AB=\alpha A+\beta B$ và $A^{1999}=B^{2000}=0$. Chứng minh rằng E +A +B là ma trận khả nghịch.

CM. Để cm bài 2 ta chỉ cần chỉ ra hai ma trận A và B giao hoán.

Thật vậy.

$$AB=\alpha A+\beta B\Rightarrow(A-\beta E)(A-\alpha E)=\alpha\beta E\Rightarrow(A-\alpha E)(A-\beta E)=\alpha\beta E$$
$$\Rightarrow BA=\alpha A+\beta B=AB$$

Sau đó áp dụng bài 1 ta có đpcm.

Bài 3. Cho 2n số thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=0$. Biết

$$A=\begin{pmatrix} a_1b_1+1 & a_1b_2 & .... & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2+1 & ..... & a_2b_n \\ .... & & .... & \\ & & & \\ a_nb_1 & a_nb_2 & .... & a_nb_n+1 \end{pmatrix}$$. Hãy tìm ma trận nghịch đảo của ma trận.

LG.

Nhận xét

$$(A-E)^2 = \left(\sum a_i b_i\right)(A-E) = 0 \Rightarrow \exists\ (\mathrm{E+A-E})^{-1} = E-(A-E) = 2E-A$$
$$\Rightarrow A^{-1} = 2E-A$$

Bài 4. Cho $A,B \in M_n(R)$ $(|\mathrm{A}| \neq 0)$ và B là ma trận luỹ linh. Chứng minh rằng ma trận $E + A^{-1}BA$ khả nghịch.

LG.

Chú ý rằng B là ma trận luỹ linh thì ma trận $A^{-1}BA$ cũng là ma trận luỹ linh cùng cấp. Sau đó áp dụng bài toán cơ bản 1 ta có đpcm.

Bài 5. Cho A là ma trận luỹ linh và f(x) là đa thức có hệ số tự do khác 0. Chứng minh rằng f(A) là ma trận khả nghịch.

LG.

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \quad (\mathrm{a}_0 \neq 0) \Leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{a}_0} f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + 1 \Rightarrow \frac{1}{\mathrm{a}_0} f(A) - E = a_n A^n + ... + a_1 A$$
$$= A\left(a_n A^{n-1} + ... + a_1 E\right) = \left(a_n A^{n-1} + ... + a_1 E\right)A.$$

Do A là ma trận luỹ linh nên từ đẳng thức trên ta suy ra $\frac{1}{a_0} f(A) - E$ là ma trận luỹ linh. Suy ra $\frac{1}{a_0} f(A)$ là ma trận khả nghịch. Suy ra f(A) là ma trận khả nghịch.

Bài 6. Cho $A,B \in M_n(R)$ sao cho E - AB khả nghịch. Chứng minh rằng ma trận E - BA cũng là ma trận khả nghịch.

CM.

Phản chứng. Giả sử

$$|E - BA| = 0 \Rightarrow \exists x_0 \neq 0 \text{ sao cho } (\mathrm{E - BA})\mathrm{x_o} = 0 \Leftrightarrow x_0 - BAx_0 = 0 \Rightarrow x_0 = By_0 \ \left(\text{với } \mathrm{y}_0 = Ax_0\right)$$

Nếu $y_0 = 0$ thì $x_0 = 0$ (mâu thuẩn)

Nếu $y_0 \neq 0$ thì ta xét $(E - AB)y_0 = y_0 - A(By_0) = y_0 - Ax_0 = 0$. (Mâu thuẩn với giả thiết ma trận E - AB khả nghịch).

Vậy điều giả sử ban đầu của ta là sai. ĐPCM.

Bài 7. Cho a_i là các số thực. Chứng minh rằng ma trận A cho d- ới đây khả nghịch và tính det (A^{-1})

$$A=\begin{pmatrix} 1+a_1^2 & -a_2 & -a_3 & a_4 \\ a_2 & 1+a_1^2 & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & 1+a_1^2 & -a_2 \\ -a_4 & -a_3 & a_2 & 1+a_1^2 \end{pmatrix}$$

LG. Ta có

$$AA^c=\left[(1+a_1^2)^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\right]E.\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{(1+a_1^2)^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}A$$

$$\left|AA^c\right|=\left[(1+a_1^2)^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\right]^4\Rightarrow\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{\left[(1+a_1^2)^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\right]^2}$$

==

Phần I.3 Hạng của ma trận

1. Các bất đẳng thức cơ bản về hạng của ma trận.

$r(A+B)\le r(A)+r(B)$ với A, B là các ma trận cùng cấp

$r(AB)\le \min\{r(A), r(\mathbf{B})\}$ với A là ma trận cấp $m\times n$, B là ma trận cấp $n\times p$

$r(A+B)\le r(A)+r(B)\le n+r(AB)$ với A, B là ma trận vuông cấp n

***Hệ quả 1*. Nếu A, B là các ma trận vuông cấp n thoả mãn AB = 0 thì**

$$r(A+B)\le r(A)+r(B)\le n$$

***Hệ quả 2*. Nếu A, B là các ma trận vuông cấp n và A là ma trận nghịch đảo thì** $r(B)=r(AB)=r(BA)$**.**

CM. Ta có $r(AB)\le r(B)=r(A^{-1}AB)\le r(AB)\Rightarrow r(B)=r(AB)$

2. Các tính chất cơ bản của hạng ma trận.

Tính chất 1. $r(A)=\dim\{\text{nghiệm của pht } Ax=0\}$.

Tính chất 2. Nếu A là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f:E\to F$ trong một cặp cơ sở nào đó thì $r(A)=\dim \operatorname{Im} f$.

3. Bài tập

Bài 1. Chứng minh rằng nếu $A\in M_n(R): A^2=E$ thì $r(A+E)+r(E-A)=n$.

LG.

Nhận thấy $(A+E)(E-A)=E^2-A^2=0$ nên áp dụng hệ quả 1 ta có $r(E+A)+r(E-A)\le n$

Mặt khác ta có $r(A+E)+r(E-A)\ge r(A+E+E-A)=r(2E)=n$.Suy ra ĐPCM.

Bài 2. Cho P, Q là hai ma trận vuông cấp n thoả mãn $P^2 = P, Q^2 = Q$ và $(E - P - Q)$ là ma trận khả nghịch thì $r(P) = r(Q)$.

CM.

□p dụng hệ quả 2 ta có

$$r(P) = r(P(E - P - Q)) = r(P - P^2 - PQ) = r(-PQ)$$
$$r(Q) = r((E - P - Q)Q) = r(Q - Q^2 - PQ) = r(-PQ)$$
$$\Rightarrow r(Q) = r(P).\ \text{ĐPCM}$$

Bài 3. Cho $B \in M_n(R) : r(B) = 1$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất số thực m sao cho $B^2 = mB$.

CM.

Do $B \in M_n(R) : r(B) = 1$ nên $\exists (a_1, a_2, ..., a_n) \neq (0,0,...,0)$ và các số thực $m_1, m_2, ..., m_n$ sao cho $B = \begin{pmatrix} m_1a_1 & m_1a_2 & ... & m_1a_n \\ m_2a_1 & m_2a_2 & ... & m_2a_n \\ .... & ... & ... & ... \\ m_na_1 & m_na_2 & ... & m_na_n \end{pmatrix}$.

Ta thấy $B^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} m_k\right) B = mB \quad \left(\text{với } m = \sum_{k=1}^{n} m_k\right)$.

Giả sử tồn tại số m' sao cho $B^2 = m'B \Rightarrow mB = m'B \Rightarrow (m - m')B = 0 \Rightarrow m = m'$

(do $r(B) = 1$ nên $B \neq 0$).

Bài 4. Cho $A^{2000} = 0$. Chứng minh rằng $\forall n:\ r(A) = r(A + A^2 + ... + A^n)$.

CM.

Xét hai ph- ơng trình

$$Ax = 0 \qquad (1)$$
$$Ax + A^2x + ... + A^n x = 0 \qquad (2)$$

Dễ thấy nếu x là nghiệm của ph- ơng trình (1) thì x cũng là nghiệm của ph- ơng trình (2).

Giả sử x là nghiệm của ph- ơng trình (2) .

Ta có

$Ax = -A^2x - A^3x - ...A^n x = -A^2(E + A + ... + A^{n-2})x = -A^2Bx \quad (\text{với } B = E + A + ... + A^{n-2})$

Nhận xét rằng AB = BA nên suy ra

$$Ax = -A^2Bx = -ABAx = -AB(-A^2Bx) = A^3B^2x = A^2B^2Ax = A^2B^2(-A^2Bx) = A^4B^3x = ... = (-1)^k A^k B^{k-1}x$$

$= 0$ nếu $k \geq 2000$.

Suy ra x cũng là nghiệm của ph- ơng trình (1).

Vậy hai tập nghiệm của (1)(2) trùng nhau. Kết hợp với tính chất $r(A) = \dim\{\text{nghiệm của pht Ax} = 0\}$ ta suy ra ĐPCM.

Chú ý: Bài này còn có cách giải khác.Ta thấy VP luôn nhỏ hơn hoặc bằng VT. Ta chứng minh VT nhỏ hơn hoặc bằng VP bằng cách đi cm ma trận $(E + A + ... + A^{n-1})$ *là ma trận khả nghịch.*

Bài 5. Chứng minh rằng hạng của ma trận phản đối xứng cấp n lẻ luôn là số chẵn.

CM.

Do A là ma trận phản đối xứng nên $A = -A^c$

Suy ra $|A| = |-A^c| = (-1)^n|A^c| = -|A| \Rightarrow |A| = 0$. Mà hạng của ma trận phản đối xứng bằng hạng của các ma trận con chính của A. Suy ra ĐPCM.

Bài 6. Chứng minh rằng với A là ma trận vuông cấp 3 bất kì $A^2 = 0 \Leftrightarrow r(A) \leq 1$ và $\mathrm{Tr(A)} = 0$.

CM.

$(\Leftarrow)$ Do $r(A) \leq 1 \Rightarrow A^2 = Tr(A)A = 0.$

$(\Rightarrow)$. Giả sử $A^2 = 0$.áp dụng bất đẳng thức cơ bản thứ hai ta có

$$r(A) + r(A) \leq r(A + A) \leq 3 + r(A^2) = 3 \Rightarrow r(A) \leq \frac{3}{2} \Rightarrow r(A) \leq 1$$

$\Rightarrow A^2 = Tr(A)A$. Mà $A^2 = 0$ nên $Tr(A)A = 0$. Suy ra hoặc $A = 0$ hoặc $Tr(A) = 0$

Nh- ng cả hai điều trên đều suy ra Tr(A) = 0. Vậy bài toán đ- ợc CM.

Bài 7. a. Cho A, B, C là các ma trận t- ơng ứng cỡ mxn, nxp, pxq. Chứng minh rằng. $r(AB) + r(BC) \leq r(B) + r(ABC)$

b. Cho A, B, C là các ma trận t- ơng ứng cỡ mxn, nxp, pxq sao cho $r(B) = r(AB)$.Chứng minh rằng $r(BC) = r(ABC)$.

CM. Câu b là hệ quả trực tiếp của câu a. Câu a đựoc CM nhờ tính chất 2 về hạng ma trận.

Bài 8. Cho A, B là hai ma trận vuông cùng cấp lẻ, AB = 0. Chứng minh rằng một trong hai ma trận $A + A^t, B + B^t$ là suy biến.

CM. Ta có

$r(A)+r(B) \le n + r(AB) = n \Rightarrow r(A) \le \frac{n}{2}$ hoặc $r(B) \le \frac{n}{2}$. Nh- ng do n lẻ nên

$r(A) < \frac{n}{2}$ hoặc $r(B) < \frac{n}{2}$. Suy ra $r(A+A^t) \le r(A) + r(A^t) < n$ hoặc $r(B+B^t) \le r(B) + r(B^t) < n$

Vậy một trong hai ma trận $A + A^t, B + B^t$ là suy biến.

Bài 9. Cho A, B là hai ma trận vuông cùng cấp n, A là ma trận luỹ linh, AB = BA, $B \neq 0$. Chứng minh rằng $r(AB) \le r(B) - 1$.

CM.

giả thiết phản chứng $r(AB) = r(B)$. Khi đó theo bài 7b ta có

$r(BA) = r(ABA) = r(A^2B) = ... = r(BA^k) = 0$ (Do gt A là ma trận luỹ linh)

$\Rightarrow \mathrm{r(B) = r(AB) = r(BA) = 0}$ (vô lí do $B \neq 0$)

Vậy gtpc của ta sai. Tức là điều phải chứng minh

10. Chứng minh rằng $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$

11. Chứng minh rằng $r\begin{pmatrix} A & B \\ 2A & -5B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$

12. Chứng minh rằng $r\begin{pmatrix} A_{nxn} & AB \\ B & B+B^2 \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$

13. Chứng minh rằng $r\begin{pmatrix} I_m & A_{mxn} \\ 0 & B_{nxn} \end{pmatrix} = m + r(B)$

14. Cho A là ma trận cấp pxp; B là ma trận cấp qxp; C là ma trận cấp qxq.

a. Chứng minh rằng $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} \ge r(A) + r(C)$

b. Chứng minh rằng nếu ma trận A khả nghịch thì $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = r(A) + r(C)$

15. Chứng minh rằng hạng của ma trận đối xứng và phản đối xứng là cấp cao nhất của định thức con chính khác 0.

16.a. Cho ma trận A cấp mxn có r(A) = 1. Chứng minh rằng tồn tại ma trận B cấp mx1 và ma trận C cấp 1xn để A = BC.

b. Cho ma trận A cấp mxn có r(A) = r. Chứng minh rằng tồn tại ma trận B cấp mxr và ma trận C cấp rxn để A = BC.

17. Chứng minh rằng hạng của ma trận phản đối xứng không thể là số lẻ.

BÀI TẬP VỀ HẠNG MA TRẬN.

Bài 1. Cho $A \in M(m \times n, T); B \in (n \times m, T)$.

a) Khi m khác n, hãy chứng tỏ rằng tồn tại ít nhất một trong hai ma trận A.B; B.A suy biến.

b) Khi m= n, lấy ví dụ chỉ ra rằng khẳng định ở câu a không đúng.

Bài 2. Chứng minh rằng mọi ma trận $A \in (n,T); A \neq \Theta$ tồn tại số nguyên d- ơng m sao cho r(A^k) = r(A^{k+1}), mọi k $\geq$ m.

Bài 3. Đây là bài rất quan trọng.

Cho $A \in M(m \times n, T), B \in M(n,T), C \in M(m,T)$ thỏa mãn $|A| \neq 0; |B| \neq 0$. Chứng minh rằng: r(A) = r(A.B) = r(C.A) = r(C.A.B).

Bài 4. MOS 2002.

Giả sử $P, Q \in M(n,T)$ thoả $\begin{cases} P^2 = P \\ Q^2 = Q \end{cases}$ và $E - (P+Q)$ khả nghịch.

Chứng minh rằng $r(P) = r(Q)$.

Bài 5. MOS 2003.

Giả sử A là ma trận vuông thỏa $A^{2003} = \Theta$. Chứng minh rằng:

$$\forall n \in N^* : r(A) = r(A + A^2 + \cdots + A^n)$$

Bài 6. Cho $A, B \in M(m \times n, T)$. Chứng minh rằng:

- $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$
- $r(A.B) \leq \min\{r(A), r(B)\}$

Bài 7. Cho ma trận B có hạng bằng r. Giả sử $\alpha_{i_1}; \alpha_{i_2}; ...\alpha_{i_r}$. là r hàng độc lập tuyến tính của B và $\beta_{j_1}; \beta_{j_2}; ..\beta_{j_r}$ cột độc lập tuyến tính của B.

Chứng minh rằng: Các phần tử nằm ở giao của các hàng, các cột đó lập thành một ma trận vuông cấp r, có giá trị định thức khác không.

Bài 8. Hạng của ma trận đối xứng hoặc phản đối xứng bằng cấp cao nhất của định thức con chính khác 0.

Bài 9. Chứng minh rằng hạng của ma trận phản đối xứng bao giờ cũng là một số chẵn.

Bài 10. Cho $f: V \to V$ là ánh xạ tuyến tính.

1) Chứng minh rằng $\dim V = \dim(imf) + \dim(\ker f)$.
2) Giả sử A là ma trận của f theo cặp cơ sở nào đó thì:

- $\dim(imf) = r(A)$.
- $\dim(\ker f) = \dim V - r(A)$

Bài 11. Giả sử A, B là các ma trận có cùng số hàng, ký hiệu (A,B) là ma trận tạo thành bằng ma trận B tiếp sau ma trận A. Chứng minh rằng:

$$r(A,B) \le r(A) + r(B).$$

Bài 12. Cho A, B là các ma trận vuông cấp n thì : $r(A) + r(B) \le r(AB) + n$ (bất đẳng thức Sylvester).

Bài 13. Cho $A, B \in M(n,T)$; n lẻ. Chứng minh rằng:

Nếu $AB = \Theta$ thì $\left[\begin{array}{l} r(A+A^t) < n \\ r(B+B^t) < n \end{array}\right.$

Bài 14. Cho $A, B \in M(n,T)$; thoả $AB = \Theta$. Chứng minh rằng:

a) $r(A) + r(B) \le n$;

b) Với k tuỳ ý thoả mãn $r(A) \le k \le n$ tồn tại ma trận C sao cho $r(A) + r(C) = k$.

Bài 15. MOS'95

Cho $A = (a_{ij}) \in M(n,T), n > 1 : r(A) = r$.đặt $P_A = (A_{ij})_{n\times n}$ trong đó A_{ij} là phần phụ đại số của a_{ij}.

Tìm $r(P_A)$.

Bài 16. Cho P, Q, R là các ma trận vuông cùng cấp. Chứng minh rằng

$$r(PQ) + r(QR) \le r(Q) + r(PQR)$$

Bài 17. Chứng minh rừng điều kiện cần và đủ để $B \in M(m\times n, T)$ có hạng nhỏ hơn hoặc bằng 1 là tồn tại $X \in T^n; Y \in T_n : B = X.Y$

Bài 18.MOS'99.

Cho $A \in M(1999 \times 2000, T)$ B^* là ma trận phụ hợp của $A^t A$. Biết $\left|A^t A\right| \ne 0$ và

$B^* \ne 0$ hãy xác định $r(B^*)$.

Bài 19. MOS 2000.

Trên đ- ờng chéo của ma trận thực vuông A cấp n đều là số 0 các phần tử còn lại đều bằng 1 hoặc 2002. Chứng minh rằng hạng của A hoặc bằng n hoặc bằng n-1.

Bài 20. Cho $A \in M(n, R) : \begin{cases} A^2 = A \\ r(A) = p \end{cases}$. $tr(A) = ?$

Bài 21. Cho các ma trận $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $T = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Tìm $B = T^{-1}AT$.

b) Tìm véc tơ riêng, giá trị riêng của A.

Bài 22. Biết A, B là nghiệm của ph- ơng trình $f(x) = x^2 - x$, và $AB + BA = \Theta$. Tính $|A - B|$.

Bài 23. Tìm ma trận $A \in M(n, R) : A^2 = \Theta$.

Bài 24. Chứng minh rằng nếu A là ma trận vuông cấp n với $A^2 = E$ thì $r(E + A) + r(E - A) = n$.

Bài 25. Tìm $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M(2, R)$ thỏa mãn $A^4 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Bài 26. Với $A \in M(n,T)$. Giả sử $tr(AX) = 0 \ \forall X \in M(n \times m, T)$. Chứng minh rằng $A = \Theta$.

Bài 27. Cho $A \in M(n,T)$ thoả $r(A) \leq 1$. Chứng minh rằng $A^2 = tr(A).A$.

Bài 28. Cho A, B, C là ba ma trận cỡ $m \times n; n \times p; p \times q$, sao cho $r(B) = r(AB)$. Chứng minh rằng $r(BC) = r(ABC)$.

Bài 29. Giả sử $A, B \in M(n,T)$; A là ma trận luỹ linh và $AB = BA; B \neq \Theta$. Chứng minh rằng $r(AB) \leq r(B) - 1$.

Bài 30. Giả sử $A, B \in M(n,T)$; chứng minh rằng: $r\begin{pmatrix} A & \Theta \\ \Theta & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$.

Bài 31. Cho $A = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$; $a, b \in C$. Tìm $r(A)$.

Bài 32. Ký hiệu $< \alpha, \beta >$ là tích vô h- ớng chính tắc của $\alpha, \beta \in R^n$. Cho $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3;..; \alpha_k \in R^n$. Chứng minh rằng:

1. $|G(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3;..; \alpha_k)| \geq 0$;

2. $G(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3;..; \alpha_k)$ là ma trận đối xứng và có các giá trị riêng không âm.

Bài 32. Chứng minh rằng $\alpha;\beta;\gamma \in R^*$ và a,b,c,d,p,q là những số thực tuỳ ý, thì ma trận

$$B=\begin{pmatrix} a & b.\dfrac{\alpha}{\beta} & c.\dfrac{\alpha}{\gamma} \\ b.\dfrac{\alpha}{\beta} & d & p.\dfrac{\beta}{\gamma} \\ c.\dfrac{\alpha}{\gamma} & p.\dfrac{\beta}{\gamma} & q \end{pmatrix}$$ có các giá trị riêng thực.

Bài 33. Chứng minh rằng nếu A thì $E-A$ khả nghịch.

Bài 34. Cho $A\in M(n,R)$ là ma trận phản xứng và n lẻ, $a\in R$. Chứng minh rằng $aE_n + A$ không khả nghịch khi và chỉ khi $a=0$.

Bài 35. Giả sử $n\geq 2$. Tìm tất cả các ma trận $A\in M(n,C)$ sao cho

$\forall M \in M(n,C): |A+M| = |A| + |M|$

Bài 36. Trong tập các ma trận đối xứng $A=(a_{ij})\in M(2,R)$ có cùng giá trị riêng là $k_1;k_2$. Hãy tìm $\max a_{12}$; $\min a_{12}$.

Bài 37. Cho A và B là hai ma trận phản đối xứng. Chứng minh rằng $A.B$ cũng là ma trận phản đối xứng (tức là $AB=-BA$).

Bài 38. Giả sử $n,p\in N^*; A\in M(n,T)$. Chứng minh rằng: $A^p = E \Rightarrow (P_A)^p = E_n$.

Bài 39. Cho $A\in M(n,R)$ là ma trận thực, đối xứng. Chứng minh rằng A có đủ n giá trị riêng thực.

===

Phần 2. Định thức.

Bài 1. Giả sử $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \in M(3,R)$.

1) Chứng minh rằng không thể có: Tích các phần tử trong mỗi hàng < 0 và tích các phần tử trong mỗi cột > 0.
2) Chứng minh rằng không thể có cả sáu số hạng trong định nghĩa của det(A) đều > 0.

Bài 2. Cho $A=(a_{ij})\in M(n,R), a_{ij}\in Z, \forall ij.$ thỏa mãn a_{ij} với i khác j là số chẵn và a_{ii} là số lẻ. Chứng minh rằng $\det A \neq 0$.

Bài 3. Cho $A=(a_{ij})\in M(n,R), a_{ij}\in Z, \forall ij.$ thỏa mãn a_{ij}, với i khác j, là số lẻ và a_{ii} là số chẵn. Chứng minh rằng $\det A\neq 0$.

Bài 4. Cho $A,B\in M(n,T)$ và $|A+B|\neq 0; |A-B|\neq 0$. Chứng minh rằng $\det\begin{pmatrix} A & B\\ B & A\end{pmatrix}$.

Các ph- ơng pháp tính định thức.

1. Đ- a về ma trận tam giác.
2. Tách nhân tử tuyến tính.
3. Sử dụng quan hệ hồi quy.
4. Thay đổi các phần tử của định thức.
5. Biểu diễn thành tổng các định thức.

1. Đ- a về ma trận tam giác.

Tính các định thức.

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0\end{vmatrix} \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x\\ x & a_2 & x & \cdots & x\\ x & x & a_3 & \cdots & x\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x & x & x & \cdots & a_n\end{vmatrix}.$$

2. Ph- ơng pháp tách nhân tử tuyến tính.

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1\end{vmatrix} \qquad D_4=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$ (Định thức vandermonde)

3. Ph- ơng pháp sử dụng các quan hệ hồi quy.

Ký hiệu D_i là định thức cấp i. Quan hệ hồi quy: $D_n = p.D_{n-1}+qD_{n-2}(1)$ ở đó n >2 và p, q là các hằng số.

Chú ý: Th- ờng dùng khai triển Laplace để có đ- ợc quan hệ (1).

a) Tr- ờng hợp q = 0.

(1) là $D_n = pD_{n-1} = p^2D_{n-2} = \cdots = p^{n-1}D_1 \Rightarrow D_n = p^{n-1}D_1$.

b) Tr- ờng hợp $q\neq 0$.

Gọi α, β là hai nghiệm của ph- ơng trình $x^2 - px + q = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = \alpha + \beta \\ q = \alpha\beta \end{cases}$

Nên (1): $D_n = (\alpha + \beta)D_{n-1} + \alpha\beta D_{n-2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D_n - \beta D_{n-1} = \alpha\left[D_{n-1} - \beta.D_{n-1}\right](2) \\ D_n - \alpha D_{n-1} = \beta\left[D_{n-1} - \alpha.D_{n-1}\right](3) \end{array}\right.$

Dùng (2) và (3) để thu đ- ợc kết quả.

Bài tập1. Cho $\alpha, \beta \in R : \alpha \neq \beta$, tính:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

Bài tập 2. Chứng minh rằng:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & a_{13}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & a_{23}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ a_{31}+x & a_{32}+x & a_{33}+x & \cdots & a_{3n}+x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & a_{n3}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = D_1 + x.\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{ij}$$

ở đó $D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}; A_{ij}$ là phần bù đại số của phần tử nằm ở hàng i, cột j của D_1.

4. Ph- ơng pháp thay đổi các phần tử của định thức.

Ví dụ. Tính $D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & x \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$

6. Ph- ơng pháp biểu diễn định thức thành tổng các định thức.

Ví dụ. Tính $D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 & \cdots & a_2+b_n \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 & \cdots & a_3+b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & a_n+b_3 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$

Bài tập.

Dùng ph- ơng pháp nhân tử tuyến tính, tìm $D = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$.

1. Cho 2n số

$$a_1; a_2; a_3; ...; a_n$$

$$b_1; b_2; b_3; ....; b_n : \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0.$$

Tính $D = \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & 1+a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & 1+a_nb_n \end{vmatrix}$

2. MOS 2003.

Cho $A = \begin{pmatrix} 1+x_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x_4 \end{pmatrix}$. Trong đó $x_1; x_2; x_3; x_4$ là nghiệm của đa thức $f(x) = x^4 - x + 1$. Tìm det(A).

3. Giả sử đã biết kết quả của định thức Vandermonde, hãy tính định thức sau:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-4} & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-4} & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-4} & x_3^{n-2} & x_3^{n-1} \\ 1 & x_4 & x_4^2 & \cdots & x_4^{n-4} & x_4^{n-2} & x_4^{n-1} \\ 1 & x_5 & x_5^2 & \cdots & x_5^{n-4} & x_5^{n-2} & x_5^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-4} & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

4. Chứng minh rằng, nếu $A, B \in M(n,R): AB = BA$ thì $\left|A^2 + B^2\right| \geq 0$.

6. (Định lý đường chéo trội): Cho $A = (a_{ij}) \in M(n,C): \left|a_{ij}\right| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left|a_{ij}\right|; \forall i = \overline{1;n}$. Chứng minh rằng $\det(A) \neq 0$.

==

Phần 4 Véctơ riêng- giá trị riêng.

Bài 1. Giả sử A là ma trận có giá trị riêng là k. Chứng minh rằng A^m có giá trị riêng là k^m.

Bài 2. Giả sử A là ma trận có giá trị riêng là k và $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x^1 + a_n$. Chứng minh rằng $f(A)$ có giá trị riêng là $f(k) = a_0k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \cdots + a_{n-1}k^1 + a_n$.

Bài 3. MOS 1995.

Cho $B \in M(n,R)$ và $\alpha \in R: \left|B - \alpha E\right| = 0$. Chứng minh rằng với mọi $a_0; a_1; ...; a_n \in R; n \in N$ ta có $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k B^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k E\right| = 0$.

Bài 4. Cho λ là giá trị riêng khác 0 của ma trận không suy biến A. Chứng minh rằng $1/\lambda$ là giá trị riêng của ma trận A^{-1}.

Bài 5. Chứng minh rằng hai ma trận đồng dạng thì tập giá trị riêng của chúng trùng nhau.

Bài 6. Chứng minh rằng ma trận A không suy biến khi và chỉ khi mọi giá trị riêng của A đều khác 0.

Bài 7. Chứng minh rằng mọi giá trị riêng của ma trận A đều bằng 0 khi và chỉ khi tồn tại số tự nhiên k sao cho $A^k = 0$

Bài 8. Chứng minh rằng $|A| = \lambda_1.\lambda_2...\lambda_n$, với λ_i là các giá trị riêng của ma trận vuông cấp n A.

Bài 9. MOS 1999.

Cho $f(x) = x^{1999} + x^2 - 1$ và $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Tìm $\det f(C)$..

Bài 10. Cho $A, B \in M(n,T)$ sao cho hoặc A hoặc B là ma trận khả nghịch. Chứng minh rằng AB đồng dạng với BA.

Bài 11. Cho $A, B \in M(n,T)$. Chứng minh rằng AB và BA. có cùng tập giá trị riêng.

Bài 12. Cho $A, B \in M(n,T)$ sao cho $AB - BA = A$. Chứng minh rằng $|A| = 0$.

Bài 13. MOS 2001.

Giả sử $A \in M(n,R)$ có phần tử là các số nguyên chẵn. Chứng minh rằng A không thể có giá trị riêng là số lẻ.

Bài 14. Cho $X = (a_1; a_2; ..; a_n); A := X^c X$. Tìm các giá trị riêng của A.

Bài 15. Giả sử $A \in M(n,R)$, không có giá trị riêng là số thực. Chứng minh rằng n là số chẵn.

Bài 16. Cho $A \in M(n,C), rank(A) \le 1$. Chứng minh rằng:

1) $A^2 = tr(A).A$

2) $\det(E + A) = 1 + tr(A)$

3) Nếu $tr(A) \ne -1$ thì $(E + A)^{-1} = E - \dfrac{1}{1 + tr(A)}.A$.

4) Cho $B \in M(n,C)$ không suy biến sao cho $1 + tr(A.B^{-1}) \ne 0$. Chứng minh rằng $(B + A)$ khả nghịch và $(B + A)^{-1} = B^{-1} - \dfrac{1}{1 + tr(AB^{-1})}.B^{-1}.A.B^{-1}$.

Bài 17. Cho $A \in M(n,T), F = \{E_n + B \mid BA = \Theta\}$ chứng minh rằng:

1) F đóng kín đối với phép nhân ma trận.

2) $C \in F$, không suy biến thì $C^{-1} \in F$.

Bài 18. Cho $A \in M(n,R)$. Chứng minh rằng: $tr(A.A^c) = 0 \Leftrightarrow A = \Theta$.

Bài 19. Không dùng đa thức đặc tr- ng, hãy chứng minh rằng

$$tr(S^{-1}AS) = tr(A).$$

Bài 20. Giả sử $A \in (n,R): A^{2m} + E_n = \Theta$, chứng minh rằng A không có giá trị riêng là số thực.

Bài 21. Chứng minh rằng tập các giá trị riêng của ma trận AB trùng với tập các giá trị riêng của ma trận BA.

Bài 22.

a. Chứng minh rằng mọi ma trận đối xứng thực thì các giá trị riêng của nó đều là số thực.

b. Chứng minh rằng nếu $\alpha;\beta;\gamma \neq 0;\ \mathrm{a,b,c,d,p,q} \in \mathrm{R}$ thì ma trận

$$B = \begin{pmatrix} a & b\frac{\alpha}{\beta} & c\frac{\alpha}{\gamma} \\ b\frac{\beta}{\alpha} & d & p\frac{\beta}{\gamma} \\ c\frac{\gamma}{\alpha} & p\frac{\gamma}{\beta} & q \end{pmatrix}$$

cũng có mọi giá trị riêng là số thực

Bài 23. Cho p > 0 là bội của giá trị riêng λ_0 của ma trận thực A và $r(A-\lambda_0 E) = r$. Chứng minh rằng $1 \leq n - r \leq p$.

Bài 24. Cho ma trận $A = (a_1\ \mathrm{a}_2\ \mathrm{a}_3 ... \mathrm{a}_n)$. Tìm giá trị riêng của ma trận $A^c A$

Bài 25. Tìm giá trị riêng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

Bài 26. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & ... & a_n \\ a_n & a_1 & & & a_{n-1} \\ ... & ... & & & .... \\ ... & ... & & & ... \\ a_2 & a_3 & ... & ... & a_1 \end{pmatrix}$ Chứng minh rằng $|A| = f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) ... f(\varepsilon_n)$ với $f(x) = a_1 + a_2 x + ... + a_n x^{n-1}; \varepsilon_i$ là các căn bậc n của 1.

Bài 27. Tìm giá trị riêng của ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0.... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0... & 1 & 0 \end{pmatrix}$$