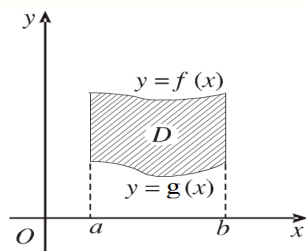


A. Lý thuyết cơ bản

Ghi nhớ 1

Dạng 1 : Biết cận tích phân

Cho miền D giới hạn bởi đồ thị hai hàm $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a, x=b, (a < b)$.

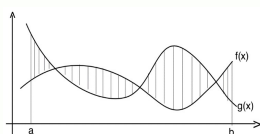


$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Khi đó diện tích miền D là:

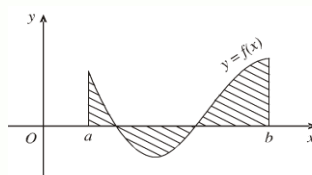
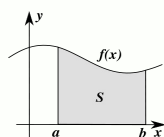
- TH1:** Nếu $f(x) - g(x) = 0$ vô nghiệm trên $(a; b)$ thì $S = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$
TH2: Nếu $f(x) - g(x) = 0$ có nghiệm $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ thì:

$$S = \left| \int_a^{x_1} [f(x) - g(x)] dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)] dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$



$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

Chú ý: Nếu $g(x) = 0$ (trục Ox) thì



Dạng 2: Chưa biết cận tích phân

Cho miền D giới hạn bởi đồ thị hai hàm $y=f(x), y=g(x)$.

Giải phương trình $f(x) - g(x) = 0$ tìm nghiệm $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

Tính

$$S = \left| \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)] dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} [f(x) - g(x)] dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^{x_{n+1}} [f(x) - g(x)] dx \right|$$

Chú ý: Nếu biết một cận thì ta tìm cận còn lại.

B. Bài tập rèn luyện

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + xf'(x) = 4x^3 + 4x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

C. Bài tập tương tự

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) nằm trên trục hoành. Hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn các điều kiện $(y')^2 + y'' \cdot y = -4$ và $f(0) = 1; f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành gần nhất với số nào dưới đây?

A. 0,95. B. 0,96. C. 0,98. D. 0,97.

$$\begin{aligned} (f'(x))^2 + f''(x) \cdot f(x) &= -4 \Leftrightarrow (f'(x) \cdot f(x))' = -4 \\ \Leftrightarrow \int (f'(x) \cdot f(x))' dx &= \int -4 dx \Leftrightarrow f'(x) \cdot f(x) = -4x + C \\ \Leftrightarrow \int f'(x) \cdot f(x) dx &= \int (-4x + C) dx \Leftrightarrow \int f(x) d(f(x)) = -4 \frac{x^2}{2} + C \cdot x + B \\ \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} &= -2x^2 + C \cdot x + B \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{-4x^2 + 2Cx + B} \quad f(0) = 1 \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{B} = 1 \\ \sqrt{-\frac{1}{4} + \frac{C}{2} + B} = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} B = 1 \\ C = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \sqrt{-4x^2 + 2x + 1} \quad (C)(C) \\ \Leftrightarrow -4x^2 + 2x + 1 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \end{cases} (C) \\ \sqrt{-4x^2 + 2x + 1} &= 0 \\ S &= \int_{\frac{1 - \sqrt{5}}{4}}^{\frac{1 + \sqrt{5}}{4}} \sqrt{-4x^2 + 2x + 1} dx \approx 0,98 \end{aligned}$$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và $xf(1 - x^3) + f'(x) = x^7 - 2x^4 + 3x - 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

A. $-\frac{5}{6}$. B. $-\frac{13}{12}$. C. $\frac{5}{6}$. D. $\frac{13}{12}$.

$$\begin{aligned}
 & xf(1-x^3) + f'(x) = x^7 - 2x^4 + 3x - 1 \\
 & \Leftrightarrow x^2 f(1-x^3) + xf'(x) = x^8 - 2x^5 + 3x^2 - x \\
 & \Leftrightarrow \int_0^1 [x^2 f(1-x^3) + xf'(x)] dx = \int_0^1 (x^8 - 2x^5 + 3x^2 - x) dx \\
 & \Leftrightarrow \int_0^1 [x^2 f(1-x^3)] dx + \int_0^1 [xf'(x)] dx = \left(\frac{x^9}{9} - 2\frac{x^6}{6} + x^3 - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\
 & \Leftrightarrow \int_0^1 [x^2 f(1-x^3)] dx + \int_0^1 [xf'(x)] dx = \frac{5}{18} (*) I_1 = \int_0^1 [x^2 f(1-x^3)] dx
 \end{aligned}$$

x	0	1
t	1	0

$$t = 1 - x^3 \Rightarrow dt = -3x^2 dx$$

$$I_1 = \int_0^1 [x^2 f(1-x^3)] dx = \int_1^0 f(t) \left(-\frac{1}{3} dt \right) = \frac{1}{3} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^1 f(x) dx$$

$$I_2 = \int_0^1 [xf'(x)] dx \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

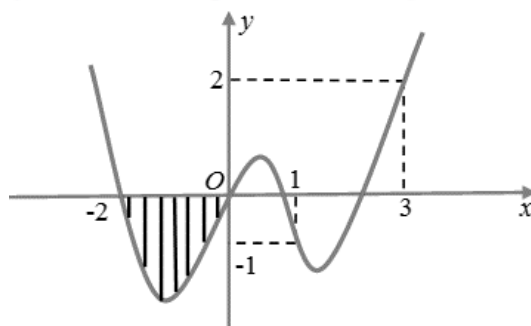
$$I_2 = \int_0^1 [xf'(x)] dx = (xf(x)) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = 1 - \int_0^1 f(x) dx$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_0^1 f(x) dx + 1 - \int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{18} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \int_0^1 f(x) dx = -\frac{13}{18}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{13}{12}$$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Biết diện tích hình phẳng phần sọc kẻ bằng 3 . Tính giá trị của biểu thức:

$$T = \int_1^2 f'(x+1) dx + \int_2^3 f'(x-1) dx + \int_3^4 f(2x-8) dx$$



A. $T = \frac{9}{2}$. **B.** $T = 6$. **C.** $T = 0$. **D.** $T = \frac{3}{2}$.

$$S = \int_{-2}^0 |f(x)| dx = 3 \quad f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [-2; 0] \Rightarrow 3 = \int_{-2}^0 |f(x)| dx = \int_{-2}^0 [-f(x)] dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{-2}^0 f(x) dx = -3 \quad I = \int_3^4 f(2x-8) dx \quad t = 2x-8 \Rightarrow dt = 2dx \quad x=3 \Rightarrow t=-2$$

$$x=4 \Rightarrow t=0 \quad I = \int_{-2}^0 f(t) \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 f(x) dx = -\frac{3}{2}$$

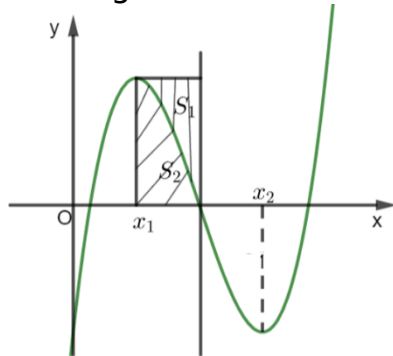
$$T = \int_1^2 f'(x+1) dx + \int_2^3 f'(x-1) dx + \int_3^4 f(2x-8) dx = f(x+1) \Big|_1^2 + f(x-1) \Big|_2^3 + I$$

$$= f(3) - f(2) + f(2) - f(1) - \frac{3}{2} = 2 - (-1) - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Câu 4: Cho hàm số

bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng

được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng:

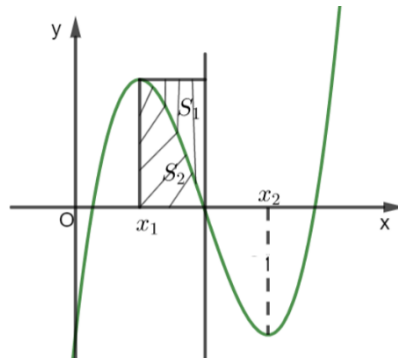


A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{5}{8}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{3}{5}$.



$$f(x)_{x_1} = -1; x_2 = 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x$$

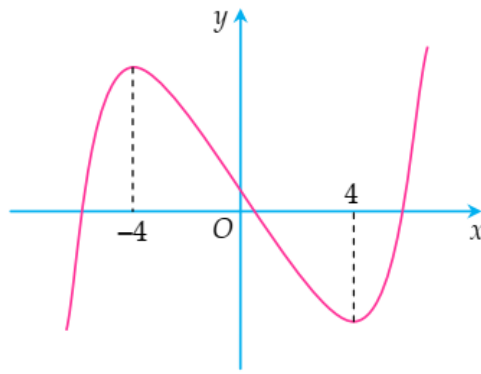
$$S_2 = \int_{-1}^0 (x^3 - 3x) dx = \frac{5}{4}; S_1 + S_2 = 2 \Rightarrow S_1 = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{5}.$$

Câu 5:

Cho

đồ thị hàm số là nguyên hàm của $f(x)$ có dạng:

$F(x) = ax^3 + bx^2 + 5x + d$. Tính diện tích tạo bởi $f(x)$ và trục hoành



- A. $\frac{80}{3}$. B. $\frac{20}{3}$. C. $\frac{50}{3}$. D. $\frac{70}{3}$.

$$F(x) = ax^3 + bx^2 + 5x + c \Rightarrow F'(x) = 3ax^2 + 2bx + 5 \quad F'(0) = 5 \Rightarrow f'(0) = 5$$

$$x = -4; x = 4 \quad f(x) = mx^2 + nx + 5 \quad x = -4; x = 4$$

$$\begin{cases} 16m - 4n + 5 = 0 \\ 16m + 4n + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{5}{16} \\ n = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -\frac{5}{16}x^2 + 5$$

$$\int_{-4}^4 f(x) dx = \int_{-4}^4 \left(-\frac{5}{16}x^2 + 5 \right) dx = \frac{80}{3}$$

Câu 6:

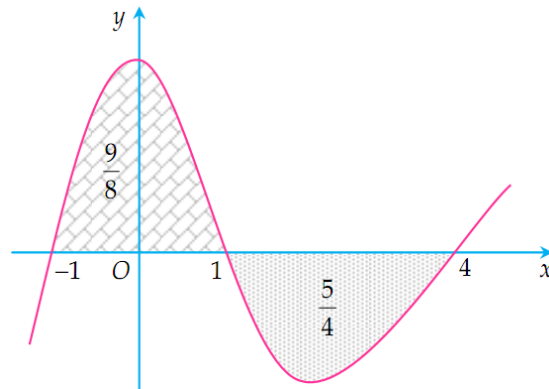
Cho đồ thị hàm số $f'(x)$

như hình vẽ. Diện tích 2 hình tạo bởi $f'(x)$ và trục hoành là

$$\frac{9}{8}, \frac{5}{4}, f(1) = 3$$

$$\int_{-1}^4 f'(x) f(x) dx$$

. Tính giá trị của tích phân



- A. $\frac{3}{7}$. B. $\frac{12}{5}$. C. $-\frac{29}{128}$. D. $\frac{15}{29}$.

$$\int_{-1}^4 f'(x) f(x) dx = \int_{-1}^4 f(x) df(x) = \frac{f(x)^2}{2} \Big|_{-1}^4 = \frac{f(4)^2 - f(-1)^2}{2} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 f'(x) dx = \frac{9}{8} \\ \int_1^4 f'(x) dx = -\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) - f(-1) = \frac{9}{8} \\ f(4) - f(1) = -\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = \frac{15}{8} \\ f(4) = \frac{7}{4} \end{cases}$$

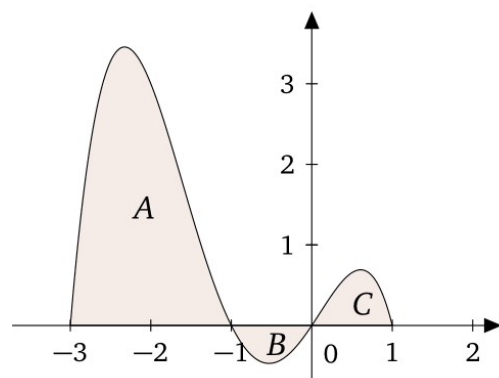
$$\frac{f(4)^2 - f(-1)^2}{2} = -\frac{29}{128}$$

Câu 7:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục

trên đoạn $[-3;1]$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Biết diện tích các hình

A, B, C lần lượt là 27, 2 và 3. Tính tích phân $I = \int_0^2 (x^3 + x)f'(x^2 - 3)dx$.

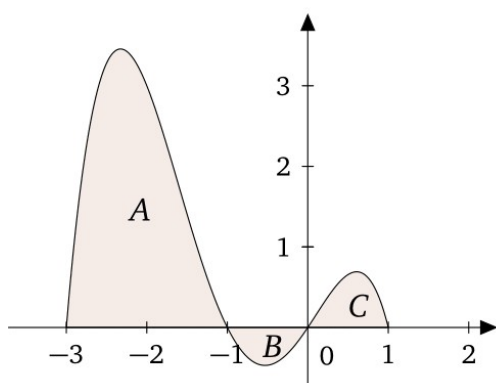


A. - 14.

B. - 32.

C. 32.

D. 28.



$$t = x^2 - 3 \Rightarrow 2x dx = dt$$

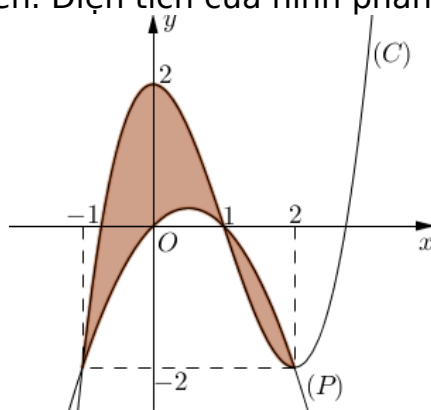
$$I = \int_0^2 (x^3 + x)f'(x^2 - 3) dx = \frac{1}{2} \int_2^2 2x(x^2 - 3 + 4)f'(x^2 - 3) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_3^1 (t+4)f'(t) dt \Rightarrow 2I = \int_3^1 (x+4)f'(x) dx \quad \begin{cases} u = x+4 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$2I = \int_3^1 (x+4)f'(x) dx = (x+4)f(x) \Big|_3^1 - \int_3^1 f(x) dx = - \int_3^1 f(x) dx$$

$$= - \int_3^1 f(x) dx - \int_1^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = -27 + 2 - 3 = -28 \Rightarrow I = -14. \text{ Câu}$$

u 8: Gọi (H) là phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số đa thức bậc ba với đồ thị (P) của hàm số bậc hai như hình vẽ bên. Diện tích của hình phẳng (H) bằng



A. $\frac{37}{12}$. B. $\frac{7}{12}$. C. $\frac{11}{12}$. D. $\frac{5}{12}$.

$$(C) f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0) \quad (P)$$

$$g(x) = dx^2 + ex \quad (d, e \in \mathbb{R}, d \neq 0) \quad (C) \quad (P) \quad x = -1; x = 1; x = 2$$

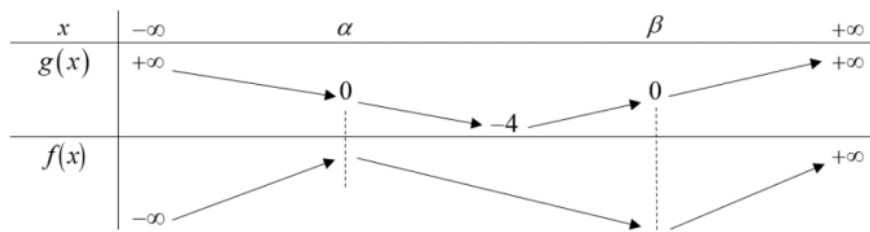
$$f(x) - g(x) = a(x+1)(x-1)(x-2) \quad x = 0$$

$$f(0) - g(0) = a(0+1)(0-1)(0-2) = 2 \Rightarrow a = 1 \quad (H)$$

$$S = \int_{-1}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^2 |(x+1)(x-1)(x-2)| dx = \frac{37}{12}$$

Câu 9: Cho hai hàm số

$f(x) = ax^3 - 3x^2 + bx + 1 - 2d$ và $g(x) = cx^2 - 2x + d$ có bảng biến thiên như sau:



Biết rằng đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 30$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = g(x), x = -3, x = 6$ bằng

A. $\frac{1321}{12}$. B. $\frac{1123}{12}$. C. $\frac{1231}{12}$. D. $\frac{2113}{12}$.

$$f'(x) = 3ax^2 - 6x + b \quad \alpha, \beta \quad f'(x) = 3ax^2 - 6x + b = 0 \quad \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{2}{a} \\ \alpha\beta = \frac{b}{3a} \end{cases} \quad \alpha, \beta$$

$$g(x) = cx^2 - 2x + d = 0 \quad \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{2}{c} \\ \alpha\beta = \frac{d}{c} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{a} = \frac{2}{c} \\ \frac{b}{3a} = \frac{d}{c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = 3d \end{cases} \quad g(x) \quad I\left(\frac{1}{c}; -4\right) \quad c > 0$$

$$g\left(\frac{1}{c}\right) = -4 \Rightarrow d = \frac{1}{c} - 4 \Leftrightarrow d = \frac{1}{a} - 4 \quad f(x) - g(x) = 0 \quad x_1, x_2, x_3$$

$$\Leftrightarrow ax^3 - (3+a)x^2 + (3d+2)x + 1 - 3d = 0 \quad x_1, x_2, x_3 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3+a}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{3d+2}{a} \end{cases}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 30 \Leftrightarrow (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 30$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3+a}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{3d+2}{a}\right) = 30 \Leftrightarrow \left(\frac{3+a}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3\left(\frac{1}{a} - 4\right) + 2}{a} = 30$$

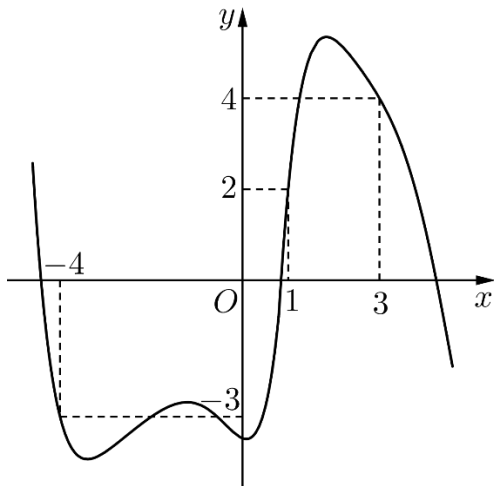
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -\frac{3}{29} \end{cases} \quad a = c > 0 \quad a = 1 \quad c = 1, d = -3, b = -9$$

$$f(x) - g(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10 \quad y = f(x), y = g(x), x = -3, x = 6$$

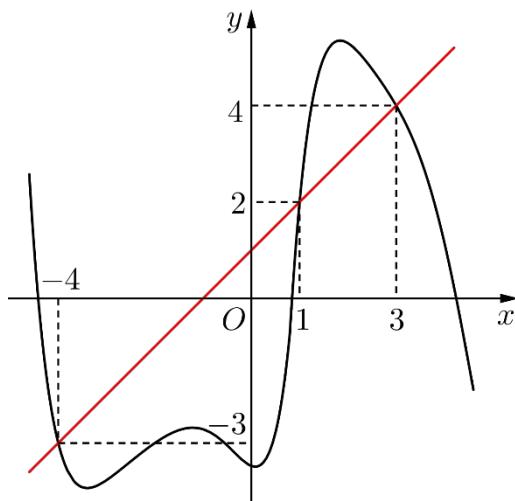
$$S = \int_{-3}^6 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-3}^6 |x^3 - 4x^2 - 7x + 10| dx = \frac{1321}{12}$$

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-4) = 4$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Để giá trị lớn nhất của hàm số

$h(x) = f(x) - \frac{x^2}{2} - x + 3m$ trên đoạn $[-4; 3]$ không vượt quá 2022 thì tập giá trị của m là



- A. $(-\infty; 2022]$ B. $(674; +\infty)$ C. $(-\infty; 674]$ D. $(2022; +\infty)$



$$h'(x) = f'(x) - (x+1) \quad (-4; 1) \quad h'(x) < 0$$

$$(1; 3), h'(x) > 0 \quad h'(1) = 0 \quad h(x) \Big|_{-4; 3} \quad x=1 \quad a = h(-4) = 3m$$

$$b = h(3) = f(3) - \frac{15}{2} + 3m \quad S_1 = \int_{-4}^1 [(x-1) - f'(x)] dx; S_2 = \int_1^3 [f(x) - (x-1)] dx$$

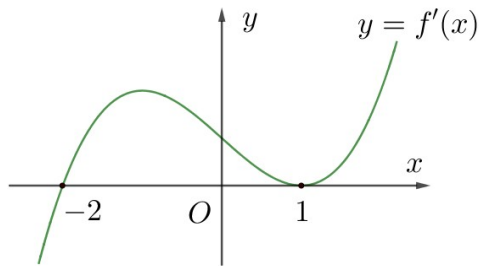
$$S_1 > S_2 \Rightarrow \left(\frac{x^2}{2} + x - f(x) \right) \Big|_{-4}^1 > \left(f(x) - \frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - f(1) - 4 + f(-4) > f(3) - \frac{12}{2} - f(1) \Leftrightarrow f(-4) > f(3) - \frac{7}{2} \Rightarrow f(3) < \frac{15}{2}$$

$$b < a \quad \max_{x \in [-4; 3]} h(x) = a \Rightarrow 3m \leq 2022 \Leftrightarrow m \leq 674 \quad m, (-\infty; 674]$$

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ

(C) như hình vẽ và diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành bằng 9. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; 2]$. Khi đó giá trị $M - m$ bằng



- A. $\frac{16}{3}$. B. $\frac{32}{3}$. C. $\frac{27}{3}$. D. $\frac{5}{3}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \quad x=1 \quad f'(x) = a(x+2)(x-1)^2 = a(x^3 - 3x + 2)$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = a \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) + C \quad (C)$$

$$\int_{-2}^1 f'(x) dx = 9 \Leftrightarrow f(x) \Big|_{-2}^1 = 9 \Leftrightarrow f(1) - f(-2) = 9$$

$$\Leftrightarrow a \left(\frac{3}{4} - (-6) \right) = 9 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3} \quad f(x) = \frac{x^4}{3} - 2x^2 + \frac{8}{3}x + C$$

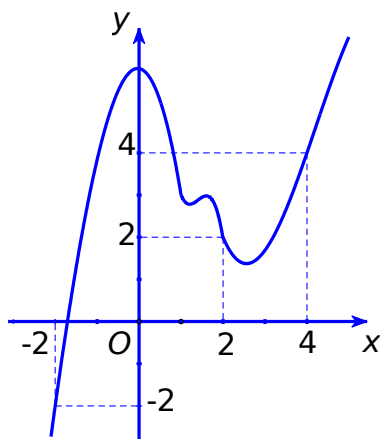
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2, x = 1 \quad f'(x) < 0 \quad \forall x < -2 \quad f'(x) \geq 0 \quad \forall x \geq -2$$

x	-3	-2	1	2
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	$1 + C$	$-8 + C$		$\frac{8}{3} + C$

$$M = \frac{8}{3} + C \quad m = -8 + C$$

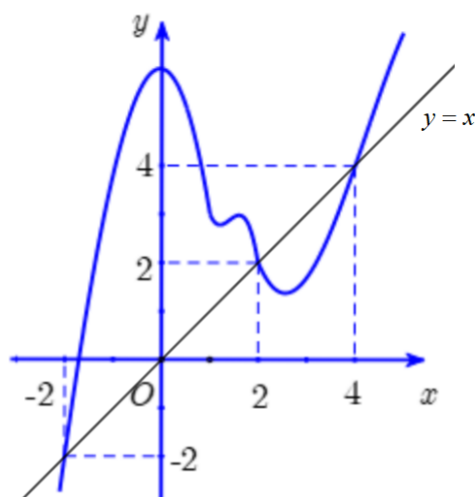
$$M - m = \frac{32}{3}$$

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên I .
Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $h(x) = 2f(x) - x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A.** $h(4) > h(-2) > h(2)$ **B.** $h(2) > h(4) > h(-2)$
C. $h(-2) > h(4) > h(2)$ **D.** $h(2) > h(-2) > h(4)$

$$h'(x) = 2f'(x) - 2x, y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x(1) \quad y = f'(x) \quad y = x$$



$$f'(x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	2	4	$+\infty$			
h'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
h								

$h(-2)$

$h(2)$

$h(-2)$

$h(2)$

$h(2)$

$h(4)$

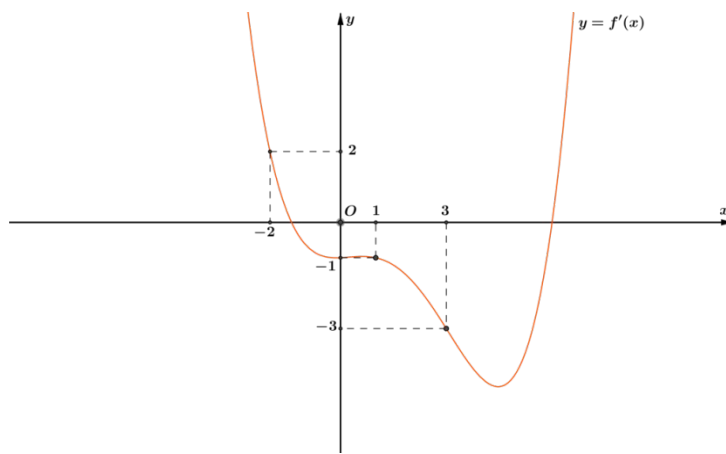
$h(4)$

$$\int_{-2}^2 |h'(x)| dx > \int_2^4 |h'(x)| dx$$

$$\int_{-2}^2 h'(x) dx > - \int_2^4 h'(x) dx \Rightarrow h(2) - h(-2) > h(2) - h(4) \Rightarrow h(-2) < h(4)$$

Câu

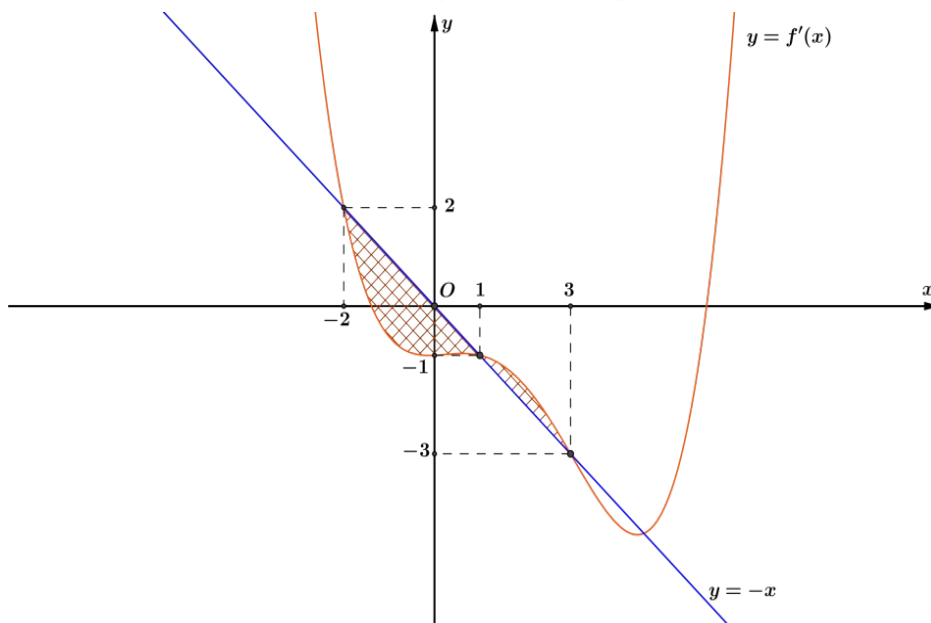
- 13:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên



Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + x^2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $g(1) < g(-2) < g(3)$. B. $g(-2) > g(3) = g(1)$.
 C. $g(-2) < g(3) < g(1)$. D. $g(1) < g(3) < g(-2)$.

$$g'(x) = 2f'(x) + 2x = 2[f'(x) - (-x)] \quad y = f'(x) \quad y = -x$$



$$y = f'(x) \quad y = -x \quad x = -2 \quad x = 1$$

$$S_1 = - \int_{-2}^1 [f'(x) - (-x)] dx = - \frac{1}{2} \int_{-2}^1 g'(x) dx = - \frac{1}{2} g(x) \Big|_{-2}^1 = - \frac{1}{2} [g(1) - g(-2)]$$

$$S_2 \quad y = f'(x) \quad y = -x \quad x = 1 \quad x = 3$$

$$S_2 = \int_1^3 [f'(x) - (-x)] dx = \frac{1}{2} \int_1^3 g'(x) dx = \frac{1}{2} g(x) \Big|_1^3 = \frac{1}{2} [g(3) - g(1)]$$

$$\begin{cases} S_1 > 0 \\ S_2 > 0 \\ S_1 > S_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} [g(1) - g(-2)] > 0 \\ \frac{1}{2} [g(3) - g(1)] > 0 \\ -\frac{1}{2} [g(1) - g(-2)] > \frac{1}{2} [g(3) - g(1)] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(-2) > g(1) \\ g(3) > g(1) \\ g(-2) > g(3) \end{cases} \Leftrightarrow g(1) < g(3) < g(-2)$$

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số

thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là $y = \frac{f(x)}{g(x)+12}$ -4 và 4. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường và $y=1$ bằng

- A.** $2\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 18$. **D.** $\ln 2$.

$$g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x), g'(x) = f'(x) + f''(x) + f'''(x)$$

$$= f'(x) + f''(x) + 12 \quad g'(x) = 0 \quad \begin{cases} g(m) = -4 \\ g(n) = 4 \end{cases} \quad \frac{f(x)}{g(x)+12} = 1$$

$$\Rightarrow g(x) + 12 - f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + f''(x) + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = n \end{cases}$$

$$S = \left| \int_m^n \left(1 - \frac{f(x)}{g(x)+12} \right) dx \right| = \left| \int_m^n \frac{g(x)+12-f(x)}{g(x)+12} dx \right| = \left| \int_m^n \frac{f'(x)+f''(x)+12}{g(x)+12} dx \right|$$

$$= \left| \int_m^n \frac{g'(x)}{g(x)+12} dx \right| = \left| \ln |g(x)+12| \Big|_m^n \right| = \left| \ln |g(n)+12| - \ln |g(m)+12| \right|$$

$$= \left| \ln 8 - \ln(16) \right| = \ln 2$$

Câu 15:

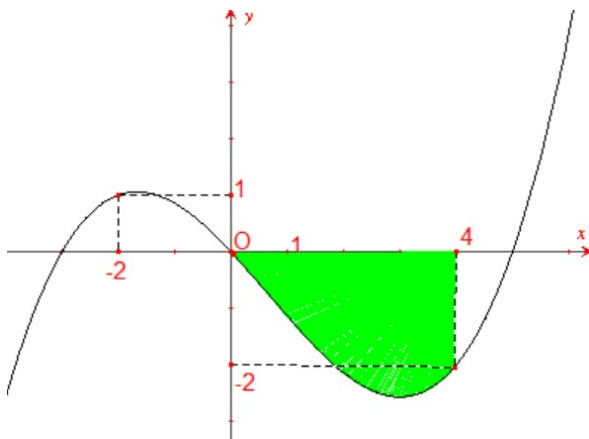
Cho hàm đa thức bậc bốn

$$y = f(x)$$

có đồ thị hàm số

$$y = f'(x)$$

như hình sau.



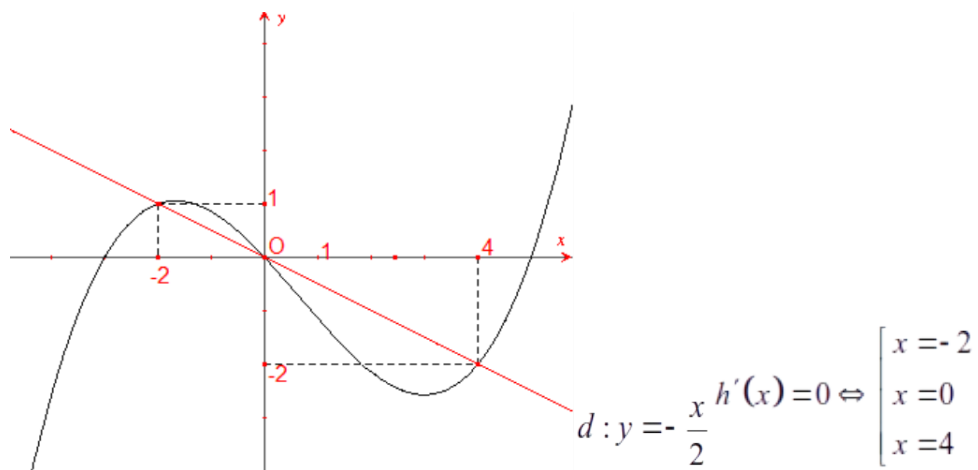
Biết $f(0) = \frac{1}{21}$ và diện tích phần tô màu bằng $\frac{148}{21}$. Tìm số giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = |4f(x) + x^2 + m|$ có ít nhất 5 điểm cực trị.

- A.** 12. **B.** 11. **C.** 10. **D.** Vô số.

$$\frac{148}{21} = \int_0^4 (-f'(x)) dx = \frac{148}{21} \Leftrightarrow -f(4) + f(0) = \frac{148}{21} \Leftrightarrow f(4) = -\frac{147}{21}$$

$$h(x) = 4f(x) + x^2 \quad h(4) = 4 \left(-\frac{147}{21} \right) + 4^2 = -12$$

$$h'(x) = 4f'(x) + 2x = 4 \left[f'(x) - \left(-\frac{x}{2} \right) \right] \quad h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{x}{2}$$



$$\begin{aligned}
 y = f'(x) \quad & \int_{-2}^0 \left(f'(x) + \frac{x}{2} \right) dx < \int_0^4 \left(-\frac{x}{2} - f'(x) \right) dx \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{4} \int_{-2}^0 h'(x) dx < -\frac{1}{4} \int_0^4 h'(x) dx \\
 \Leftrightarrow & h(0) - h(-2) < -h(4) + h(0) \Leftrightarrow h(-2) > h(4)
 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2	0	4	$+\infty$
$h'(x)$	$+\infty$	$-$	0	$+$	0
$h(x)$	$+\infty$			-12	$+\infty$

$$g(x) = |h(x) + m| \quad g(x) h(x) + m \quad h(x) + m = 0 \quad h(x) h(x) + m \quad h(x) + m = 0$$

$$\Leftrightarrow -m > -12 \Leftrightarrow m < 12$$