

ĐỀ THI

Bài 1 (3đ) a) Phân tích đa thức $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ thành nhân tử

b) Tìm giá trị nguyên của x để $A:B$ biết $A=10x^2 - 7x - 5$ và $B=2x - 3$

c) Cho $x + y = 1$ và $xy \neq 0$. Chứng minh rằng : $\frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} = 0$

Bài 2 (3đ) Giải các phương trình sau

a) $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$

b) $\frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$

Bài 3 (2đ) Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E, trên tia đối của tia CB lấy F sao cho $AE = CF$

a) Chứng minh $\triangle EDF$ vuông cân

b) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi I là trung điểm EF. Chứng minh O, I, C thẳng hàng

Bài 4(2đ) Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên AB, AC sao cho $BD = AE$. Xác định vị trí điểm D, E sao cho

a) DE có độ dài nhỏ nhất

b) Tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 8 CẤP HUYỆN

Bài 1

a)

$$\begin{aligned}x^3 - 5x^2 + 8x - 4 &= x^3 - 4x^2 + 4x - x^2 + 4x - 4 \\&= x(x^2 - 4x + 4) - (x^2 - 4x + 4) \\&= (x - 1)(x - 2)^2\end{aligned}$$

b) Xét $\frac{A}{B} = \frac{10x^2 - 7x - 5}{2x - 3} = 5x + 4 + \frac{7}{2x - 3}$

Với $x \in \mathbb{Z}$ thì $A:B$ khi $\frac{7}{2x-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 7:(2x-3)$

Mà $U^{(7)} = \{-1; 1; 7; -7\}$ nên $x = -5; -2; 2; 1$ thì $A:B$

c) Biến đổi:

$$\frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} = \frac{x^4 - x - y^4 + y}{(y^3-1)(x^3-1)} = \frac{(x^4 - y^4) - (x - y)}{xy(y^2 + y + 1)(x^2 + x + 1)}$$

(do $x+y=1 \Rightarrow y-1=-x$ và $x-1=-y$)

$$= \frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2) - (x-y)}{xy(x^2y^2 + y^2x + y^2yx^2 + xy + y + x^2 + x + 1)} = \frac{(x-y)(x^2+y^2-1)}{xy[x^2y^2 + xy(x+y) + x^2 + y^2 + xy + 2]}$$

$$= \frac{(x-y)(x^2 - x + y^2 - y)}{xy[x^2y^2 + (x+y)^2 + 2]} = \frac{(x-y)[x(x-1) + y(y-1)]}{xy(x^2y^2 + 3)} = \frac{(x-y)[x(-y) + y(-x)]}{xy(x^2y^2 + 3)}$$

$$= \frac{xy(-2xy)}{xy(x^2y^2 + 3)} = \frac{-2(x-y)}{x^2y^2 + 3}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 2.

a) $(x^2+x)^2 + 4(x^2+x) = 12$ đặt $y = x^2 + x$

$$\Rightarrow y^2 + 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 6y - 2y - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+6)(y-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -6 \\ y = 2 \end{cases}$$

$x^2 + x = -6$ vô nghiệm vì $x^2 + x + 6 > 0$ với mọi x

$$x^2 + x = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy $S = \{-2; 1\}$

b) $\frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$

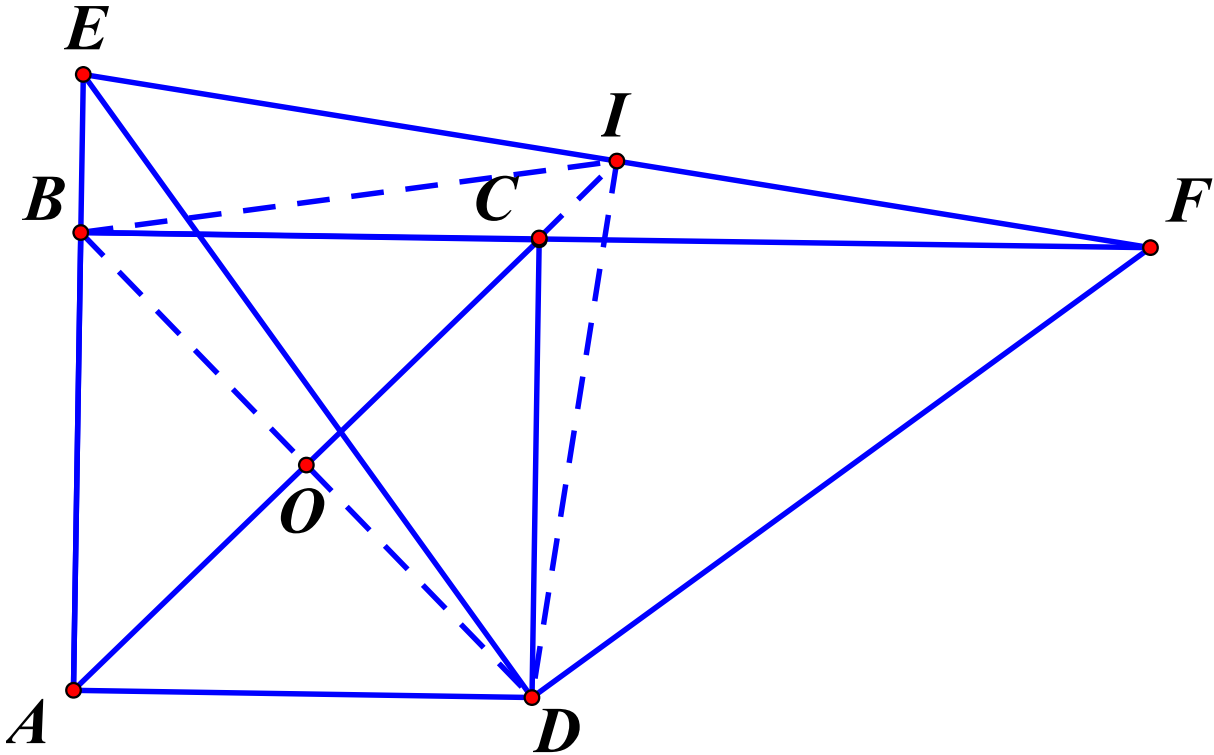
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2008} + 1\right) + \left(\frac{x+2}{2007} + 1\right) + \left(\frac{x+3}{2006} + 1\right) = \left(\frac{x+4}{2005} + 1\right) + \left(\frac{x+5}{2004} + 1\right) + \left(\frac{x+6}{2003} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2009}{2008} + \frac{x+2009}{2007} + \frac{x+2009}{2006} = \frac{x+2009}{2005} + \frac{x+2009}{2004} + \frac{x+2009}{2003}$$

$$\Leftrightarrow (x+2009) \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} \right) = 0$$

Vì $\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} \neq 0 \Rightarrow x = -2009$

Bài 3



a) Chứng minh $\triangle EDF$ vuông cân

Ta có $\triangle ADE = \triangle CDF$ (c.g.c) $\Rightarrow \triangle EDF$ cân tại D

Mặt khác $\triangle ADE = \triangle CDF$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle BED = \angle BFD$

Mà $\angle BED + \angle DEF + \angle BFE = 90^\circ \Rightarrow \angle BFD + \angle DEF + \angle BFE = 90^\circ \Rightarrow \angle EDF = 90^\circ$

Vậy $\triangle EDF$ vuông cân

b) Chứng minh O, C, I thẳng hàng

Theo tính chất đường chéo hình vuông $\Rightarrow CO$ là trung trực BD

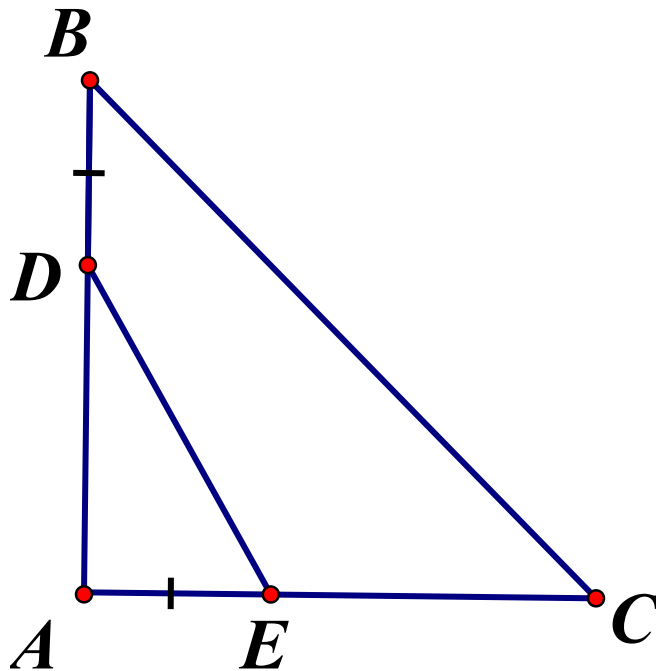
Mà $\triangle EDF$ vuông cân $\Rightarrow DI = \frac{1}{2}EF$

Tương tự $BI = \frac{1}{2}EF \Rightarrow DI = BI$

$\Rightarrow I$ thuộc đường trung trực của DB, nên I thuộc đường thẳng CO

Hay O, C, I thẳng hàng

Bài 4.



a) DE có độ dài nhỏ nhất

Đặt $AB = AC = a$ không đổi ; $AE = BD = x$ ($0 < x < a$)

Áp dụng định lý Pytago với $\triangle ADE$ vuông tại A có:

$$\begin{aligned} DE^2 &= AD^2 + AE^2 = (a - x)^2 + x^2 = 2x^2 - 2ax + a^2 = 2(x^2 - ax) - a^2 \\ &= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} \geq \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

Ta có DE nhỏ nhất $\Leftrightarrow DE^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow BD = AE = \frac{a}{2}$

Nên D, E là trung điểm AB, AC

b) Tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất

Ta có:
$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot (AB - AD) = -\frac{1}{2}(AD^2 - AB \cdot AD)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(AD^2 - 2 \cdot \frac{AB}{2} \cdot AD + \frac{AB^2}{4} \right) + \frac{AB^2}{8}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(AD - \frac{AB}{2} \right)^2 + \frac{AB^2}{8} \leq \frac{AB^2}{8}$$

Vậy
$$S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} \geq \frac{AB^2}{2} - \frac{AB^2}{8} = \frac{3}{8} AB^2 \text{ không đổi}$$

Do đó $\min S_{BDEC} = \frac{3}{8} AB^2$ khi D,E lần lượt là trung điểm AB, AC