

Chương 4 :

Một số chuyên đề bài viết hay, thú vị liên quan đến bất đẳng thức và lượng giác

Đúng như tên gọi của mình, chương này sẽ bao gồm các bài viết chuyên đề về bất đẳng thức và lượng giác. Tác giả của chúng đều là các giáo viên, học sinh giỏi toán mà tác giả đánh giá rất cao. Nội dung của các bài viết chuyên đề đều dễ hiểu và mạch lạc. Bạn đọc có thể tham khảo nhiều kiến thức bổ ích từ chúng. Vì khuôn khổ chuyên đề nên tác giả chỉ tập hợp được một số bài viết thật sự là hay và thú vị :

Mục lục :

Xung quanh bài toán Ecdôs trong tam giác	78
Ứng dụng của đại số vào việc phát hiện và chứng minh bất đẳng thức trong tam giác.....	82
Thử trở về cội nguồn của môn Lượng giác.....	91
Phương pháp giải một dạng bất đẳng thức lượng giác trong tam giác.....	94

Xung quanh bài toán Ecdô trong tam giác

Nguyễn Văn Hiến

(Thái Bình)

Bất đẳng thức trong tam giác luôn là đề tài rất hay. Trong bài viết nhỏ này, chúng ta cùng trao đổi về một bất đẳng thức quen thuộc : **Bất đẳng thức Ecdô**.

Bài toán 1 : Cho một điểm M trong $\triangle ABC$. Gọi R_a, R_b, R_c là khoảng cách từ M đến A, B, C và d_a, d_b, d_c là khoảng cách từ M đến BC, CA, AB thì :

$$R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c) \quad (E)$$

Giải : Ta có :

$$\begin{aligned} R_a &\geq h_a - d_a = \frac{2S_{ABC} - 2S_{BMC}}{a} \\ &= \frac{2S_{AMB} + 2S_{AMC}}{a} \\ &= \frac{cd_c + bd_b}{a} \end{aligned}$$

Bằng cách lấy đối xứng M qua phân giác góc A

$$\begin{aligned} \Rightarrow R_a &\geq \frac{bd_c + cd_b}{a} \\ \text{Tương tự : } R_b &\geq \frac{ad_c + cd_a}{b} \\ R_c &\geq \frac{ad_b + bd_a}{c} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Rightarrow R_a + R_b + R_c \geq d_a \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + d_b \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + d_c \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \geq 2(d_a + d_b + d_c) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Thực ra (E) chỉ là trường hợp riêng của tổng quát sau :

Bài toán 2 : Chứng minh rằng :

$$R_a^k + R_b^k + R_c^k \geq 2^k (d_a^k + d_b^k + d_c^k) \quad (2)$$

với $1 \geq k > 0$

Giải : Trước hết ta chứng minh :

Bổ đề 1 : $\forall x, y > 0$ và $1 \geq k > 0$ thì :

$$(x + y)^k \geq 2^{k-1} (x^k + y^k) \quad (H)$$

Chứng minh :

$$(H) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} + 1 \right)^k \geq 2^{k-1} \left(\frac{x^k}{y^k} + 1 \right) \Leftrightarrow f(a) = (a+1)^k - 2^{k-1} (a^k + 1) \geq 0 \quad \text{với } \frac{x}{y} = a > 0$$

Vì $f'(a) = k[(a+1)^{k-1} - (2a)^{k-1}] = 0 \Leftrightarrow a = 1$ hoặc $k = 1$. Với $k = 1$ thì (H) là đẳng thức đúng.

Do $a > 0$ và $1 > k > 0$ thì ta có :

$$f(a) \geq 0 \quad \forall a > 0 \quad \text{và } 1 > k > 0$$

$\Rightarrow (H)$ được chứng minh.

Trở lại bài toán 2 :

Từ hệ (1) ta có :

$$R_a^k \geq \left(\frac{bd_c}{a} + \frac{cd_b}{a} \right)^k \geq 2^{k-1} \left[\left(\frac{bd_c}{a} \right)^k + \left(\frac{cd_b}{a} \right)^k \right]$$

(Áp dụng bổ đề (H) với $x = \frac{bd_c}{a}$; $y = \frac{cd_b}{a}$)

Tương tự :

$$R_b^k \geq 2^{k-1} \left[\left(\frac{ad_c}{b} \right)^k + \left(\frac{cd_a}{b} \right)^k \right]$$

$$R_c^k \geq 2^{k-1} \left[\left(\frac{ad_b}{c} \right)^k + \left(\frac{bd_a}{c} \right)^k \right]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R_a^k + R_b^k + R_c^k &\geq 2^{k-1} \left\{ d_a^k \left[\left(\frac{b}{c} \right)^k + \left(\frac{c}{b} \right)^k \right] + d_b^k \left[\left(\frac{a}{c} \right)^k + \left(\frac{c}{a} \right)^k \right] + d_c^k \left[\left(\frac{a}{b} \right)^k + \left(\frac{b}{a} \right)^k \right] \right\} \\ &\geq 2^k (d_a^k + d_b^k + d_c^k) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều và M là tâm tam giác. Áp dụng (E) ta chứng minh được bài toán sau :

Bài toán 3 : Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} \geq 2 \left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} \right) \quad (3)$$

Giải : Thực hiện phép nghịch đảo tâm M, phương tích đơn vị ta được :

$$\left\{ \begin{array}{l} MA^* = \frac{1}{R_a} \\ MB^* = \frac{1}{R_b} \\ MC^* = \frac{1}{R_c} \end{array} \right. \quad \text{và} \quad \left\{ \begin{array}{l} MA'' = \frac{1}{d_a} \\ MB'' = \frac{1}{d_b} \\ MC'' = \frac{1}{d_c} \end{array} \right.$$

Áp dụng (E) trong $\Delta A''B''C''$:

$$MA'' + MB'' + MC'' \geq 2(MA^* + MB^* + MC^*)$$

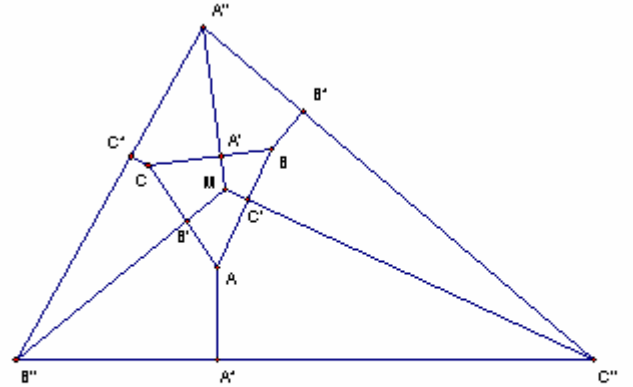
$$\Leftrightarrow \frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} \geq 2 \left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} \right)$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Mở rộng kết quả này ta có bài toán sau :

Bài toán 4 : Chứng minh rằng :

$$2^k (d_a^k + d_b^k + d_c^k) \geq R_a^k + R_b^k + R_c^k \quad (4)$$



với $0 > k \geq -1$

Hướng dẫn cách giải : Ta thấy (4) dễ dàng được chứng minh nhờ áp dụng (2) trong phép biến hình nghịch đảo tâm M, phương tích đơn vị. Đẳng thức xảy ra khi $\triangle ABC$ đều và M là tâm tam giác.

Bây giờ với $k > 1$ thì từ hệ (1) ta thu được ngay :

Bài toán 5 : Chứng minh rằng :

$$R_a^2 + R_b^2 + R_c^2 > 2(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2) \quad (5)$$

Xuất phát từ bài toán này, ta thu được những kết quả tổng quát sau :

Bài toán 6 : Chứng minh rằng :

$$R_a^k + R_b^k + R_c^k > 2(d_a^k + d_b^k + d_c^k) \quad (6)$$

với $k > 1$

Giải : Chúng ta cũng chứng minh một bổ đề :

Bổ đề 2 : $\forall x, y > 0$ và $k > 1$ thì :

$$(x + y)^k \geq x^k + y^k \quad (G)$$

Chứng minh :

$$(G) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} + 1\right)^k > \frac{x^k}{y^k} + 1 \Leftrightarrow g(a) = (a + 1)^k - a^k - 1 > 0 \quad (\text{đặt } \frac{x}{y} = a > 0)$$

$$\text{Vì } g'(a) = k[(a + 1)^{k-1} - a^{k-1}] > 0 \quad \forall a > 0 ; k > 1$$

$$\Rightarrow g(a) > 0 \quad \forall a > 0 ; k > 1$$

$\Rightarrow (G)$ được chứng minh xong.

Sử dụng bổ đề (G) vào bài toán (6) :

Từ hệ (1) :

$$R_a^k \geq \left(\frac{bd_c}{a} + \frac{cd_b}{a}\right)^k > \left(\frac{bd_c}{a}\right)^k + \left(\frac{cd_b}{a}\right)^k \quad (\text{đặt } x = \frac{bd_c}{a} ; y = \frac{cd_b}{a})$$

Tương tự :

$$R_b^k > \left(\frac{ad_c}{b}\right)^k + \left(\frac{cd_a}{b}\right)^k$$

$$R_c^k > \left(\frac{ad_b}{c}\right)^k + \left(\frac{bd_a}{c}\right)^k$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R_a^k + R_b^k + R_c^k &> d_a^k \left[\left(\frac{b}{c}\right)^k + \left(\frac{c}{b}\right)^k \right] + d_b^k \left[\left(\frac{a}{c}\right)^k + \left(\frac{c}{a}\right)^k \right] + d_c^k \left[\left(\frac{a}{b}\right)^k + \left(\frac{b}{a}\right)^k \right] \\ &\geq 2(d_a^k + d_b^k + d_c^k) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 7 : Chứng minh rằng :

$$d_a^k + d_b^k + d_c^k > 2(R_a^k + R_b^k + R_c^k) \quad (7)$$

với $k < -1$

Hướng dẫn cách giải : Ta thấy (7) cũng được chứng minh dễ dàng nhờ áp dụng (6) trong phép biến hình nghịch đảo tâm M, phương tích đơn vị. Đẳng thức không thể xảy ra trong (6) và (7).

Xét về quan hệ giữa (R_a, R_b, R_c) với (d_a, d_b, d_c) ngoài bất đẳng thức (E) và những mở rộng của nó, chúng ta còn gặp một số bất đẳng thức rất hay sau đây. Việc chứng minh chúng xin dành cho bạn đọc :

$$1) R_a R_b R_c \geq 8d_a d_b d_c$$

$$2) \frac{d_b + d_c}{R_a} + \frac{d_a + d_c}{R_b} + \frac{d_a + d_b}{R_c} \leq 3$$

$$3) R_a R_b R_c \geq (d_a + d_b)(d_a + d_c)(d_b + d_c)$$

$$4) R_a^2 R_b^2 R_c^2 \geq (R_a d_a + R_b d_b)(R_a d_a + R_c d_c)(R_b d_b + R_c d_c)$$

Ứng dụng của đại số vào việc phát hiện và chứng minh bất đẳng thức trong tam giác

Lê Ngọc Anh

(HS chuyên toán khóa 2005 – 2008)

Trường THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ

1/ Chúng ta đi từ bài toán đại số sau: Với $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ta luôn có:

$$\frac{x}{2} < \operatorname{tg} \frac{x}{2} < \frac{2x}{\pi} < \sin x < x.$$

Chứng minh: Ta chứng minh 2 bất đẳng thức: $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ và $\operatorname{tg} \frac{x}{2} < \frac{2x}{\pi}$.

Đặt $f(x) = \frac{1}{x} \sin x$ là hàm số xác định và liên tục trong $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có: $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$. Đặt $g(x) = x \cos x - \sin x$ trong $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ khi đó

$g'(x) = -x \sin x \leq 0 \Rightarrow g(x)$ nghịch biến trong đoạn $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ nên $g(x) < g(0) = 0$ với

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Do đó $f'(x) < 0$ với $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ suy ra $f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$ hay $\sin x > \frac{2x}{\pi}$

với $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Đặt $h(x) = \frac{1}{x} \operatorname{tg} x$ xác định và liên tục trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $h'(x) = \frac{x - \sin x}{2x^2 \cos^2 \frac{x}{2}} > 0 \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số $h(x)$ đồng biến, do

đó $h(x) < h\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ hay $\operatorname{tg} \frac{x}{2} < \frac{2x}{\pi}$ với $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Còn 2 bất đẳng thức $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{x}{2}$ và $\sin x < x$ dành cho bạn đọc tự chứng minh.

Bây giờ mới là phần đáng chú ý:

Xét $\triangle ABC$: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Gọi A, B, C là độ lớn các góc bằng radian; r, R, p, S lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nửa chu vi và diện tích tam giác; l_a, h_a, m_a, r_a tương ứng là độ dài đường phân giác, đường cao, đường trung tuyến và bán kính đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh A...

Bài toán 1: Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn ta luôn có:

$$\frac{p\pi}{4R} < A \cos^2 x + B \cos^2 B + C \cos^2 C < \frac{p}{R}$$

Nhận xét:

Từ định lí hàm số sin quen thuộc trong tam giác ta có: $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R}$ và

bài toán đại số ta dễ dàng đưa ra biến đổi sau $A \cos^2 A < 2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cos^2 A = \sin A < \frac{4}{\pi} A \cos^2 A$, từ đó đưa đến lời giải như sau.

Lời giải:

Ta có: $A \cos^2 A < 2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cos^2 A = \sin A < \frac{4}{\pi} A \cos^2 A \Rightarrow \sum A \cos^2 A < \sum \sin A = \frac{p}{R}$

và $\frac{4}{\pi} \sum A \cos^2 A > \sum \sin A = \frac{p}{R} \Rightarrow \sum A \cos^2 A > \frac{p\pi}{4R}$. Từ đây suy ra đpcm.

Trong một tam giác ta có nhận xét sau: $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$ kết hợp

với $\operatorname{tg} \frac{x}{2} < \frac{2x}{\pi}$ nên ta có $\frac{2A}{\pi} \frac{2B}{\pi} + \frac{2B}{\pi} \frac{2C}{\pi} + \frac{2C}{\pi} \frac{2A}{\pi} > \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1 \Rightarrow$

$A.B + B.C + C.A > \frac{\pi^2}{4}$ (1). Mặt khác $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{x}{2}$ nên ta cũng dễ dàng có

$\frac{A}{2} \frac{B}{2} + \frac{B}{2} \frac{C}{2} + \frac{C}{2} \frac{A}{2} < \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$ từ đây ta lại có

$A.B + B.C + C.A < 4$ (2). Từ (1) và (2) ta có bài toán mới.

Bài toán 2: Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn ta luôn có:

$$\frac{\pi^2}{4} < A.B + B.C + C.A < 4$$

Lưu ý: Khi dùng cách này để sáng tạo bài toán mới thì đề toán là $\triangle ABC$ phải là nhọn vì trong **bài toán đại số** thì $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Lời giải bài toán tương tự như nhận xét ở trên.

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức $ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}$ thì ta có ngay

$A.B + B.C + C.A \leq \frac{(A+B+C)^2}{3} = \frac{\pi^2}{3}$. Từ đây ta có bài toán “chặt” hơn và “đẹp” hơn:

$$\frac{\pi^2}{4} < A.B + B.C + C.A \leq \frac{\pi^2}{3}$$

Bây giờ ta thử đi từ công thức $\mathbf{l_a, h_a, m_a, r_a}$ để tìm ra các công thức mới.

Trong $\triangle ABC$ ta luôn có: $2S = bc \sin A = cl_a \sin \frac{A}{2} + bl_a \sin \frac{A}{2}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{1}{l_a} &= \frac{b+c}{2bccos\frac{A}{2}} > \frac{b+c}{2bc} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \\ \Rightarrow \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} &> \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right) \\ \Rightarrow \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} &> \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right).\end{aligned}$$

Như vậy chúng ta có **Bài toán 3**.

Bài toán 3: Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn ta luôn có:

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} > \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right)$$

Mặt khác, ta lại có $\frac{bc}{l_a} = \frac{b+c}{2cos\frac{A}{2}} = \frac{2R(\sin B + \sin C)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)}$. Áp dụng **bài toán đại số** ta

được:

$$\frac{R(B+C)}{\pi-A} \pi > \frac{bc}{l_a} > \frac{R\frac{2(B+C)}{\pi}}{\frac{\pi-A}{2}} \Rightarrow \frac{\pi R(B+C)}{B+C} > \frac{bc}{l_a} > \frac{4R(B+C)}{\pi(B+C)} \Rightarrow \pi R > \frac{bc}{l_a} > \frac{4R}{\pi}.$$

Hoàn toàn tương tự ta có: $\pi R > \frac{ab}{l_c} > \frac{4R}{\pi}$ và $\pi R > \frac{ca}{l_b} > \frac{4R}{\pi}$. Từ đây, cộng 3 chuỗi bất

đẳng thức ta được:

Bài toán 4: Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn ta luôn có:

$$\frac{12R}{\pi} < \frac{ab}{l_c} + \frac{bc}{l_a} + \frac{ca}{l_b} < 3\pi R$$

Trong tam giác ta có kết quả $\sin A = \frac{h_b}{c} = \frac{h_c}{b}$, $\sin B = \frac{h_c}{a} = \frac{h_a}{c}$ và $\sin C = \frac{h_a}{b} = \frac{h_b}{a}$, mà từ kết quả của **bài toán đại số** ta dễ dàng có $2 < \sin A + \sin B + \sin C < \pi$, mà $2(\sin A + \sin B + \sin C) = h_a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + h_b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + h_c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, từ đây ta có được **Bài**

toán 5.

Bài toán 5: Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn ta luôn có:

$$4 < h_a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + h_b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + h_c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) < 2\pi$$

Ta xét tiếp bài toán sau:

Bài toán 6: Chứng minh rằng trong tam giác nhọn ta luôn có:

$$\frac{4}{\pi^2}(A^2 + B^2 + C^2) < \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{3R^2} < A^2 + B^2 + C^2$$

Nhận xét: Liên hệ với m_a^2 trong tam giác ta có $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$, từ đó ta suy ra

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = 3R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \text{ và từ đây đến lời giải.}$$

Lời giải:

Áp dụng **bài toán đại số** ta được: $\frac{4x^2}{\pi^2} < \sin^2 x < x^2$ ta lần lượt có: $\frac{4A^2}{\pi^2} < \sin^2 A < A^2$,

$$\frac{4B^2}{\pi^2} < \sin^2 B < B^2 \text{ và } \frac{4C^2}{\pi^2} < \sin^2 C < C^2.$$

Cộng 3 chuỗi bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{4}{\pi^2}(A^2 + B^2 + C^2) < \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C < A^2 + B^2 + C^2, \text{ mà ta có:}$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 3R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \Leftrightarrow \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{3R^2} = (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C), \text{ từ}$$

$$\text{đây ta được: } \frac{4}{\pi^2}(A^2 + B^2 + C^2) < \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{3R^2} < A^2 + B^2 + C^2 \text{ (đpcm).}$$

Bây giờ ta thử sáng tạo một bất đẳng thức liên quan tới r_a , ta có công thức tính r_a là $r_a = p \tan \frac{A}{2}$, từ **bài toán đại số** $\frac{x}{2} < \tan \frac{x}{2} < \frac{2x}{\pi}$ chắc chắn ta dễ dàng tìm thấy $\frac{A}{2} < \frac{r_a}{p} < \frac{2A}{\pi}$

, tương tự ta cũng có $\frac{B}{2} < \frac{r_b}{p} < \frac{2B}{\pi}$ và $\frac{C}{2} < \frac{r_c}{p} < \frac{2C}{\pi}$, cộng 3 chuỗi bất

$$\text{đẳng thức ta thu được } \frac{A+B+C}{2} < \frac{r_a+r_b+r_c}{p} < \frac{2(A+B+C)}{\pi} \text{ và ta thu được **Bài toán 7.**}$$

Bài toán 7: Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn ta luôn có:

$$\frac{A+B+C}{2} < \frac{r_a+r_b+r_c}{p} < \frac{2(A+B+C)}{\pi}$$

Ta tìm hiểu bài toán sau:

Bài toán 8: Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn ta luôn có:

$$\pi(2R-r) < aA + bB + cC < 4(2R-r)$$

Nhận xét: Ta có các kết quả: $r_a = p \tan \frac{A}{2}$, $r_b = p \tan \frac{B}{2}$, $r_c = p \tan \frac{C}{2}$, $r = (p-a) \tan \frac{A}{2} = (p-b) \tan \frac{B}{2} = (p-c) \tan \frac{C}{2}$ dẫn đến $r_a = r + a \tan \frac{A}{2}$, $r_b = r + b \tan \frac{B}{2}$, $r_c = r + c \tan \frac{C}{2}$ và $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ (các kết quả này bạn đọc tự chứng minh), từ đó ta suy ra $4R + r = 3r + p \tan \frac{A}{2} + p \tan \frac{B}{2} + p \tan \frac{C}{2}$ và nhờ kết quả này ta dễ dàng đánh giá tổng $aA + bB + cC$ từ **bài toán đại số** nên ta dễ có lời giải như sau.

Lời giải:

Ta có: $r_a = ptg \frac{A}{2}$, $r_b = ptg \frac{B}{2}$, $r_c = ptg \frac{C}{2}$, $r = (p-a)tg \frac{A}{2} = (p-b)tg \frac{B}{2} = (p-c)tg \frac{C}{2}$, từ đó dẫn đến $r_a = r + atg \frac{A}{2}$, $r_b = r + btg \frac{B}{2}$, $r_c = r + ctg \frac{C}{2}$. Mà ta lại có: $r_a + r_b + r_c = 4R + r$

suy ra $4R + r = 3r + ptg \frac{A}{2} + ptg \frac{B}{2} + ptg \frac{C}{2}$. Áp dụng **bài toán đại số** ta được:

$$\bullet 4R + r = 3r + ptg \frac{A}{2} + ptg \frac{B}{2} + ptg \frac{C}{2} < 3r + \frac{2}{\pi}(aA + bB + cC)$$

$$\Leftrightarrow \pi(2R - r) < aA + bB + cC$$

$$\bullet 4R + r = 3r + ptg \frac{A}{2} + ptg \frac{B}{2} + ptg \frac{C}{2} > 3r + \frac{1}{2}(aA + bB + cC)$$

$$\Leftrightarrow 4(2R - r) > aA + bB + cC$$

Kết hợp 2 điều trên ta có điều phải chứng minh.

Sau đây là các bài toán được hình thành từ các công thức quen thuộc để các bạn luyện tập:

Bài toán: Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn ta luôn có:

$$a/ \ 2\pi p - 8(R + r) < aA + bB + cC < 2\pi p - 2\pi(R + r).$$

$$b/ \ \frac{\pi S}{2} < (p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a) < 2S.$$

$$c/ \ abc < a^2(p-a) + b^2(p-b) + c^2(p-c) < \frac{\pi}{2}abc.$$

$$d/ \ 4 < l_a \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + l_b \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) + l_c \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) < 2\pi.$$

2/Chúng ta xét hàm: $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ với $\forall x \in (0, \pi)$.

Ta có $f(x)$ là hàm số xác định và liên tục trong $(0, \pi)$ và $f'(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}$. Đặt $g(x) = \sin x - x \cos x$, $x \in (0, \pi)$, ta có $g'(x) = x \sin x \geq 0 \Rightarrow g(x)$ đồng biến trong đoạn $(0, \pi) \Rightarrow g(x) > g(0) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ nên hàm $f(x)$ đồng biến.

Chú ý 3 bất đẳng thức đại số:

1. Bất đẳng thức AM-GM:

Cho n số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$, ta luôn có:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

2. Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

Cho 2 bộ n số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ trong đó $b_i > 0, i = \overline{1, n}$. Ta luôn có:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

3. Bất đẳng thức Chebyshev:

Cho 2 dãy $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ cùng tăng hoặc cùng giảm, tức là:

$$\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}, \text{ thì ta có:}$$

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}$$

Dấu “=” xảy ra $\begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{cases}$.

Nếu 2 dãy đơn điệu ngược chiều thì đổi chiều dấu bất đẳng thức.

Xét trong tam giác ABC có $A \geq B$ (A, B số đo hai góc A, B của tam giác theo radian).

• $A \geq B \Rightarrow \frac{A}{\sin A} \geq \frac{B}{\sin B}$ (theo chứng minh trên thì hàm $f(x) = \frac{x}{\sin x}$)
 $\Rightarrow \frac{A}{\frac{a}{2R}} \geq \frac{B}{\frac{b}{2R}} \Rightarrow \frac{A}{B} \geq \frac{a}{b}$, mà $A \geq B \Leftrightarrow a \geq b$. Như vậy ta suy ra nếu $a \geq b$ thì $\frac{A}{B} \geq \frac{a}{b}$

(i).

• Hoàn toàn tương tự : $a \geq b \geq c \Rightarrow \frac{A}{a} \geq \frac{B}{b} \geq \frac{C}{c}$ và như vậy ta có

$$(a-b)\left(\frac{A}{a} - \frac{B}{b}\right) \geq 0, (b-c)\left(\frac{B}{b} - \frac{C}{c}\right) \geq 0 \text{ và } (c-a)\left(\frac{C}{c} - \frac{A}{a}\right) \geq 0. \text{ Cộng 3}$$

bất đẳng thức ta được $\sum_{cyc} (a-b)\left(\frac{A}{a} - \frac{B}{b}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 2(A+B+C) \geq \sum_{cyc} (b+c) \frac{A}{a}$ (1).

- Cộng $A+B+C$ vào 2 vế của (1) ta thu được:

$$3(A+B+C) \geq (a+b+c)\left(\frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c}\right) \quad (2)$$

- Trừ $A+B+C$ vào 2 vế của (1) ta thu được: $(A+B+C) \geq 2 \sum_{cyc} (p-a) \frac{A}{a}$ (3).

Chú ý rằng $A+B+C = \pi$ và $a+b+c = 2p$ nên (2) $\Leftrightarrow 3\pi \geq 2p \sum_{cyc} \frac{A}{a} \Leftrightarrow$

$\sum_{cyc} \frac{A}{a} \leq \frac{3\pi}{2p}$ (ii), và (3) $\Leftrightarrow \sum_{cyc} (p-a) \frac{A}{a} \leq \frac{\pi}{2}$ (iii).

- Mặt khác ta có thể áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho 2 bộ số

$$\left(\frac{A}{a}, \frac{B}{b}, \frac{C}{c}\right) \text{ và } (p-a, p-b, p-c). \text{ Ta có: } a \geq b \geq c \Rightarrow \begin{cases} \frac{A}{a} \geq \frac{B}{b} \geq \frac{C}{c} \\ p-a \leq p-b \leq p-c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{cyc} (p-a) \frac{A}{a}}{3} \leq \frac{(p-a+p-b+p-c)}{3} \cdot \frac{\left(\frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c}\right)}{3} \Leftrightarrow \sum_{cyc} (p-a) \frac{A}{a} \leq \frac{p \sum_{cyc} \frac{A}{a}}{3}. \text{ Mà}$$

$$\sum_{cyc} \frac{A}{a} \leq \frac{3\pi}{2p} \text{ ta suy ra: } \sum_{cyc} (p-a) \frac{A}{a} \leq \frac{p \sum_{cyc} \frac{A}{a}}{3} \leq \frac{p \cdot \frac{3\pi}{2p}}{3} \text{ hay } \sum_{cyc} (p-a) \frac{A}{a} \leq \frac{p \sum_{cyc} \frac{A}{a}}{3} \leq \frac{\pi}{2} \text{ (iv).}$$

- Ta chú ý đến hai bất đẳng thức (ii) và (iii):

$$\text{-Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số } \frac{A}{a}, \frac{B}{b}, \frac{C}{c} \text{ ta được: } \sum_{cyc} \frac{A}{a} \geq 3 \left(\frac{A.B.C}{a.b.c} \right)^{\frac{1}{3}} \text{ kết}$$

$$\text{hợp với bất đẳng thức (ii) ta suy ra } 3 \left(\frac{A.B.C}{a.b.c} \right)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{3\pi}{2p} \Leftrightarrow \frac{a.b.c}{A.B.C} \geq \left(\frac{2p}{\pi} \right)^3 \text{ (v). Mặt}$$

$$\text{khác, ta lại có } \sum_{cyc} \frac{a}{A} \geq 3 \left(\frac{a.b.c}{A.B.C} \right)^{\frac{1}{3}}, \text{ mà theo (v) ta dễ dàng suy ra } \left(\frac{a.b.c}{A.B.C} \right)^{\frac{1}{3}} \geq \frac{2p}{\pi}, \text{ từ đó ta}$$

$$\text{có bất đẳng thức } \sum_{cyc} \frac{a}{A} \geq \frac{6p}{\pi} \text{ (vi).}$$

-Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có :

$$\sum_{cyc} \frac{A}{a} = \sum_{cyc} \frac{A^2}{aA} \geq \frac{(A+B+C)^2}{Aa+Bb+Cc} = \frac{\pi^2}{Aa+Bb+Cc} \text{ (vii), mà ta đã tìm được}$$

$$2\pi p - 8(R+r) < Aa+Bb+Cc < 2\pi p - 2\pi(R+r) \text{ (bài tập a/ phần trước) nên}$$

$$\sum_{cyc} \frac{A}{a} > \frac{\pi^2}{2\pi(p-R-r)} \text{ (viii) (chỉ đúng với tam giác nhọn).}$$

-Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số $(p-a)\frac{A}{a}, (p-b)\frac{B}{b}, (p-c)\frac{C}{c}$ ta được:

$$(p-a)\frac{A}{a} + (p-b)\frac{B}{b} + (p-c)\frac{C}{c} \geq 3\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)\frac{A.B.C}{a.b.c}} = 3\sqrt[3]{\frac{S^2}{p} \frac{A.B.C}{4S.R}} = 3\sqrt[3]{\frac{S.A.B.C}{4p.R}} \Rightarrow$$

$$\sum_{cyc} (p-a) \frac{A}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{S^2}{p} \frac{A.B.C}{4S.R}} \text{ (4) mà } \sum_{cyc} (p-a) \frac{A}{a} \leq \frac{p \sum_{cyc} \frac{A}{a}}{3} \leq \frac{\pi}{2} \text{ (theo iv) nên từ (4)}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{\frac{S^2}{p} \frac{A.B.C}{4S.R}} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{729S.A.B.C}{4R} \leq p^4 \left(\sum_{cyc} \frac{A}{a} \right)^3 \Rightarrow \frac{729S.A.B.C}{4R} \leq p^4 \left(\frac{3\pi}{2p} \right)^3$$

$$\Leftrightarrow 54S.A.B.C \leq \pi^3.p.R \text{ (ix).}$$

• Xét tổng $T = \left(\frac{\sqrt{x}}{b\sqrt{By}} + \frac{\sqrt{y}}{a\sqrt{Ax}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{z}}{a\sqrt{Ax}} + \frac{\sqrt{x}}{c\sqrt{Cz}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{y}}{c\sqrt{Cz}} + \frac{\sqrt{z}}{b\sqrt{By}} \right)^2$.

Ta có: $T \geq 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{y+z}{x} \cdot \frac{1}{a^2A} + \frac{z+x}{y} \cdot \frac{1}{b^2B} + \frac{x+y}{z} \cdot \frac{1}{c^2C} - 2 \left(\frac{1}{ab\sqrt{AB}} + \frac{1}{bc\sqrt{BC}} + \frac{1}{ca\sqrt{CA}} \right) &\geq 0. \\ \Leftrightarrow \frac{y+z}{x} \cdot \frac{bc}{aA} + \frac{z+x}{y} \cdot \frac{ca}{bB} + \frac{x+y}{z} \cdot \frac{ab}{cC} - 2 \left(\frac{c}{\sqrt{AB}} + \frac{a}{\sqrt{BC}} + \frac{b}{\sqrt{CA}} \right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{y+z}{x} \cdot \frac{bc}{aA} + \frac{z+x}{y} \cdot \frac{ca}{bB} + \frac{x+y}{z} \cdot \frac{ab}{cC} &\geq 2 \left(\frac{a}{\sqrt{BC}} + \frac{b}{\sqrt{CA}} + \frac{c}{\sqrt{AB}} \right) \quad (5). \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được: $\frac{a}{\sqrt{BC}} + \frac{b}{\sqrt{CA}} + \frac{c}{\sqrt{AB}} \geq 3 \left(\frac{abc}{ABC} \right)^{\frac{1}{3}} \geq \frac{6p}{\pi}$ (6).

Từ (5) và (6) ta được: $\frac{y+z}{x} \cdot \frac{bc}{aA} + \frac{z+x}{y} \cdot \frac{ca}{bB} + \frac{x+y}{z} \cdot \frac{ab}{cC} \geq \frac{6p}{\pi}$ (7).

Thay (x, y, z) trong (7) bằng $(p-a, p-b, p-c)$ ta được:

$$\frac{bc}{A(p-a)} + \frac{ca}{B(p-b)} + \frac{ab}{C(p-c)} \geq \frac{12p}{\pi} \quad (x)$$

Thay (x, y, z) trong (7) bằng (bc, ca, ab) ta được: $\frac{b+c}{A} + \frac{c+a}{B} + \frac{a+b}{C} \geq \frac{12p}{\pi}$ (xi).

3/ Chúng ta xét bất đẳng thức sau: $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ với $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ (phần chứng minh bất đẳng thức này dành cho bạn đọc).

Theo định lí hàm số sin ta có $\sin A = \frac{a}{2R}$ và kết hợp với bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{2R} \geq \frac{2A}{\pi} \Leftrightarrow \frac{a}{A} \geq \frac{4R}{\pi}, \text{ từ đó ta dễ dàng suy ra } \sum_{cyc} \frac{a}{A} > \frac{12R}{\pi}.$$

4/ Bất đẳng thức: $\frac{\sin x}{x} \geq \frac{\pi^2 - x^2}{\pi^2 + x^2}$ với $\forall x \in (0, \pi]$ (bất đẳng thức này xem như bài tập dành cho bạn đọc).

Bất đẳng thức trên tương đương $\frac{\sin x}{x} \geq 1 - \frac{2x^2}{\pi^2 + x^2} \Leftrightarrow \sin x \geq x - \frac{2x^3}{\pi^2 + x^2}$ (1).

Trong tam giác ta có: $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (2) (bạn đọc tự chứng minh). Từ (1)

và (2) ta thu được $\frac{3\sqrt{3}}{2} \geq \sum_{cyc} \sin A > A + B + C - 2 \left(\frac{A^3}{\pi^2 + A^2} + \frac{B^3}{\pi^2 + B^2} + \frac{C^3}{\pi^2 + C^2} \right) \Rightarrow$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} > \pi - 2 \left(\frac{A^3}{\pi^2 + A^2} + \frac{B^3}{\pi^2 + B^2} + \frac{C^3}{\pi^2 + C^2} \right) \Leftrightarrow \frac{A^3}{\pi^2 + A^2} + \frac{B^3}{\pi^2 + B^2} + \frac{C^3}{\pi^2 + C^2} > \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức cho 3 góc A, B, C ta thu được $\frac{\sin A}{A} > \frac{\pi^2 - A^2}{\pi^2 + A^2}$,

$\frac{\sin B}{B} > \frac{\pi^2 - B^2}{\pi^2 + B^2}$ và $\frac{\sin C}{C} > \frac{\pi^2 - C^2}{\pi^2 + C^2}$, cộng các bất đẳng thức ta được:

$\frac{\sin A}{A} + \frac{\sin B}{B} + \frac{\sin C}{C} > \frac{\pi^2 - A^2}{\pi^2 + A^2} + \frac{\pi^2 - B^2}{\pi^2 + B^2} + \frac{\pi^2 - C^2}{\pi^2 + C^2}$, từ đây áp dụng định lí hàm số sin

$$\sin A = \frac{a}{2R} \text{ ta có } \frac{\frac{a}{2R}}{A} + \frac{\frac{b}{2R}}{B} + \frac{\frac{c}{2R}}{C} > \frac{\pi^2 - A^2}{\pi^2 + A^2} + \frac{\pi^2 - B^2}{\pi^2 + B^2} + \frac{\pi^2 - C^2}{\pi^2 + C^2} \text{ hay } \sum_{cyc} \frac{a}{A} > 2R \sum \frac{\pi^2 - A^2}{\pi^2 + A^2}.$$

Thử trở về cội nguồn của môn lượng giác

Lê Quốc Hán

Đại học Sư phạm Vinh

“Lượng giác học” có nguồn gốc từ Hình học. Tuy nhiên phần lớn học sinh khi học môn Lượng giác học (giải phương trình lượng giác, hàm số lượng giác ...), lại thấy nó như là một bộ phận của môn Đại số học, hoặc như một công cụ để giải các bài toán hình học (phần tam giác lượng) mà không thấy mối liên hệ hai chiều giữa các bộ môn ấy.

Trong bài viết này, tôi hy vọng phần nào có thể cho các bạn một cách nhìn “mới” : dùng hình học để giải các bài toán lượng giác.

Trước hết, ta lấy một kết quả quen thuộc trong hình học sơ cấp : “Nếu G là trọng tâm tam giác ABC và M là một điểm tùy ý trong mặt phẳng chứa tam giác đó thì” :

$$MG^2 = \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \quad (\text{Định lý Lép-nít})$$

Nếu $M \equiv O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ thì $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3R^2$ nên áp dụng định lý hàm số sin, ta suy ra : $OG^2 = R^2 - \frac{4}{9}R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$

$$\Rightarrow OG^2 = \frac{4}{9}R^2\left(\frac{9}{4} - (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)\right) \quad (1)$$

Từ đẳng thức (1), suy ra :

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4} \quad (2)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $G \equiv O$, tức là khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

Như vậy, với một kiến thức hình học lớp 10 ta đã phát hiện và chứng minh được bất đẳng thức (2). Ngoài ra, hệ thức (1) còn cho ta một “nguồn gốc hình học” của bất đẳng thức (2), điều mà ít người nghĩ đến. Bằng cách tương tự, ta hãy tính khoảng cách giữa O và trực tâm H của $\triangle ABC$. Xét trường hợp $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn. Gọi E là giao điểm của AH với đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Thế thì :

$$\mathcal{P}_{H/(O)} = OH^2 - R^2 = \overline{HE} \cdot \overline{HA}$$

$$\text{Do đó : } OH^2 = R^2 - AH \cdot HE \quad (*)$$

với :

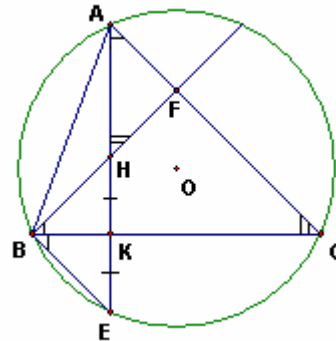
$$AH = \frac{AF}{\sin C} = AB \cdot \frac{\cos A}{\sin C} = 2R \sin C \frac{\cos A}{\sin C} = 2R \cos A$$

$$\text{và } HE = 2HK = 2BK \cot C = 2AB \cos B \cot C$$

$$= 2 \cdot 2R \sin C \cos B \frac{\cos C}{\sin C} = 4R \cos B \cos C$$

Thay vào (*) ta có :

$$OH^2 = 8R^2\left(\frac{1}{8} - \cos A \cos B \cos C\right) \quad (3)$$



Nếu $\angle BAC = 90^\circ$ chẳng hạn, thì (3) là hiển nhiên. Giả sử $\triangle ABC$ có góc A tù. Khi đó $\rho_{H/(O)} = R^2 - OH^2 = \overline{HA} \cdot \overline{HE}$ trong đó $AH = -2R \cos A$ nên ta cũng suy ra (3).

Từ công thức (3), ta suy ra :

$$\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8} \quad (4)$$

(Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều). Cũng như bất đẳng thức (2), bất đẳng thức (4) đã được phát hiện và chứng minh chỉ với kiến thức lớp 10 và có một “nguồn gốc hình học” khá đẹp. Cần nhớ rằng, “xưa nay” chưa nói đến việc phát hiện, chỉ riêng việc chứng minh các bất đẳng thức đó, người ta thường phải dùng các công thức lượng giác (chương trình lượng giác lớp 11) và định lý về dấu tam thức bậc hai.

Có được (1) và (3), ta tiếp tục tiến tới. Ta thử sử dụng “đường thẳng Ôle”.

Nếu O, G, H là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm và trực tâm $\triangle ABC$ thì O, G, H thẳng hàng và : $OG = \frac{1}{3}OH$. Từ $OG^2 = \frac{1}{9}OH^2$.

Từ (1)(3) ta có :

$$\frac{9}{4} - (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) = \frac{1}{4}(1 - 8 \cos A \cos B \cos C)$$

hay $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C$

Thay $\sin^2 \alpha$ bằng $1 - \cos^2 \alpha$ vào đẳng thức cuối cùng, ta được kết quả quen thuộc :

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1 \quad (5)$$

Chưa nói đến việc phát hiện ra (5), chỉ riêng việc chứng minh đã làm “nhức óc” không biết bao nhiêu bạn trẻ mới làm quen với lượng giác. Qua một vài ví dụ trên đây, hẳn các bạn đã thấy vai trò của hình học trong việc phát hiện và chứng minh các hệ thức “thuần túy lượng giác”. Mặt khác, nó cũng nêu lên cho chúng ta một câu hỏi : Phải chăng các hệ thức lượng giác trong một tam giác khi nào cũng có một “nguồn gốc hình học” làm bạn đường ? Mời các bạn giải vài bài tập sau đây để củng cố niềm tin của mình.

1. Chứng minh rằng, trong một tam giác ta có $d^2 = R^2 \left(1 - 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right)$ trong đó

d là khoảng cách giữa đường tròn tâm ngoại tiếp và nội tiếp tam giác đó.

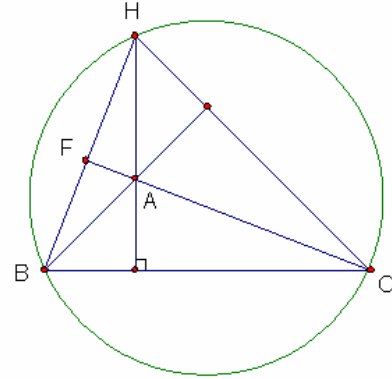
Từ đó hãy suy ra bất đẳng thức quen thuộc tương ứng.

- 2. Cho $\triangle ABC$. Dựng trong mặt phẳng ABC các điểm O_1 và O_2 sao cho các tam giác O_1AB và O_2AC là những tam giác cân đỉnh O_1, O_2 với góc ở đáy bằng 30° và sao cho O_1 và C ở cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, O_2 và B ở cùng một nửa mặt phẳng bờ AC.

a) Chứng minh :

$$O_1O_2^2 = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}S)$$

b) Suy ra bất đẳng thức tương ứng :



$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq 2\sqrt{3} \sin A \sin B \sin C$$

3. Chứng minh rằng nếu ΔABC có 3 góc nhọn, thì :

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} < 2$$

4. Cho tứ diện $OABC$ có góc tam diện đỉnh O ba mặt vuông, $OA = OB + OC$. Chứng minh rằng :

$$\sin(\angle OAB + \angle OAC) = \cos \angle BAC$$

(Hãy dùng phương pháp ghép hình)

Phương pháp giải một dạng bất đẳng thức lượng giác trong tam giác

Nguyễn Lái

GV THPT Lương Văn Chánh – Phú Yên

Giả sử $f(A, B, C)$ là biểu thức chứa các hàm số lượng giác của các góc trong $\triangle ABC$

Giả sử các góc A, B, C thỏa mãn hai điều kiện :

$$1) \quad f(A) + f(B) \geq 2f\left(\frac{A+B}{2}\right) \quad \text{hoặc} \quad f(A)f(B) \geq f^2\left(\frac{A+B}{2}\right) \quad (1)$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B$

$$2) \quad f(C) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq 2f\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right) \quad \text{hoặc} \quad f(C)f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq f^2\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right) \quad (2)$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $C = \frac{\pi}{3}$ Khi cộng hoặc nhân (1)(2) ta sẽ có bất

đẳng thức :

$$f(A) + f(B) + f(C) \geq 3f\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{hoặc} \quad f(A)f(B)f(C) \geq f^3\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C$. Tương tự ta cũng có bất đẳng thức với chiều ngược lại. Để minh họa cho phương pháp trên ta xét các bài toán sau đây :

Thí dụ 1. Chứng minh rằng với mọi $\triangle ABC$ ta luôn có :

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}} + \frac{1}{1+\sqrt{\sin B}} + \frac{1}{1+\sqrt{\sin C}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt[4]{3}}$$

Lời giải. Ta có :

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}} + \frac{1}{1+\sqrt{\sin B}} \geq \frac{4}{2+\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B}} \geq \frac{4}{2+\sqrt{2(\sin A + \sin B)}} \geq \frac{2}{1+\sqrt{\sin \frac{A+B}{2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{\sin A}} + \frac{1}{1+\sqrt{\sin B}} \geq \frac{2}{1+\sqrt{\sin \frac{A+B}{2}}} \quad (3)$$

$$\text{Tương tự ta có : } \frac{1}{1+\sqrt{\sin C}} + \frac{1}{1+\sqrt{\sin \frac{\pi}{3}}} \geq \frac{2}{1+\sqrt{\sin \frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}}} \quad (4)$$

Cộng theo vế (3) và (4) ta có :

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}} + \frac{1}{1+\sqrt{\sin B}} + \frac{1}{1+\sqrt{\sin C}} + \frac{1}{1+\sqrt{\sin \frac{\pi}{3}}} \geq 2 \left(\frac{1}{1+\sqrt{\sin \frac{A+B}{2}}} + \frac{1}{1+\sqrt{\sin \frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}}} \right) \geq \frac{4}{1+\sqrt{\sin \frac{\pi}{3}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{\sin A}} + \frac{1}{1+\sqrt{\sin B}} + \frac{1}{1+\sqrt{\sin C}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt[4]{3}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

Thí dụ 2. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có :

$$\left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

Lời giải. Ta có :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) &= 1 + \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin A \sin B} \geq 1 + \frac{2}{\sqrt{\sin A \sin B}} + \left(\frac{1}{\sqrt{\sin A \sin B}}\right)^2 \\ &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\sin A \sin B}}\right)^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos(A-B) - \cos(A+B)}}\right)^2 \geq \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \cos(A+B)}}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{A+B}{2}}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{A+B}{2}}\right)^2 \quad (5)$$

$$\text{Tương tự : } \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}}\right)^2 \quad (6)$$

Nhân theo vế của (5) và (6) ta có :

$$\left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{A+B}{2}}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}}\right)^2 \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right)^4$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Thí dụ 3. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có :

$$\sin^6 \frac{A}{2} + \sin^6 \frac{B}{2} + \sin^6 \frac{C}{2} \geq \frac{3}{64}$$

Lời giải. Trường hợp tam giác ABC tù hoặc vuông.

$$\text{Giả sử } A = \max\{A, B, C\} \geq \frac{\pi}{2}, \text{ lúc đó } \cos \frac{A-B}{2} > 0 \text{ và } \cos \left(\frac{C + \frac{\pi}{3}}{2} \right) > 0.$$

Ta có :

$$\begin{aligned} \frac{\sin^6 \frac{A}{2} + \sin^6 \frac{B}{2}}{2} &\geq \left(\frac{\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{\cos A + \cos B}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} \left(1 - \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \right) \\ &\geq \frac{1}{8} \left(1 - \cos \frac{A+B}{2} \right)^3 = \sin^6 \frac{A+B}{4} \Rightarrow \sin^6 \frac{A}{2} + \sin^6 \frac{B}{2} \geq 2 \sin^6 \frac{A+B}{4} \quad (7) \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự ta có : } \sin^6 \frac{C}{2} + \sin^6 \frac{\frac{\pi}{3}}{2} \geq 2 \sin^6 \frac{C + \frac{\pi}{3}}{4} \quad (8)$$

Cộng theo vế của (7) và (8) ta được :

$$\begin{aligned} \sin^6 \frac{A}{2} + \sin^6 \frac{B}{2} + \sin^6 \frac{C}{2} + \sin^6 \frac{\frac{\pi}{3}}{2} &\geq 2 \left(\sin^6 \frac{A+B}{4} + \sin^6 \frac{C + \frac{\pi}{3}}{4} \right) \geq 4 \sin^6 \frac{A+B+C + \frac{\pi}{3}}{8} \\ \Rightarrow \sin^6 \frac{A}{2} + \sin^6 \frac{B}{2} + \sin^6 \frac{C}{2} &\geq 3 \sin^6 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{64} \quad (9) \end{aligned}$$

Trường hợp tam giác ABC nhọn, các bất đẳng thức (7), (8), (9) luôn đúng.

Thí dụ 4. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có :

$$(\cos A + \sin A)(\cos B + \sin B)(\cos C + \sin C) \leq 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \right)^3$$

Lời giải. Ta có :

$$(\cos A + \sin A)(\cos B + \sin B)(\cos C + \sin C) = 2\sqrt{2} \cos \left(A - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(B - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(C - \frac{\pi}{4} \right)$$

nên bất đẳng thức đã cho tương đương với :

$$\cos\left(A - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(C - \frac{\pi}{4}\right) \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3 \quad (*)$$

- Nếu $\max\{A, B, C\} \geq \frac{3\pi}{4}$ thì vế trái của (*) không dương nên bất đẳng thức đã cho luôn đúng.

- Nếu $\max\{A, B, C\} < \frac{3\pi}{4}$ thì : $\cos\left(A - \frac{\pi}{4}\right) > 0, \cos\left(B - \frac{\pi}{4}\right) > 0, \cos\left(C - \frac{\pi}{4}\right) > 0$

$$\begin{aligned} \text{nên } \cos\left(A - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(A + B - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(A - B)\right] \\ &\leq \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(A + B - \frac{\pi}{2}\right)\right] \leq \cos^2\left(\frac{A + B}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ \Rightarrow \cos\left(A - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B - \frac{\pi}{4}\right) &\leq \cos^2\left(\frac{A + B}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (10) \end{aligned}$$

Tương tự :

$$\cos\left(C - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \leq \cos^2\left(\frac{C + \frac{\pi}{3}}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (11)$$

Do đó nhân theo vế của (10) và (11) ta sẽ có :

$$\begin{aligned} \cos\left(A - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(C - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) &\leq \cos^2\left(\frac{A + B}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(\frac{C + \frac{\pi}{3}}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \leq \cos^4\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ \Rightarrow \cos\left(A - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(C - \frac{\pi}{4}\right) &\leq \cos^3\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3 \end{aligned}$$

Do đó :

$$(\cos A + \sin A)(\cos B + \sin B)(\cos C + \sin C) \leq 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Mời các bạn tiếp tục giải các bài toán sau đây theo phương pháp trên.

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có :

- 1) $\tan^3 \frac{A}{2} + \tan^3 \frac{B}{2} + \tan^3 \frac{C}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$
- 2) $\frac{1}{\sin^n \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^n \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^n \frac{C}{2}} \geq 3.2^n \quad (n \in \mathbb{N})$

$$3) \quad A \cos \frac{A}{4} + B \cos \frac{B}{4} + C \cos \frac{C}{4} \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3})$$

$$4) \quad \cos\left(\frac{\pi}{4} - A\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - B\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - C\right) \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} (1 + \sqrt{3})^3 \cos A \cos B \cos C$$

với ΔABC nhọn.