



Chương

Bài 1.

DÃY SỐ



Lý thuyết

1. Dãy số



Định nghĩa:

- Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn. Nghĩa là:

$$u: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n = u(n).$$

Dãy số trên được kí hiệu là (u_n)

Dạng khai triển của dãy số (u_n) là: $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$



Chú ý

- $u_1 = u(1)$ là số hạng đầu,
 $u_n = u(n)$ là số hạng thứ n (số hạng tổng quát) của dãy số.
- Nếu $u_n = C, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta nói (u_n) là dãy số không đổi.
- Hàm số u xác định trên tập $M = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ thì được gọi là một dãy số hữu hạn.
- Dạng khai triển của dãy số này là: $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$, trong đó u_1 là số hạng đầu, u_m là số hạng cuối.

2. Cách xác định dãy số



- Một dãy số có thể được cho bằng các cách sau:

- Cho bằng liệt kê các số hạng.
- Cho bằng công thức của số hạng tổng quát.
- Cho bằng phương pháp truy hồi.
Tức là: + Cho số hạng đầu.
+ Cho hệ thức truy hồi, tức là hệ thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng đứng trước nó.
- Cho bằng phương pháp mô tả.



3. Dãy số tăng, dãy số giảm và dãy số bị chặn



Định nghĩa:

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.



Chú ý

Không phải mọi dãy số đều tăng hoặc giảm.
Chẳng hạn:

Dãy số (u_n) với $u_n = (-3)^n$ tức là dãy $-3, 9, -27, 81, \dots$ không tăng cũng không

4. Dãy số bị chặn



Định nghĩa:

- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M :
 $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m :
 $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$



Chú ý

(1) Dãy tăng sẽ bị chặn dưới bởi u_1

(2) Dãy giảm sẽ bị chặn trên bởi u_1



Các dạng bài tập

Dạng 1. Tìm số hạng của dãy số từ dãy số cho trước



Phương

Ở dạng này, ta có 4 bài toán thường gặp:

✱ **Bài toán 1:** Cho dãy số (u_n) : $u_n = f(n)$. Hãy tìm số hạng u_k .

✱ **Bài toán 2:** Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. Hãy tìm số hạng u_k .

✱ **Bài toán 3:** Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_{n+2} = c.u_{n+1} + d.u_n + e \end{cases}$. Hãy tìm số hạng u_k .

✱ **Bài toán 4:** Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(n, u_n) \end{cases}$. Trong đó $f(n, u_n)$ là kí hiệu của biểu thức u_{n+1} tính theo u_n và n . Hãy tìm số hạng u_k .

✱ **Bài toán 1:** Cho dãy số (u_n) : $u_n = f(n)$. Hãy tìm số hạng u_k .

✓ **Cách 1. Tự luận:** Thay trực tiếp $n=k$ vào $u_n = 2n+3$.

✓ **Cách 2. Dùng máy tính:** » Nhập: $f(n)$ CALC $X=k$
» Bấm $\Rightarrow$ Kết quả

✱ **Bài toán 2:** Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. Hãy tìm số hạng u_k .

✓ **Cách 1. Tự luận:**

Tính lần lượt $u_2; u_3; \dots; u_k$ bằng cách thế u_1 vào u_2 , thế u_2 vào u_3 , ..., thế u_{k-1} vào u_{k+1} .

✓ **Cách 2. Dùng máy tính:** Cách lập quy trình bấm máy:

» Nhập giá trị của số hạng u_1 : $a \Rightarrow$ ANS

» Nhập biểu thức của $u_{n+1} = f(u_n)$

» Lặp dấu $=$ lần thứ $\boxed{k-1}$ cho ra giá trị của số hạng u_k .

✱ **Bài toán 3:** Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_{n+2} = c.u_{n+1} + d.u_n + e \end{cases}$. Hãy tìm số hạng u_k .

✓ **Cách 1. Tự luận:**

Tính lần lượt $u_2; u_3; \dots; u_k$ bằng cách thế u_1 vào u_2 , thế u_2 vào u_3 , ..., thế u_{k-1} vào u_{k+1} .

✓ **Cách 2. Dùng máy tính:** Cách lập quy trình bấm máy:



$\boxed{A}$: chứa giá trị của u_n

$\boxed{B}$: chứa giá trị của u_{n+1}

$\boxed{C}$: chứa giá trị của u_{n+2}

» Nhập $C = cB + dA + e; A = B; B = C$

» Bấm = rồi cho $B = b$, ấn =, nhập $A = a$ ấn =

» Lặp dấu = cho đến khi xuất hiện lần thứ $k-2$ giá trị của C thì đó chính là giá trị của số hạng u_k .

*** Bài toán 4:** Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(n, u_n) \end{cases}$. Trong đó $f(n, u_n)$ là kí hiệu của biểu thức u_{n+1} tính theo u_n và n . Hãy tìm số hạng u_k .

✓ **Cách 1.** Tự luận:

Tính lần lượt $u_2; u_3; \dots; u_k$ bằng cách thế $\{1, u_1\}$ vào u_2 ; thế $\{2, u_2\}$ vào u_3 ; ...; thế $\{k-1, u_{k-1}\}$ vào u_k .

✓ **Cách 2.** Dùng máy tính: Cách lập quy trình bấm máy:

$\boxed{A}$: chứa giá trị của n

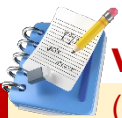
$\boxed{B}$: chứa giá trị của u_n

$\boxed{C}$: chứa giá trị của u_{n+1}

Lập công thức tính u_{n+1}

» Gán $A = \boxed{A} + 1$; $\boxed{B} := \boxed{C}$ để tính số hạng tiếp theo của dãy

» Lặp dấu = cho đến khi xuất hiện lần thứ $k-1$ giá trị của C thì đó chính là giá trị của số hạng u_k .



Ví dụ 1.1.

- (1) Xét dãy số gồm tất cả các số tự nhiên chia cho 5 dư 1 theo thứ tự tăng dần. Xác định số hạng tổng quát của dãy số.
- (2) Viết dãy số hữu hạn gồm năm số hạng đầu của dãy số trong câu 1. Xác định số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số hữu hạn này.

Lời giải

(1) Xét dãy số gồm tất cả các số tự nhiên chia cho 5 dư 1 theo thứ tự tăng dần. Xác định số hạng tổng quát của dãy số.

Số hạng tổng quát của dãy số $u_n = 5n + 1 (n \in \mathbb{N}^*)$

(2) Viết dãy số hữu hạn gồm năm số hạng đầu của dãy số trong câu 1. Xác định số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số hữu hạn này.

dãy số hữu hạn gồm năm số hạng đầu: 6; 11; 16; 21; 26

Số hạng đầu của dãy số này là 6, số hạng cuối là 26



Ví dụ 1.2.

- (1) Viết năm số hạng đầu của dãy số (u_n) với số hạng tổng quát $u_n = n!$.
- (2) Viết năm số hạng đầu của dãy số Fibonacci (F_n) cho bởi hệ thức truy hồi

$$\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

Lời giải

- (1) Viết năm số hạng đầu của dãy số (u_n) với số hạng tổng quát $u_n = n!$.

Năm số hạng đầu của dãy: 1, 2, 6, 24, 120

- (2) Viết năm số hạng đầu của dãy số Fibonacci (F_n) cho bởi hệ thức truy hồi

$$\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 3) \end{cases}$$

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 1 + 1 = 2, F_4 = 2 + 1 = 3, F_5 = 3 + 2 = 5$$



Ví dụ 1.3.

Viết năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của các dãy số (u_n) có số hạng tổng quát cho bởi:

$$(1) u_n = 3n - 2$$

$$(2) u_n = 3 \cdot 2^n$$

$$(3) u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Lời giải

$$(1) u_n = 3n - 2$$

$$u_1 = 1, u_2 = 4, u_3 = 7, u_4 = 10, u_5 = 13, u_{100} = 298$$

$$(2) u_n = 3 \cdot 2^n$$

$$u_1 = 6, u_2 = 12, u_3 = 24, u_4 = 48, u_5 = 96, u_{100} = 3.803 \times 10^{30}$$

$$(3) u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$u_1 = 2, u_2 = \frac{9}{4}, u_3 = \frac{64}{27}, u_4 = \frac{625}{256}, u_5 = 2.48832, u_{100} = 2.7148$$



Ví dụ 1.4.

Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$. Tìm số hạng u_6 .

Lời giải

✓ **Cách 1:** Giải theo tự luận:

$$u_6 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^6 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^6 \right] = 8$$

Thế trực tiếp:



✓ **Cách 2:** Dùng máy tính cầm tay:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^x - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^x \right]$$

» Nhập:

» Bấm **CALC** nhập $X=6$

» Máy hiện: 8



Ví dụ 1.5.

Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ mấy?

👉 **Lời giải**

✓ **Cách 1:** Giải theo tự luận:

Giả sử $u_n = \frac{167}{84} \Leftrightarrow \frac{2n+1}{n+2} = \frac{167}{84} \Leftrightarrow 84(2n+1) = 167(n+2) \Leftrightarrow n = 250$.

Vậy $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ 250 của dãy số (u_n) .

✓ **Cách 2:** Dùng máy tính cầm tay:

» Nhập: $\frac{2X+1}{X+2}$

» Bấm **CALC** nhập $X=250$

» Máy hiện: $\frac{167}{84}$



Ví dụ 1.6.

Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1} \end{cases}$. Tìm số hạng u_{10} .

👉 **Lời giải**

✓ **Cách 1:** Giải theo tự luận:

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{u_1 + 2}{u_1 + 1} = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}; & u_3 &= \frac{u_2 + 2}{u_2 + 1} = \frac{\frac{3}{2}+2}{\frac{3}{2}+1} = \frac{7}{5}; & u_4 &= \frac{u_3 + 2}{u_3 + 1} = \frac{\frac{7}{5}+2}{\frac{7}{5}+1} = \frac{17}{12}; \\ u_5 &= \frac{u_4 + 2}{u_4 + 1} = \frac{\frac{17}{12}+2}{\frac{17}{12}+1} = \frac{41}{29}; & u_6 &= \frac{u_5 + 2}{u_5 + 1} = \frac{\frac{41}{29}+2}{\frac{41}{29}+1} = \frac{99}{70}; & u_7 &= \frac{u_6 + 2}{u_6 + 1} = \frac{\frac{99}{70}+2}{\frac{99}{70}+1} = \frac{239}{169}; \\ u_8 &= \frac{u_7 + 2}{u_7 + 1} = \frac{\frac{239}{169}+2}{\frac{239}{169}+1} = \frac{577}{408}; & u_9 &= \frac{u_8 + 2}{u_8 + 1} = \frac{\frac{577}{408}+2}{\frac{577}{408}+1} = \frac{1393}{985}; & u_{10} &= \frac{u_9 + 2}{u_9 + 1} = \frac{\frac{1393}{985}+2}{\frac{1393}{985}+1} = \frac{3363}{2378} \end{aligned}$$

✓ **Cách 2:** Dùng máy tính cầm tay:

Lập quy trình bấm máy:



» Nhập: 1 [=] (u_1)

» Nhập $\frac{\boxed{\text{ANS}} + 2}{\boxed{\text{ANS}} + 1}$

» Lập dấu [=] ta được giá trị số hạng $u_{10} = \frac{3363}{2378}$.



Ví dụ 1.7.

Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n + 5 \end{cases}$. Tìm số hạng u_8 .

Lời giải

✓ **Cách 1:** Giải theo tự luận:

$$\begin{aligned} u_3 &= 2u_2 + 3u_1 + 5 = 12, & u_4 &= 2u_3 + 3u_2 + 5 = 35, & u_5 &= 2u_4 + 3u_3 + 5 = 111, \\ u_6 &= 2u_5 + 3u_4 + 5 = 332, & u_7 &= 2u_6 + 3u_5 + 5 = 1002, & u_8 &= 2u_7 + 3u_6 + 5 = 3005 \end{aligned}$$

✓ **Cách 2:** Dùng máy tính cầm tay:

$\boxed{A}$: chứa giá trị của u_n

$\boxed{B}$: chứa giá trị của u_{n+1}

$\boxed{C}$: chứa giá trị của u_{n+2}

Lập quy trình bấm máy:

» Nhập: $C = 2B + 3A + 5 : A = B : B = C$

» Bấm $\boxed{\text{CALC}}$ nhập $B = 2$, ấn [=], nhập $A = 1$ ấn [=]

» Lập dấu [=] cho đến khi giá trị của C xuất hiện lần thứ 6 thì đó là giá trị của số hạng u_8 bằng 3005.



Ví dụ 1.8.

Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{n}{n+1}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_{11} .

Lời giải

✓ **Cách 1:** Giải theo tự luận:

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{2}(u_1 + 1) = \frac{1}{2}, & u_3 &= \frac{2}{3}(u_2 + 1) = 1, & u_4 &= \frac{3}{4}(u_3 + 1) = \frac{3}{2}, & u_5 &= \frac{4}{5}(u_4 + 1) = 2, \\ u_6 &= \frac{5}{6}(u_5 + 1) = \frac{5}{2}, & u_7 &= \frac{6}{7}(u_6 + 1) = 3, & u_8 &= \frac{7}{8}(u_7 + 1) = \frac{7}{2}, & u_9 &= \frac{8}{9}(u_8 + 1) = 4, \\ u_{10} &= \frac{9}{10}(u_9 + 1) = \frac{9}{2}, & u_{11} &= \frac{10}{11}(u_{10} + 1) = 5 \end{aligned}$$

✓ **Cách 2:** Dùng máy tính cầm tay:

$\boxed{A}$: chứa giá trị của n

$\boxed{B}$: chứa giá trị của u_n



$\boxed{C}$: chứa giá trị của u_{n+1}

Lập quy trình bấm máy:

» Nhập: $C = \frac{A}{A+1}(B+1):A = A+1:B = C$

» Bấm $\boxed{\text{CALC}}$ nhập $A=1$ ấn $=$, nhập $B=0$ ấn $=$

» Lập dấu $=$ cho đến khi giá trị của C xuất hiện lần thứ 10 thì đó là giá trị của số hạng u_{11} bằng 5.



Dạng 2. Tính tăng - giảm của dãy số



Phương

- Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số tăng** nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số giảm** nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

✱ **Cách 1:** Xét hiệu $u_{n+1} - u_n$

- Nếu $u_{n+1} - u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $u_{n+1} - u_n < 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm.

✱ **Cách 2:** Khi $u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta xét tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.

✱ Tính chất:

- Nếu $\begin{cases} (u_n) \uparrow \\ (v_n) \uparrow \end{cases}$ thì dãy số $(u_n + v_n) \uparrow$
- Nếu $\begin{cases} (u_n) \downarrow \\ (v_n) \downarrow \end{cases}$ thì dãy số $(u_n + v_n) \downarrow$
- Nếu $\begin{cases} (u_n) \uparrow; u_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \\ (v_n) \uparrow; v_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ thì dãy số $(u_n \cdot v_n) \uparrow$
- Nếu $\begin{cases} (u_n) \downarrow; u_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \\ (v_n) \downarrow; v_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ thì dãy số $(u_n \cdot v_n) \downarrow$
- Nếu $(u_n) \uparrow$ và $u_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số $(\sqrt{u_n}) \uparrow$ và dãy số $((u_n)^m) \uparrow \forall m \in \mathbb{N}^*$
- Nếu $(u_n) \downarrow$ và $u_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số $(\sqrt{u_n}) \downarrow$ và dãy số $((u_n)^m) \downarrow \forall m \in \mathbb{N}^*$
- Nếu $(u_n) \uparrow$ và $u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\frac{1}{u_n}\right) \downarrow$
- Nếu $(u_n) \downarrow$ và $u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\frac{1}{u_n}\right) \uparrow$

✱ Một vài kết quả về dạng toán tăng - giảm dãy số:

(1) Dãy số (u_n) có $u_n = an + b$	- Tăng khi $a > 0$ - Giảm khi $a < 0$
(2) Dãy số (u_n) có $u_n = q^n$	- Tăng khi $q > 1$ - Giảm khi $0 < q < 1$ - Không tăng, không giảm khi $q < 0$



(3) Dãy số (u_n) có $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$ với điều kiện $cn+d > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$	⊛ Tăng khi $ad - bc > 0$ ⊛ Giảm khi $ad - bc < 0$
(4) Dãy số đan điệu cũng là dãy số không tăng, không giảm	
(5) Nếu dãy số (u_n) tăng hoặc giảm thì dãy số $(q^n \cdot u_n)$ không tăng, không giảm	
(6) Dãy số (u_n) có $u_{n+1} = au_n + b$	⊛ Tăng nếu $\begin{cases} a > 0 \\ u_2 - u_1 > 0 \end{cases}$ ⊛ Giảm nếu $\begin{cases} a > 0 \\ u_2 - u_1 < 0 \end{cases}$ ⊛ Không tăng không giảm nếu $a < 0$
(7) Dãy số (u_n) có $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d} \\ c, d > 0, u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$	⊛ Tăng nếu $\begin{cases} ad - bc > 0 \\ u_2 - u_1 > 0 \end{cases}$ ⊛ Giảm nếu $\begin{cases} ad - bc > 0 \\ u_2 - u_1 < 0 \end{cases}$
(8) Dãy số (u_n) có $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d} \\ c, d > 0, u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ không tăng không giảm nếu $ad - bc < 0$	



Ví dụ 2.1.

Xét tính đơn điệu của dãy số (u_n) biết

(1) $u_n = 3n + 6$

(2) $u_n = \frac{n+5}{n+2}$

Lời giải

(1) $u_n = 3n + 6$

Ta có $u_n = 3n + 6 \Rightarrow u_{n+1} = 3(n+1) + 6 = 3n + 9$

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = (3n+9) - (3n+6) = 3 > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) là dãy số tăng

✓ **Giải nhanh:** Dãy này có dạng $u_n = an + b$; $a = 3 > 0$ nên dãy số tăng

(2) $u_n = \frac{n+5}{n+2}$

Ta có $u_n = \frac{n+5}{n+2} = 1 + \frac{3}{n+2} \Rightarrow u_{n+1} = 1 + \frac{3}{n+3}$

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{n+3} - \frac{3}{n+2} = \frac{-3}{(n+2)(n+3)} < 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) là dãy số giảm



✓ **Giải nhanh:** Dãy này có dạng $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$; $\begin{cases} n+2 > 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \\ ad - bc = -3 < 0 \end{cases}$ nên (u_n) là dãy giảm



Ví dụ 2.2.

Xét tính tăng giảm của các dãy số sau:

(1) Dãy số (u_n) với $u_n = 2n^3 - 5n + 1$. (2) Dãy số (u_n) với $u_n = 3^n - n$.

(3) Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$. (4) Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$.

Lời giải

(1) Dãy số (u_n) với $u_n = 2n^3 - 5n + 1$.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $u_{n+1} - u_n = [2(n+1)^3 - 5(n+1) + 1] - (2n^3 - 5n + 1)$
 $= 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 5n - 5 - 1 - 2n^3 + 5n - 1$
 $= 6n^2 + 6n - 3 = 6n^2 + 3n + (3n - 3) > 0$ (đúng) do $n \geq 1$.

Vì thế dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

(2) Dãy số (u_n) với $u_n = 3^n - n$.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $u_{n+1} - u_n = [3^{n+1} - (n+1)] - (3^n - n)$
 $= 3 \cdot 3^n - n - 1 - 3^n + n$
 $= 2 \cdot 3^n + 3^n - 1 = 3 \cdot 3^n - 1 > 0$ (đúng) (vì $n \geq 1$.)

Kết luận dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

(3) Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} - \frac{n}{n^2 + 1} = \frac{(n+1)(n^2 + 1) - n[(n+1)^2 + 1]}{[(n+1)^2 + 1](n^2 + 1)}$$

$$= \frac{n^3 + n + n^2 + 1 - (n^3 + 2n^2 + 2n)}{[(n+1)^2 + 1](n^2 + 1)} = \frac{-n^2 - n + 1}{[(n+1)^2 + 1](n^2 + 1)} < 0.$$

Vì $-n^2 - n + 1 < 0 \forall n \geq 1$, và $[(n+1)^2 + 1](n^2 + 1) > 0 \forall n \geq 1$.

Kết luận: dãy số (u_n) là một dãy số giảm.

(4) Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$.

Để thấy $u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$. Xét tỉ số: $\frac{u_n}{u_{n+1}}$



Ta có: $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot \frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} > 1 \quad (\forall n \geq 1)$

Thật vậy: $\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} > 1 \Leftrightarrow \frac{4n}{n+1} > 1 \Leftrightarrow 4n > n+1 \Leftrightarrow 3n > 1$
(đúng $\forall n \geq 1$)

Kết luận: (u_n) là một dãy số giảm.



Ví dụ 2.3.

Anh Thanh vừa được tuyển dụng vào một công ty công nghệ, được cam kết lương năm đầu sẽ là 200 triệu đồng và lương mỗi năm tiếp theo sẽ được tăng thêm 25 triệu đồng. Gọi s_n (triệu đồng) là lương vào năm thứ n mà anh Thanh làm việc cho công ty đó. Khi đó ta có: $s_1 = 200, s_n = s_{n-1} + 25; n \geq 2$.

(1) Tính lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty..

(2) Chứng minh (s_n) là dãy số tăng. Giải thích ý nghĩa thực tế của kết quả

Lời giải

(1) Tính lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty..

Số hạng tổng quát của dãy số là: $s_n = 200 + 25(n-1) = 175 + 25n$

Lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty: $175 + 25 \cdot 5 = 300$ (triệu đồng)

(2) Chứng minh (s_n) là dãy số tăng. Giải thích ý nghĩa thực tế của kết quả này.

Ta có: $s_{n+1} = 175 + 25(n+1) = 200 + 25n > s_n$ suy ra (s_n) là dãy số tăng

Ý nghĩa: Tiền lương của anh Thành sẽ được tăng dần hàng năm



▮ Dạng 3. Tính bị chặn của dãy số



Phương pháp

- Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn trên** nếu tồn tại một số M : $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn dưới** nếu tồn tại một số m : $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn** nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.

Tức là tồn tại các số m, M : $m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$

✓ **Phương pháp:** Chứng minh trực tiếp bằng các phương pháp chứng minh bất đẳng thức

✱ **Cách 1:** Dãy số (u_n) có $u_n = f(n)$ là hàm số đơn giản.

✱ Ta chứng minh trực tiếp bất đẳng thức

$$\begin{cases} u_n = f(n) \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ u_n = f(n) \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

✱ **Cách 2:** Dãy số (u_n) có $u_n = v_1 + v_2 + \dots + v_k + \dots + v_n$

✱ Ta làm trội $v_k \leq a_k - a_{k+1}$

✱ Lúc đó $u_n \leq (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_n - a_{n+1})$. Suy ra $u_n \leq a_1 - a_{n+1} \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$

✱ **Cách 3:** Dãy số (u_n) có $u_n = v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \cdot \dots \cdot v_n$ với $v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

✱ Ta làm trội $v_k \leq \frac{a_{k+1}}{a_k}$

$$u_n < \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1} < M, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

✱ Một vài kết quả về dạng toán dãy số bị chặn:

- Dãy số (u_n) có $u_n = q^n$ ($|q| \leq 1$) bị chặn
- Dãy số (u_n) có $u_n = q^n$ ($q < -1$) không bị chặn
- Dãy số (u_n) có $u_n = q^n$ với $q > 1$ bị chặn dưới
- Dãy số (u_n) có $u_n = an + b$ bị chặn dưới nếu $a > 0$ và bị chặn trên nếu $a < 0$
- Dãy số (u_n) có $u_n = an^2 + bn + c$ bị chặn dưới nếu $a > 0$ và bị chặn trên nếu $a < 0$
- Dãy số (u_n) có $u_n = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0$ bị chặn dưới nếu $a_m > 0$, bị chặn trên nếu $a_m < 0$
- Dãy số (u_n) có $u_n = q^n (a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0)$ với $a_m \neq 0$ và $q < -1$ không bị chặn
- Dãy số (u_n) có $u_n = \sqrt{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0}$ bị chặn dưới với $a_m > 0$
- Dãy số (u_n) có $u_n = \sqrt[3]{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0}$ bị chặn dưới nếu $a_m > 0$, bị chặn trên nếu $a_m < 0$



- (10) Dãy số (u_n) có $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các đa thức, bị chặn nếu bậc của $P(n)$ nhỏ hơn hoặc bằng bậc của $Q(n)$
- (11) Dãy số (u_n) có $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các đa thức, bị chặn dưới hoặc bị chặn trên nếu bậc của $P(n)$ lớn hơn bậc của $Q(n)$



Ví dụ 3.1.

Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) biết

$$(1) u_n = \frac{-1}{2n+3}$$

$$(2) u_n = \frac{n+5}{n+2}$$

Lời giải

$$(1) u_n = \frac{-1}{2n+3}$$

Ta có $2n+3 \geq 5, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < \frac{1}{2n+3} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{1}{5} \leq \frac{-1}{2n+3} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{5} \leq u_n < 0$

Suy ra dãy số (u_n) bị chặn

✓ **Giải nhanh:** dãy số (u_n) có u_n có bậc của tử thấp hơn bậc của mẫu nên bị chặn

$$(2) u_n = \frac{4n+5}{n+1}$$

Ta có $u_n = \frac{4n+5}{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \frac{4n+5}{n+1} = \frac{4(n+1)+1}{n+1} = 4 + \frac{1}{n+1} \leq 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow u_n \leq \frac{9}{2} \Rightarrow 0 < u_n \leq \frac{9}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Vậy dãy số (u_n) bị chặn

✓ **Giải nhanh:** dãy số (u_n) có u_n có bậc của tử bằng bậc của mẫu nên bị chặn



Ví dụ 2.2.

Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

$$(1) u_n = \frac{1}{2n^2 - 1}$$

$$(2) u_n = 3 \cdot \cos \frac{n\pi}{3}$$

$$(3) u_n = 2n^3 + 1$$

$$(4) u_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1}$$

Lời giải

$$(1) u_n = \frac{1}{2n^2 - 1}$$



$$u_n = \frac{1}{2n^2 - 1} \text{ Có } 2n^2 - 1 \geq 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{2n^2 - 1} \leq 1, \forall n \geq 1. \text{ Vậy dãy số bị chặn trên bởi } 1.$$

$$(2) u_n = 3 \cdot \cos \frac{n\pi}{3}$$

$$u_n = 3 \cdot \cos \frac{n\pi}{3} \text{ có } -1 \leq \cos \frac{n\pi}{3} \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 \cdot \cos \frac{n\pi}{3} \leq 3.$$

Vậy dãy số bị chặn dưới bởi -3 ; chặn trên bởi 3 .

$$(3) u_n = 2n^3 + 1$$

$$u_n = 2n^3 + 1 \text{ có } 2n^3 + 1 \geq 3, \forall n \geq 1. \text{ Vậy dãy số bị chặn dưới bởi } 3.$$

$$(4) u_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1}$$

$$u_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1} \text{ có } u_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1} = 1 + \frac{n-1}{n^2 + n + 1} \geq 1, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số bị chặn dưới bởi 1 .



Ví dụ 3.3.

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 0$ và $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4, \forall n \geq 1$.

(1) Chứng minh dãy (u_n) bị chặn trên bởi số 8 .

(2) Chứng minh dãy (u_n) tăng, từ đó suy ra dãy (u_n) bị chặn.

Lời giải

(1) Chứng minh dãy (u_n) bị chặn trên bởi số 8 .

Ta chứng minh $u_n \leq 8$ với mọi $n \geq 1$.

Khi $n=1$, ta có $u_1 = 0 < 8$.

Giả sử $u_n \leq 8$ với $n=k \geq 1$, tức là $u_k \leq 8$. Ta cần chứng minh $u_{k+1} \leq 8$.

$$\text{Thật vậy, } u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k + 4 \leq \frac{1}{2} \cdot 8 + 4 = 8.$$

Vậy $u_n \leq 8$, với mọi $n \geq 1$ hay (u_n) bị chặn trên bởi 8 .

(2) Chứng minh dãy (u_n) tăng, từ đó suy ra dãy (u_n) bị chặn.

Với mọi $n \geq 1$, ta có $u_{n+1} - u_n = 4 - \frac{1}{2}u_n$. Mà $u_n \leq 8$ nên $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Suy ra u_n là dãy số tăng. Do đó (u_n) bị chặn dưới bởi $u_1 = 0$.

Kết hợp với câu (1), ta được dãy số (u_n) bị chặn.



Ví dụ 3.4.

Cho dãy số (u_n) với $u_n = n^2 - 4n + 3$.

- (1) Viết công thức truy hồi của dãy số.
- (2) Chứng minh dãy số bị chặn dưới.
- (3) Tính tổng n số hạng đầu của dãy số đã cho.

Lời giải

- (1) Viết công thức truy hồi của dãy số.

Ta có: $u_1 = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0$.

Xét hiệu: $u_{n+1} - u_n = [(n+1)^2 - 4(n+1) + 3] - (n^2 - 4n + 3) = 2n - 3 \Rightarrow u_{n+1} = u_n + 2n - 3$.

Vậy công thức truy hồi:
$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2n - 3 \end{cases} \quad \forall n \geq 1.$$

- (2) Chứng minh dãy số bị chặn dưới.

Ta có: $u_n = n^2 - 4n + 4 - 1 = (n-2)^2 - 1 \geq -1 \quad \forall n \geq 1$.

Vậy dãy số bị chặn dưới, nhưng không bị chặn trên.

- (3) Tính tổng n số hạng đầu của dãy số đã cho.

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 \\ u_2 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 \\ u_3 = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 \\ \dots \\ u_n = n^2 - 4 \cdot n + 3 \end{array} \right\} +$$

$$S_n = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - 4(1 + 2 + 3 + \dots + n) + 3n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + 3n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) - 12n(n+1) + 18n}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n-11) + 18n}{6}$$

$$\text{Vậy } S_n = \frac{n(n+1)(2n-11) + 18n}{6}$$



Luyện tập

A. Câu hỏi - Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $\frac{1}{3}; \frac{1}{3^2}; \frac{1}{3^3}; \frac{1}{3^4}; \frac{1}{3^5}; \dots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là?

- A. $u_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^{n+1}}$ B. $u_n = \frac{1}{3^{n+1}}$ C. $u_n = \frac{1}{3^n}$ D. $u_n = \frac{1}{3^{n-1}}$

👉 **Lời giải**

Chọn C

Từ các số hạng đầu tiên của dãy số ta dự đoán $u_n = \frac{1}{3^n}, n \in \mathbb{N}^*$

» Câu 2. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = 2n - 1 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

- A. $u_n = 2 + (n-1)^2$ B. $u_n = 2 + n^2$ C. $u_n = 2 + (n+1)^2$ D. $u_n = 2 - (n-1)^2$

👉 **Lời giải**

Chọn A

Ta có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = u_1 + 1 \\ u_3 = u_2 + 3 \\ \dots \\ u_n = u_{n-1} + 2n - 3 \end{cases}$. Cộng hai vế ta được $u_n = 2 + 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 3) = 2 + (n-1)^2$

» Câu 3. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

- A. $u_n = -\frac{n-1}{n}$ B. $u_n = \frac{n+1}{n}$ C. $u_n = -\frac{n+1}{n}$ D. $u_n = -\frac{n}{n+1}$

👉 **Lời giải**

Chọn C

Ta có: $u_1 = -\frac{3}{2}; u_2 = -\frac{4}{3}; u_3 = -\frac{5}{4}; \dots$ Dễ dàng dự đoán được $u_n = -\frac{n+1}{n}$

» Câu 4. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n}{2^n}$. Chọn đáp án đúng.

- A. $u_4 = \frac{1}{4}$ B. $u_5 = \frac{1}{16}$ C. $u_5 = \frac{1}{32}$ D. $u_3 = \frac{1}{8}$

A



Lời giải

Chọn A

Ta có $u_4 = \frac{4}{2^4} = \frac{1}{4}$

- » Câu 5. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{2n+5}{5n-4}$. Số $\frac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?
A. 6. B. 8. C. 9. D. 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_n = \frac{7}{12} \Leftrightarrow \frac{2n+5}{5n-4} = \frac{7}{12} (n \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow 24n+60 = 35n-28 \Leftrightarrow 11n = 88 \Leftrightarrow n = 8$

- » Câu 6. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n-1}{n^2+1}$. Số $\frac{2}{13}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?
A. Thứ 3. B. Thứ tư. C. Thứ năm. D. Thứ 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_n = \frac{2}{13} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n^2+1} = \frac{2}{13} (n \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow 13n-13 = 2n^2+2 \Leftrightarrow 2n^2-13n+15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n=5 (n) \\ n=\frac{3}{2} (l) \end{cases}$

- » Câu 7. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = n^3 - 8n^2 - 5n + 7$. Số -33 là số hạng thứ mấy của dãy số?
A. 5. B. 6. C. 8. D. 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_n = -33 \Leftrightarrow n^3 - 8n^2 - 5n + 7 = -33 (n \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow n^3 - 8n^2 - 5n + 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n=8 (n) \\ n=\pm\sqrt{5} (l) \end{cases}$

- » Câu 8. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n^2+3n+7}{n+1}$. Hỏi dãy số trên có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên.
A. 2. B. 4. C. 1. D. Không có.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_n = \frac{n^2+3n+7}{n+1} = n+2 + \frac{5}{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$

Để u_n nhận giá trị nguyên thì $\frac{5}{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$ là số nguyên hay $n=4$

Vậy dãy số (u_n) chỉ có một số hạng nhận giá trị nguyên.

- » Câu 9. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2^n$. Tìm số hạng u_{n+1} .
A. $u_{n+1} = 2^n \cdot 2$. B. $u_{n+1} = 2^n + 1$. C. $u_{n+1} = 2(n+1)$. D. $u_{n+1} = 2^n + 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$



- » Câu 10. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3^n$. Số hạng u_{n+1} bằng:
A. $3^n + 1$. **B.** $3^n + 3$. **C.** $3^n \cdot 3$. **D.** $3(n+1)$.
 📖 **Lời giải**

Chọn C

Ta có $u_{n+1} = 3^{n+1} = 3^n \cdot 3$

- » Câu 11. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3^n$. Số hạng u_{2n} bằng:
A. $3^n + 3$. **B.** 9^n . **C.** $3^n \cdot 3$. **D.** 4^{2n} .
 📖 **Lời giải**

Chọn B

Ta có $u_{2n} = 3^{2n} = 9^n$

- » Câu 12. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 5^{n+1}$. Tìm số hạng u_{n-1} .
A. $u_{n-1} = 5^{n-1}$. **B.** $u_{n-1} = 5^n$. **C.** $u_{n-1} = 5 \cdot 5^{n+1}$. **D.** $u_{n-1} = 5 \cdot 5^{n-1}$.
 📖 **Lời giải**

Chọn B

Ta có $u_{n-1} = 5^{(n-1)+1} = 5^n$

- » Câu 13. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_4 .
A. $u_4 = \frac{5}{9}$. **B.** $u_4 = 1$. **C.** $u_4 = \frac{2}{3}$. **D.** $u_4 = \frac{14}{27}$.
A 📖 **Lời giải**

Chọn A

Ta có $u_2 = \frac{1}{3}(2+1) = 1, u_3 = \frac{1}{3}(1+1) = \frac{2}{3}, u_4 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+1\right) = \frac{5}{9}$

- » Câu 14. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?
A. $u_2 = \frac{5}{2}$. **B.** $u_3 = \frac{15}{4}$. **C.** $u_4 = \frac{31}{8}$. **D.** $u_5 = \frac{63}{16}$.
A 📖 **Lời giải**

Chọn A

Vì $u_2 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$

- » Câu 15. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là
A. -3; 6; 9. **B.** 3; -2; -7. **C.** 3; 8; 13. **D.** 3; 5; 7.
 📖 **Lời giải**

Chọn C



Ta có $u_1 = 3, u_2 = 3 + 5 = 8, u_3 = 8 + 5 = 13$

- » Câu 16. Cho dãy số (u_n) , biết công thức số hạng tổng quát $u_n = 2n - 3$. Số hạng thứ 10 của dãy số bằng:

A. 17 B. 20 C. 10 D. 7

👉 **Lời giải**

Chọn A

$$u_n = 2n - 3 \Rightarrow u_{10} = 2 \cdot 10 - 3 = 17$$

- » Câu 17. Cho dãy số (u_n) có công thức số hạng tổng quát $u_n = 8 - 3n$. Tính u_4 .

A. 2 B. -7 C. -5 D. -4

👉 **Lời giải**

Chọn D

$$u_4 = 8 - 3 \cdot 4 = -4$$

- » Câu 18. Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Tìm số hạng thứ 5 của dãy số.

A. 16 B. 12 C. 15 D. 14

👉 **Lời giải**

Chọn D

$$\text{Ta có } u_2 = u_1 + 1 = 5; u_3 = u_2 + 2 = 7; u_4 = u_3 + 3 = 10$$

$$\text{Do đó số hạng thứ 5 của dãy số là } u_5 = u_4 + 4 = 14$$

$$= u_{218} - u_1 \Rightarrow u_{218} = S_{217} + u_1 = 23653$$

- » Câu 19. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{10}{3^n}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng B. Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng, không giảm D. Dãy số vừa tăng vừa giảm

👉 **Lời giải**

Chọn B

$$\text{Ta có } u_{n+1} - u_n = \frac{10}{3^{n+1}} - \frac{10}{3^n} = \frac{10}{3 \cdot 3^n} - \frac{10}{3^n} = \frac{-20}{3 \cdot 3^n} < 0$$

$$\text{Vậy } u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- » Câu 20. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào tăng?

A. $u_n = \frac{1}{3^n}$ B. $u_n = \frac{1}{2n+1}$ C. $u_n = \frac{n+1}{3n+2}$ D. $u_n = \frac{4n-2}{n+3}$

A.

👉 **Lời giải**

Chọn D

Ta có:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3 \cdot 3^n} - \frac{1}{3^n} = \frac{-2}{3 \cdot 3^n} < 0 \rightarrow \text{loại A}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)+1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1} = \frac{-2}{(2n+3)(2n+1)} < 0 \rightarrow \text{loại B}$$



$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{3n+5} - \frac{n+1}{3n+2} = -\frac{1}{(3n+5)(3n+2)} < 0 \rightarrow \text{loại C}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4n+2}{n+4} - \frac{4n-2}{n+3} = \frac{14}{(n+4)(n+3)} > 0$$

» Câu 21. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào giảm?

- A. $u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$. B. $u_n = (-1)^n (5^n - 1)$. C. $u_n = -3^n$. D. $u_n = \sqrt{n+4}$.

🔑 **Lời giải**

Chọn C

Ta có:

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{4}{3}\right)^n = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n - \left(\frac{4}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n > 0 \rightarrow \text{loại A}$$

Dãy (u_n) với $u_n = (-1)^n (5^n - 1)$ có các số hạng đan dấu nên dãy không tăng, không giảm $\rightarrow$ loại B

$$u_{n+1} - u_n = -3^{n+1} + 3^n = -3 \cdot 3^n + 3^n = -2 \cdot 3^n < 0 \rightarrow \text{Chọn C}$$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+5} - \sqrt{n+4} = \frac{1}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n+4}} > 0 \rightarrow \text{loại D}$$

» Câu 22. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = 5^n - 4^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Dãy số tăng B. Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng, không giảm D. Dãy số có số hạng thứ 100 bé hơn 1

🔑 **Lời giải**

Chọn A

$$\text{Ta có } u_{n+1} - u_n = 5^{n+1} - 4^{n+1} - 5^n + 4^n = 4(5^n - 4^n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Vậy } u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

» Câu 23. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{an+2}{3n+1}$. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số tăng.

- A. $a=6$ B. $a>6$ C. $a<6$ D. $a \geq 6$

🔑 **Lời giải**

Chọn B

$$\text{Ta có } u_{n+1} - u_n = \frac{an+a+2}{3n+4} - \frac{an+2}{3n+1} = \frac{a-6}{(3n+4)(3n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{a-6}{(3n+4)(3n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow a > 6$$

Để dãy số tăng thì

» Câu 24. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = 2^n - an$. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số tăng.

- A. $a=2$ B. $a>2$ C. $a<2$ D. $a \geq 2$

🔑 **Lời giải**

Chọn C

$$\text{Ta có } u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - an - a - 2^n + an = 2^n - a, \forall n \in \mathbb{N}^*$$



Để dãy số tăng thì $u_{n+1} - u_n = 2^n - a > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow a < 2^n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow a < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$

- » Câu 25. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{3+u_n} \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Có $u_{10} = 2$

👉 **Lời giải**

Chọn B

Ta có $u_1 > u_2 > u_3$. Dự đoán dãy số đã cho giảm, ta chứng minh bằng quy nạp

Từ giả thiết thì $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Giả sử $u_k < u_{k-1}, k \geq 2$. Ta chứng minh $u_{k+1} < u_k$

$$u_{k+1} - u_k = \frac{3u_k}{3+u_k} - \frac{3u_{k-1}}{3+u_{k-1}} = \frac{9(u_k - u_{k-1})}{(3+u_k)(3+u_{k-1})} < 0 \Leftrightarrow u_{k+1} < u_k$$

Thật vậy:
dãy giảm

. vậy dãy đã cho là

- » Câu 26. Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = \frac{2n+1}{n-1}$ **B.** $u_n = n^3 - 1$ **C.** $u_n = n^2$ **D.** $u_n = 2n$

👉 **Lời giải**

Chọn A

Với mọi $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1)+1}{(n+1)-1} - \frac{2n+1}{n-1} = \frac{2n+3}{n} - \frac{2n+1}{n-1} \\ &= \frac{(2n+3)(n-1) - n(2n+1)}{n(n-1)} = \frac{(2n+3)(n-1) - n(2n+1)}{n(n-1)} = \frac{-3}{n(n-1)} < 0 \end{aligned}$$

, với mọi $n \in \mathbb{N}, n > 1$.

Suy ra dãy số giảm.

- » Câu 27. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát (u_n) sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = n^2$ **B.** $u_n = 2^n$ **C.** $u_n = \frac{1}{n}$ **D.** $u_n = \sqrt{n+1}$

👉 **Lời giải**

Chọn C

Ta có: $0 < u_n = \frac{1}{n} \leq 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy (u_n) bị chặn.

Nhận xét: Các dãy số $n^2; 2^n; n+1$ là các dãy tăng đến vô hạn khi n tăng lên vô hạn nên chúng không bị chặn trên.

- » Câu 28. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = \frac{1}{2^n}$ **B.** $u_n = 3^n$ **C.** $u_n = \sqrt{n+1}$ **D.** $u_n = n^2 + 1$

👉 **Lời giải**

Chọn A



Ta có: $0 < u_n = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy (u_n) bị chặn.

» Câu 29. Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = 4 - 3n - n^2$

A. Bị chặn. **B.** Không bị chặn. **C.** Bị chặn trên. **D.** Bị chặn dưới.

🔑 **Lời giải**

Chọn C

Ta có: $u_n = \frac{25}{4} - \left(n + \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{25}{4} \Rightarrow (u_n)$ bị chặn trên; dãy (u_n) không bị chặn dưới.

» Câu 30. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = n - \sin 3n$ **B.** $u_n = \frac{n^2 + 1}{n}$ **C.** $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ **D.** $u_n = n \cdot \sin(3n - 1)$

🔑 **Lời giải**

Chọn C

Ta có $0 < u_n = \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ Dãy (u_n) với $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ bị chặn

» Câu 31. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log^2 u + \log u - 6 = 0$ và $u_{n+1} = u_n + 5$, với mọi $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.

Giá trị lớn nhất của n để $u_n < 500$ bằng:

A. 80. **B.** 100. **C.** 99. **D.** 82.

🔑 **Lời giải**

Chọn B

$$\log^2 u + \log u - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log u = -3 \\ \log u = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0,001 \\ u = 100 \end{cases}$$

+)

+) Từ giả thiết suy ra (u_n) là cấp số cộng có công sai $d = 5$. Do đó, ta có $u_n = u_1 + (n-1)d$.

$$\begin{cases} u_n = 0,001 + 5(n-1) = 5n - 4,999 \\ u_n = 100 + 5(n-1) = 5n + 95 \end{cases} \quad u_n < 500 \Leftrightarrow \begin{cases} n < 100,9998 \\ n < 81 \end{cases}$$

+) Vậy . Suy ra

Vậy số n lớn nhất để $u_n < 500$ là 100.

» Câu 32. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = \frac{2}{3}$ và $u_{n+1} = \frac{u_n}{2(2n+1)u_n + 1}, (n \in \mathbb{N}^*)$. Tính tổng 2018 số hạng đầu tiên của dãy số đó?

A. $\frac{4036}{4035}$ **B.** $\frac{4035}{4034}$ **C.** $\frac{4038}{4037}$ **D.** $\frac{4036}{4037}$

🔑 **Lời giải**

Chọn D

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2(2n+1)u_n + 1}{u_n} = \frac{1}{u_n} + 4n + 2 = \left(\frac{1}{u_{n-1}} + 4(n-1) + 2 \right) + 4n + 2$$

- Ta có:

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_1} + (4.1 + 2) + (4.2 + 2) + \dots + (4n + 2) = \frac{3}{2} + 2n + 2n(n+1) = \frac{4n^2 + 8n + 3}{2}$$



$$\Rightarrow u_{n+1} = \frac{2}{4n^2 + 8n + 3} = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n u_k = 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{2018} u_k = \frac{4036}{4037}$$

- » Câu 33. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_n = u_{n-1} + 6, \forall n \geq 2$ và $\log_2 u_5 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{u_9 + 8} = 11$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất thỏa mãn $S_n \geq 20172018$.
- A. 2587. B. 2590. C. 2593. D. 2584.

👉 **Lời giải**

Chọn C

Ta có dãy số (u_n) là cấp số cộng có công sai $d=6$.
 $\log_2 u_5 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{u_9 + 8} = 11 \Leftrightarrow \log_2 u_5 (u_9 + 8) = 11$ (*) với $u_5 > 0$.

Mặt khác $u_5 = u_1 + 4d = u_1 + 24$ và $u_9 = u_1 + 8d = u_1 + 48$.

Thay vào (*) ta được $\begin{cases} u_1 = 8 \Rightarrow u_5 = 32 \\ u_1 = -88 \Rightarrow u_5 = -64 \end{cases}$. Suy ra $u_1 = 8$.

$$S_n \geq 20172018 \Leftrightarrow \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d] \geq 20172018 \Leftrightarrow 3n^2 + 5n - 20172018 \geq 0$$

Vậy số tự nhiên n nhỏ nhất thỏa mãn $S_n \geq 20172018$ là $n=2593$.

- » Câu 34. Tìm x biết: $(x+3) + (x+7) + (x+11) + \dots + (x+79) = 860$

A. $x=2$. B. $x=1$. C. $x=4$. D. $x=3$.

👉 **Lời giải**

Chọn A

Ta có $1720 = (x+3 + x+79) + (x+7 + x+75) + \dots + (x+79 + x+3)$

$$\text{Do đó } 1720 = 20(x+3 + x+79) \Leftrightarrow 1720 = 20(2x+82) \Leftrightarrow x=2$$

- » Câu 35. Tìm x biết: $(2x+3) + (2x+7) + (2x+11) + \dots + (2x+79) = 1720$

A. $x=35$. B. $x=\frac{45}{2}$. C. $x=10$. D. $x=15$.

👉 **Lời giải**

Chọn B

Ta có $3440 = (2x+3 + 2x+79) + (2x+7 + 2x+75) + \dots + (2x+79 + 2x+3)$

$$\text{Do đó } 3440 = 20(2x+3 + 2x+79) \Leftrightarrow 3440 = 20(4x+82) \Leftrightarrow x=\frac{45}{2}$$

B. Câu hỏi - Trả lời đúng/sai

- » Câu 36. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{-n}{n+1}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Năm số hạng đầu tiên của dãy số là		



)	$u_1 = -\frac{1}{2}; u_2 = -\frac{2}{3}; u_3 = -\frac{3}{4}; u_4 = -\frac{4}{5}; u_5 = -\frac{5}{6}$		
(b))	Số hạng u_{10}, u_{100} lần lượt là $-\frac{10}{11}; -\frac{100}{101}$		
(c))	$-\frac{85}{86}$ là số hạng thứ 86 của dãy số (u_n)		
(d))	$-\frac{99}{101}$ là một số hạng của dãy số (u_n)		

🔗 **Lời giải**

(a) Năm số hạng đầu tiên của dãy số là $u_1 = -\frac{1}{2}; u_2 = -\frac{2}{3}; u_3 = -\frac{3}{4}; u_4 = -\frac{4}{5}; u_5 = -\frac{5}{6}$

Ta có: $u_1 = -\frac{1}{2}; u_2 = -\frac{2}{3}; u_3 = -\frac{3}{4}; u_4 = -\frac{4}{5}; u_5 = -\frac{5}{6}$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Số hạng u_{10}, u_{100} lần lượt là $-\frac{10}{11}; -\frac{100}{101}$

Ta có: $u_{10} = -\frac{10}{11}, u_{100} = -\frac{100}{101}$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) $-\frac{85}{86}$ là số hạng thứ 86 của dãy số (u_n)

Xét $-\frac{85}{86} = \frac{-n}{n+1} \Leftrightarrow 85n+85=86n \Leftrightarrow n=85$.

Vậy $-\frac{85}{86}$ là số hạng thứ 85 của dãy (u_n) .

» **Chọn SAI.**

(d) $-\frac{99}{101}$ là một số hạng của dãy số (u_n)

Xét $-\frac{99}{101} = \frac{-n}{n+1} \Leftrightarrow 99n+99=101n \Leftrightarrow n=\frac{99}{2} \notin \mathbb{N}^*$ (loại).

Vậy $-\frac{99}{101}$ không phải là số hạng của dãy số (u_n) .

» **Chọn SAI.**

» **Câu 37.** Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a))	Số hạng đầu tiên của dãy số là 1		
(b))	Số hạng $u_2 = \frac{5}{4}; u_3 = \frac{7}{5}$		
(c))	$u_4 > u_5$		



(d) Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ 252 của dãy số (u_n)

» **Lời giải**

Ta có: $u_1 = 1; u_2 = \frac{5}{4}; u_3 = \frac{7}{5}; u_4 = \frac{3}{2}; u_5 = \frac{11}{7}$.

(a) Số hạng đầu tiên của dãy số là 1

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Số hạng $u_2 = \frac{5}{4}; u_3 = \frac{7}{5}$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) $u_4 > u_5$

$$u_4 - u_5 = \frac{3}{2} - \frac{11}{7} = -\frac{1}{14} < 0 \Rightarrow u_4 < u_5$$

» **Chọn SAI.**

(d) Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ 252 của dãy số (u_n)

$$\text{Xét } \frac{2n+1}{n+2} = \frac{167}{84} \Leftrightarrow 84(2n+1) = 167(n+2) \Leftrightarrow n = 250$$

Vậy $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ 250 của dãy số (u_n) .

» **Chọn SAI.**

» Câu 38. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số hạng thứ 2021 là $\frac{2021}{4040}$		
(b)	Số hạng thứ 2022 là $\frac{2022}{4043}$		
(c)	Số hạng thứ 2023 là $\frac{2023}{4047}$		
(d)	Tổng các số hạng thứ 2021; 2022; 2023 và 2024 nhỏ hơn 2		

» **Lời giải**

Với k là số nguyên dương, ta có:

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left[\frac{(2k+1) - (2k-1)}{(2k-1)(2k+1)} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(2k-1)} - \frac{1}{(2k+1)} \right]$$

$$\text{Khi đó: } u_n = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{(2n+1)} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{(2n+1)} \right] = \frac{n}{2n+1}$$



Vậy $u_n = \frac{n}{2n+1}$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Số hạng thứ 2021 là $\frac{2021}{4040}$

Áp dụng công thức số hạng tổng quát ta có:

$$u_{2021} = \frac{2021}{2 \cdot 2021 + 1} = \frac{2021}{4043}$$

» **Chọn SAI.**

(b) Số hạng thứ 2022 là $\frac{2022}{4043}$

$$u_{2022} = \frac{2022}{2 \cdot 2022 + 1} = \frac{2022}{4045}$$

» **Chọn SAI.**

(c) Số hạng thứ 2023 là $\frac{2023}{4047}$

$$u_{2023} = \frac{2023}{2 \cdot 2023 + 1} = \frac{2023}{4047}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Tổng các số hạng thứ 2021; 2022; 2023 và 2024 nhỏ hơn 2

$$u_{2024} = \frac{2024}{2 \cdot 2024 + 1} = \frac{2024}{4049}$$

$$u_{2021} + u_{2022} + u_{2023} + u_{2024} = \frac{2021}{4043} + \frac{2022}{4045} + \frac{2023}{4047} + \frac{2024}{4049} \approx 1,9995 < 2$$

Vậy

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 39.** Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 1 - \frac{1}{n}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$u_3 = \frac{2}{3}$		
(b)	$u_7 - u_8 = \frac{1}{56}$		
(c)	$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n(n+1)}$		
(d)	Dãy số (u_n) là dãy số tăng		

» **Lời giải**

(a) $u_3 = \frac{2}{3}$

Ta có $u_3 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

» **Chọn ĐÚNG.**



(b) $u_7 - u_8 = \frac{1}{56}$

$$u_7 - u_8 = -\frac{1}{56}$$

» **Chọn SAI.**

(c) $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n(n+1)}$

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0, \forall n \geq 1$$

Ta có:

» **Chọn SAI.**

(d) **Dãy số (u_n) là dãy số tăng.**

Suy ra $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 40.** Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{n}{4^n}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$u_n = \frac{n}{4^n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$		
(b)	$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \forall n \geq 1$		
(c)	$u_{2024} < u_{2023}$		
(d)	Dãy số (u_n) là dãy số tăng		

👉 **Lời giải**

(a) $u_n = \frac{n}{4^n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Nhận xét: $u_n = \frac{n}{4^n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

» **Chọn SAI.**

(b) $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \forall n \geq 1$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{4^{n+1}} : \frac{n}{4^n} = \frac{n+1}{4n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4n} < 1, \forall n \geq 1$$

Ta có:

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) $u_{2024} < u_{2023}$

Suy ra $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_{2024} < u_{2023}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) **Dãy số (u_n) là dãy số tăng**



Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 41.** Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}}$		
(b)	$\frac{u_{2024}}{u_{2023}} < 1$		
(c)	$u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$		
(d)	Dãy số (u_n) là dãy số giảm		

👉 **Lời giải**

(a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}}$

Nhận xét: $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

$$= \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$$

» **Chọn SAI.**

(b) $\frac{u_{2024}}{u_{2023}} < 1$

Vì $0 < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} < \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}$ nên $\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < 1$

Hay $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{u_{2024}}{u_{2023}} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

Suy ra $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 42.** Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{n+1}{n+2}$. Khi đó:



	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a)	$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+3)(n+2)}$		
(b)	$u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$		
(c)	Dãy số (u_n) là dãy số giảm		
(d)	Dãy (u_n) là dãy số bị chặn		

🔗 **Lời giải**

(a) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+3)(n+2)}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n^2 + 4n + 4 - (n^2 + 4n + 3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{1}{(n+3)(n+2)}$$

Xét

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$$

Suy ra $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

» **Chọn SAI.**

(c) **Dãy số (u_n) là dãy số giảm**

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

» **Chọn SAI.**

(d) **Dãy (u_n) là dãy số bị chặn.**

Ta có: $u_n = \frac{n+1}{n+2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Mặt khác: $u_n = \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+2) - 1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Do đó: $0 < u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy (u_n) là dãy số bị chặn.

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 43.** Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = n + \frac{1}{n}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a)	$u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$		
(b)	Dãy số (u_n) là dãy số tăng		
(c)	$u_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$		
(d)	Dãy số đã cho bị chặn trên		



Lời giải

(a) $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= n+1 + \frac{1}{n+1} - \left(n + \frac{1}{n} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)n} = \frac{(n+1)n - 1}{(n+1)n} > 0 \quad (\text{vì } (n+1)n > 1, \forall n \geq 1). \end{aligned}$$

Suy ra $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $Dãy số (u_n)$ là dãy số tăng

Vì vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) $u_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $n, \frac{1}{n}$, ta được:

$$n + \frac{1}{n} \geq 2\sqrt{n \cdot \frac{1}{n}} = 2 \text{ hay } u_n \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

» **Chọn SAI.**

(d) $Dãy số đã cho bị chặn trên$

Vì vậy dãy số đã cho bị chặn dưới.

» **Chọn SAI.**

C. Câu hỏi - Trả lời ngắn

» **Câu 44.** Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+1}{n^2}$. Hãy tính số hạng thứ 6 của dãy số. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

Lời giải

✓ **Trả lời: 0,7**

$$u_6 = \frac{2 \cdot 6 + 1}{6^2} = \frac{13}{36}.$$

» **Câu 45.** Cho dãy số $(u_n): -3; -1; 1; 3; 5; \dots$. Một hệ thức truy hồi xác định dãy số đã cho có

dạng $\begin{cases} u_1 = -b \\ u_{n+1} = au_n + 2 \end{cases}$ với $n \geq 1$ và $a; b$ là các số tự nhiên. Tính $T = a + b$

Lời giải

✓ **Trả lời: 4**

Ta có $u_1 = -3, u_2 = -1, u_3 = 1, u_4 = 3, u_5 = 5, \dots$

Suy ra $u_2 = u_1 + 2, u_3 = u_2 + 2, u_4 = u_3 + 2, u_5 = u_4 + 2, \dots$

Vậy hệ thức truy hồi xác định dãy số đã cho là $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$ với $n \geq 1$.

Khi đó $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow T = 4$



- » Câu 46. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ mấy của dãy?

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 250**

Ta có: $u_n = \frac{167}{84}$

$$\Leftrightarrow \frac{2n+1}{n+2} = \frac{167}{84} \Leftrightarrow 84 \cdot (2n+1) = 167(n+2) \Leftrightarrow n = 250$$

Vậy $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ 250 của dãy số (u_n) .

- » Câu 47. Số hạng tổng quát u_n theo n của dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$ có dạng $u_n = a^n$, với a là số tự nhiên. Xác định giá trị của a .

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2**

Từ công thức $u_{n+1} = 2u_n, \forall n \geq 1$ suy ra $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2, \forall n \geq 1$. Từ đó ta có:

$$\frac{u_2}{u_1} = 2; \frac{u_3}{u_2} = 2; \frac{u_4}{u_3} = 2; \dots; \frac{u_n}{u_{n-1}} = 2$$

Nhân theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được:

$$\frac{u_n}{u_1} = 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = u_1 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2^n$$

- » Câu 48. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong đoạn $[-20; 20]$ để dãy số (u_n) với $u_n = \frac{mn+1}{n+1}$ là dãy số tăng.

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 19**

$$\text{Xét } u_{n+1} - u_n = \frac{m(n+1)+1}{(n+1)+1} - \frac{mn+1}{n+1} = \frac{mn+m+1}{n+2} - \frac{mn+1}{n+1}$$

$$= \frac{mn^2 + 2mn + m + n + 1 - (mn^2 + 2mn + n + 2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{m-1}{(n+2)(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m-1}{(n+2)(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow m > 1$$

Dãy số đã cho là dãy tăng
(do $(n+2)(n+1) > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$).

Vậy $m > 1$ thoả mãn đề bài.

Khi đó có 19 giá trị nguyên của m

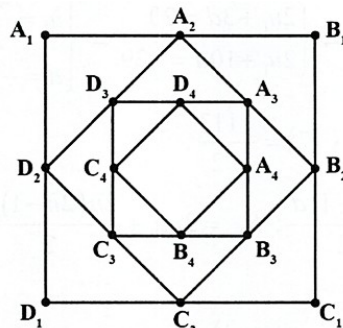
- » Câu 49. Cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 4. Với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, gọi A_n, B_n, C_n, D_n lần lượt là trung điểm của các cạnh $A_{n-1}B_{n-1}, B_{n-1}C_{n-1}, C_{n-1}D_{n-1},$



$D_{n-1}A_{n-1}$. Gọi S_n là diện tích của tứ giác $A_nB_nC_nD_n$. Kết quả của S_{12} có dạng $\left(\frac{a}{2}\right)^b$ với a, b là các số tự nhiên. Khi đó giá trị của $b - 4a$ bằng bao nhiêu?

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 11**



Ta thấy mỗi tứ giác $A_nB_nC_nD_n$ là một hình vuông có cạnh là A_nB_n .

Ta có: $A_1B_1 = 4, A_2B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} A_1B_1 = 2\sqrt{2}, A_3B_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} A_2B_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 A_1B_1 = 2, \dots$

Tổng quát: $A_nB_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} A_1B_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \cdot 4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+3}$.

Diện tích hình vuông $A_nB_nC_nD_n$ là $S_n = (A_nB_n)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Áp dụng với $n=12$ có: $S_{12} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15}$.

Khi đó $\begin{cases} a=1 \\ b=15 \end{cases} \Rightarrow b - 4a = 11$

----- Hết -----