

Bài 1: (2,0 điểm)

Cho biểu thức: $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$.

- Rút gọn P.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P.
- Xét biểu thức: $Q = \frac{2\sqrt{x}}{P}$, chứng tỏ $0 < Q < 2$.

Bài 2: (2,0 điểm)

- Tìm x, y, z, biết: $4x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy - 2yz + 2y - 8z + 10 \leq 0$.
- Tìm số tự nhiên n sao cho $A = n^2 + n + 6$ là số chính phương

Bài 3: (2,25 điểm)

- Giải phương trình: $\frac{36}{\sqrt{x-2}} + \frac{4}{\sqrt{y-1}} = 28 - 4\sqrt{x-2} - \sqrt{y-1}$.

- Cho đường thẳng $y = (m-1)x + 2$ (d).

- Chứng minh rằng đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m.
- Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) có giá trị lớn nhất.

Bài 4: (3,0 điểm)

Cho đường tròn (O; R). AB và CD là hai đường kính cố định của (O) vuông góc với nhau. M là một điểm thuộc cung nhỏ AC của (O). K và H lần lượt là hình chiếu của M trên CD và AB.

- Tính $\sin^2 \angle MBA + \sin^2 \angle MAB + \sin^2 \angle MCD + \sin^2 \angle MDC$
- Chứng minh: $OK^2 = AH(2R - AH)$
- Tìm vị trí điểm H để giá trị của: $P = MA \cdot MB \cdot MC \cdot MD$ lớn nhất.

Bài 5: (0,75 điểm)

Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2 + 3y^2 + 4x = 19$

----- **HẾT** -----

(Đề thi gồm có ... trang)

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:

Bài 1: (2.0 điểm)

Ý/Phần	Đáp án	Điểm
a)	Tìm đúng điều kiện : Đk : $x > 0; x \neq 1$.	0.25
	$P = \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x}-1)}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} + \frac{2(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}$	0.25
	$= \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - (2\sqrt{x}+1) + 2(\sqrt{x}+1)$	
	$= x - \sqrt{x} + 1$	0.25
	Vậy $P = x - \sqrt{x} + 1$, với $x > 0; x \neq 1$.	0.25
b)	$P = x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$	0.25
	dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{4}$, thỏa mãn đk.	
	Vậy GTNN của P là $\frac{3}{4}$ khi $x = \frac{1}{4}$.	0.25
c)	a. Với $x > 0; x \neq 1$ thì $Q = \frac{2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} > 0$. (1)	0.25
	Xét $2 - \frac{2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{2(\sqrt{x}-1)^2}{x - \sqrt{x} + 1} \geq 0$	
	Dấu bằng không xảy ra vì điều kiện $x \neq 1$.suy ra $Q < 2$.(2)	
	Từ (1) và (2) suy ra $0 < Q < 2$.	0.25

Bài 2: (2,0 điểm)

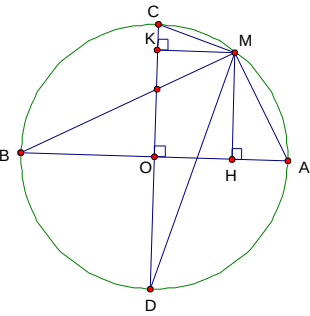
Ý/Phần	Đáp án	Điểm
a)	Phân tích được thành $(2x - y)^2 + (y - z + 1)^2 + (z - 3)^2 \leq 0$ (1)	0.5
	Vì $(2x - y)^2 \geq 0; (y - z + 1)^2 \geq 0; (z - 3)^2 \geq 0$ với mọi x, y, z	0.25
	nên từ (1) suy ra $x = 1; y = 2; z = 3$.	0.25
b)	$A = n^2 + n + 6$ là số chính phương nên A có dạng	
	$A = n^2 + n + 6 = k^2 \quad (k \in \mathbb{N}^*)$	0.25
	$\Leftrightarrow 4n^2 + 4n + 24 = 4k^2 \Leftrightarrow (2k)^2 - (2n+1)^2 = 23$	
	$\Leftrightarrow (2k + 2n + 1)(2k - 2n - 1) = 23 \Leftrightarrow \begin{cases} 2k + 2n + 1 = 23 \\ 2k - 2n - 1 = 1 \end{cases}$	0.25
	(Vì 23 là số nguyên tố và $2k + 2n + 1 > 2k - 2n - 1$)	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2k + 2n + 1 = 23 \\ 2k - 2n - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 6 \\ n = 5 \end{cases}$	
	Vậy với $n = 5$ thì A là số chính phương	0.25

Bài 3: (2,25 điểm)

Ý/Phần	Đáp án	Điểm
--------	--------	------

a)	: đk : $x > 2, y > 1$	0.25
	Biến đổi pt về dạng $4.(\frac{9}{\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-2}) + (\frac{4}{\sqrt{y-1}} + \sqrt{y-1}) = 28$	0.25
	Áp dụng BĐT cô si với hai số dương VT ≥ 28 (2)	0.25
	Để có (1) thì dấu bằng xảy ra trong (2) Khi $\frac{9}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-2}$ và $\frac{4}{\sqrt{y-1}} = \sqrt{y-1}$	
	Từ đó tìm được $x=11$ và $y=5$ (thỏa mãn)2.	0.25
b)	1. Điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua là A(0; 2)	0.5
	2. Điểm cắt trục tung A(0; 2) $\Rightarrow OA = 2$	
	Điểm cắt trục hoành B ($\frac{-2}{m-1}$; 0) $\Rightarrow OB = \left \frac{-2}{m-1} \right = \frac{2}{ m-1 }$	0.25
	ΔAOB vuông ở O, kẻ $OH \perp AB$. Áp dụng hệ thức: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$	
	$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow OH^2 = \frac{OA^2 \cdot OB^2}{OA^2 + OB^2}$	
	$OH^2 = \frac{16}{(m-1)^2} : \frac{4(m-1)^2 + 4}{(m-1)^2} = \frac{4}{(m-1)^2 + 1}$	0.25
	OH đạt GTLN khi và chỉ khi OH^2 đạt GTLN mà ta có $\Leftrightarrow (m-1)^2 + 1 \geq 1$ đạt GTNN là 1 khi $m = 1$	
	Vậy $\max OH = 2 \Leftrightarrow m = 1$	0.25

Bài 4: (3,0điểm)

Ý/Phần	Đáp án	Điểm
a)		0,25
	Vì M thuộc (O) nên các tam giác: BMA và CMD vuông tại M nên:	0,25
	$\sin^2 \angle MBA + \sin^2 \angle MAB + \sin^2 \angle MCD + \sin^2 \angle MDC$	0,25
	$= (\sin^2 \angle MBA + \cos^2 \angle MBA) + (\sin^2 \angle MCD + \cos^2 \angle MCD)$	0,25
	$= 1 + 1 = 2$	0,25
b)	Chứng minh: $OK^2 = AH(2R - AH)$	
	Thật vậy: KOHM là hình chữ nhật nên: $OK = MH$	0,25

	Mà $MH^2 = HA.HB$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông MAB có MH đường cao)	0,25
	và $BH = AB - AH = 2R - AH$	0,25
	Suy ra: $OK^2 = MH^2 = AH(2R - AH)$	0,25
c)	$P = MA.MB.MC.MD = AB.MH.CD.MK = 4R^2.OH.MH$ (Vì $MK = OH$)	
	Mà $OH.MH \leq \frac{OH^2 + MH^2}{2} = \frac{OM^2}{2} = \frac{R^2}{2}$ (Pitago)	0,25
	Vậy $P \leq 4R^2 \cdot \frac{R^2}{2} = 2R^4$. đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow MH = OH$	0,25
	$\Leftrightarrow OH = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	0,25

Bài 5: (0,75 điểm)

Ý/Phần	Đáp án	Điểm
	$\Leftrightarrow 2(x^2 + 2x + 1) = 3(7 - y^2)$	
	$\Leftrightarrow 2(x+1)^2 = 3(7 - y^2)$	
	$\Leftrightarrow 3(7 - y^2):2$	0,25
	$\Leftrightarrow y$ là số nguyên lẻ	
	Mà $2(x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow (7 - y^2) \geq 0 \Leftrightarrow y^2 = 1$	0,25
	Thay $y^2 = 1$ vào tìm được $x = 2, x = -4$	
	Thử lại ... và trả lời .Có các nghiệm $(2,1); (2,-1); (-4,1); (-4,-1)$	0,25

(Học sinh làm cách khác cho điểm tối đa)