SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH PHÚ YÊN

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HPCJ SINH GIỎI THCS CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2020 – 2021
Môn thi: TOÁN
Ngày thi: 30/3/2021
Thời gian làm bài: 150 phút (*không kể thời gian giao đề*)

Câu 1. (*4,00 điểm*)

a) Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}=1.$

b) Biết đa thức $x^4+4x^3+6px^2+4qx+r$ chia hết cho đa thức $x^3+3x^2+9x+3.$ Tính giá trị biểu thức $(p+q)r.$

Câu 2. (3,5 *điểm*)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{xy}{2}+\dfrac{5}{2x+y-xy}=5 \\ 2x+y-xy+\dfrac{10}{xy}=4 \end{cases}.$

Câu 3. (3,*00 điểm*) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2+5y^2=13.$

Câu 4. (3,*00 điểm*) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B và tại C cắt nhau tại $D.$ Gọi E,F lần lượt là giao điểm của DA với (O) và DA với BC; H là giao điểm của OD với $BC.$

a) Chứng minh tam giác OAH đồng dạng với tam giác $ODA.$

b) Đường thẳng qua A song song với BC cắt (O) tại K (khác A). Chứng minh E,H,K thẳng hàng.

Câu 5. (3,*00 điểm*) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=x^3+y^3 \text{ với } x\neq 0, y\neq 0, \frac{1}{xy}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}.$$

Câu 6. (*3,00 điểm*) Cho tam giác ABC nhọn, có H là trực tâm, (I) là đường tròn nội tiếp. Gọi D,E,F lần lượt là tiếp điểm của (I) với BC,CA,AB. Gọi K là hình chiếu vuông góc của D trên $EF.$

a) Chứng minh rằng $\widehat{FKB}=\widehat{EKC}.$

b) Gọi P,Q lần lượt là giao điểm của HB,HC với $EF.$
Chứng minh đẳng thức $EK.FP=FK.EQ.$

c) Chứng minh rằng KD là phân giác của $\widehat{HKI}.$

--------**Hết**--------

Thí sinh không sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……………………………..; Số báo danh:…………………………………

Chữ kí giám thị 1:……………………………..; Chữ kí giám thị 2:……………………

LỜI GIẢI

Câu 1. (*4,00 điểm*)

a) Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}=1.$

b) Biết đa thức $x^4+4x^3+6px^2+4qx+r$ chia hết cho đa thức $x^3+3x^2+9x+3.$ Tính giá trị biểu thức $(p+q)r.$

Lời giải.

a) Đặt $a=\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}},b=\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$, suy ra $a^3+b^3=10$ và $ab=-3.$

Ta có

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)=10-9(a+b)$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^3+9(a+b)-10=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-1)\left((a+b)^2+(a+b)+10\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=1 \\ (a+b)^2+(a+b)+10=0(loai) \end{array}\right.$$

Do đó $a+b=1$ hay $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}=1.$

b) Do đa thức $x^4+4x^3+6px^2+4qx+r$ chia hết cho đa thức x^3+3x^2+9x+3 nên tồn tại a,b sao cho

$$x^4+4x^3+6px^2+4qx+r=(x^3+3x^2+9x+3)(ax+b)$$

$$\Leftrightarrow x^4+4x^3+6px^2+4qx+r=ax^4+(b+3a)x^2+(3b+9a)x^2+(3a+9b)x+3b$$

Đồng nhất hệ số ta được

$$\begin{cases} a=1 \\ b+3a=4 \\ 3b+9a=6p \\ 3a+9b=4q \\ 3b=r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ p=2 \\ q=3 \\ r=3 \end{cases}$$

Do đó $(p+q)r=15.$

Câu 2. (3,5 *điểm*)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{xy}{2}+\dfrac{5}{2x+y-xy}=5 \\ 2x+y-xy+\dfrac{10}{xy}=4 \end{cases}.$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x+y-xy\neq 0 \\ xy\neq 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a = 2x + y - xy\,(a \neq 0) \\ b = \dfrac{xy}{2}\,(b \neq 0) \end{cases}$

Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{a} + b = 5 \\ a + \dfrac{5}{b} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 5a - 5 \\ ab = 4b - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 5a - 5 \\ a = \dfrac{4b}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{4b}{5} \\ 4b^2 - 20b + 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{cases} 2x + y - xy = 2 \\ xy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 7 \\ xy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - 2x \\ 2x^2 - 7x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - 2x \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(1,5)$ và $\left(\dfrac{5}{2},2\right)$.

Câu 3. (3,*00 điểm*) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2 + 5y^2 = 13$.

Lời giải.

Ta có $2x^2 + 5y^2 = 13$, suy ra $5y^2 \leq 13 \Rightarrow y^2 \leq 1$ và y^2 là số nguyên lẻ.

Do vậy $y^2 = 1 \Leftrightarrow y = 1 \vee y = -1$.

Do $y^2 = 1$ nên $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$.

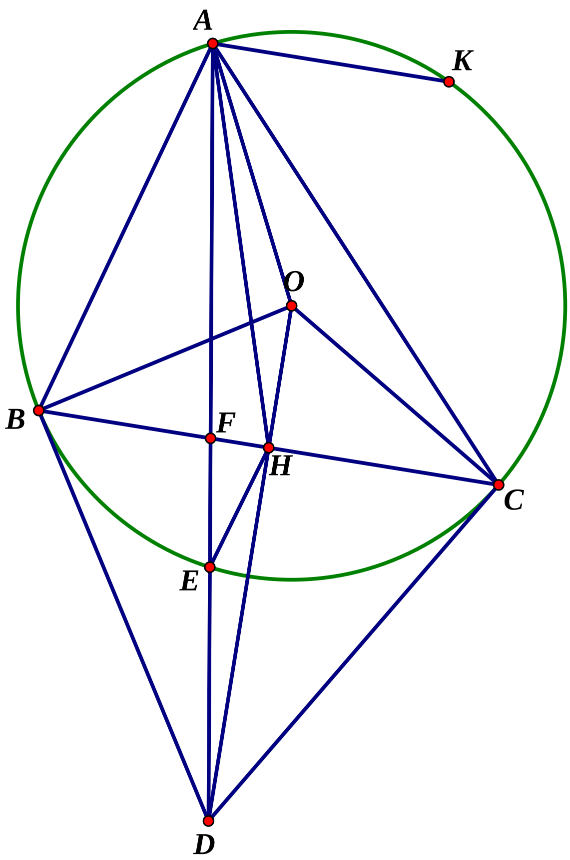
Vậy nghiệm nguyên (x,y) của phương trình là $(-1,-2);(-1,2);(1,-2);(1,2)$.

Câu 4. (3,*00 điểm*) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B và tại C cắt nhau tại D. Gọi E,F lần lượt là giao điểm của DA với (O) và DA với BC; H là giao điểm của OD với BC.

a) Chứng minh tam giác OAH đồng dạng với tam giác ODA.

b) Đường thẳng qua A song song với BC cắt (O) tại K (khác A). Chứng minh E,H,K thẳng hàng.

Lời giải.



a) Do DB, DC lần lượt là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $OD \perp BC$ và $\widehat{OBD} = \widehat{OCD} = 90^0$.

Xét tam giác OBD vuông tại B có BH là đường cao nên $OH.OD = OB^2 = OA^2$,

$$\text{suy ra } \frac{OA}{OD} = \frac{OH}{OA}$$

Xét tam giác OAH và tam giác ODA có $\frac{OA}{OD} = \frac{OH}{OA}$ và $\widehat{AOH}$ chung

Suy ra $\Delta OAH \sim \Delta ODA$ (c.g.c)

b) Do DB, DC lần lượt là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $DE.DA = DB^2$.

Xét tam giác OBD vuông tại B có BH là đường cao nên $DH.DO = DB^2$.

Suy ra $DE.DA = DH.DO$, dẫn đến tứ giác $AOHE$ nội tiếp, suy ra $\widehat{DHE} = \widehat{OAD}$.

Do $\Delta OAH \sim \Delta ODA$ nên $\widehat{OAD} = \widehat{OHA}$.

Do đó $\widehat{DHE} = \widehat{OHA}$.

Ta có $OH \perp BC$ và $AK // BC$, suy ra $OH \perp AK$.

Do ΔOAK cân tại O có $OH \perp AK$ nên HO là phân giác trong góc $\widehat{AOK}$ hay $\widehat{OHA} = \widehat{OHK}$, suy ra $\widehat{DHE} = \widehat{OHK}$.

Do D,H,O thẳng hàng nên $\widehat{DHE}+\widehat{EHO}=180^0$ nên $\widehat{OHK}+\widehat{EHO}=180^0=\widehat{EHK}$.
Vậy ba điểm E,H,K thẳng hàng.

Câu 5. (3,*00 điểm*) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=x^3+y^3 \text{ với } x\neq 0, y\neq 0, \frac{1}{xy}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}.$$

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $\frac{1}{xy}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}\Rightarrow x+y=x^2-xy+y^2$.

Khi đó $x+y=x^2-xy+y^2=\frac{1}{4}(x+y)^2+\frac{3}{4}(x-y)^2\geq\frac{1}{4}(x+y)^2\Leftrightarrow 0\leq x+y\leq 4$

Ta có $P=x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=(x+y)^2\leq 16$.

Vậy giá trị lớn nhất của $P=16$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=2$.

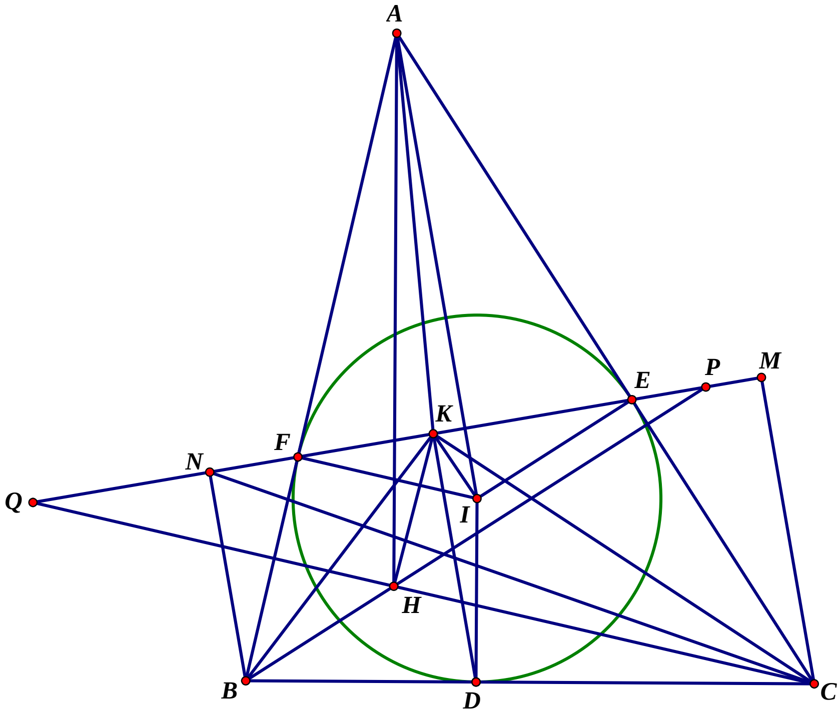
Câu 6. (3,*00 điểm*) Cho tam giác ABC nhọn, có H là trực tâm, (I) là đường tròn nội tiếp. Gọi D,E,F lần lượt là tiếp điểm của (I) với BC,CA,AB. Gọi K là hình chiếu vuông góc của D trên EF.

a) Chứng minh rằng $\widehat{FKB}=\widehat{EKC}$.

b) Gọi P,Q lần lượt là giao điểm của HB,HC với EF.
Chứng minh đẳng thức $EK.FP=FK.EQ$.

c) Chứng minh rằng KD là phân giác của $\widehat{HKI}$.

Lời giải.



a) Kẻ $BN \perp EF, CM \perp EF$

Do ΔAEF cân tại A nên $\widehat{AEF} = \widehat{AFE}$, suy ra $\widehat{BFN} = \widehat{CEM}$

$\Delta BFN \sim \Delta CEM\,(g.g)$, suy ra $\dfrac{BF}{CE} = \dfrac{BN}{CM} = \dfrac{BD}{CD}$

Hình thang $BNMC$ có $BN\,//\,DK\,//\,CM$ nên $\dfrac{KN}{KM} = \dfrac{DB}{DC}$

Do đó $\dfrac{KN}{KM} = \dfrac{NB}{MC}$, dẫn đến $\Delta BKN \sim \Delta CKM\,(c.g.c)$, suy ra $\widehat{FKB} = \widehat{EKC}$.

b) Ta có $\Delta BKF \sim \Delta CKE\,(g.g)$, suy ra $\dfrac{EK}{FK} = \dfrac{CE}{BF} = \dfrac{KE}{KF}$ $\quad(1)$

Ta có $\Delta FBP \sim \Delta ECQ\,(g.g)$, suy ra $\dfrac{CE}{BF} = \dfrac{EQ}{FB}$ $\quad(2)$

Từ $(1)\,\&\,(2)$, ta có $\dfrac{EK}{FK} = \dfrac{EQ}{FB} \Leftrightarrow EK.FB = FK.EQ$.

c) Ta có $\Delta QHP \sim \Delta FIE\,(g.g)$, suy ra $\dfrac{EF}{IE} = \dfrac{PQ}{HP} = \dfrac{PQ}{HQ}$ $\quad(3)$

Từ $(1)\,\&\,(2)$, ta có $\dfrac{KE}{EQ} = \dfrac{KF}{FP} \Rightarrow \dfrac{KE}{KQ} = \dfrac{KF}{KP} \Rightarrow \dfrac{KE}{KF} = \dfrac{KQ}{KP} \Rightarrow \dfrac{KE}{EF} = \dfrac{KQ}{PQ}$ $\quad(4)$

Từ $(3)\,\&\,(4)$, ta có $\dfrac{KE}{IE} = \dfrac{KQ}{HQ} \Leftrightarrow \dfrac{KE}{KQ} = \dfrac{IE}{HQ} \Rightarrow \Delta KEI \sim \Delta KQH\,(c.g.c)$

Suy ra $\widehat{QKH} = \widehat{EKI} \Rightarrow \widehat{HKD} = \widehat{IKD}$, do vậy KD là phân giác của $\widehat{HKI}$.