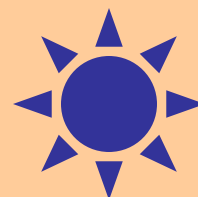
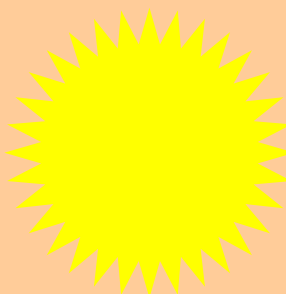


Võ Quốc Bá Cẩn



An Inequality collection

Let the solutions say your method!



The first version

Cần Thơ © 2009

Võ Quốc Bá Cẩn



An Inequality collection

Let the solutions say your method!



The first version

Cần Thơ © 2009

Copyright © 2009 by Vo Quoc Ba Can.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or distributed in any form or by any means, or stored in data base or a retrieval system, without the prior written the permission of the author.

Lời nói đầu

Bất đẳng thức là một phần quan trọng của Toán học, có sức hút mạnh mẽ đến đông đảo các bạn yêu toán. Hàng ngày, có rất nhiều bài toán mới được tìm tòi sáng tạo và được chia sẻ trên các diễn đàn. Có nhiều tiêu chí khác nhau để đánh giá một bất đẳng thức hay, từ khía cạnh sáng tạo đến phương pháp giải quyết nó, và đôi khi lời giải hay lại tôn thêm vẻ đẹp vốn có của mỗi bất đẳng thức...

Với mong muốn cập nhật các bài toán hay, các ý tưởng mới, tôi làm một tuyển tập các bất đẳng thức có kèm theo lời giải, được phân chia thành nhiều tập, trong đó mỗi tập sẽ bao gồm 11 đề bài cùng lời giải từ các cuộc thi olympic toán, 11 bài là do tác giả tự sáng tạo hoặc sưu tầm. 11 bài được chọn từ các kỳ thi olympic toán là nhằm dành cho những bạn nào có định hướng thi học sinh giỏi có thể tham khảo và rèn luyện thêm, còn 11 bài còn lại là dành cho những bạn nào đam mê bất đẳng thức, muốn tìm hiểu thêm về nó.

Bên cạnh đó, tôi còn thực hiện thêm hai mục là "Sưu tầm các bài viết hay về bất đẳng thức" và "Giúp bạn giải toán". Mục sưu tầm các bài viết hay được thực hiện với mục đích giúp cho những bạn không có đủ điều kiện có thể cập nhật được những kiến thức hay và bổ ích về bất đẳng thức. Để thể hiện sự tôn trọng đối với tác giả các bài viết, tôi xin được giữ nguyên bản gốc của chúng (về ngôn ngữ, lập luận, ...). Mục "Giúp bạn giải toán" là nơi để các bạn yêu cầu lời giải cho những bài toán mà các bạn chưa có lời giải, tôi sẽ cố gắng giải giúp bạn (với điều kiện là những bài toán yêu cầu không được xuất hiện trong các kỳ thi hiện thời), trong trường hợp tôi không tìm được lời giải, tôi sẽ để trong tuyển tập dưới dạng chưa giải và hy vọng những bạn khác sẽ giúp chúng ta giải bài.

Hầu hết các lời giải trong tuyển tập là của tác giả, nhưng đồng thời cũng chọn lọc các lời giải hay của các tác giả khác. Các bài toán đều ghi nguồn gốc rõ ràng, một số bài toán tác giả chưa rõ tên thật của người sáng tạo, tôi mong rằng sẽ được cập nhật để bổ sung kịp thời. Điều cần lưu ý là các lời giải trong tuyển tập có thể chưa phải hay nhất, nhưng hy vọng nó cung cấp được cho những bạn quan tâm một cách nhìn, một ý tưởng mới, một tư duy mới... Và tôi cũng mong sẽ nhận được những lời giải mới từ phía các bạn. Tác giả cũng đang chọn lọc và hoàn thành quyển "Những lời giải hay cho những bài toán đẹp" hy vọng một ngày gần đây sẽ xuất bản và đến tay các bạn ủng hộ, quan tâm. Tác giả xin chân thành cảm ơn Vasile Cirtoaje, Manlio Marangelli và các anh Nguyễn Văn Dũng, Trần Quang Hùng đã có nhiều động viên và góp ý kiến cho sự ra đời của tuyển tập này. Tôi cũng mong sự góp ý của các bạn đọc để tuyển tập ngày càng hoàn thiện hơn. Mọi ý kiến đóng góp xin gửi theo địa chỉ email: babylearnmath@yahoo.com.

Cần Thơ, ngày 30 tháng 05 năm 2009
Võ Quốc Bá Cẩn

Những bài bất đẳng thức từ các cuộc thi giải toán

Bài O1. Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh rằng

$$0 \leq ab + bc + ca - abc \leq 2.$$

(USAMO 2000)

Lời giải 1 (V. Q. B. Cần). Bất đẳng thức bên trái là hiển nhiên, bởi vì từ giả thiết, ta suy ra có ít nhất một số trong ba số a, b, c không lớn hơn 1. Giả sử số đó là c , khi đó ta sẽ có

$$ab + bc + ca - abc = ab(1 - c) + c(a + b) \geq 0.$$

Bây giờ, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bên phải. Thay $abc = 4 - (a^2 + b^2 + c^2)$ vào, ta có thể viết lại bất đẳng thức này thành $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leq 6$. Ta sẽ dùng phương pháp phản chứng để chứng minh bất đẳng thức này. Giả sử tồn tại một bộ số (a, b, c) gồm các số hạng không âm sao cho $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ và $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca > 6$. Khi đó, ta sẽ có

$$\begin{aligned} 4 &= a^2 + b^2 + c^2 + abc = \frac{6(a^2 + b^2 + c^2)}{6} + \frac{6\sqrt{6}abc}{6\sqrt{6}} \\ &> \frac{6(a^2 + b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca} + \frac{6\sqrt{6}abc}{(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)^{3/2}}, \end{aligned}$$

suy ra

$$2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) > \frac{3\sqrt{6}abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}}.$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Schur bậc 4 (ở dạng phân thức), ta thấy

$$2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) \leq \frac{6abc(a + b + c)}{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca},$$

nên từ trên ta suy ra

$$\frac{6abc(a + b + c)}{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca} > \frac{3\sqrt{6}abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}}.$$

Điều này chứng tỏ rằng $abc > 0$ và $\sqrt{2}(a + b + c) > \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)}$. Điều này vô lí, bởi vì ta luôn có

$$3(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) - 2(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0.$$

Như vậy, không thể nào tồn tại các số a, b, c thỏa mãn giả thiết của đề bài sao cho $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca > 6$, hay nói một cách khác, với mọi a, b, c không âm sao cho $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$, ta phải có

$$ab + bc + ca - abc \leq 2.$$

Bài toán được chứng minh xong. Dễ thấy bất đẳng thức bên trái đạt được dấu bằng khi (a, b, c) là một hoán vị của bộ số $(2, 0, 0)$; và bất đẳng thức bên phải đạt được dấu bằng khi $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ hoặc (a, b, c) là một hoán vị của bộ số $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$. ■

Lời giải 2. Đây là một chứng minh rất hay và đặc sắc cho bất đẳng thức bên phải. Trong ba số a, b, c , luôn tồn tại ít nhất 2 số sao cho hiệu của chúng khi trừ cho 1 có cùng dấu với nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử hai số đó là a và b , khi đó ta có $c(a-1)(b-1) \geq 0$, suy ra $abc \geq ac + bc - c$. Mặt khác, theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì $4 = a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq 2ab + c^2 + abc$, suy ra $ab \leq 2 - c$. Từ đây, ta thu được

$$ab + bc + ca - abc \leq (2 - c) + bc + ca - (ac + bc - c) = 2.$$

Lời giải 3 (V. Q. B. Cần). Xin được giới thiệu thêm cùng bạn đọc một chứng minh khác cho bất đẳng thức bên phải. Từ giả thiết, ta dễ dàng chứng minh được tồn tại các số không âm x, y, z sao cho $(x+y)(y+z)(z+x) > 0$ và $a = \frac{2x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}, b = \frac{2y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}}, c = \frac{2z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}}$. Với phép đặt thuận nhất này, ta có thể đưa bài toán về chứng minh

$$2 \sum_{cyc} \frac{xy}{(x+y)\sqrt{(x+z)(y+z)}} - \frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta có

$$\begin{aligned} 2 \sum_{cyc} \frac{xy}{(x+y)\sqrt{(x+z)(y+z)}} &\leq \sum_{cyc} \frac{xy}{x+y} \left(\frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} \right) \\ &= \sum_{cyc} \frac{xy}{(x+y)(x+z)} + \sum_{cyc} \frac{xy}{(y+z)(y+x)} \\ &= \sum_{cyc} \frac{xy}{(x+y)(x+z)} + \sum_{cyc} \frac{zx}{(x+y)(x+z)} \\ &= \sum_{cyc} \frac{x(y+z)}{(x+y)(x+z)} = 1 + \frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}. \end{aligned}$$

Vì thế bất đẳng thức trên là hiển nhiên đúng, và phép chứng minh của ta được hoàn tất.

Bài O2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 4$. Chứng minh rằng

$$a + b + c \geq ab + bc + ca.$$

(Việt Nam, 1996)

Lời giải 1 (V. Q. B. Cần). Từ giả thiết, suy ra ta có thể đặt $a = \frac{2x}{y+z}, b = \frac{2y}{z+x}$ và $c = \frac{2z}{x+y}$ với x, y, z là các số thực dương. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại thành

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{2xy}{(x+z)(y+z)} + \frac{2yz}{(y+x)(z+x)} + \frac{2zx}{(z+y)(x+y)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta có

$$\begin{aligned} VP &\leq \sum_{cyc} xy \left[\frac{1}{(x+z)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} \right] = \sum_{cyc} \frac{xy}{(z+x)^2} + \sum_{cyc} \frac{xy}{(y+z)^2} \\ &= \sum_{cyc} \frac{zx}{(y+z)^2} + \sum_{cyc} \frac{xy}{(y+z)^2} = \sum_{cyc} \frac{x}{y+z} = VT. \end{aligned}$$

Phép chứng minh của ta được hoàn tất. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$, tức là $a = b = c = 1$.

Lời giải 2 (V. Q. B. Cẩn). Ta sẽ dùng phương pháp phản chứng. Giả sử rằng tồn tại các số dương a, b, c sao cho $ab + bc + ca + abc = 4$ và $a + b + c < ab + bc + ca$. Khi đó, ta có $\frac{a+b+c}{ab+bc+ca} < 1$, dẫn đến

$$\begin{aligned} 4 &= (ab + bc + ca) \cdot 1 + abc \cdot 1 \\ &> (ab + bc + ca) \cdot \left(\frac{a+b+c}{ab+bc+ca} \right)^2 + abc \cdot \left(\frac{a+b+c}{ab+bc+ca} \right)^3 \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} + \frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3}. \end{aligned}$$

Từ đây, ta tìm được

$$2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) > \frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^2}.$$

Nhưng mà theo bất đẳng thức Schur bậc 3 ở dạng phân thức thì $2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) \leq \frac{9abc}{a+b+c}$. Điều này dẫn đến

$$\frac{9abc}{a+b+c} > \frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^2},$$

suy ra $abc > 0$ và $9(ab + bc + ca)^2 > (a+b+c)^4$ (mâu thuẫn bởi vì ta luôn có $(a+b+c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$ theo $AM - GM$). Bởi vậy, ta không thể có $a + b + c < ab + bc + ca$ với mọi $a, b, c > 0$ thỏa mãn giả thiết của đề bài. Điều này chứng tỏ rằng $a + b + c \geq ab + bc + ca$, đây chính là điều phải chứng minh. ■

Lời giải 3 (V. Q. B. Cẩn). Ta sẽ sử dụng phương pháp dồn biến để chứng minh bất đẳng thức đã cho. Để ý rằng ngoài điểm đẳng thức là $a = b = c = 1$ thì bất đẳng thức đã cho còn có một điểm "nhảy cạm" là $a = b \rightarrow 2, c \rightarrow 0$ (cùng các hoán vị). Điều này gợi cho ta giả sử $c = \min\{a, b, c\}$ và dùng phép dồn biến để đưa hai biến a, b về bằng nhau và bằng một số t dương nào đó. Muốn vậy, việc trước tiên ta phải làm đó là đảm bảo giả thiết của bài toán, tức là bộ số (t, t, c) phải thỏa mãn $t^2 + 2tc + t^2c = ab + bc + ca + abc = 4$. Vì ta cần dồn biến từ (a, b, c) về (t, t, c) nên ta phải chứng minh

$$a + b + c - ab - bc - ca \geq 2t + c - t^2 - 2tc,$$

tương đương

$$(a + b - 2t)(1 - c) + (t^2 - ab) \geq 0. \quad (*)$$

Mặt khác, từ cách chọn của t , ta có $c(a + b - 2t) = (c + 1)(t^2 - ab)$. Ta sẽ chứng minh $a + b - 2t$ và $t^2 - ab$ là những số không âm. Thật vậy, giả sử $a + b - 2t < 0$, khi đó ta cũng có $t^2 - ab < 0$. Điều này dẫn đến $ab > t^2 > \frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$ (vô lí). Vì vậy, ta phải có $a + b - 2t \geq 0$ và $t^2 - ab \geq 0$. Ngoài ra, từ giả thiết của c , dễ thấy $c \leq 1$. Và như thế, bất đẳng thức $(*)$ là hiển nhiên đúng. Phép dồn biến đã được hoàn tất, công việc còn lại của ta chỉ là chứng minh $2t + c - t^2 - 2tc \geq 0$ với $t^2 + 2tc + t^2c = 4$. Đây là một công việc rất đơn giản, bởi vì từ $t^2 + 2tc + t^2c = 4$, ta tìm được $c = \frac{2-t}{t} \geq 0$, dẫn đến

$$2t + c - t^2 - 2tc = 2t + \frac{2-t}{t} - t^2 - 2(2-t) = \frac{(2-t)(t-1)^2}{t} \geq 0.$$

■
Lời giải 4 (V. Q. B. Cẩn). Dễ thấy rằng trong ba số a, b, c có ít nhất hai số có hiệu khi trừ cho 1 là những số cùng dấu với nhau. Giả sử hai số đó là a, b , khi đó ta sẽ có $c(a-1)(b-1) \geq 0$, dẫn đến $abc \geq ac + bc - c$. Từ đây, ta thu được

$$a + b + c + abc \geq (a+b)(c+1).$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta lại có

$$4 = abc + c(a+b) + ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \cdot c + c(a+b) + \frac{(a+b)^2}{4},$$

suy ra

$$c \geq \frac{4 - \frac{(a+b)^2}{4}}{\frac{(a+b)^2}{4} + (a+b)} = \frac{4 - (a+b)}{a+b} = \frac{4}{a+b} - 1.$$

Cộng 1 vào hai vế của bất đẳng thức này rồi nhân cho $a+b > 0$, ta thu được ngay $(a+b)(c+1) \geq 4$. Do đó, kết hợp với trên, ta được $a+b+c+abc \geq (a+b)(c+1) \geq 4 = ab+bc+ca+abc$, hay nói một cách khác

$$a+b+c \geq ab+bc+ca.$$

■

Bài O3. Với a, b, c là các số thực dương bất kì, hãy tìm tất cả các số thực k để cho bất đẳng thức sau đúng

$$\left(k + \frac{a}{b+c}\right) \left(k + \frac{b}{c+a}\right) \left(k + \frac{c}{a+b}\right) \geq \left(k + \frac{1}{2}\right)^3.$$

(Việt Nam, 2009)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Đầu tiên, ta cho $a = b = 1$, bất đẳng thức đã cho trở thành $\left(k + \frac{1}{1+c}\right)^2 \left(k + \frac{c}{2}\right) \geq \left(k + \frac{1}{2}\right)^3$, tương đương

$$\frac{(c-1)^2(4k^2c + 4k^2 + 2k - 1)}{8(c+1)^2} \geq 0.$$

Đến đây, cho $c \rightarrow 0$, ta thấy bất đẳng thức chỉ đúng nếu $4k^2 + 2k - 1 \geq 0$. Ta sẽ chứng minh rằng, nghiệm của bất phương trình này chính là tập hợp tất cả các giá trị của k thỏa mãn yêu cầu bài toán, tức là chứng minh với $4k^2 + 2k - 1 \geq 0$ thì

$$\left(k + \frac{a}{b+c}\right) \left(k + \frac{b}{c+a}\right) \left(k + \frac{c}{a+b}\right) \geq \left(k + \frac{1}{2}\right)^3.$$

Thật vậy, đặt $x = \frac{2a}{b+c}, y = \frac{2b}{c+a}, z = \frac{2c}{a+b}$ thì hiển nhiên $xy + yz + zx + xyz = 4$ và bất đẳng thức trên được viết lại thành $(2k+x)(2k+y)(2k+z) \geq (2k+1)^3$. Bây giờ, áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta dễ thấy $xyz \leq 1$. Từ đó, sử dụng kết quả bài O2, ta thu được

$$\begin{aligned} (2k+x)(2k+y)(2k+z) &= 8k^3 + 4k^2(x+y+z) + 2k(xy+yz+zx) + xyz \\ &\geq 8k^3 + 4k^2(xy+yz+zx) + 2k(xy+yz+zx) + xyz \\ &= 8k^3 + (4k^2 + 2k)(4 - xyz) + xyz \\ &= 8k^3 + 16k^2 + 8k - (4k^2 + 2k - 1)xyz \\ &\geq 8k^3 + 16k^2 + 8k - (4k^2 + 2k - 1) = (2k+1)^3. \end{aligned}$$

Như vậy, phép chứng minh của ta đã được hoàn tất. Điều này cũng chứng tỏ rằng khẳng định của ta ở trên là đúng, tức là tập hợp tất cả các giá trị cần tìm của k chính là nghiệm của bất phương trình $4k^2 + 2k - 1 \geq 0$. ■

Bài O4. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn

$$\frac{1}{a^4+1} + \frac{1}{b^4+1} + \frac{1}{c^4+1} + \frac{1}{d^4+1} = 1.$$

Chứng minh rằng

$$abcd \geq 3.$$

(Latvia 2002)

Lời giải 1 (V. Q. B. Cẩn). Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta có

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{a^4+1} + \frac{1}{b^4+1} + \frac{1}{c^4+1} + \frac{1}{d^4+1} \\ &= \frac{\frac{1}{a^4}}{\frac{1}{a^4}+1} + \frac{\frac{1}{b^4}}{\frac{1}{b^4}+1} + \frac{\frac{1}{c^4}}{\frac{1}{c^4}+1} + \frac{\frac{1}{d^4}}{\frac{1}{d^4}+1} \geq \frac{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}\right)^2}{\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} + \frac{1}{d^4} + 4}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} + \frac{1}{d^4} + 4 \geq \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}\right)^2$, tức là

$$2 \geq \frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2c^2} + \frac{1}{a^2d^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{b^2d^2} + \frac{1}{c^2d^2}.$$

Mà theo bất đẳng thức *AM – GM* thì $\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2c^2} + \frac{1}{a^2d^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{b^2d^2} + \frac{1}{c^2d^2} \geq \frac{6}{abcd}$ nên kết hợp với trên, ta dễ dàng suy ra được bất đẳng thức cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = \sqrt[4]{3}$. ■

Lời giải 2. Đặt $x = \frac{1}{a^4+1}, y = \frac{1}{b^4+1}, z = \frac{1}{c^4+1}$ và $t = \frac{1}{d^4+1}$ thì ta có $x + y + z + t = 1$ và

$$a^4 = \frac{1-x}{x} = \frac{y+z+t}{x}, \quad b^4 = \frac{z+t+x}{y}, \quad c^4 = \frac{t+x+y}{z}, \quad d^4 = \frac{x+y+z}{t}.$$

Từ đó, để chứng minh bất đẳng thức $abcd \geq 3$, ta thấy rằng ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{y+z+t}{x} \cdot \frac{z+t+x}{y} \cdot \frac{t+x+y}{z} \cdot \frac{x+y+z}{t} \geq 81.$$

Nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng bởi vì theo *AM – GM*, ta có

$$\frac{y+z+t}{x} \cdot \frac{z+t+x}{y} \cdot \frac{t+x+y}{z} \cdot \frac{x+y+z}{t} \geq \frac{3\sqrt[3]{yzt}}{x} \cdot \frac{3\sqrt[3]{ztx}}{y} \cdot \frac{3\sqrt[3]{txy}}{z} \cdot \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{t} = 81.$$

Phép chứng minh của ta được hoàn tất. ■

Bài O5. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \geq 1.$$

Chứng minh rằng

$$a+b+c \geq ab+bc+ca.$$

(Andrei Ciupan, Chọn đội tuyển Romania dự thi Junior BMO 2007)

Lời giải 1 (Andrei Ciupan). Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, dễ thấy $(a+b+1)(a+b+c^2) \geq (a+b+c)^2$. Từ đó dẫn đến

$$1 \leq \frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq \frac{a+b+c^2}{(a+b+c)^2} + \frac{b+c+a^2}{(a+b+c)^2} + \frac{c+a+b^2}{(a+b+c)^2},$$

suy ra

$$(a+b+c)^2 \leq 2(a+b+c) + a^2 + b^2 + c^2,$$

tức là

$$a + b + c \geq ab + bc + ca.$$

Bất đẳng thức của ta được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. ■

Lời giải 2 (Cezar Lupu). Từ giả thiết, sử dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta có

$$\begin{aligned} 2 &\geq \left(1 - \frac{1}{a+b+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{b+c+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{c+a+1}\right) \\ &= \frac{a+b}{a+b+1} + \frac{b+c}{b+c+1} + \frac{c+a}{c+a+1} \\ &\geq \frac{[(a+b) + (b+c) + (c+a)]^2}{(a+b)(a+b+1) + (b+c)(b+c+1) + (c+a)(c+a+1)} \\ &= \frac{2(a^2 + b^2 + c^2) + 4(ab + bc + ca)}{(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca) + (a + b + c)}. \end{aligned}$$

Từ đây, ta suy ra được

$$(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca) + (a + b + c) \geq (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca),$$

tức là

$$a + b + c \geq ab + bc + ca.$$

Đây chính là điều phải chứng minh. ■

Lời giải 3 (V. Q. B. Cẩn). Ta sẽ dùng phương pháp phản chứng để chứng minh bất đẳng thức này.

Giả sử tồn tại các số dương a, b, c sao cho $\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \geq 1$ và $a + b + c < ab + bc + ca$.

Khi đó, ta có $1 < \frac{ab+bc+ca}{a+b+c}$, dẫn đến

$$\frac{1}{a+b+1} < \frac{\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}}{a+b+\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}} = \frac{ab+bc+ca}{(a+b)(a+b+c)+ab+bc+ca}.$$

Và ta thu được

$$\sum_{cyc} \frac{ab+bc+ca}{(a+b)(a+b+c)+ab+bc+ca} > 1,$$

tương đương

$$1 > \sum_{cyc} \left[1 - \frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(a+b+c)+ab+bc+ca} \right],$$

hay là

$$1 > \sum_{cyc} \frac{a^2 + ab + b^2}{(a+b)(a+b+c)+ab+bc+ca}.$$

Tuy nhiên, theo các bất đẳng thức *AM – GM* và *Cauchy Schwarz* thì

$$\begin{aligned} VP &\geq \frac{3}{4} \sum_{cyc} \frac{(a+b)^2}{(a+b)(a+b+c)+ab+bc+ca} \geq \frac{3(a+b+c)^2}{\sum_{cyc} [(a+b)(a+b+c)+ab+bc+ca]} \\ &= \frac{3(a+b+c)^2}{2(a+b+c)^2 + 3(ab+bc+ca)} \geq \frac{3(a+b+c)^2}{2(a+b+c)^2 + (a+b+c)^2} = 1 \text{ (mâu thuẫn)}. \end{aligned}$$

Vì vậy, ta không thể có điều giả sử trên, tức là với mọi a, b, c dương thỏa mãn $\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \geq 1$ thì bắt buộc ta phải có $a + b + c \geq ab + bc + ca$. Phép chứng minh được hoàn tất. ■

Bài O6. Cho $n \geq 2$ là một số nguyên bất kì. Tìm hằng số C nhỏ nhất để bất đẳng thức sau

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^4,$$

luôn đúng với mọi số thực không âm $x_1, x_2, \dots, x_n$.

(IMO 1999)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Với $n = 2$, cho $x_1 = x_2 = 1$, ta dễ thấy $C \geq \frac{1}{8}$. Xét trường hợp $n \geq 3$, cho $x_1 = x_2 = 1, x_3 = \cdots = x_n = 0$, ta cũng tìm được $C \geq \frac{1}{8}$. Ta sẽ chứng minh rằng $\frac{1}{8}$ cũng chính là giá trị nhỏ nhất của C để bất đẳng thức trên đúng, tức là

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq \frac{1}{8}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^4.$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) &\leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \left(x_i^2 + x_j^2 + \sum_{k \neq i, k \neq j} x_k^2 \right) = \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j + \sum_{i=1}^n x_i^2}{2} \right)^2 = \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^4. \end{aligned}$$

Như thế, khẳng định của ta đã được chứng minh xong. Điều này cho phép ta đi đến kết luận hằng số C nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu của đề bài là $C_{\min} = \frac{1}{8}$. ■

Bài O7. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c, x, y, z , bất đẳng thức sau luôn được thỏa mãn

$$\frac{ax}{a+x} + \frac{by}{b+y} + \frac{cz}{c+z} \leq \frac{(a+b+c)(x+y+z)}{a+b+c+x+y+z}.$$

(KMO Weekend Program 2007)

Lời giải 1 (V. Q. B. Cẩn). Bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại như sau

$$\left(\frac{a+x}{4} - \frac{ax}{a+x} \right) + \left(\frac{b+y}{4} - \frac{by}{b+y} \right) + \left(\frac{c+z}{4} - \frac{cz}{c+z} \right) \geq \frac{a+b+c+x+y+z}{4} - \frac{(a+b+c)(x+y+z)}{a+b+c+x+y+z},$$

hay là

$$\frac{(a-x)^2}{a+x} + \frac{(b-y)^2}{b+y} + \frac{(c-z)^2}{c+z} \geq \frac{(a+b+c-x-y-z)^2}{a+b+c+x+y+z}.$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta dễ thấy

$$VT \geq \frac{[(a-x) + (b-y) + (c-z)]^2}{(a+x) + (b+y) + (c+z)} = VP,$$

và như thế, bất đẳng thức của ta đã được chứng minh xong. ■

Lời giải 2 (Sanghoon). Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta có

$$\begin{aligned} [(a+b+c)^2x + (x+y+z)^2a](a+x) &\geq [(a+b+c)\sqrt{xa} + (x+y+z)\sqrt{ax}]^2 \\ &= ax(a+b+c+x+y+z)^2, \end{aligned}$$

từ đó suy ra

$$\frac{ax}{a+x} \leq \frac{(a+b+c)^2x + (x+y+z)^2a}{(a+b+c+x+y+z)^2}.$$

Bằng cách thiết lập hai bất đẳng thức tương tự cho hai biểu thức còn lại, ta thu được

$$\frac{ax}{a+x} + \frac{by}{b+y} + \frac{cz}{c+z} \leq \frac{(a+b+c)^2(x+y+z) + (x+y+z)^2(a+b+c)}{(a+b+c+x+y+z)^2} = \frac{(a+b+c)(x+y+z)}{a+b+c+x+y+z}.$$

Bài toán được chứng minh xong. ■

Bài O8. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + 1.$$

(Belarus 1998)

Lời giải 1 (V. Q. B. Cẩn). Để ý rằng bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$(a+b+c) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 3 \right) \geq (a+b+c) \left(\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} - 2 \right),$$

và như thế, nó có thể được viết lại thành

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} - 2(a+b+c) \geq \frac{(a+b+c)(a-c)^2}{(a+b)(b+c)}.$$

Theo bất đẳng thức *AM – GM*, ta dễ thấy $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a+b+c$. Vì thế, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} - (a+b+c) \geq \frac{(a+b+c)(a-c)^2}{(a+b)(b+c)},$$

hay là

$$\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \geq \frac{(a+b+c)(a-c)^2}{(a+b)(b+c)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta có $\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} \geq \frac{(a-c)^2}{b+c}$. Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a} \geq \frac{a+b+c}{(a+b)(b+c)}$$

là một bất đẳng thức hiển nhiên đúng bởi vì nó tương đương với

$$\frac{b(a+b+c)}{a(a+b)(b+c)} \geq 0.$$

Phép chứng minh của ta được hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ■

Lời giải 2. Đặt $x = \frac{a}{b}$ và $y = \frac{c}{b}$, ta có

$$\frac{c}{a} = \frac{y}{x}, \quad \frac{a+b}{b+c} = \frac{x+1}{1+y}, \quad \frac{b+c}{a+b} = \frac{1+y}{1+x}.$$

Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại thành

$$x + \frac{1}{y} + \frac{y}{x} \geq \frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{x+1} + 1,$$

tương đương

$$x^3y^2 + x^2 + x + y^3 + y^2 \geq x^2y + 2xy^2 + 2xy.$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$, ta có

$$\frac{x^3y^2 + x}{2} \geq x^2y, \quad \frac{x^3y^2 + x + y^3 + y^2}{2} \geq 2xy^2, \quad \text{và} \quad x^2 + y^2 \geq 2xy$$

nên bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Bài toán được chứng minh xong. ■

Bài O9. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c , ta đều có

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{2\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{(a+b+c+\sqrt[3]{abc})^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

(Titu Andreescu, MOSP 1999)

Lời giải 1 (V. Q. B. Cẩn). Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta có

$$\begin{aligned} VT &= \frac{c^2}{c^2(a+b)} + \frac{a^2}{a^2(b+c)} + \frac{b^2}{b^2(c+a)} + \frac{(\sqrt[3]{abc})^2}{2abc} \\ &\geq \frac{(a+b+c+\sqrt[3]{abc})^2}{c^2(a+b) + a^2(b+c) + b^2(c+a) + 2abc} = \frac{(a+b+c+\sqrt[3]{abc})^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} = VP. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ■

Lời giải 2 (V. Q. B. Cẩn). Nhân cả hai vế của bất đẳng thức đã cho với $(a+b)(b+c)(c+a) > 0$, ta có thể viết lại nó dưới dạng

$$\sum_{cyc} (a+b)(a+c) + \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2\sqrt[3]{abc}} \geq (a+b+c+\sqrt[3]{abc})^2,$$

hay là

$$ab + bc + ca + \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2\sqrt[3]{abc}} \geq 2\sqrt[3]{abc}(a+b+c) + \sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Vì $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ (theo $AM - GM$) nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2\sqrt[3]{abc}} + 2\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 2\sqrt[3]{abc}(a+b+c),$$

tương đương

$$(a+b)(b+c)(c+a) + 4abc \geq 4\sqrt[3]{a^2b^2c^2}(a+b+c).$$

Để chứng minh bất đẳng thức này, ta sẽ giả sử $a \geq b \geq c$, và viết lại nó như sau

$$(b+c) \left[(a+b)(a+c) - 4\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \right] \geq 4\sqrt[3]{a^2b^2c^2} (a - \sqrt[3]{abc}),$$

hay là

$$(b+c) \left(a^2 + ab + bc + ca - 4\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \right) \geq 4\sqrt[3]{a^2b^2c^2} (a - \sqrt[3]{abc}).$$

Lại sử dụng đánh giá $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ một lần nữa, ta thấy rằng bất đẳng thức trên được suy ra từ

$$(b+c) \left(a^2 - \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \right) \geq 4\sqrt[3]{a^2b^2c^2} (a - \sqrt[3]{abc}), \quad \text{tương đương} \quad (b+c) \left(a + \sqrt[3]{abc} \right) \geq 4\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$, ta có

$$(b+c) \left(a + \sqrt[3]{abc} \right) \geq 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt[3]{a\sqrt[3]{abc}} = 4\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Do đó, bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng và phép chứng minh của ta được hoàn tất. ■

Bài O10. Giả sử a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8.$$

(USAMO 2003)

Lời giải 1 (V. Q. B. Cẩn). Để ý rằng $3 - \frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} = \frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}$, nên ta có thể viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng

$$\frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{2(c+a-b)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{2(a+b-c)^2}{2c^2+(a+b)^2} \geq 1.$$

Mà theo bất đẳng thức *Cauchy Schwarz* thì

$$\frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2} \geq \frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+2(b^2+c^2)} = \frac{(b+c-a)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$(b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 + (a+b-c)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Bất đẳng thức này được suy ra từ bất đẳng thức sau $\frac{(b+c-a)^2 + (c+a-b)^2}{2} \geq c^2$ (đúng theo *Cauchy Schwarz*) và hai bất đẳng thức tương tự. Như vậy, bài toán của ta đã được chứng minh xong. Để thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ■

Lời giải 2. Bất đẳng thức đã cho là một bất đẳng thức thuần nhất bậc 0. Vì thế, ta có thể chuẩn hóa cho $a + b + c = 1$, khi đó, nó được viết lại thành

$$\frac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2} + \frac{(b+1)^2}{2b^2+(1-b)^2} + \frac{(c+1)^2}{2c^2+(1-c)^2} \leq 8.$$

Bây giờ, sử dụng đánh giá sau

$$\frac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2} = \frac{1}{3} + \frac{2(4a+1)}{9a^2-6a+3} = \frac{1}{3} + \frac{2(4a+1)}{(3a-1)^2+2} \leq \frac{1}{3} + \frac{2(4a+1)}{2},$$

ta thu được

$$\frac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2} + \frac{(b+1)^2}{2b^2+(1-b)^2} + \frac{(c+1)^2}{2c^2+(1-c)^2} \leq \frac{1}{3} + (4a+1) + \frac{1}{3} + (4b+1) + \frac{1}{3} + (4c+1) = 8.$$

Đó chính là điều phải chứng minh. ■

Bài O11. Cho $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ là các số thực thỏa mãn $x_1, x_2 > 0, x_1 y_1 > z_1^2$ và $x_2 y_2 > z_2^2$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x_1 y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2 y_2 - z_2^2} \geq \frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2}.$$

(IMO 1968)

Lời giải 1 (V. Q. B. Cẩn). Từ giả thiết, dễ thấy y_1, y_2 là các số dương. Điều này cho phép ta sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ như sau

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) \geq x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2\sqrt{x_1 y_1 x_2 y_2}.$$

Từ đánh giá này, đặt $x_1 y_1 - z_1^2 = a > 0$ và $x_2 y_2 - z_2^2 = b > 0$, ta thu được

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2 &\geq x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2\sqrt{x_1 y_1 x_2 y_2} - (z_1 + z_2)^2 \\ &= (a + z_1^2) + (b + z_2^2) + 2\sqrt{(a + z_1^2)(b + z_2^2)} - (z_1 + z_2)^2 \\ &\geq (a + z_1^2) + (b + z_2^2) + 2(\sqrt{ab} + z_1 z_2) - (z_1 + z_2)^2 \\ &= (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2. \end{aligned}$$

Do đó, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh được

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 8 \text{ (hiển nhiên đúng theo } AM - GM \text{)}.$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ và $z_1 = z_2$. ■

Lời giải 2 (V. Q. B. Cẩn). Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta có

$$(z_1 + z_2)^2 = \left(\sqrt{x_1} \cdot \frac{z_1}{\sqrt{x_1}} + \sqrt{x_2} \cdot \frac{z_2}{\sqrt{x_2}} \right)^2 \leq (x_1 + x_2) \left(\frac{z_1^2}{x_1} + \frac{z_2^2}{x_2} \right),$$

suy ra

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2 &\geq (x_1 + x_2) \left(y_1 + y_2 - \frac{z_1^2}{x_1} - \frac{z_2^2}{x_2} \right) \\ &= (x_1 + x_2) \left(\frac{x_1 y_1 - z_1^2}{x_1} + \frac{x_2 y_2 - z_2^2}{x_2} \right) \\ &\geq 2\sqrt{x_1 x_2} \cdot 2\sqrt{\frac{(x_1 y_1 - z_1^2)(x_2 y_2 - z_2^2)}{x_1 x_2}} \\ &= 4\sqrt{(x_1 y_1 - z_1^2)(x_2 y_2 - z_2^2)}. \end{aligned}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì

$$\frac{1}{x_1 y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2 y_2 - z_2^2} \geq \frac{2}{\sqrt{(x_1 y_1 - z_1^2)(x_2 y_2 - z_2^2)}}.$$

Vì thế

$$[(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2] \left(\frac{1}{x_1 y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2 y_2 - z_2^2} \right) \geq 8,$$

tức là

$$\frac{1}{x_1 y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2 y_2 - z_2^2} \geq \frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2}.$$

Bài toán của ta đã được chứng minh xong. ■

Nhận xét. Hoàn toàn tương tự, ta có thể chứng minh được bất đẳng thức tổng quát hơn vẫn còn đúng

Nếu $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ và $z_1, z_2, \dots, z_n$ ($n \geq 2$) là các số thực sao cho $x_i > 0$ và $x_i y_i > z_i^2$ thì

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i y_i - z_i^2} \geq \frac{n^3}{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n z_i \right)^2}.$$



Những bài bất đẳng thức tự sáng tạo và sưu tầm

Bài CH1. Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, hãy chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{bc}{a^4 + 2b^2c^2} + \frac{ca}{b^4 + 2c^2a^2} + \frac{ab}{c^4 + 2a^2b^2} \leq \frac{3}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Nhân cả hai vế của bất đẳng thức đã cho với $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 > 0$, ta có thể viết lại nó dưới dạng

$$\sum_{cyc} \left[bc - \frac{bc(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}{a^4 + 2b^2c^2} \right] + \frac{3 \sum_{cyc} a^2b^2}{\sum_{cyc} a^2} - \sum_{cyc} bc \geq 0,$$

tương đương

$$\sum_{cyc} \frac{bc(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{a^4 + 2b^2c^2} + \frac{3 \sum_{cyc} a^2b^2 - \sum_{cyc} ab(a^2 + b^2) - \sum_{cyc} a^2bc}{\sum_{cyc} a^2} \geq 0,$$

hay là

$$2 \sum_{cyc} \frac{bc(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{a^4 + 2b^2c^2} - \frac{\sum_{cyc} (2ab + 2ac - b^2 - c^2)(a - b)(a - c)}{\sum_{cyc} a^2} \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối này có dạng $X(a - b)(a - c) + Y(b - c)(b - a) + Z(c - a)(c - b) \geq 0$, trong đó

$$X = \frac{2bc(a + b)(a + c)(a^2 + b^2 + c^2)}{a^4 + 2b^2c^2} + b^2 + c^2 - 2a(b + c) + (b - c)^2,$$

và các biểu thức Y, Z tương tự. Đây là một dạng của bất đẳng thức *Vornicu Schur* nên ta nghĩ ngay đến việc sử dụng bất đẳng thức này để giải bài toán đã cho. Muốn như vậy, yêu cầu đầu tiên ta cần phải thỏa mãn đó là X, Y, Z là những đại lượng không âm, và may mắn thay, điều này luôn đúng. Thật vậy, bất đẳng thức $X \geq 0$ (các bất đẳng thức $Y \geq 0$ và $Z \geq 0$ được xét tương tự) tương đương với

$$\frac{2bc(a + b)(a + c)(a^2 + b^2 + c^2)}{a^4 + 2b^2c^2} + b^2 + c^2 - 2a(b + c) + (b - c)^2 \geq 0.$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì

$$\frac{(a + b)(a + c)(a^2 + b^2 + c^2)}{a^4 + 2b^2c^2} > \frac{(a^2 + bc)(a^2 + 2bc)}{a^4 + 2b^2c^2} > 1.$$

Vì thế, ta có $X > 2bc + b^2 + c^2 - 2a(b + c) = (b + c)(b + c - 2a)$, dẫn đến kết luận của ta là hiển nhiên nếu $b + c \geq 2a$. Xét trường hợp $a \geq t = \frac{b+c}{2}$, ta sẽ chứng minh rằng

$$(a + b)(a + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3a^4 + 6b^2c^2. \quad (*)$$

Khi đó, ta sẽ có $X \geq 6bc + b^2 + c^2 - 2a(b+c) + (b-c)^2 = 2(b+c)(b+c-a) \geq 0$, chính là điều mà ta đang tìm cách chứng minh. Đặt $x = bc \leq t^2$ thì bất đẳng thức (*) có thể được viết lại thành

$$(a^2 + 2ta + x)(a^2 + 4t^2 - 2x) \geq 3a^4 + 6x^2,$$

hay là

$$-8x^2 + (4t^2 - 4at - a^2)x + (a^2 + 4t^2)(a^2 + 2ta) - 3a^4 \geq 0.$$

Do $4t^2 - 4at - a^2 < 0$ nên

$$\begin{aligned} VT &\geq -8t^4 + (4t^2 - 4at - a^2)t^2 + (a^2 + 4t^2)(a^2 + 2ta) - 3a^4 \\ &= (2t - a)(2a^3 + 2a^2t + at^2 - 2t^3) \geq 0. \end{aligned}$$

Như vậy, khẳng định trên của ta đã được chứng minh. Bây giờ, giả sử $a \geq b \geq c$, ta có $X(a-b)(a-c) \geq 0$ và $a - c - \frac{b}{c}(a-b) = \frac{(b-c)(b+c-a)}{c} \geq 0$ nên

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} X(a-b)(a-c) &\geq Y(b-c)(b-a) + Z(a-c)(b-c) \\ &\geq Y(b-c)(b-a) + Z \cdot \frac{b}{c}(a-b) \cdot (b-c) = \frac{(bZ - cY)(a-b)(b-c)}{c}. \end{aligned}$$

Vì thế, ta chỉ cần chứng minh $bZ \geq cY$ là bài toán được giải quyết xong, điều này tương đương với việc chứng minh

$$2a(a^2 + b^2 + c^2)(b+c) \left[\frac{b^2(a+c)}{2a^2b^2+c^4} - \frac{c^2(a+b)}{2a^2c^2+b^4} \right] + 2(b-c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac) \geq 0.$$

Dễ dàng đánh giá được $\frac{b^2(a+c)}{2a^2b^2+c^4} \geq \frac{c^2(a+b)}{2a^2c^2+b^4}$ nên bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = 2b = 2c$ và các hoán vị tương ứng. ■

Bài CH2. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}} + \sqrt{\frac{bc}{(b+a)(c+a)}} + \sqrt{\frac{ca}{(c+b)(a+b)}} \geq 1 + \frac{9abc}{2(a+b+c)(ab+bc+ca)}.$$

(Dương Đức Lâm)

Lời giải (V. Q. B. Cần). Sử dụng các bất đẳng thức *Cauchy Schwarz* và *AM – GM*, ta có

$$\begin{aligned} VT &= \sum_{cyc} \frac{\sqrt{ab(a+c)(b+c)}}{(a+c)(b+c)} \geq \sum_{cyc} \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{ab}+c)}{(a+c)(b+c)} \\ &= \sum_{cyc} \frac{ab}{(a+c)(b+c)} + \sqrt{abc} \sum_{cyc} \frac{\sqrt{c}}{(a+c)(b+c)} \\ &= 1 + \sqrt{abc} \sum_{cyc} \frac{\sqrt{c}}{(a+c)(b+c)} - \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}. \end{aligned}$$

Do đó, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh được

$$\sqrt{abc} \sum_{cyc} \frac{\sqrt{c}}{(a+c)(b+c)} - \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{9abc}{2(a+b+c)(ab+bc+ca)},$$

tương đương

$$\sum_{cyc} \sqrt{c}(a+b) - 2\sqrt{abc} \geq \frac{9\sqrt{abc}(a+b)(b+c)(c+a)}{2(a+b+c)(ab+bc+ca)}.$$

Đến đây, ta hãy để ý rằng $\sum_{cyc} \sqrt{c}(a+b) - 6\sqrt{abc} = \sum_{cyc} \sqrt{c}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ và

$$\frac{9\sqrt{abc}(a+b)(b+c)(c+a)}{2(a+b+c)(ab+bc+ca)} - 4\sqrt{abc} = \frac{\sqrt{abc} \sum_{cyc} c(a-b)^2}{2(a+b+c)(ab+bc+ca)},$$

suy ra bất đẳng thức trên là hệ quả của bất đẳng thức sau

$$\sqrt{c}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq \frac{c\sqrt{abc}(a-b)^2}{2(a+b+c)(ab+bc+ca)},$$

hay là

$$2(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq c\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2.$$

Đây là một bất đẳng thức đúng bởi vì $2(a+b+c) \geq 2(a+b) \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ (theo *Cauchy Schwarz*) và $ab+bc+ca \geq bc+ca \geq 2c\sqrt{ab}$ (theo *AM – GM*). Và như vậy, bài toán đã cho đã được chứng minh xong. Để thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ cùng các hoán vị. ■

Bài CH3. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a+b = a^4 + b^4$. Chứng minh rằng

$$a^a b^b \leq 1 \leq a^{a^3} b^{b^3}.$$

(Vasile Cîrtoaje)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Trước hết, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bên trái. Để thấy rằng nó tương đương với $a \ln a + b \ln b \leq 0$. Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $\ln x \leq x - 1 \ \forall x > 0$, ta có

$$3a \ln a - (a^4 - a) \leq 3a(a-1) - (a^4 - a) = -a(a+2)(a-1)^2 \leq 0,$$

từ đó suy ra

$$3(a \ln a + b \ln b) \leq (a^4 - a) + (b^4 - b) = 0.$$

Và như thế, bất đẳng thức trên trái đã được chứng minh xong. Bây giờ, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bên phải. Cũng tương tự như trên, ta sẽ lấy logarithm nepe hai vế và viết lại bất đẳng thức dưới dạng $a^3 \ln a + b^3 \ln b \geq 0$. Xét hàm số sau với $x \in (0, 2)$: $f(x) = 3 \ln x - \frac{x^4 - x}{x^3}$, ta có

$$f'(x) = \frac{3}{x} - 1 - \frac{2}{x^3} = \frac{(x-1)(2+2x-x^2)}{x^3}.$$

Suy ra phương trình $f'(x) = 0$ chỉ có một nghiệm duy nhất trên khoảng $(0, 2)$ là $x = 1$. Mặt khác, qua 1 thì $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên ta tìm được $f(x) \geq f(1) = 0$ với mọi $x \in (0, 2)$. Đến đây, sử dụng giả thiết của bài toán và bất đẳng thức trung bình lũy thừa, ta có $a+b = a^4 + b^4 \geq \frac{(a+b)^4}{8}$, suy ra $a+b \leq 2$, mà a, b là các số dương nên $a, b \in (0, 2)$. Vì thế, áp dụng bất đẳng thức vừa chứng minh, ta có

$$3(a^3 \ln a + b^3 \ln b) \geq a^3 \cdot \frac{a^4 - a}{a^3} + b^3 \cdot \frac{b^4 - b}{b^3} = a^4 + b^4 - a - b = 0.$$

Bất đẳng thức bên phải được chứng minh xong. Để thấy ở cả hai bất đẳng thức (bên trái và bên phải) đẳng thức chỉ xảy ra tại một điểm là $(a, b) = (1, 1)$. ■

Bài CH4. Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c thỏa mãn không có hai số nào trong chúng có thể đồng thời bằng 0, bất đẳng thức sau luôn được thỏa mãn

$$\frac{a}{a^2 + 3bc} + \frac{b}{b^2 + 3ca} + \frac{c}{c^2 + 3ab} \leq \frac{(a + b + c)^3}{4(ab + bc + ca)^2}.$$

(Dương Đức Lâm)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Nhân cả hai vế của bất đẳng thức cho $ab + bc + ca > 0$, và để ý rằng $a - \frac{a(ab+bc+ca)}{a^2+3bc} = \frac{a(a-b)(a-c)}{a^2+3bc} + \frac{abc}{a^2+3bc}$, ta có thể viết lại nó như sau

$$\sum_{cyc} \frac{a(a-b)(a-c)}{a^2 + 3bc} + abc \sum_{cyc} \frac{1}{a^2 + 3bc} + \frac{(a + b + c)^3}{4(ab + bc + ca)} - (a + b + c) \geq 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta có $\sum_{cyc} \frac{1}{a^2+3bc} \geq \frac{9}{a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca}$ nên bất đẳng thức trên được suy ra từ

$$\sum_{cyc} \frac{a(a-b)(a-c)}{a^2 + 3bc} + \frac{9abc}{a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3bc + 3ca} + \frac{(a + b + c)^3}{4(ab + bc + ca)} - (a + b + c) \geq 0,$$

tương đương

$$\sum_{cyc} \frac{a(a-b)(a-c)}{a^2 + 3bc} + \frac{(a + b + c)^3 + 9abc}{4(ab + bc + ca)} - (a + b + c) \geq \frac{9abc}{4 \sum_{cyc} ab} - \frac{9abc}{\sum_{cyc} a^2 + 3 \sum_{cyc} ab}.$$

Ta có $(a + b + c)^3 + 9abc - 4(a + b + c)(ab + bc + ca) = \sum_{cyc} a(a-b)(a-c)$ và

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = \sum_{cyc} (a-b)(a-c),$$

nên bất đẳng thức trên tương đương với

$$\sum_{cyc} \frac{a(a-b)(a-c)}{a^2 + 3bc} + \frac{\sum_{cyc} a(a-b)(a-c)}{4(ab + bc + ca)} \geq \frac{9abc \sum_{cyc} (a-b)(a-c)}{4 \left(\sum_{cyc} ab \right) \left(\sum_{cyc} a^2 + 3 \sum_{cyc} ab \right)}.$$

Ta thấy bất đẳng thức này có dạng $X(a-b)(a-c) + Y(b-c)(b-a) + Z(c-a)(c-b) \geq 0$, với

$$\begin{aligned} X &= a + \frac{4a(ab + bc + ca)}{a^2 + 3bc} - \frac{9abc}{a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca)} \\ &\geq a + \frac{4a(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca)} - \frac{9abc}{a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca)} \\ &= \frac{a[a^2 + 7a(b+c) + (b-c)^2]}{a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca)} \geq 0, \end{aligned}$$

và các biểu thức Y, Z tương tự. Bây giờ, giả sử rằng $a \geq b \geq c$, ta sẽ chứng minh $aX \geq bY$, tương đương

$$(a^2 - b^2) + 4(ab + bc + ca) \left(\frac{a^2}{a^2 + 3bc} - \frac{b^2}{b^2 + 3ca} \right) \geq \frac{9abc(a - b)}{a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca)}.$$

Một điều dễ thấy là $\frac{a^2}{a^2 + 3bc} \geq \frac{b^2}{b^2 + 3ca}$ và $a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca) \geq 12bc$, suy ra

$$VT - VP \geq (a^2 - b^2) - \frac{9a \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca)}{12} \cdot (a - b)}{a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca)} = \frac{(a - b)(a + 4b)}{4} \geq 0.$$

Đến đây, với để ý rằng $Z(c - a)(c - b) \geq 0$ và $a - c \geq \frac{a}{b}(b - c) \geq 0$, ta thu được

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} X(a - b)(a - c) &\geq X(a - b)(a - c) + Y(b - c)(b - a) \\ &\geq X(a - b) \cdot \frac{a}{b}(b - c) + Y(b - c)(b - a) = \frac{(aX - bY)(a - b)(b - c)}{b} \geq 0. \end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc (a, b, c) là một hoán vị của bộ số $(t, t, 0)$ với t là một số dương bất kì. ■

Bài CH5. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 4$. Tìm tất cả các số thực k sao cho bất đẳng thức sau luôn được thỏa mãn

$$(k + bc)(k + ca)(k + ab) \geq (k + 1)^3.$$

(Vuonga2khtn*¹)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Cho $c = t > 0$ và $a = b = \frac{2}{t+1}$ thì ta dễ thấy $ab + bc + ca + abc = 4$ và bất đẳng thức đã cho trở thành $\left(k + \frac{2t}{t+1}\right)^2 \left[k + \frac{4}{(t+1)^2}\right] \geq (k + 1)^3$, tương đương

$$\frac{(t - 1)^2[(k^2 + k - 1)t^2 + (2k^2 - 2k - 6)t + k^2 - 3k - 1]}{(t + 1)^4} \geq 0.$$

Và như vậy, theo yêu cầu của đề bài, ta cần có $(k^2 + k - 1)t^2 + (2k^2 - 2k - 6)t + k^2 - 3k - 1 \geq 0$. Vế trái của bất đẳng thức này là một tam thức bậc 2 của t , và chúng ta đều biết rằng để nó không âm với mọi t dương thì một điều kiện cần là hai hệ số cao nhất và thấp nhất phải không âm, tức là $k^2 + k - 1 \geq 0$ và $k^2 - 3k - 1 \geq 0$. Từ đây, ta tìm được $k \leq -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $k \geq \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. Ta sẽ chứng minh đây chính là tập hợp tất cả các giá trị cần tìm của k , tức là

$$(k + bc)(k + ca)(k + ab) \geq (k + 1)^3.$$

Để chứng minh, chúng ta sẽ chia làm 2 trường hợp

+ Xét $k \geq \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. Khi đó, áp dụng kết quả bài O2, ta có

$$\begin{aligned} (k + bc)(k + ca)(k + ab) &= k^3 + k^2(ab + bc + ca) + kabc(a + b + c) + a^2b^2c^2 \\ &\geq k^3 + k^2(ab + bc + ca) + kabc(ab + bc + ca) + a^2b^2c^2 \\ &= k^3 + k^2(4 - abc) + kabc(4 - abc) + a^2b^2c^2. \end{aligned}$$

¹Những bài mà chúng tôi không biết tên thật của tác giả và chỉ biết nickname, chúng tôi sẽ ghi nickname kèm theo dấu

* ở phía sau. Khi nào biết được tên thật sự của tác giả, chúng tôi xin sửa lại và ghi đúng tên của người đặt ra bài toán.

Mà $k^3 + k^2(4 - abc) + kabc(4 - abc) + a^2b^2c^2 - (k + 1)^3 = (1 - abc)[(k - 1)abc + k^2 - 3k - 1] \geq 0$ (do $1 \geq abc$ (đánh giá này được suy ra trực tiếp từ giả thiết), $(k - 1)abc \geq 0$ và $k^2 - 3k - 1 \geq 0$) nên hiển nhiên

$$(k + bc)(k + ca)(k + ab) \geq (k + 1)^3.$$

+ Xét $k \leq -\frac{1+\sqrt{5}}{2} < -1$. Đặt $\sqrt{ab} = x, \sqrt{bc} = y, \sqrt{ca} = z$ thì ta có $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$, và ta phải chứng minh $(k + x^2)(k + y^2)(k + z^2) \geq (k + 1)^3$. Áp dụng bất đẳng thức Schur bậc 3, ta có

$$\begin{aligned} 4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) &\leq \frac{9x^2y^2z^2}{x^2 + y^2 + z^2} + (x^2 + y^2 + z^2)^2 \\ &= \frac{9t^2}{4-t} + (4-t)^2. \end{aligned} \quad (t = xyz \leq 1)$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} (k + x^2)(k + y^2)(k + z^2) - (k + 1)^3 &= k^2(x^2 + y^2 + z^2 - 3) + k(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - 3) + t^2 - 1 \\ &\geq k^2(1-t) + k \left[\frac{9t^2}{4-t} + (4-t)^2 - 3 \right] + t^2 - 1 \\ &= (1-t) \left[k^2 + \frac{k(t^2 - 20t + 16)}{4(4-t)} - t - 1 \right]. \end{aligned}$$

Lại có

$$\frac{k(t^2 - 20t + 16)}{4(4-t)} - t - k = \frac{t[(k+4)t - 16(k+1)]}{4(4-t)} \geq \frac{t[(k+4)t - 16(k+1)t]}{4(4-t)} = -\frac{3t^2(5k+4)}{4(4-t)} \geq 0,$$

nên

$$k^2 + \frac{k(t^2 - 20t + 16)}{4(4-t)} - t - 1 \geq k^2 + k - 1 \geq 0.$$

Như vậy, khẳng định của ta đã được chứng minh xong. Và do đó, tập hợp tất cả các giá trị của k thỏa mãn yêu cầu của đề bài là $k \in \left(-\infty, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right)$. ■

Bài CH6. Cho a, b, c, d là các số thực không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 8(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geq 1.$$

(Phạm Văn Thuận)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Chúng tôi xin được giới thiệu cùng bạn đọc chứng minh sau. Mặc dù là một chứng minh không đẹp nhưng nó lại là một ý tưởng mới về bất đẳng thức (chuyển từ bất đẳng thức thuần nhất sang dạng không thuần nhất). Từ giả thiết, ta dễ dàng suy ra được $a, b, c, d \in [0, 1]$ và ta cũng có thể viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng $P(a, b, c, d) \geq 0$, trong đó

$$P(a, b, c, d) = \sum_{cyc} a^3 + \frac{1}{4} \sum_{cyc} a^2 + 8(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) - \frac{5}{4}.$$

Bây giờ, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức $P(a, b, c, d) \geq 0$ đúng với mọi $a, b, c, d \in [0, 1]$ mà không cần thiết phải thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} P(a, b, c, d) - P\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d\right) &= \frac{(a-b)^2[6(a+b) + 1 - 16(1-c)(1-d)]}{8}, \\ P(a, b, c, d) - P(a+b, 0, c, d) &= -\frac{ab[6(a+b) + 1 - 16(1-c)(1-d)]}{2}, \\ P(a, b, c, d) - P(a+b-1, 1, c, d) &= -\frac{(1-a)(1-b)[6(a+b) + 1 - 16(1-c)(1-d)]}{2}. \end{aligned}$$

Từ đây, ta thấy nếu $6(a+b)+1-16(1-c)(1-d) \geq 0$ thì $P(a,b,c,d) \geq P(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d)$. Nếu $6(a+b)+1-16(1-c)(1-d) \leq 0$ và $a+b \leq 1$ thì $P(a,b,c,d) \geq P(a+b, 0, c, d)$. Nếu $6(a+b)+1-16(1-c)(1-d) \leq 0$ và $a+b \geq 1$ thì $P(a,b,c,d) \geq P(a+b-1, 1, c, d)$. Những lập luận này chứng tỏ rằng, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh nó đúng trong ba trường hợp sau là đủ $a=b, ab=0$ và $(1-a)(1-b)=0$. Hoàn toàn tương tự, ta cũng thấy rằng chỉ cần chứng minh bất đẳng thức đúng trong ba trường hợp $c=d, cd=0$ và $(1-c)(1-d)=0$ thì bài toán cũng được giải quyết xong. Kết hợp hai lập luận này lại và loại bớt những trường hợp trùng nhau, ta có thể đưa bài toán về xét trong 4 trường hợp sau

+ Xét $a=b$ và $c=d$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$2a^3 + 2c^3 + \frac{a^2 + c^2}{2} + 8(1-a)^2(1-c)^2 - \frac{5}{4} \geq 0.$$

Đặt $t = a + c$ và $x = ac$ ($0 \leq x \leq \frac{t^2}{4}$), ta có thể viết lại nó như sau

$$2t(t^2 - 3x) + \frac{t^2 - 2x}{2} + 8(1-t+x)^2 - \frac{5}{4} \geq 0,$$

tương đương

$$f(x) = 32x^2 + 4(15 - 22t)x + 8t^3 + 34t^2 - 64t + 27 \geq 0.$$

Nếu $4t^2 - 22t + 15 \leq 0$ thì ta có $f'(x) = 64x + 4(15 - 22t) \leq 16t^2 + 4(15 - 22t) = 4(4t^2 - 22t + 15) \leq 0$, dẫn đến $f(x)$ là hàm giảm với mọi $x \leq \frac{t^2}{4}$, và ta thu được

$$f(x) \geq f\left(\frac{t^2}{4}\right) = (2t^2 - 10t + 27)(t - 1)^2 \geq 0.$$

Nếu $15 - 22t \geq 0$ thì bất đẳng thức là hiển nhiên đúng bởi vì ta luôn có $8t^3 + 34t^2 - 64t + 27 > 0$ với mọi $t \geq 0$.

Nếu $15 - 22t \leq 0$ và $4t^2 - 22t + 15 \geq 0$ thì ta có $\frac{15}{22} \leq t \leq \frac{11-\sqrt{61}}{4}$, khi đó dễ thấy

$$\Delta'_f = 4(15 - 22t)^2 - 32(8t^3 + 34t^2 - 64t + 27) = -4(64t^3 - 212t^2 + 148t - 9) < 0,$$

nên $f(x)$ luôn đạt giá trị không âm với mọi $a, c \in [0, 1]$. Trường hợp thứ nhất được giải quyết xong.

+ Xét $a=b$ và $d=0$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$2a^3 + c^3 + \frac{2a^2 + c^2}{4} + 8(1-a)^2(1-c) - \frac{5}{4} \geq 0,$$

tương đương

$$2a^3 + \frac{a^2}{2} - 8a(2-a)(1-c) + \frac{(1-c)(27-5c-4c^2)}{4} \geq 0.$$

Do $1-c \geq 0$ và $27-5c-4c^2 \geq 27-9c$ nên ta chỉ cần chứng minh được

$$2a^3 + \frac{a^2}{2} - 8a(2-a)(1-c) + \frac{9(1-c)(3-c)}{4} \geq 0,$$

hay là

$$f(c) = 9c^2 - 4(8a^2 - 16a + 9)c + 8a^3 + 34a^2 - 64a + 27 \geq 0.$$

Nếu $16a^2 - 32a + 9 \geq 0$ thì ta có $f'(c) = 18c - 4(8a^2 - 16a + 9) \leq 18 - 4(8a^2 - 16a + 9) = -2(16a^2 - 32a + 9) \leq 0$ nên $f(c)$ là hàm giảm với mọi $c \leq 1$, và ta thu được $f(c) \geq f(1) = 2a^2(4a+1) \geq 0$.

Nếu $16a^2 - 32a + 9 \leq 0$ thì $\frac{4-\sqrt{7}}{4} \leq a \leq 1$, khi đó bằng cách tính biệt thức của $f(c)$, ta dễ thấy

$$\Delta'_f = 4(8a^2 - 16a + 9)^2 - 9(8a^3 + 34a^2 - 64a + 27) = 256a^4 - 1096a^3 + 1294a^2 - 576a + 81 < 0,$$

dẫn đến $f(c) \geq 0$ và trường hợp thứ hai cũng được giải quyết xong.

+ Xét $b = 1$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $a^3 + c^3 + d^3 + \frac{a^2+c^2+d^2}{4} \geq 0$, là một bất đẳng thức hiển nhiên đúng do a, c, d là những số không âm.

+ Xét $b = 0$ và $d = 0$. Khi đó, ta phải chứng minh

$$a^3 + c^3 + \frac{a^2+c^2}{4} + 8(1-a)(1-c) - \frac{5}{4} \geq 0.$$

Đặt $t = a + c$ và $x = ac$ ($0 \leq x \leq \frac{t^2}{4}$), bất đẳng thức này trở thành

$$t(t^2 - 3x) + \frac{t^2 - 2x}{4} + 8(1-t+x) - \frac{5}{4} \geq 0,$$

hay là

$$6(5-2t)x + (1-t)(27-5t-4t^2) \geq 0.$$

Nếu $t \leq 1$ thì bất đẳng thức cuối là hiển nhiên bởi vì ta có $6(5-2t)x \geq 0$ và $(1-t)(27-5t-4t^2) \geq 0$. Trong trường hợp ngược lại, sử dụng đánh giá $(1-a)(1-c) \geq 0$, ta suy ra được $x \geq t-1$, dẫn đến

$$6(5-2t)x + (1-t)(27-5t-4t^2) \geq 6(5-2t)(t-1) + (1-t)(27-5t-4t^2) = (4t-3)(t-1)^2 \geq 0.$$

Trường hợp thứ tư cũng được giải quyết xong. Và như thế, phép chứng minh của ta cũng được hoàn tất. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = \frac{1}{2}$ hoặc $a = 1, b = c = d = 0$ và các hoán vị tương ứng. ■

Bài CH7. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = a^3 + b^3 + c^3$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{a}{a^2+1} \cdot \left(\frac{c}{b}\right)^2 + \frac{b}{b^2+1} \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \frac{c}{c^2+1} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

(Gabriel Dospinescu)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta dễ thấy

$$VT \cdot \left(\frac{a^2+1}{a} + \frac{b^2+1}{b} + \frac{c^2+1}{c}\right) \geq \left(\frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a}\right)^2.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$2\left(\frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)\left(a+b+c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Ta thấy rằng bất đẳng thức này chính là tổng của hai bất đẳng thức sau

$$\left(\frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$$

và

$$\left(\frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)^2.$$

Bất đẳng thức thứ nhất tương đương với

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + 3,$$

mà $\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right)^2 \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ và $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$ nên bất đẳng thức này hiển nhiên đúng.

Xét bất đẳng thức thứ hai, lấy căn bậc hai hai vế, ta thấy rằng bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq a + b + c.$$

Từ giả thiết, áp dụng các bất đẳng thức *Chebyshev* và *AM – GM*, ta có

$$3(a + b + c) = 3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}(a + b + c),$$

suy ra $1 \geq abc$, và ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} &= \frac{1}{3} \left(\frac{2b}{a} + \frac{a}{c} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{2a}{c} + \frac{c}{b} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{2c}{b} + \frac{b}{a} \right) \\ &\geq \sqrt[3]{\frac{b^2}{ac}} + \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} + \sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}} = \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \geq a + b + c. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong. Để thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. ■

Bài CH8. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn

$$\frac{1}{a^2 + 47} + \frac{1}{b^2 + 47} + \frac{1}{c^2 + 47} = \frac{1}{24}.$$

Chứng minh bất đẳng thức sau

$$a + b + c \geq 10\sqrt{\frac{47}{23}}.$$

(Yongyao*)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Để ý rằng $\frac{1}{a^2+47}, \frac{1}{b^2+47}, \frac{1}{c^2+47} \leq \frac{1}{47}$ nên từ giả thiết, ta có thể đặt được $\frac{1}{a^2+47} = \frac{1-x}{47}, \frac{1}{b^2+47} = \frac{1-y}{47}, \frac{1}{c^2+47} = \frac{1-z}{47}$ với x, y, z là các số thực không âm nằm trong đoạn $[0, 1]$. Từ phép đặt này, chúng ta có thể dễ dàng suy ra được $x + y + z = \frac{25}{24}$, và ta phải chứng minh

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}} + \sqrt{\frac{y}{1-y}} + \sqrt{\frac{z}{1-z}} \geq \frac{10}{\sqrt{23}}.$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $z = \min\{x, y, z\}$. Khi đó, dễ thấy $x + y \geq \frac{2}{3}(x + y + z) > \frac{2}{3}$, dẫn đến

$$x^2 + y^2 - (x^3 + y^3) - \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^3}{4} = -\frac{(3x+3y-2)(x-y)^2}{4} \leq 0.$$

Từ đây, áp dụng bất đẳng thức *Holder*, ta thu được

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}} + \sqrt{\frac{y}{1-y}} \geq \sqrt{\frac{(x+y)^3}{x^2(1-x) + y^2(1-y)}} \geq \sqrt{\frac{(x+y)^3}{\frac{(x+y)^2}{2} - \frac{(x+y)^3}{4}}} = 2\sqrt{\frac{25-24z}{23+24z}}.$$

Vì thế, để chứng minh bất đẳng thức trên, ta chỉ cần chứng minh được

$$2\sqrt{\frac{25-24z}{23+24z}} + \sqrt{\frac{z}{1-z}} \geq \frac{10}{\sqrt{23}}.$$

Việc chứng minh bất đẳng thức này khá đơn giản, xin được dành cho bạn đọc. ■

Nhận xét. Với cùng một cách làm như trên, chúng ta có thể chứng minh được một kết quả đẹp hơn rất nhiều là

Với mọi số thực không âm a, b, c thỏa mãn $\min\{a, b, c\} \geq 1$ và $\frac{1}{a^2+47} + \frac{1}{b^2+47} + \frac{1}{c^2+47} = \frac{1}{24}$ thì

$$a + b + c \geq 15.$$

Và một điều thú vị hơn nữa là bất đẳng thức này tương đương với kết quả sau (rất đẹp và khó) của tác giả Vasile Cirtoaje trên tạp chí Crux Mathematicorum

Với mọi số thực không âm x, y, z thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0 thì

$$\sqrt{1 + \frac{48}{y+z}} + \sqrt{1 + \frac{48y}{z+x}} + \sqrt{1 + \frac{48z}{x+y}} \geq 15.$$



Bài CH9. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0 và tổng của chúng là 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau

$$P = \frac{a-b}{\sqrt{a+b}} + \frac{b-c}{\sqrt{b+c}} + \frac{c-a}{\sqrt{c+a}}.$$

(Phạm Kim Hùng)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Đặt $x = \sqrt{a+b}, y = \sqrt{b+c}$ và $z = \sqrt{c+a}$, ta được

$$a = \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2}, \quad b = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2}, \quad c = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} |P| &= \left| \sum_{cyc} \frac{a-b}{\sqrt{a+b}} \right| = \left| \sum_{cyc} \frac{(z^2 + x^2 - y^2) - (x^2 + y^2 - z^2)}{2x} \right| \\ &= \left| \sum_{cyc} \frac{z^2 - y^2}{x} \right| = \frac{|(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)|}{xyz} = \frac{|(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)(x+y+z)|}{xyz(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{|(a-b)(b-c)(c-a)| (\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a})}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)} (\sqrt{a+b} + \sqrt{a+c}) (\sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}) (\sqrt{b+c} + \sqrt{b+a})}. \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $c = \min\{a, b, c\}$, ta có thể dễ dàng kiểm tra được các đánh giá sau

$$\begin{aligned} |(a-b)(b-c)(c-a)| &\leq |ab(a-b)|, \\ \frac{1}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}} &\leq \frac{1}{\sqrt{ab(a+b)}}, \\ \frac{1}{(\sqrt{a+b} + \sqrt{a+c})(\sqrt{b+c} + \sqrt{b+a})} &\leq \frac{1}{(\sqrt{a} + \sqrt{a+b})(\sqrt{b} + \sqrt{a+b})}, \end{aligned}$$

và

$$\frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}}{\sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}} = 1 + \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}} \leq 1 + \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Những đánh giá này giúp ta thu được bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} |P| &\leq \frac{|ab(a-b)|(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a+b})}{\sqrt{ab(a+b)}(\sqrt{a} + \sqrt{a+b})(\sqrt{b} + \sqrt{a+b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\ &= \left| \frac{a-b}{\sqrt{a+b}} + \sqrt{b} - \sqrt{a} \right| = \frac{1}{\sqrt{a+b+c}} \left| \frac{a-b}{\sqrt{a+b}} + \sqrt{b} - \sqrt{a} \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{a+b}} \left| \frac{a-b}{\sqrt{a+b}} + \sqrt{b} - \sqrt{a} \right| = \left| \frac{a-b}{a+b} + \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+b}} \right|. \end{aligned}$$

Đặt $x = \frac{a}{a+b}$ thì ta có $\frac{b}{a+b} = 1-x$, và

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+b}} = x - (1-x) + \sqrt{1-x} - \sqrt{x} = 2x - \sqrt{x} + \sqrt{1-x} - 1 = f(x).$$

Tính đạo hàm $f'(x)$, ta được $f'(x) = 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$. Giải phương trình $f'(x) = 0$, ta tìm được hai nghiệm của nó trong khoảng $(0, 1)$ là $x_1 = \frac{8-\sqrt{46-2\sqrt{17}}}{16}$ và $x_2 = \frac{8+\sqrt{46-2\sqrt{17}}}{16}$. Từ đó, bằng cách lập bảng biến thiên, dễ thấy rằng $f\left(\frac{8-\sqrt{46-2\sqrt{17}}}{16}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{8+\sqrt{46-2\sqrt{17}}}{16}\right)$, hay là $-\sqrt{\frac{71-17\sqrt{17}}{32}} \leq f(x) \leq \sqrt{\frac{71-17\sqrt{17}}{32}}$. Vì $|P| \leq |f(x)|$ nên ta cũng suy ra được

$$-\sqrt{\frac{71-17\sqrt{17}}{32}} \leq P \leq \sqrt{\frac{71-17\sqrt{17}}{32}}.$$

Mặt khác, cho $a = \frac{8+\sqrt{46-2\sqrt{17}}}{16}$, $b = \frac{8-\sqrt{46-2\sqrt{17}}}{16}$, $c = 0$ thì ta dễ thấy $P = \frac{(5-\sqrt{17})\sqrt{46-2\sqrt{17}}}{32}$; và cho $a = \frac{8-\sqrt{46-2\sqrt{17}}}{16}$, $b = \frac{8+\sqrt{46-2\sqrt{17}}}{16}$, $c = 0$ thì $P = -\frac{(5-\sqrt{17})\sqrt{46-2\sqrt{17}}}{32}$, nên ta đi đến kết luận

$$\max P = \sqrt{\frac{71-17\sqrt{17}}{32}} \quad \text{và} \quad \min P = -\sqrt{\frac{71-17\sqrt{17}}{32}}.$$

Bài toán được giải quyết xong. ■

Bài CH10. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c , bất đẳng thức sau đây luôn được thỏa mãn

$$\frac{a}{2a^2+3b+2} + \frac{b}{2b^2+3c+2} + \frac{c}{2c^2+3a+2} \leq \frac{3}{7}.$$

(Phan Thành Nam)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Do tính hoán vị vòng quanh nên ta có thể giả sử b là số hạng nằm giữa a và c . Khi đó, có 2 trường hợp để xét là $c \geq b \geq a$ và $a \geq b \geq c$.

+ Xét trường hợp $c \geq b \geq a$. Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta có

$$\frac{a}{2a^2+3b+2} \leq \frac{a}{4a+3b}, \quad \frac{b}{2b^2+3c+2} \leq \frac{b}{4b+3c}, \quad \frac{c}{2c^2+3a+2} \leq \frac{c}{4c+3a}.$$

Vì thế, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{a}{4a+3b} + \frac{b}{4b+3c} + \frac{c}{4c+3a} \leq \frac{3}{7},$$

tức là

$$15(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 8(a^2b + b^2c + c^2a) + 21abc.$$

Nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng bởi vì ta có $8(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 8(a^2b + b^2c + c^2a)$ (do $c \geq b \geq a$) và $7(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 21abc$ (theo $AM - GM$).

+ Xét trường hợp $a \geq b \geq c$. Lúc này, có 2 khả năng xảy ra như sau

- Khả năng thứ nhất $a \leq b + 3c$. Với giả thiết này, thực hiện tương tự như trường hợp thứ nhất ở trên, ta thấy rằng bất đẳng thức của ta sẽ được chứng minh nếu ta có

$$15(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 8(a^2b + b^2c + c^2a) + 21abc,$$

hay là

$$f(a) = (15c - 8b)a^2 + (15b^2 - 21bc - 8c^2)a + 15bc^2 - 8b^2c \geq 0.$$

Nếu $8b > 15c$ thì $f(a)$ là một tam thức bậc 2 theo a với hệ số cao nhất âm, vì thế $f(a) \geq \min\{f(b), f(b+3c)\}$. Mà $f(b) = 7b(b-c)^2 \geq 0$, $f(b+3c) = 7b^3 - 17b^2c - 38bc^2 + 111c^3 > 0$ nên hiển nhiên $f(a) \geq 0$.

Trong trường hợp $15c \geq 8b$, tính đạo hàm $f'(a)$, ta có

$$\begin{aligned} f'(a) &= 2a(15c - 8b) + 15b^2 - 21bc - 8c^2 \\ &\geq 2b(15c - 8b) + 15b^2 - 21bc - 8c^2 = (8c - b)(b - c) \geq 0, \end{aligned}$$

từ đó suy ra $f(a)$ là hàm đồng biến, và ta suy ra $f(a) \geq f(b) \geq 0$.

- Khả năng thứ hai $a \geq b + 3c$. Trong khả năng này, sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta thu được các đánh giá

$$\frac{a}{2a^2 + 3b + 2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2(3b+2)}}, \quad \text{và} \quad \frac{c}{2c^2 + 3a + 2} \leq \frac{c}{4c + 3a} \leq \frac{c}{3b + 13c}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi $0 < c \leq b$ thì bài toán được giải quyết xong

$$g(c) = \frac{1}{2\sqrt{2(3b+2)}} + \frac{b}{2b^2 + 3c + 2} + \frac{c}{3b + 13c} \leq \frac{3}{7}.$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức này đúng với mọi $c > 0$ mà không cần phải thỏa mãn $c \leq b$. Thật vậy, ta có

$$g'(c) = 3b \left[\frac{1}{(3b + 13c)^2} - \frac{1}{(2b^2 + 3c + 2)^2} \right].$$

Phương trình $g'(c) = 0$ chỉ có một nghiệm dương duy nhất là $c_0 = \frac{2b^2 - 3b + 2}{10} > 0$. Qua c_0 thì $g'(c)$ đổi dấu từ dương sang âm nên với mọi $c > 0$, ta có

$$g(c) \leq g\left(\frac{2b^2 - 3b + 2}{10}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2(3b+2)}} + \frac{2b^2 + 7b + 2}{26b^2 - 9b + 26}.$$

Mặt khác, dễ dàng kiểm tra được rằng

$$\frac{1}{2\sqrt{2(3b+2)}} + \frac{2b^2+7b+2}{26b^2-9b+26} < \frac{3}{7},$$

do đó, kết hợp với trên, ta được $g(c) < \frac{3}{7}$.

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. ■

Bài CH11. Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0 và tổng của chúng là 2. Chứng minh rằng khi đó, bất đẳng thức sau luôn được thỏa mãn

$$\sqrt{\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}} + \sqrt{\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}} + \sqrt{\frac{c+a}{c^2+ca+a^2}} \geq 2 + \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn, T. Q. Anh). Xét các số thực x, y, z sao cho $x, y \geq z \geq 0$, dễ thấy

$$\frac{x+z}{x^2+xz+z^2} = \frac{x+z}{(x+\frac{z}{2})(x+z) - \frac{1}{2}z(x-z)} \geq \frac{x+z}{(x+\frac{z}{2})(x+z)} = \frac{1}{x+\frac{z}{2}}.$$

Ngoài ra, ta cũng có đánh giá sau

$$\frac{x+y}{x^2+xy+y^2} \geq \frac{x+y+z}{(x+\frac{z}{2})^2 + (x+\frac{z}{2})(y+\frac{z}{2}) + (y+\frac{z}{2})^2}.$$

Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{(x+\frac{z}{2})^2 + (x+\frac{z}{2})(y+\frac{z}{2}) + (y+\frac{z}{2})^2}{x^2+xy+y^2} - 1 \geq \frac{x+y+z}{x+y} - 1,$$

:tương đương

$$\frac{3z(2x+2y+z)}{4(x^2+xy+y^2)} \geq \frac{z}{x+y} \text{ (hiển nhiên đúng).}$$

Bây giờ, trở lại bài toán của ta. Do tính đối xứng nên ta có thể giả sử rằng $a \geq b \geq c$, khi đó từ hai đánh giá trên, ta được

$$\frac{b+c}{b^2+bc+c^2} \geq \frac{1}{b+\frac{c}{2}}, \quad \frac{c+a}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{1}{a+\frac{c}{2}},$$

và

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{a+b+c}{(a+\frac{c}{2})^2 + (a+\frac{c}{2})(b+\frac{c}{2}) + (b+\frac{c}{2})^2}.$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{1}{\sqrt{v}} + \sqrt{\frac{2}{u^2+uv+v^2}} \geq 2 + \sqrt{\frac{2}{3}},$$

trong đó $u = a + \frac{c}{2}$ và $v = b + \frac{c}{2}$.

Đây là một bài tập rất tốt cho phép cân bằng hệ số trong việc sử dụng bất đẳng thức AM – GM. Xin được dành cho bạn đọc để hoàn thiện nốt chứng minh này. Chú ý rằng ở bất đẳng thức đã cho, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1, c = 0$ và các hoán vị tương ứng. ■

Nhận xét. Hoàn toàn tương tự, ta cũng có thể chứng minh được kết quả tổng quát hơn vẫn còn đúng

Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 2$ và k là một số thực không âm bất kì, khi đó

$$\left(\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}\right)^k + \left(\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}\right)^k + \left(\frac{c+a}{c^2+ca+a^2}\right)^k \geq 2 + \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$



Sưu tầm các bài viết hay về bất đẳng thức

1. Cauchy – Bunyakovski – Schwarz Inequality²

TRẦN NAM DŨNG, GABRIEL DOSPINESCU

Together with *Arithmetic mean – Geometric mean (AM – GM)*, *Schur*, *Jensen* and *Holder* inequality, *Cauchy – Bunyakovski – Schwarz inequality*³ (*CBS*) is a fundamental result, with remarkable applications. The main question is how do we recognise an inequality that can be solved using this method? It is very hard to say this clearly, but it is definitely good to think of *CBS* inequality whenever we have sums of radicals or sums of squares and especially when we have expressions involving radicals.

Let us first consider some problems in which it is better to apply the direct form of *CBS* inequality

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

The main difficulty is to choose a_i and b_i . We will see that in some cases this is trivial, while in the other cases it is very difficult. Let us solve some problems now:

Example 1. *Prove that if x, y, z are real numbers such that $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, then the following inequality holds*

$$x + y + z \leq 2 + xyz.$$

(IMO Shortlist, proposed by Poland)

Solution. Why do we should think of *CBS* inequality? The reason: the relation we are asked to prove can be written as $x(1 - yz) + y + z \leq 2$ and we are bound to consider the sum $x^2 + y^2 + z^2$. However, there are lots of ways to apply *CBS*. The choice

$$[x(1 - yz) + y + z]^2 \leq [x^2 + y^2 + z^2][2 + (1 - yz)^2]$$

does not help. So, maybe it is better to look at $y + z$ as a single number. Observe that we have the equality when $x = 1, y = 1$ and $z = 1$ (for example), the choice

$$x(1 - yz) + y + z \leq \sqrt{[x^2 + (y + z)^2][1 + (1 - yz)^2]}$$

becomes natural. So, we must prove that $2(1 + yz)(2 - 2yz + y^2 z^2) \leq 4$ or $y^3 z^3 \leq y^2 z^2$, which is easy, since $2 \geq y^2 + z^2 \geq 2yz$. ■

Another non-trivial application of *CBS* inequality is the following problem.

Example 2. *Let a, b, c, x, y, z be positive real numbers such that $ax + by + cz = xyz$. Prove that*

$$x + y + z > \sqrt{a + b} + \sqrt{b + c} + \sqrt{c + a}.$$

²Bài viết này được trích từ tạp chí Toán học và tuổi trẻ.

³Trong quyển sách này, chúng ta gọi là bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*.

Solution. We write $\frac{a}{yz} + \frac{b}{zx} + \frac{c}{xy} = 1$ and now the substitution $a = yzu, b = zxv$ and $c = xyw$ becomes natural. So, we must prove that

$$\sqrt{z(yu + xv)} + \sqrt{x(zv + yw)} + \sqrt{y(zu + xw)} < x + y + z \text{ for } u + v + w = 1.$$

One can see the form of the CBS inequality

$$\left[\sqrt{z(yu + xv)} + \sqrt{x(zv + yw)} + \sqrt{y(zu + xw)} \right] \leq (x + y + z)(yu + xv + zv + yw + zu + xw),$$

and the latter is of course smaller than $(x + y + z)^2$, since $u + v + w = 1$. ■

We have seen that CBS inequality can be applied when we have sums. What about products? The following example will show that we need some imagination in this case:

Example 3. Let n ($n \geq 2$) be an integer and let $a_1, a_2, \dots, a_n$ be positive real numbers. Prove the inequality

$$(a_1^3 + 1)(a_2^3 + 1) \cdots (a_n^3 + 1) \geq (a_1^2 a_2 + 1) \cdots (a_n^2 a_1 + 1).$$

(Czech – Slovak – Polish Match, 2001)

Solution. We try to apply CBS inequality for each factor of the product in the RHS. It is natural to write $(1 + a_1^2 a_2)^2 \leq (1 + a_1^3)(1 + a_1 a_2^2)$, since we need $1 + a_1^3$, which appears in the LHS. Similarly, we can write

$$(1 + a_2^2 a_3)^2 \leq (1 + a_2^3)(1 + a_2 a_3^2), \quad \dots, \quad (1 + a_n^2 a_1)^2 \leq (1 + a_n^3)(1 + a_n a_1^2).$$

Multiplying we obtain

$$[(a_1^2 a_2 + 1) \cdots (a_n^2 a_1 + 1)]^2 \leq [(a_1^3 + 1) \cdots (a_n^3 + 1)][(1 + a_1 a_2^2) \cdots (1 + a_n a_1^2)]. \quad (*)$$

Well, it seems that CBS inequality does not work for this one. False! We use again the same argument to find that

$$[(1 + a_1 a_2^2) \cdots (1 + a_n a_1^2)]^2 \leq [(a_1^3 + 1) \cdots (a_n^3 + 1)][(a_1^2 a_2 + 1) \cdots (a_n^2 a_1 + 1)]. \quad (**)$$

Thus, if $(a_1^2 a_2 + 1) \cdots (a_n^2 a_1 + 1) \geq (1 + a_1 a_2^2) \cdots (1 + a_n a_1^2)$, then $(*)$ will give the answer, otherwise $(**)$ will. ■

It is now time to solve some harder problems.

Example 4. Given $x > 0, y > 0$ such that $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$. Prove that

$$x^3 + y^3 \leq 2.$$

(Russia, 1999)

Solution. The idea is to majorize $x^3 + y^3$ with $A(x^3 + y^4)$ for a certain A , which seems reasonable, looking at the exponents. We can try some tricks with CBS and AM – GM:

$$(x^3 + y^3)^2 \leq (x^3 + y^4)(x^3 + y^2) \leq (x^2 + y^3)(x^3 + y^2) \leq \left(\frac{x^2 + y^2 + x^3 + y^3}{2} \right)^2.$$

Thus we have established that $x^3 + y^3 \leq x^2 + y^2$. However $(x^2 + y^2)^2 \leq (x + y)(x^3 + y^3)$ and so $x^2 + y^2 \leq x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)}$. Hence $x^2 + y^2 \leq 2$ and consequently $x^3 + y^3 \leq 2$. ■

Example 5. Prove that if $x, y, z \in [-1, 1]$ satisfying $x + y + z + xyz = 0$, then

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1} \leq 3.$$

Solution. We first try *CBS* inequality in the obvious form:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1} \leq \sqrt{3(x+y+z+3)}.$$

But is the *RHS* smaller than 3? Well, if $x + y + z \leq 0$, it is. Let us suppose it is not the case. Thus $xyz < 0$. Let $z < 0$. It follows that $x, y \in (0, 1]$. We will not give up and try to use again *CBS* inequality, but for the first two radicals:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1} \leq \sqrt{2x+2y+4} + \sqrt{z+1}.$$

We have to prove that

$$\sqrt{2x+2y+4} + \sqrt{z+1} \leq 3,$$

which is equivalent to

$$\frac{2(x+y)}{2 + \sqrt{2x+2y+4}} \leq \frac{-z}{1 + \sqrt{z+1}}, \quad \text{or} \quad \frac{-2z(1+xy)}{2 + \sqrt{2x+2y+4}} \leq \frac{-z}{1 + \sqrt{z+1}},$$

that is

$$2xy + 2(1+xy)\sqrt{z+1} \leq \sqrt{2x+2y+4}.$$

Since $1+z = \frac{(1-x)(1-y)}{1+xy}$, everything comes down to proving that

$$xy + \sqrt{(1-x)(1-y)(1+xy)} \leq \sqrt{1 + \frac{x+y}{2}}.$$

We would like to use *CBS* inequality such that $1-x$ vanishes from the *LHS*. Specifically:

$$\begin{aligned} xy + \sqrt{(1-x)(1-y)(1+xy)} &= \sqrt{x} \cdot \sqrt{xy^2} + \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+xy-y-xy^2} \\ &\leq \sqrt{1+xy-y} \leq 1 \leq \sqrt{1 + \frac{x+y}{2}}. \end{aligned}$$

■

Maybe the hardest example of them all is the following problem:

Example 6. Prove that for all positive real numbers a, b, c, x, y, z , we have

$$\frac{a}{b+c}(y+z) + \frac{b}{c+a}(z+x) + \frac{c}{a+b}(x+y) \geq 3 \cdot \frac{xy+yz+zx}{x+y+z}.$$

(Walther Janous, Crux Mathematicorum)

Solution. We have

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{a}{b+c}(y+z) + \sum_{cyc} (y+z) &= \left(\sum_{cyc} a \right) \left(\sum_{cyc} \frac{y+z}{b+c} \right) = \frac{1}{2} \left[\sum_{cyc} (b+c) \right] \left(\sum_{cyc} \frac{y+z}{b+c} \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\sum_{cyc} \sqrt{y+z} \right)^2. \end{aligned}$$

We will show that

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{cyc} \sqrt{y+z} \right)^2 \geq \frac{3 \sum_{cyc} yz}{\sum_{cyc} x} + 2 \sum_{cyc} x \quad (1)$$

from which our result will follow.

(1) is equivalent to

$$\left[\sum_{cyc} \left(x + \sqrt{x^2 + xy + yz + zx} \right) \right] \left(\sum_{cyc} x \right) \geq 3 \sum_{cyc} yz + 2 \left(\sum_{cyc} x \right)^2.$$

Since

$$\sum_{cyc} \sqrt{x^2 + (xy + yz + zx)} \geq \sqrt{\left(\sum_{cyc} x \right)^2 + 9 \sum_{cyc} yz}.$$

Hence, it is enough to show that

$$\left(\sum_{cyc} x \right) \sqrt{\left(\sum_{cyc} x \right)^2 + 9 \sum_{cyc} yz} \geq 3 \sum_{cyc} yz + 2 \left(\sum_{cyc} x \right)^2$$

which becomes obvious when we square both sides. ■

We will now take a look at most used trick in past year constest problems. It is a direct variant of CBS inequality:

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{b_k} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2}{\sum_{k=1}^n b_k},$$

for all real numbers a_k and positive numbers b_k ($k = 1, 2, \dots, n$).

An easy application of this trick is the following problem given at the Tournament of The Towns competition.

Example 7. Prove that for all positive real numbers a, b, c , we have the following inequality

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}.$$

Solution. If we write the *RHS* as $\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)}$, we will know what we have to do

$$\sum_{cyc} \frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} = \sum_{cyc} \frac{(a^2)^2}{a(a^2 + ab + b^2)} \geq \frac{\left(\sum_{cyc} a^2 \right)^2}{\sum_{cyc} a(a^2 + ab + b^2)}.$$

So, we will be able to prove the inequality if $\sum_{cyc} a(a^2 + ab + b^2) \leq (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$, which is in fact verified with equality occur. ■

There are cases when it is impossible to find a_i and b_i . Let us discuss some problems in which it is not easy at all to use the trick.

Example 8. Prove that for all positive real numbers a, b, c , we have the inequality

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2} + \frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2} \geq \frac{3}{5}.$$

(Japan, 1997)

Solution. The most natural way would be:

$$\sum_{cyc} \frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2} = \sum_{cyc} \frac{\left(\frac{b+c}{a} - 1\right)^2}{\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 + 1} \geq \frac{\left(\sum_{cyc} \frac{b+c}{a} - 3\right)^2}{\sum_{cyc} \left(\frac{b+c}{a}\right)^2 + 3}$$

because this way we obtain a nice inequality in three variables, whose properties are well-known. Thus, we have to show that if $x = \frac{b+c}{a}, y = \frac{c+a}{b}, z = \frac{a+b}{c}$, then

$$(x+y+z-3)^2 \geq \frac{3}{5}(x^2+y^2+z^2+3),$$

which is equivalent to

$$\left(\sum_{cyc} x\right)^2 - 15 \sum_{cyc} x + 3 \sum_{cyc} xy + 18 \geq 0.$$

Unfortunately, we cannot use directly the fact that $xy + yz + zx \geq 12$. So, we should look for some thing like $xy + yz + zx \geq k(x + y + z)$. The best would be $k = 2$ (so as to have an equality when $x = y = z = 2$). Indeed, after some computations this can be written as

$$\sum_{cyc} a^3 + 3abc \geq \sum_{cyc} ab(a+b),$$

which is *Schur* inequality. Hence, we can write:

$$\left(\sum_{cyc} x\right)^2 - 15 \sum_{cyc} x + 3 \sum_{cyc} xy + 18 \geq \left(\sum_{cyc} x\right)^2 - 9 \sum_{cyc} x + 18 \geq 0,$$

the last one being obvious since $x + y + z \geq 6$. ■

At IMO 2001, problem 2 was a challenge for the contestants. Here we suggest an approach, which leads to a nice generalization.

Example 9. Given positive real number $k \geq 8$. Show that for positive real numbers a, b, c , we have

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + kbc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + kca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + kab}} \geq \frac{3}{\sqrt{k+1}}.$$

(Generalization of IMO 2001)

Solution. We have, by *CBS* inequality

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a^2 + kbc}}\right) \left(\sum_{cyc} a\sqrt{a^2 + kbc}\right) \geq \left(\sum_{cyc} a\right)^2.$$

Now, apply CBS inequality again for the second sum, we have

$$\left(\sum_{cyc} a \sqrt{a^2 + kbc} \right)^2 = \left(\sum_{cyc} \sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3 + kabc} \right) \leq \left(\sum_{cyc} a \right) \left[\sum_{cyc} (a^3 + kabc) \right].$$

All we have to do now is to show that

$$(k+1) \left(\sum_{cyc} a \right)^3 \geq 9 \sum_{cyc} (a^3 + kabc).$$

But it is equivalent to

$$(k-8)(a^3 + b^3 + c^3) + 3(k+1)(a+b)(b+c)(c+a) \geq 27kabc,$$

which is obvious by *AM – GM* inequality. ■

Practice problems

1. Given $x, y, z > 1$ such that $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Prove that

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

(Iran, 1998)

2. Prove that if $a_1, a_2, \dots, a_6 \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3} \right]$, then we have

$$\frac{a_1 - a_2}{a_2 + a_3} + \frac{a_2 - a_3}{a_3 + a_4} + \frac{a_3 - a_4}{a_4 + a_5} + \frac{a_4 - a_5}{a_5 + a_6} + \frac{a_5 - a_6}{a_6 + a_1} + \frac{a_6 - a_1}{a_1 + a_2} \geq 0.$$

(Vasile Cirtoaje)

3. Given $x \in [0, 1]$. Show that

$$x \left(13\sqrt{1-x^2} + 9\sqrt{1+x^2} \right) \leq 16.$$

(Olympiad of 30 April of Vietnam, 1996)

4. Prove that for $2n$ arbitrary real numbers $a_1, a_2, \dots, a_n$ and $x_1, x_2, \dots, x_n$, we have

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)} \geq \frac{2}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i \right).$$

When does equality hold?

(Kvant 1989)

5. Given real numbers a, b, c, x, y, z such that $(a+b+c)(x+y+z) = 3$ and $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 4$. Prove that

$$ax + by + cz \geq 0.$$

(Mathlinks contest 2005)

Giúp bạn giải toán

Hiện tại chưa có bài ở mục này.

Danh mục tài liệu tham khảo

- [1] Titu Andreescu, Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu, *Old and New Inequalities*, Vol. 1, GIL publishing house, 2004.
- [2] Võ Quốc Bá Cẩn, Cosmin Pohoata, *Old and New Inequalities*, Vol. 2, GIL publishing house, 2008.
- [3] Iurie Boreico, Võ Quốc Bá Cẩn, Mircea Lascu, Yong Su, Bin Xiong, *Introduction to Inequalities*, GIL publishing house, 2009.
- [4] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), *Bất đẳng thức và một số vấn đề liên quan*, chuyên đề bồi dưỡng giáo viên THPT chuyên, hè 2005.
- [5] Vasile Cirtoaje, *Algebraic Inequalities – Old and New Methods*, GIL publishing house, 2006.
- [6] Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo bất đẳng thức*, nhà xuất bản Tri Thức, 2006.
- [7] Hojoo Lee, *Topics in Inequalities*, 2006.
- [8] Thomas Mildorf, *Olympiad Inequalities*, 2005.
- [9] Tạp chí *Crux Mathematicorum*.
- [10] Tạp chí *toán học Mathvn*.
- [11] Tạp chí *toán học và tuổi trẻ*.
- [12] Tạp chí *Recreatii Matematice* (tiếng Romania).
- [13] Các tài liệu olympic toán online.