

Người làm: Lê Thị Chanh

Zalo: - số đt zalo:

Email:

CD12: NGUYÊN LÝ DIRICHLET**Dạng 1. Sử dụng trong bài toán chia hết****Câu 1. (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)**

Chứng minh rằng: Trong 45 số tự nhiên liên tiếp tồn tại 9 số có tổng chia hết cho 45 .

Lời giải

Ta có 45 số tự nhiên liên tiếp chia cho 45 ta được các số dư là $0, 1, 2, 3, \dots, 44$

Do $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$

Suy ra các số chia cho 45 theo thứ tự dư: $1, 2, 3, \dots, 9$ thì tổng của 9 số này chia hết cho 45 .

Câu 2.

Cho các số tự nhiên từ 1 đến 2012 . Hỏi có thể chọn ra được nhiều nhất bao nhiêu số sao cho tổng của hai số bất kỳ trong chúng không chia hết cho hiệu của nó.

Lời giải

+ Ta thấy, nếu hai số chia cho 3 cùng dư 2 thì hiệu của chúng chia hết cho 3 và tổng của chúng chia 3 dư 1 nên tổng của chúng không chia hết cho hiệu của chúng.

+ Trong các số tự nhiên từ 1 đến 2012 sẽ có 671 số chia cho 3 dư 2 là các số có dạng $3k + 2$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 670$)

Khi đó hai số bất kỳ trong 671 số này có tổng chia 3 dư 1 , hiệu chia hết cho 3 nên tổng không chia hết cho hiệu của chúng.

Ta chứng minh rằng chọn được nhiều nhất 672 số trong các số từ 1 đến 2012 , thì trong 672 số này luôn tìm được hai số a, b ($a > b$) sao cho $a - b \leq 2$.

Thật vậy, giả sử ngược lại thì hiệu giữa số nhỏ nhất và số lớn nhất trong các số đã cho sẽ không nhỏ hơn $^{3 \cdot 671} = 2013$ (trái với giả thiết hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất không vượt quá $^{2012 - 1} = 2011$). Do đó $a - b = 1$ hoặc.

+ Nếu $a - b = 1$ thì $(a + b) : (a - b)$

+ Nếu $a - b = 2$ thì $a + b$ là số chẵn, nên $(a + b) : 2$ hay $(a + b) : (a - b)$

Như vậy các số tự nhiên từ 1 đến 2012 không thể chọn được hơn 671 số thỏa mãn điều kiện bài toán.

Suy ra số lượng lớn nhất các số phải tìm là 671 .

Dạng 2. Sử dụng trong bài toán về tính chất các phần tử trong tập hợp**Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Hà 2016 - 2017)**

Cho 100 số hữu tỉ trong đó tích của bất kỳ ba số nào cũng là một số âm. Chứng minh rằng:

a) Tích của 100 số đó là một số dương.

b) Tất cả 100 số đó đều là số âm.

Lời giải

a) Trong 100 số đã cho, phải có ít nhất một số âm (vì nếu cả 100 số đều dương thì tích của ba số bất kì không thể là một số âm).

Ta tách riêng số âm đó ra. Chia 99 số còn lại thành 33 nhóm, mỗi nhóm 3 thừa số.

Theo đề bài, mỗi nhóm đều có tích là một số âm nên tích của 33 nhóm tức là của 99 số là một số âm.

Nhân số âm này với số âm đã tách riêng từ đầu ta được tích của 100 số là một số dương.

b) Sắp xếp 100 số đã cho theo thứ tự tăng dần, chẳng hạn $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{100}$

Các số này đều khác 0 (vì nếu có một thừa số bằng 0 thì tích của nó với hai thừa số khác cũng bằng 0 , trái với đề bài).

Xét tích $a_{98} \cdot a_{99} \cdot a_{100} < 0 \Rightarrow a_{98} < 0$ (vì nếu $a_{98} > 0$ thì $a_{99} > 0, a_{100} > 0$, tích của ba số này không thể là một số âm).

Do đó $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{98}$ là các số âm

+ Xét tích $a_1 a_2 a_{99} < 0$ mà $a_1 a_2 > 0$ nên $a_{99} < 0$

+ Xét tích $a_1 a_2 a_{100} < 0$ mà $a_1 a_2 > 0$ nên $a_{100} < 0$

Vậy tất cả 100 số đã cho đều là số âm.

Câu 2. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2016 - 2017)

Cho 20 số nguyên khác 0: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ có các tính chất sau:

* a_1 là số dương

* Tổng của ba số viết liền nhau bất kỳ là một số dương.

* Tổng của 20 số đó là số âm

Chứng minh rằng: $a_1 \cdot a_{14} + a_{14} \cdot a_{12} < a_1 \cdot a_{12}$

Lời giải

+ Ta có:

$$a_1 + (a_2 + a_3 + a_4) + \dots + (a_{11} + a_{12} + a_{13}) + a_{14} + (a_{15} + a_{16} + a_{17}) + (a_{18} + a_{19} + a_{20}) < 0$$

$$a_1 > 0; a_2 + a_3 + a_4 > 0; \dots; a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0; a_{15} + a_{16} + a_{17} > 0; a_{18} + a_{19} + a_{20} > 0$$

$$\Rightarrow a_{14} < 0$$

+ Ta cũng có:

$$(a_1 + a_2 + a_3) + \dots + (a_{10} + a_{11} + a_{12}) + a_{13} + a_{14} + (a_{15} + a_{16} + a_{17}) + (a_{18} + a_{19} + a_{20}) < 0$$

$$\Rightarrow a_{13} + a_{14} < 0$$

Mặt khác: $a_{12} + a_{13} + a_{14} > 0 \Rightarrow a_{12} > 0$

Như vậy: $a_1 > 0; a_{12} > 0; a_{14} < 0$

$$\Rightarrow a_1 \cdot a_{14} + a_{14} \cdot a_{12} < a_1 a_{12} \quad (\text{điều phải chứng minh})$$

Dạng 3. Bài liên quan đến bảng ô vuông

Câu 1. (HSG 7 huyện Tam Dương 2016 - 2017)

Trong một bảng ô vuông gồm có 5×5 ô vuông, người ta viết vào mỗi ô vuông chỉ một trong 3 số $1; 0; -1$. Chứng minh rằng trong các tổng của 5 số theo mỗi cột, mỗi hàng, mỗi đường chéo phải có ít nhất hai tổng số bằng nhau.

Lời giải

Ta có 5 cột, 5 hàng và 2 đường chéo nên sẽ có 12 tổng

Mỗi ô vuông chỉ nhận một trong 3 số $1; 0$ hoặc -1

nên mỗi tổng chỉ nhận các giá trị từ -5 đến 5 .

Ta có 11 số nguyên từ -5 đến 5 là $-5; -4; \dots; 0; 1; \dots; 5$.

Vậy theo nguyên lý Dirichle phải có ít nhất hai tổng bằng nhau.

Câu 2.

Trên bảng ô vuông kích thước 8×8 , ta viết các số tự nhiên từ 1 đến 64, mỗi số viết vào một ô một cách tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai ô vuông chung cạnh mà hiệu các số ghi trong chúng không nhỏ hơn 5.

Lời giải

Ta xét hàng có ô ghi số 1 và cột có ô ghi số 64. Hiệu giữa hai ô này là 63.

Số cặp ô kề nhau từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 nhiều nhất là 14 (gồm 7 cặp ô chung cạnh tính theo hàng và 7 cặp ô chung cạnh tính theo cột).

Ta có $64 = 14 \cdot 4 + 8$ nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất hai ô kề nhau mà hai số ghi trên đó có hiệu không nhỏ hơn $4 + 1 = 5$.

Vậy luôn tồn tại hai ô vuông chung cạnh mà hiệu các số ghi trong chúng không nhỏ hơn 5.

Dạng 4. Sử dụng trong một số bài toán thực tế

Câu 1.

Có 6 nhà khoa học viết thư trao đổi với nhau về một trong hai đề tài: bảo vệ môi trường và chương trình dân số. Chứng minh rằng có ít nhất ba nhà khoa học cùng trao đổi về một đề tài.

Lời giải

Gọi 6 nhà khoa học là A, B, C, D, E, F.

Nhà khoa học A sẽ viết thư trao đổi với 5 nhà khoa học còn lại về 2 đề tài, có $5 = 2 \cdot 2 + 1$

nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất 3 nhà khoa học (chẳng hạn B, C, D) được nhà khoa học A trao đổi về cùng một đề tài (chẳng hạn đề tài môi trường).

Trong ba nhà khoa học B, C, D nếu có hai người nào cũng trao đổi về đề tài môi trường (chẳng hạn B, C) thì ta chọn được A, B, C cùng trao đổi về một đề tài.

Nếu trong ba nhà khoa học B, C, D không có hai người nào trao đổi về đề tài môi trường thì họ sẽ trao đổi với nhau về đề tài dân số, ta sẽ chọn được B, C, D cùng trao đổi một đề tài.

Vậy có ít nhất ba nhà khoa học cùng trao đổi về một đề tài.

Dạng 5. Sử dụng trong một số bài toán về hình học

Câu 1. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2015 - 2016)

Chứng minh rằng từ 8 số nguyên dương tùy ý không lớn hơn 20 , luôn chọn được ba số x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Lời giải

Giả sử 8 số nguyên dương tùy ý đã cho là $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$ với $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_8 \leq 20$

Thấy rằng với ba số dương a, b, c thỏa mãn $a \geq b \geq c$ và $b + c > a$ thì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Từ đó, ta thấy nếu trong các số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$ không chọn được 3 số là độ dài ba cạnh của một tam giác thì:

$$a_6 \geq a_7 + a_8 \geq 1 + 1 = 2$$

$$a_5 \geq a_6 + a_7 \geq 2 + 1 = 3$$

$$a_4 \geq a_5 + a_6 \geq 3 + 2 = 5$$

$$a_3 \geq a_4 + a_5 \geq 5 + 3 = 8$$

$$a_2 \geq a_3 + a_4 \geq 8 + 5 = 13$$

$$a_1 \geq a_2 + a_3 \geq 13 + 8 = 21$$

Điều này trái với giả thiết đề bài.

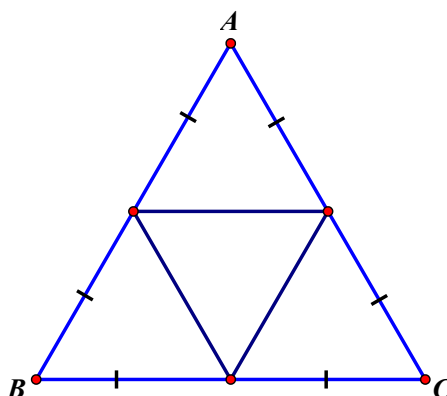
Do đó điều giả sử trên là sai.

Vậy trong 8 số nguyên trên đã cho luôn chọn được 3 số x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Câu 2.

Cho $\triangle ABC$ đều có cạnh bằng 1 . Đánh dấu 5 điểm phân biệt bất kỳ trong $\triangle ABC$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất là 2 điểm trong số đó mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 0,5 .

Lời giải



Ta có: $\triangle ABC$ đều có cạnh bằng 1

Các đường nối trung điểm các cạnh của $\triangle ABC$ chia $\triangle ABC$ thành bốn tam giác đều có cạnh là $0,5$.

Theo nguyên tắc Dirichlet, tồn tại ít nhất là 2 điểm rơi vào cùng một tam giác nhỏ.

Ta có khoảng cách giữa 2 điểm này nhỏ hơn $0,5$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>