

PHẦN D. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

- Câu 1.** Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1), D(-2;1;-1)$.
- a) Đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) có vector chỉ phương là $n=(1;2;-2)$.
- b) Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng 45° .
- c) Góc (làm tròn đến hàng đơn vị của độ) giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) bằng 55° .
- d) Chiều cao của hình chóp $A.BCD$ là AH với H thuộc mặt phẳng (BCD) . Toạ độ của điểm H là $H\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

a) Sai.

Mặt phẳng (BCD) có cặp vector chỉ phương là $\overrightarrow{BC}=(0;-1;1), \overrightarrow{BD}=(-2;0;-1)$ nên có vector pháp tuyến là $n=(1;-2;-2)$.

Đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) có vector chỉ phương là $n=(1;-2;-2)$.

b) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;1;0), \overrightarrow{CD}=(-2;1;-2)$.

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 45^\circ.$$

c) Đúng.

Mặt phẳng (ABC) có phương trình là $\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0$.

$$\cos((ABC), (BCD)) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow ((ABC), (BCD)) \approx 55^\circ.$$

d) Đúng.

$$AH : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t, (BCD) : x - 2y - 2z + 2 = 0 \\ z = -2t \end{cases}$$

Ta có

$$\text{Suy ra } H\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

- Câu 2.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3), B(0;1;-6)$ và mặt phẳng $(P): 4x - y + 2z + 13 = 0$.

- a) Đường thẳng AB và mặt phẳng (P) cắt nhau tại B .

b) Một vector chỉ phương của đường thẳng AB là $\vec{a} = (1; 1; 9)$.

c) Góc (làm tròn đến hàng đơn vị của độ) giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (P) là 30° .

d) Đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------	---------	---------	---------

a) Đúng.

Ta có $A \notin (P), B \in (P)$ nên đường thẳng AB và mặt phẳng (P) cắt nhau tại B .

b) Đúng.

Ta có $\vec{AB} = (-1; -1; -9)$ nên đường thẳng AB có một vector chỉ phương là $\vec{a} = (1; 1; 9)$.

c) Đúng.

Ta có $\sin(AB, (P)) = \sqrt{\frac{21}{83}}$.

Vậy góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (P) (làm tròn đến hàng đơn vị của độ) là 30° .

d) Đúng.

Đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) nhận $\vec{u} = (4; -1; 2)$ làm vector chỉ phương nên có phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 0; 3), B(0; 1; -1), C(3; -2; 5)$.

a) Đường thẳng đi qua điểm B và trung điểm I của đoạn thẳng AC có vector chỉ phương là $\vec{BI} = (2; -2; 3)$.

b) Đường thẳng BC có một vector chỉ phương là $\vec{a} = (1; -1; 2)$.

c) Góc giữa hai đường thẳng AB và AC là góc A của tam giác ABC .

d) Tọa độ của điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC là $H\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) Sai.

Ta có I là trung điểm AC nên $I(2; -1; 4)$.

Đường thẳng đi qua B và I có một vector chỉ phương là $\vec{BI} = (2; -2; 5)$.

b) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (3; -3; 6)$ nên đường thẳng BC có một vector chỉ phương là $a = (1; -1; 2)$.

c) Sai.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; -4)$, $\overrightarrow{AC} = (2; -2; 2)$.

$\cos A = \frac{-2 - 2 - 8}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{12}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$. Suy ra góc A của tam giác ABC tù, mà góc giữa hai đường thẳng AB và AC nhọn.

d) Đúng.

Ta có $H \in BC \Rightarrow H(t; 1-t; -1+2t)$.

$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow t = \frac{5}{3}$. Vậy $H\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

Câu 4. Cho hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$ và $\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=3 \\ z=-2+t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

a) Hai đường thẳng d và Δ vuông góc với nhau.

b) Hai đường thẳng d và Δ chéo nhau.

c) Góc giữa hai đường thẳng d và Δ là 90° .

d) Mặt phẳng chứa d và song song với Δ có vector pháp tuyến là $n = (1; 2; -1)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
----------------	----------------	----------------	----------------

a) Đúng.

Hai đường thẳng d và Δ có vector chỉ phương lần lượt là $a_1 = (1; -1; -1)$ và $a_2 = (1; 0; 1)$. Ta có $a_1 \cdot a_2 = 0$ nên hai đường thẳng d và Δ vuông góc với nhau.

b) Đúng.

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=2-t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} t=2+t' \\ 3=1-t' \\ -2+t=2-t' \end{cases}$.

Hệ trên vô nghiệm nên hai đường thẳng d và Δ chéo nhau.

c) Đúng.

Hai đường thẳng d và Δ vuông góc với nhau nên góc giữa hai đường thẳng d và Δ là 90° .

d) Đúng.

Mặt phẳng chứa d và song song với Δ có cặp vector chỉ phương $a_1 = (1; -1; -1)$ và $a_2 = (1; 0; 1)$ nên có vector pháp tuyến là $n = (1; 2; -1)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2024}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2025}{-2}$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 1 = 0$. Xét các vector $u = (2; 1; -2), n = (2; 2; -1)$.

a) u là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ .

b) n là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

c) $\cos(\Delta, (P)) = \frac{8}{9}$

d) Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng khoảng 63° (làm tròn đến hàng đơn vị của độ).

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
----------------	----------------	---------------	----------------

Ta có: u là một vector chỉ phương của đường thẳng và n là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

$$\sin(\Delta, (P)) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{9}$$

Khi đó,

$$\cos(\Delta, (P)) = \sqrt{1 - \sin^2(\Delta, (P))} = \sqrt{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{9}$$

Suy ra

Vậy góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng khoảng 63° (làm tròn đến hàng đơn vị của độ).

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+3}{2}, \Delta_2: \frac{x+4}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{-1}$.

Xét các vector $u_1 = (1; -1; 2)$ và $u_2 = (2; 1; -1)$.

a) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(0; 3; -3)$ và có $u_1 = (1; -1; 2)$ là một vector chỉ phương.

b) Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(-4; -2; 4)$ và có $u_2 = (2; 1; -1)$ là một vector chỉ phương.

c) $[u_1, u_2] = (1; -5; -3)$.

d) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(0;3;-3)$ và có $u_1=(1;-1;2)$ là một vector chỉ phương. Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(-4;-2;4)$ và có $u_2=(2;1;-1)$ là một vector chỉ phương.

Ta có: $[u_1, u_2] = (-1; 5; 3)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (-4; -5; 7)$

và $[u_1, u_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0$. Suy ra hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 không chéo nhau.

Câu 7. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng:

$$\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-2} \text{ và } \Delta_2: \frac{x-4}{-1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-6}{2}.$$

a) Vector có toạ độ $(1;2;3)$ là một vector chỉ phương của Δ_1 .

b) Vector có toạ độ $(4;5;6)$ là một vector chỉ phương của Δ_2 .

c) Côsin của góc giữa hai vector $u_1=(2;1;-2)$ và $u_2=(-1;-2;2)$ bằng $-\frac{8}{9}$.

d) Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ) bằng 132° .

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
--------	--------	---------	--------

$u_1=(2;1;-2)$ là một vector chỉ phương của Δ_1 , $u_2=(-1;-2;2)$ là một vector chỉ phương của Δ_2 .

- Côsin của góc giữa hai vector $u_1=(2;1;-2), u_2=(-1;-2;2)$ là
 $\cos(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) = \frac{\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_1}| |\overrightarrow{u_2}|} = \frac{-8}{3 \cdot 3} = -\frac{8}{9}$ suy ra $(u_1, u_2) \approx 152^\circ$

Vậy $(\Delta_1, \Delta_2) \approx 180^\circ - 152^\circ \approx 28^\circ$.

Câu 8. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{5} = \frac{y-1}{12} = \frac{z-6}{-13}$ và mặt phẳng $(P): x-2y-2z-2025=0$.

a) Vector có toạ độ $(2;1;6)$ là một vector chỉ phương của Δ .

b) Vector có toạ độ $(1;2;-2)$ là một vector pháp tuyến của (P) .

c) Côsin của góc giữa hai vector $u=(5;12;-13)$ và $n=(1;-2;-2)$ bằng $\frac{7}{39\sqrt{2}}$.

d) Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) (làm tròn đến hàng đơn vị của độ) bằng 83° .

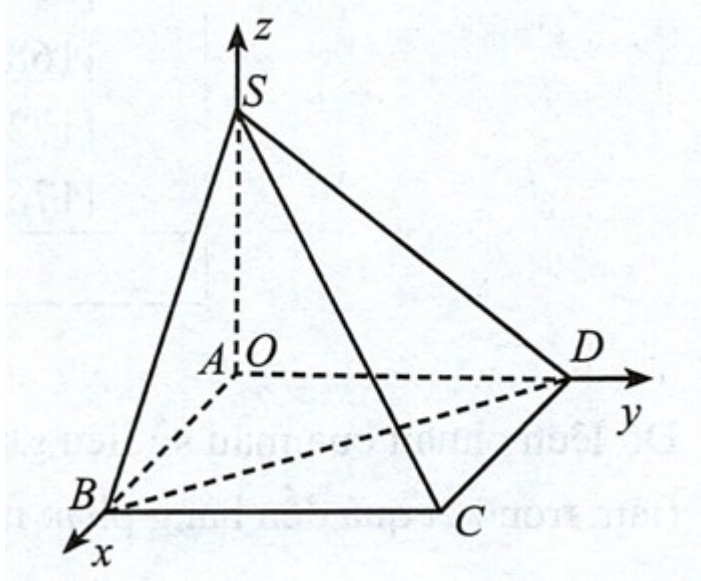
Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

Vector chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u} = (5; 12; -13)$, vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (1; -2; -2)$.

- Cosin của góc giữa hai vector $\vec{u} = (5; 12; -13)$ và $\vec{n} = (1; -2; -2)$ là $\cos(\vec{u}, \vec{n}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{7}{13\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{7}{39\sqrt{2}}$. Khi đó, góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) là $\sin(\Delta, (P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{7}{39\sqrt{2}} \Rightarrow (\Delta, (P)) \approx 7^\circ$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có $S(0; 0; 3,5)$, $ABCD$ là hình chữ nhật với $A(0; 0; 0)$, $B(4; 0; 0)$, $D(0; 10; 0)$ (Hình).



a) Tọa độ của điểm C là $(4; 10; 0)$.

b) Phương trình mặt phẳng (SBD) là

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{10} - \frac{z}{3,5} = 1$$

c) Tọa độ của vector $\vec{SC}$ là $(4; 10; -3,5)$.

d) Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SBD) (làm tròn đến hàng đơn vị của độ) là 20° .

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

Vì $\vec{AD} = \vec{BC}$ nên $C(4; 10; 0)$ và $\vec{SC} = (4; 10; -3,5)$. Phương trình mặt phẳng (SBD) là:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{10} + \frac{z}{3,5} = 1 \Leftrightarrow 35x + 14y + 40z - 140 = 0$$

Suy ra $\vec{n} = (35; 14; 40)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (SBD) .

Khi đó,

$$\sin(SC, (SBD)) = \frac{|\vec{SC} \cdot \vec{n}|}{|\vec{SC}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|4 \cdot 35 + 10 \cdot 14 + (-3,5) \cdot 40|}{\sqrt{4^2 + 10^2 + (-3,5)^2} \cdot \sqrt{35^2 + 14^2 + 40^2}} = \frac{280\sqrt{53}}{9063}.$$

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SBD) là khoảng 13° .

Câu 10. Cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}, \Delta_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{-2}$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 .

a) Vector $u_1 = (2; 1; 2)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ_1 .

b) Vector có tọa độ $(3; 4; 5)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ_2 .

c) $\cos \alpha = \frac{u_1 \cdot u_2}{|u_1| \cdot |u_2|}$ với u_1, u_2 lần lượt là vector chỉ phương của Δ_1, Δ_2 .

d) $\alpha \approx 64^\circ$ (làm tròn đến hàng đơn vị của độ).

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

Ta có: $u_1 = (2; 1; 2)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ_1 ; $u_2 = (-1; 2; -2)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ_2 .

Vì vector có tọa độ $(3; 4; 5)$ không cùng phương với vector $u_2 = (-1; 2; -2)$ nên vector đó không là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ_2 .

Ta có: $\cos \alpha = \frac{|u_1 \cdot u_2|}{|u_1| \cdot |u_2|} \neq \frac{u_1 \cdot u_2}{|u_1| \cdot |u_2|}$.

$$\cos \alpha = \frac{|u_1 \cdot u_2|}{|u_1| \cdot |u_2|} = \frac{|2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-2)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{9} \Rightarrow \alpha \approx 64^\circ.$$

Ngoài ra,

Đáp án: a) Đ, b) S, c) S, d) Đ.

Câu 11. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2024}{2} = \frac{y+2025}{3} = \frac{z+2026}{6}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z + 1 = 0$. Gọi α là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) .

a) Vector $u = (2024; 2025; 2026)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ .

b) Vector có tọa độ $(1; 2; 2)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

c) $\sin \alpha = \frac{|u \cdot n|}{|u| \cdot |n|}$ với u là một vector chỉ phương của đường thẳng d, n là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

d) $\alpha \approx 50^\circ$ (làm tròn đến hàng đơn vị của độ).

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

Ta có: $u = (2; 3; 6)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ , $n = (1; -2; -2)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

$$\sin \alpha = \frac{|u \cdot n|}{|u| \cdot |n|} = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 6 \cdot (-2)|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{16}{21}.$$

Suy ra $\alpha \approx 50^\circ$.

Câu 12. Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số:
$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + t \\ z = 5 - 2t \end{cases} \quad (t \text{ là tham số}).$$

a) Điểm $M(5; 3; 7)$ thuộc đường thẳng Δ

b) Điểm $N(8; 2; 9)$ thuộc đường thẳng Δ .

c) Cho $P(-1; 5; 4)$ phương trình tham số của đường thẳng Δ' , biết Δ' đi qua P và song song với

$$\Delta \text{ là } \begin{cases} x = -1 - 3t' \\ y = 5 + t' \\ z = 4 - 2t' \end{cases}$$

d) Điểm I là giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng $(P): x - y + z + 9 = 0$ có tung độ bằng 5

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Vì M thuộc Δ nên $M(2 - 3t; 4 + t; 5 - 2t)(t \in \mathbb{R})$.

Ta có: $2 - 3t = 5$, suy ra $t = -1$. Do đó $4 + t = 4 + (-1) = 3, 5 - 2t = 5 - 2(-1) = 7$. Vậy $M(5; 3; 7)$.

b) Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} 8 = 2 - 3t \\ 2 = 4 + t \\ 9 = 5 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow t = -2$$
. Suy ra tồn tại số thực t thỏa mãn hệ phương trình đó. Vậy điểm $N(8; 2; 9)$ thuộc đường thẳng Δ .

c) Do $u = (-3; 1; -2)$ là một vector chỉ phương của Δ và $\Delta // \Delta'$ nên $u = (-3; 1; -2)$ cũng là một vector chỉ phương của Δ' .

Phương trình tham số của đường thẳng Δ' là:
$$\begin{cases} x = -1 - 3t' \\ y = 5 + t' \\ z = 4 - 2t' \end{cases} \quad (t' \text{ là tham số}).$$

d) Vì I thuộc Δ nên $I(2-3a; 4+a; 5-2a) (a \in \mathbb{R})$. Mà I thuộc (P) nên $(2-3a) - (4+a) + (5-2a) + 9 = 0 \Leftrightarrow a = 2$. Vậy $I(-4; 6; 1)$.

Câu 13. Cho bốn điểm $A(0; 1; 1), B(-1; 0; 3), C(0; 0; 2)$ và $D(1; 1; -2)$.

a) $[AB, AC] = (1; 1; 1)$

b) Phương trình tham số của đường thẳng AB là:
$$\begin{cases} x = -t_1 \\ y = 1 - t_1 \\ z = 1 + 2t_1 \end{cases} \quad (t_1 \text{ là tham số}).$$

c) Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $x + y + z - 2 = 0$.

d) Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC) là: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------	---------	---------	---------

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; -1; 2), \overrightarrow{AC} = (0; -1; 1), [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1; 1; 1)$.

b) Phương trình tham số của đường thẳng AB là:
$$\begin{cases} x = -t_1 \\ y = 1 - t_1 \\ z = 1 + 2t_1 \end{cases} \quad (t_1 \text{ là tham số}).$$

c) Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $x + y + z - 2 = 0$.

d) Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC) là: $\frac{|1+1-2-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$$\Delta: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad \text{và điểm } M(2; -2; 1).$$

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ và điểm $M(2; -2; 1)$.

a) Một vector chỉ phương của Δ là $\vec{u}_\Delta = (1; 2; -3)$.

b) Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm M và song song với Δ là
$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-3}$$

c) Có duy nhất một điểm I thuộc đường thẳng Δ sao cho $OI = \sqrt{5}$.

d) Phương trình đường thẳng d đi qua điểm M cắt và vuông góc với Δ là:
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Một điểm thuộc Δ là $A(-2;0;1)$, một vector chỉ phương của Δ là $\vec{u}_\Delta = (1;2;-3)$.

b) Vì đường thẳng Δ' song song với đường thẳng Δ nên $\vec{u}_\Delta = (1;2;-3)$ cũng là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ' . Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ' là:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-3}$$

c) Vì $I \in \Delta: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ nên $I(-2+t; 2t; 1-3t)$

$$\Rightarrow OI = \sqrt{(-2+t)^2 + (2t)^2 + (1-3t)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 14t^2 - 10t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{5}{7} \end{cases}$$

Do đó: $I(-2;0;1)$ hoặc $I\left(-\frac{9}{7}; \frac{10}{7}; -\frac{8}{7}\right)$.

d) Gọi N là giao điểm của đường thẳng d và Δ . Khi đó tọa độ điểm N có dạng $N(-2+t; 2t; 1-3t)$. Ta có: $\vec{MN} = (t-4; 2t+2; -3t)$ và $\vec{u}_\Delta = (1;2;-3)$. Vì d và Δ vuông góc với nhau nên $\vec{MN} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow 14t = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Do đó $\vec{MN} = (-4; 2; 0) = -2(2; -1; 0)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng d . Phương trình

$$\text{tham số của đường thẳng } d \text{ là: } \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 1 \end{cases}$$

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;2), B(1;2;1), C(2;3;4)$.

a) Ta có: $\vec{AB} = (1;2;-1)$

b) Phương trình tham số của đường thẳng AB là $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases};$

c) Phương trình chính tắc của đường thẳng AB là $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$

d) Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm C và song song với AB là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------	---------	---------	---------

a) b) c) Ta có: $\vec{AB} = (1; 2; -1)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng AB và đường thẳng AB đi qua $A(0; 0; 2)$ nên phương trình tham số của đường thẳng AB là
$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$$
 ; phương trình chính tắc của đường thẳng AB là
$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$$

b) Vì đường thẳng d song song với đường thẳng AB nên $\vec{AB} = (1; 2; -1)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng d và đường thẳng d đi qua $C(2; 3; 4)$ nên có phương trình tham số là:
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng:

$$\Delta: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \text{ và } \Delta': \begin{cases} x = -1 + s \\ y = 2 - s \\ z = 3 + 2s \end{cases}$$

a) Đường thẳng Δ đi qua $M(2; 1; -1)$ nhận $\vec{u}_\Delta = (3; 2; 1)$ làm vector chỉ phương

b) Hai đường thẳng Δ, Δ' cắt nhau.

c)
$$\cos(\Delta, \Delta') = \frac{\sqrt{21}}{14}$$

d) Phương trình đường thẳng d đi qua $A(-3; 2; 2)$ và song song với đường thẳng Δ là
$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{1}$$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Đường thẳng Δ đi qua $M(2; 1; -1)$, nhận $\vec{u}_\Delta = (3; 2; 1)$ làm vector chỉ phương. Đường thẳng Δ' đi qua $N(-1; 2; 3)$, nhận $\vec{u}_{\Delta'} = (1; -1; 2)$ làm vector chỉ phương. Ta có: $\begin{bmatrix} \vec{u}_\Delta & \vec{u}_{\Delta'} \end{bmatrix} = (5; -5; -5)$ và $\vec{MN} = (-3; 1; 4)$ nên $\begin{bmatrix} \vec{u}_\Delta & \vec{u}_{\Delta'} \end{bmatrix} \cdot \vec{MN} = -40 \neq 0$.

b) Do đó hai đường thẳng Δ, Δ' chéo nhau.

$$\cos(\Delta, \Delta') = \left| \cos(\vec{u}_\Delta, \vec{u}_{\Delta'}) \right| = \frac{|\vec{u}_\Delta \cdot \vec{u}_{\Delta'}|}{|\vec{u}_\Delta| \cdot |\vec{u}_{\Delta'}|} = \frac{5}{14}$$

c) Ta có:

d) Đường thẳng d nhận $\vec{u}_\Delta = (3; 2; 1)$ làm vector chỉ phương. Phương trình chính tắc của đường thẳng d là: $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{1}$.

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ và mặt phẳng $(P): 2x + y + z + 5 = 0$

a) Tọa độ giao điểm I của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) có hoành độ bằng -2

b) Vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $(2; 1; 1)$

c) Phương trình đường thẳng Δ' nằm trên mặt phẳng (P) đồng thời cắt Δ và vuông góc với Δ là $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6 - 5t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$.

d) Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) gần bằng $12,8^\circ$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Ta có: $I = (1+t; 2t; -1-2t) \in (P)$ nên

$$2(1+t) + 2t - 1 - 2t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = -3 \Rightarrow I = (-2; -6; 5).$$

c) Ta có: $\vec{u}_\Delta = (1; 2; -2), \vec{n}_P = (2; 1; 1) \Rightarrow \vec{u}_{\Delta'} = [\vec{u}_\Delta, \vec{n}_P] = (4; -5; -3)$ là một vector chỉ phương của

đường thẳng Δ' . Đường thẳng Δ' lại đi qua điểm I nên phương trình Δ' là: $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6 - 5t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$

$$\sin(\Delta, (P)) = \left| \cos(\vec{u}_\Delta, \vec{n}_P) \right| = \frac{|\vec{u}_\Delta \cdot \vec{n}_P|}{|\vec{u}_\Delta| |\vec{n}_P|} = \frac{\sqrt{6}}{9} \Rightarrow (\Delta, (P)) \approx 15,8^\circ$$

d) Ta có:

Câu 18. Cho điểm $M(2; 0; 0)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 11 = 0$.

a) Điểm $A(0; 5; 3)$ thuộc mặt phẳng (P) .

b) $d(M, (P)) = \frac{5}{9}$

c) Đường thẳng MA vuông góc với (P) .

d) Đường thẳng $d: \frac{x-7}{1} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-31}{2}$ song song với (P) .

Lời giải

- a) Đ
- b) S
- c) S
- d) Đ

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}$$

Câu 19. Cho hai điểm $A(2; 1; -2), B(-2; -2; -9)$ và đường thẳng

- a) Điểm A thuộc đường thẳng d .
- b) Điểm B thuộc đường thẳng d .
- c) Đường thẳng AB vuông góc với d .
- d) $\overrightarrow{AB} = (4; 3; -7)$.

Lời giải

- a) Đ
- b) S
- c) Đ
- d) S

Câu 20. Cho hai đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$ và $d': \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{-5}$.

- a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(-2; 0; -1)$.
- b) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $a = (-4; 2; -4)$.
- c) Đường thẳng d' không đi qua điểm $N(2; 0; 1)$.
- d) Đường thẳng d vuông góc với d' .

Lời giải

- a) Đ
- b) Đ
- c) S
- d) Đ

Câu 21. Cho điểm $I(1; 2; 3)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua I và vuông góc với đường thẳng Δ .

- a) Nếu u là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì u là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

b) Vector có toạ độ $(2; 1; -1)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ .

c) Vector có toạ độ $(2; 1; 1)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

d) Phương trình mặt phẳng (P) là: $2x + y + z - 9 = 0$.

Lời giải

a) Đ, b) Đ, c) S, d) S.

DỪNG

Câu 22. Cho mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(0; 1; 1), B(3; 2; 2), C(4; 3; 5)$.

a) Mặt phẳng (P) có cặp vector chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (3; 1; 1); \overrightarrow{AC} = (4; 2; 4)$.

b) Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $n = (1; 4; 1)$.

c) Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; 2; 4)$.

d) Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{1}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

Câu 23. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Một vector chỉ phương của đường thẳng d là $u(-4; -6; 2)$.

b) Đường thẳng d đi qua điểm $B(-1; -4; 1)$.

c) Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = -t \end{cases}$.

d) Phương trình đường thẳng đi qua điểm $K(1; 1; 1)$ và song song với đường thẳng d là $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Một vector chỉ phương của đường thẳng d là $u(2; 3; -1)$

$\Rightarrow -2(2; 3; -1) = (-4; -6; 2)$ cũng là một vector chỉ phương của đường thẳng d .

b) Thay $x = -1, y = -4, z = 1$ vào phương trình đường thẳng ta được: $\frac{-2}{2} = \frac{-4+1}{3} = \frac{1}{-1} = -1$.

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -t \end{cases}$$

c) Phương trình tham số của đường thẳng d là

d) Gọi m là đường thẳng đi qua điểm K và song song với đường thẳng d

$$\text{Vậy đường thẳng } m \text{ có phương trình chính tắc là: } \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1}.$$

Câu 24. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 3), B(4; -2; 1)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Trung điểm của đoạn thẳng AB là $I\left(\frac{3}{2}; 0; -1\right)$.

b) Một vector chỉ phương của đường thẳng AB là $u(-3; 0; -2)$.

c) Phương trình chính tắc của đường thẳng AB là $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-2}$.

d) Phương trình tham số của đường thẳng AB là $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -2 \\ z = 1 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------------	---------------	---------------	----------------

a) Trung điểm của đoạn thẳng AB là $I\left(\frac{5}{2}; -2; 2\right)$.

b) Một vector chỉ phương của đường thẳng AB là $u(3; 0; -2) \Rightarrow -1(3; 0; -2) = (-3; 0; 2)$ cũng là một vector chỉ phương của đường thẳng AB .

c) Đường thẳng AB không có phương trình chính tắc. (điều kiện để đường thẳng có phương trình chính tắc là: các hệ số của vector chỉ phương khác 0)

d) Đường thẳng AB đi qua điểm B và có vector chỉ phương $\overrightarrow{AB}(3; 0; -2)$ có phương trình tham

số là $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -2 \\ z = 1 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Câu 25. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, gọi d là đường thẳng qua $A(1; 2; 0)$ và vuông góc với $(P): x - 2y + z - 3 = 0$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(5; 3; 4)$.

b) Một vector chỉ phương của đường thẳng d là $u(-1; 2; 1)$.

c) Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

d) Đường thẳng d đi qua điểm $(-1; 1; 0)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

b) Vì đường thẳng $d \perp (P) \Rightarrow$ Một vector chỉ phương của đường thẳng d là $u(1; -2; 1) \Rightarrow -1(1; -2; 1) = (-1; 2; -1)$ là một vector chỉ phương của d .

c) Đường thẳng d đi qua điểm $A(1; 2; 0)$ và có vector chỉ phương $u(1; -2; 1)$

$$\Rightarrow \text{Phương trình tham số của đường thẳng } d \text{ là } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = t \end{cases}.$$

Câu 26. Trong không gian cho tam giác ABC có $A(1; 2; -3), B(0; 1; 2)$ và $C(-2; 1; -3)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Trọng tâm tam giác ABC là $G\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.

b) Một vector chỉ phương của đường thẳng BC là $\overrightarrow{BC}(2; 0; -5)$.

c) Phương trình đường thẳng qua C và song song với AB là $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{5}$.

d) Phương trình đường trung tuyến AM của tam giác ABC là $\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 2t \\ z = 2 - 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Trọng tâm tam giác ABC là $G\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.

b) Một vector chỉ phương của đường thẳng BC là $\overrightarrow{BC}(-2; 0; -5) \Rightarrow -1(-2; 0; -5) = (2; 0; 5)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng BC .

c) Gọi d là đường thẳng qua C và song song với AB có vector chỉ phương $\overrightarrow{AB}(-1; -1; 5)$

Suy ra phương trình chính tắc của d là $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{5}$.

d) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC , $\Rightarrow M\left(-1; 1; -\frac{1}{2}\right)$. Suy ra $\overrightarrow{AM}\left(-2; -1; \frac{5}{2}\right) = \frac{-1}{2}(4; 2; -5)$

Vậy phương trình đường trung tuyến AM của tam giác ABC là
$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Thay $t = -1$ thì đường thẳng AM qua điểm $K(-3; 0; 2)$.

Câu 27. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; -2)$ và đường thẳng $d: \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{2}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Một vector chỉ phương của đường thẳng d là $(-3; 2; 1)$.

b) Đường thẳng d đi qua điểm $(-5; 8; -3)$.

c) Phương trình đường thẳng qua A và song song với d là $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{2}$.

d) Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với d là $(P): x - 3y + 2z + 5 = 0$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------------	----------------	---------------	---------------

a) Một vector chỉ phương của đường thẳng d là $(1; -3; 2)$.

c) Gọi l là đường thẳng qua A và song song với d .

Suy ra một vector chỉ phương của đường thẳng l là $u(1; -3; 2)$.

Vậy phương trình đường thẳng $l: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{2}$.

d) Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với d

Suy ra $mp(P)$ nhận vector chỉ phương của đường thẳng d làm vector pháp tuyến

$\Rightarrow$ Một vector pháp tuyến của (P) là $n(1; -3; 2) \Rightarrow (P): x - 3y + 2z + 3 = 0$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; -2)$, đường thẳng d và mặt phẳng $(P): x - y - z - 1 = 0$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Một vector chỉ phương của đường thẳng d là (α)

b) Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với d là $2x + y + 3z - 3 = 0$.

c) Đường thẳng a đi qua A và vuông góc với (P) có phương trình là $\frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{1}$.

d) Đường thẳng Δ đi qua A song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-3}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với d .

Mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng d nên sẽ có 1 vectơ pháp tuyến là $n(2;1;3)$.

Suy ra phương trình mặt phẳng (α) là $2(x-1)+1(y-1)+3(z+2)=0$

c) Vì đường thẳng a vuông góc với (P) nên sẽ có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_a(1;-1;-1)$.

Suy ra phương trình đường thẳng a đi qua A và vuông góc với (P) là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{-1}$
 $\Leftrightarrow \frac{x-1}{1} - 1 = \frac{y-1}{-1} - 1 = \frac{z+2}{-1} - 1 \Leftrightarrow \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{1}$

d) Do $\begin{cases} \Delta \cap (P) \\ \Delta \perp d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_{(P)} \\ \vec{u}_\Delta \perp \vec{u}_d \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_\Delta = [\vec{n}_{(P)}; \vec{u}_d] = (2; 5; -3)$

Phương trình đường thẳng Δ qua $A(1;1;-2)$ và có vectơ chỉ phương $u(2;5;-3)$ là $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-3}$.

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;-1;0)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$ và $d_2: \frac{x+1}{4} = \frac{y}{4} = \frac{z+2}{1}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d_1 là $u(-2;-1;1)$.

b) Phương trình tham số đường thẳng qua A và song song với d_1 là $\begin{cases} x=2t \\ y=-1-t, (t \in \mathbb{R}) \\ z=-t \end{cases}$

c) Phương trình mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với d_2 là $2x - y - z + 1 = 0$.

d) Phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với cả d_1 và d_2 là $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
--------	---------	--------	--------

a) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d_1 là $u(2;-1;-1)$ suy ra $u(-2;1;1)$ cũng là 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng d_1 .

b) Gọi l là đường thẳng qua A và song song với d_1 . Vì đường thẳng l song song với d_1 nên sẽ nhận vectơ chỉ phương của đường thẳng d_1 là $u(2;-1;-1)$ làm vectơ chỉ phương. Suy ra phương

trình tham số của đường thẳng l là: $\begin{cases} x=2t \\ y=-1-t, (t \in \mathbb{R}). \\ z=-t \end{cases}$

c) Mặt phẳng (P) vuông góc với d_2 sẽ nhận vector chỉ phương của đường thẳng d_2 là $\vec{u}_2(4;4;1)$ làm vector pháp tuyến. Suy ra phương trình mặt phẳng (P) là $\Delta \Leftrightarrow 4x+4y+z+4=0$. d) Ta có:
$$\begin{cases} d \perp d_1 \\ d \perp d_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_d \perp \vec{u}_{d_1} \\ \vec{u}_d \perp \vec{u}_{d_2} \end{cases}$$

Khi đó: $\vec{u} = [\vec{u}_{d_1}; \vec{u}_{d_2}] = (3; -6; 12) = 3(1; -2; 4) \Rightarrow d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{4}$

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -1; -2)$, mặt phẳng $(P): 4x - y - z - 10 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{1}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Một vector chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}(1; -1; -1)$.

b) Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với d là $2x - 2y + z - 2 = 0$.

c) Phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với (P) là $\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$.

d) Phương trình đường thẳng qua $A(1; -1; -2)$ song song với (P) đồng thời vuông góc với d là $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
--------	---------	--------	--------

a) Một vector chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}(2; -2; 1)$.

b) Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và vuông góc với d . Vì $(Q) \perp d$ nên một vector pháp tuyến của (Q) là $\vec{u}(2; -2; 1)$. Vậy phương trình mặt phẳng (Q) là $2(x-1) - 2(y+1) + z+2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y + z - 2 = 0$.

c) Gọi h là đường thẳng qua A và vuông góc với (P) . Vì $h \perp (P) \Rightarrow$ một vector chỉ phương của đường thẳng h là $\vec{u}_h(4; -1; -1)$. Suy ra phương trình đường thẳng h là $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{-1}$.

d) Ta có: $\vec{u}_d(2; -2; 1), \vec{n}_{(P)}(4; -1; -1)$. Gọi Δ là đường thẳng cần tìm thì
$$\begin{cases} \Delta \parallel (P) \\ \Delta \perp d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_{(P)} \\ \vec{u}_\Delta \perp \vec{u}_d \end{cases}$$

Suy ra $\vec{u}_\Delta = [\vec{u}_d; \vec{n}_{(P)}] = (3; 6; 6) = 3(1; 2; 2)$

Do vậy $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$.

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 \end{cases} \text{ và } d_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + u \\ z = 3 - u \end{cases}$$

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 đường thẳng của các mệnh đề sau Xét tính đúng sai

a) Một vector chỉ phương của đường thẳng d_1 là $u(2; -1; 1)$.

b) Phương trình mặt phẳng qua $A(1; 2; -1)$ và vuông góc với d_2 là $2x + y - 4 = 0$.

c) Phương trình đường thẳng qua $A(1; 2; -1)$ và vuông góc với cả d_1 và d_2 là $\frac{x}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-1}{-2}$.

d) Phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2 là $x - 2y - 2z - 2 = 0$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

b) Gọi (Q) là mặt phẳng qua $A(1; 2; -1)$ và vuông góc với d_2 .

Vì $(Q) \perp d_2 \Rightarrow$ Một vector pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_P(0; 1; -1)$.

Suy ra phương trình mặt phẳng (Q) là $0(x-1) + y - 2 - (z+1) = 0 \Leftrightarrow y - z - 3 = 0$.

c) Vector chỉ phương của đường thẳng d_1 là $\vec{u}_1(2; 1; 0)$ và vector chỉ phương của đường thẳng d_2 là $\vec{u}_2(0; 1; -1)$.

Gọi d_3 là đường thẳng đi qua A và vuông góc với cả d_1 và d_2 (d_1, d_2 chéo nhau).

Suy ra một vector chỉ phương của đường thẳng d_3 là $\vec{u}_3 = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-1; 2; 2) = (1; -2; -2)$. Vậy

phương trình đường thẳng d_3 là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-2} \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-1}{-2}$.

d) Vì mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2 nên (P) sẽ có 2 vector chỉ phương là $\vec{u}_1(2; 1; 0); \vec{u}_2(0; 1; -1)$.

Suy ra một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-1; 2; 2)$. Lấy điểm $K(2; -1; 1) \in d_1 \in (P)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $-(x-2) + 2(y+1) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow -x + 2y + 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 2z - 2 = 0$.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.OBCD$ có đáy là hình chữ nhật và các điểm $O(0; 0; 0), B(2; 0; 0), D(0; 3; 0), S(0; 0; 4)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai.

a) Tọa độ điểm C là $C(2; 3; 0)$.

b) Phương trình đường thẳng SC là $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{-4}$.

c) Phương trình mặt phẳng (SBD) là $6x + 4y + 3z - 18 = 0$

d) Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) là $\frac{12\sqrt{61}}{61}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) $OBCD$ là hình bình hành

$$\Rightarrow \vec{OB} = \vec{DC} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 0 = x_C - 0 \\ 0 - 0 = y_C - 3 \\ 0 - 0 = z_C - 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 3 \\ z_C = 0 \end{cases} \Rightarrow C(2; 3; 0)$$

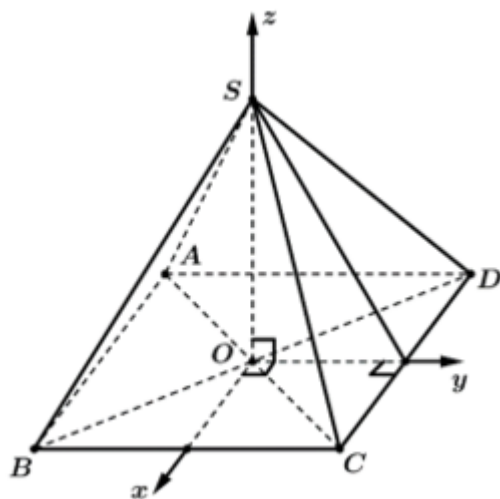
b) Phương trình đường thẳng SC là $\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-0}{3-0} = \frac{z-4}{0-4}$ hay $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{-4}$.

c) Phương trình mặt phẳng (SBD) là $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ hay $6x + 4y + 3z - 12 = 0$.

d) Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) là

$$d(O; (SBD)) = \frac{|6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{6^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{12\sqrt{61}}{61}$$

Câu 33. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2. Gọi O là tâm của đáy và $SO = 3$. Điểm G là trọng tâm tam giác SAB . Bằng cách gán hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



Xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Tọa độ điểm G là $G\left(0; \frac{1}{3}; 1\right)$.

b) Phương trình đường thẳng SC là: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-3}$.

c) Phương trình mặt phẳng (SCD) là $3y + z - 3 = 0$.

d) Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) là $\frac{3\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) Dựa vào hình vẽ dễ thấy $S(0;0;3); A(-1;-1;0); B(1;-1;0)$

Vì G là trọng tâm tam giác SAB nên tọa độ điểm G là

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_S}{3} = 0 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_S}{3} = \frac{-2}{3} \Rightarrow G\left(0; -\frac{2}{3}; 1\right) \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_S}{3} = 1 \end{cases}$$

b) Ta có: $S(0;0;3); C(1;1;0)$

Suy ra $\overrightarrow{SC} = (1;1;-3)$

Phương trình đường thẳng SC có vector chỉ phương $(1;1;-3)$ và đi qua điểm $C(1;1;0)$ là

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-3}$$

c) Ta có: $S(0;0;3); C(1;1;0); D(-1;1;0)$

Suy ra $\overrightarrow{SD} = (-1;1;-3); \overrightarrow{SC} = (1;1;-3)$

Vector pháp tuyến của mặt phẳng (SCD) có tọa độ là $\overrightarrow{n_{SCD}} = [\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{SD}] = (0;6;2)$

Hay mặt phẳng (SCD) có vector pháp tuyến là $(0;3;1)$

Vậy mặt phẳng (SCD) đi qua $S(0;0;3)$ và có vector pháp tuyến $(0;3;1)$ có phương trình là $3y + z - 3 = 0$

d) Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) là $\frac{|1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + 0 - 3|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$

Câu 34. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-1;2), B(-1;-5;-2)$ và $C(0;-4;-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB . Các mệnh đề sau đúng hay sai.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 30$

b) Phương trình đường thẳng AB là: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{-2}$

c) Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (P) bằng 2.

d) Khoảng cách từ điểm $M(2;0;-1)$ đến mặt phẳng (ABC) bằng 1.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2;-4;-4) \cdot (-1;-3;-4) = 30$

b) Phương trình đường thẳng AB là $\frac{x-1}{-1-1} = \frac{y+1}{-5+1} = \frac{z-2}{-2-2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-2}{-4}$ hay $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{2}$

c) Gọi M là trung điểm của AB . Khi đó: $M(0; -3; 0)$.

Ta có: $\vec{AB} = (-2; -4; -4) = -2(1; 2; 2)$.

Gọi d là đường trung trực của AB thì d đi qua $M(0; -3; 0)$ và nhận $n = (1; 2; 2)$ làm VTPT.

Phương trình đường thẳng trung trực của AB là $1 \cdot (x-0) + 2(y+3) + 2(z-0) = 0$ hay $x + 2y + 2z + 6 = 0$.

Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (P) bằng $d(C, (P)) = \frac{|0 + 2 \cdot (-4) + 2 \cdot (-2) + 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 2$.

d) $A(1; -1; 2), B(-1; -5; -2)$ và $C(0; -4; -2)$.

Ta có: $\vec{AB} = (-2; -4; -4), \vec{AC} = (-1; -3; -4) \Rightarrow [\vec{AB}; \vec{AC}] = (4; -4; 2) = 2(2; -2; 1)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $2(x-1) - 2(y+1) + (z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y + z - 6 = 0$.

Khoảng cách từ điểm $M(2; 0; -1)$ đến mặt phẳng (ABC) bằng $d(M, (ABC)) = \frac{|2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 - 1 + 6|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 1$.

Câu 35. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(3; 1; 2)$ và $B(0; 2; 3)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 2x + y - z - 3 = 0$. Các mệnh đề sau đúng hay sai.

a) Độ dài đoạn thẳng AB bằng $\sqrt{11}$.

b) Phương trình đường thẳng AB là $\frac{x+3}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-1}$.

c) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (Q) bằng $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

d) Khoảng cách từ điểm $M(1; 2; 3)$ đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{\sqrt{30}}{15}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Độ dài đoạn thẳng AB bằng $\sqrt{(3-0)^2 + (1-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{11}$.

b) Phương trình đường thẳng AB là $\frac{x-3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1} \Leftrightarrow \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$
 $\Leftrightarrow \frac{x-3}{3} + 2 = \frac{y-1}{-1} + 2 = \frac{z-2}{-1} + 2 \Leftrightarrow \frac{x+3}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-1}$.

c) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (Q) bằng $d(A, (Q)) = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

d) Ta có:
$$\begin{cases} \vec{AB} = (-3; 1; 1) \\ n_{(Q)} = (2; 1; -1) \end{cases} \Rightarrow (\vec{AB}, n_{(Q)}) = (-2; -1; -5) = -1(2; 1; 5)$$

Mặt phẳng (P) qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (Q) là

$$2(x - 3) + (y - 1) + 5(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 5z - 17 = 0.$$

Khoảng cách từ điểm $M(1; 2; 3)$ đến mặt phẳng (P) bằng

$$d(M, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 + 5 \cdot 3 - 17|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 5^2}} = \frac{\sqrt{30}}{15}$$

Câu 36. Cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-4}$ và mặt phẳng $(P): -2x + 3y - z - 1 = 0$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Một vector chỉ phương của đường thẳng d là $u(-1; 1; -4)$.

b) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{1}{\sqrt{14}}$.

c) Đường thẳng d cắt và vuông góc với mặt phẳng (P) .

d) Mặt phẳng vuông góc với (P) và chứa đường thẳng d có phương trình là $13x + 9y + z + 15 = 0$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) Sai: vì vector chỉ phương của d là $d(1; -1; -4)$ hoặc $u(-1; 1; 4)$

b) Đúng vì: Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) bằng:

$$d(O, (P)) = \frac{|-2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

c) Sai vì: Đường thẳng d có vector chỉ phương $u_d = (1; -1; -4)$, mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $n_{(P)} = (-2; 3; -1)$. Ta có: $u_d \neq k \cdot n_{(P)} \Rightarrow d$ cắt và không vuông góc với (P) .

d) Đúng vì: Đường thẳng d đi qua điểm $M(-2; 1; 2)$ và có vector chỉ phương là $u(-1; 1; 4)$. Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $n_P = (-2; 3; -1)$.

Mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng d và chứa đường thẳng d có một vector pháp tuyến là:

$$n = [n_P, u] = (13; 9; 1)$$

Mặt phẳng cần tìm là: $13(x + 2) + 9(y - 1) + 1(z - 2) = 0 \Rightarrow 13x + 9y + z + 15 = 0$

- Câu 37.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-2}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 15 = 0$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:
- a) Một vector chỉ phương của đường thẳng d là $u(1; 2; -2)$.
- b) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_{(P)}(2; -1; 15)$.
- c) Khoảng cách từ điểm $M(2; -1; -1)$ đến mặt phẳng (P) bằng $4\sqrt{5}$.
- d) $d \subset (P)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng. Một vector chỉ phương của đường thẳng d là $u(1; 2; -2)$.

b) Sai. Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_{(P)}(2; -1; 0)$.

c) Đúng. $d(M; (P)) = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$.

d) Sai. Vector chỉ phương của d là $u(1; 2; -2)$, vector pháp tuyến của (P) là $n(2; -1; 0)$.

Ta có: $n \cdot u = 0 \Rightarrow d \parallel (P)$ hoặc $d \subset (P)$. Mà $A(1; -1; 0) \in d$ nhưng $A \notin (P) \Rightarrow d \parallel (P)$.

- Câu 38.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z - 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Gọi (Q) là mặt phẳng vuông góc với (P) và chứa đường thẳng d . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Một vector chỉ phương của đường thẳng d là $d(1; 0; -1)$.

b) Khoảng cách từ $M(1; 2; 3)$ đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

c) Đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (P) .

d) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (Q) bằng $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) Sai. Một vector chỉ phương của d là: $u(2; 1; -1)$

b) Sai. Khoảng cách từ điểm $M(1; 2; 3)$ đến mặt phẳng (P) là:

$$d(M, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

c) Đúng. Ta có $\vec{n}_{(P)} = (2; -3; 1), \vec{u}_d = (2; 1; -1)$.

$$\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{u}_d = 4 - 3 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} d \parallel (P) \\ d \subset (P) \end{cases}$$

Đề ý rằng

Hơn nữa d đi qua $A(1;0;-1)$ mà thay tọa độ $A(1;0;-1)$ và (P) thì $2.1 - 3.0 - 1 - 1 = 0$ nên điểm $A \in (P) \Rightarrow d \subset (P)$.

d) Đúng. Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;0;-1)$ và có vector chỉ phương là $u(2;1;-1)$.

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n}_P(2;-3;1)$ Mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng d và chứa đường thẳng d có một vector pháp tuyến là: $\vec{n} = [\vec{n}_P, \vec{u}] = (-1;-2;-4)$.

Mặt phẳng cần tìm là: $13 - 1(x-1) - 2(y-0) - 4(z+1) = 0 \Rightarrow -x - 2y - 4z - 3 = 0$.

Khoảng cách từ gốc O đến mặt phẳng (Q) là: $d(O, (Q)) = \frac{3}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+4}{3}$ và

$$d_2: \begin{cases} x=2t \\ y=1+4t \\ z=2+6t \end{cases}$$

Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) Đường thẳng d_2 có một vector chỉ phương là $\vec{u}_2(3;6;9)$.

b) Đường thẳng d_1 song song với mặt phẳng $(P): x+2y+3z-1=0$.

c) Đường thẳng d_2 vuông góc với mặt phẳng $(Q): x+y-z-4=0$.

d) d_1 và d_2 song song với nhau.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

a) Đúng. Đường thẳng d_2 có một vector chỉ phương là $\vec{u}_2(2;4;6) = 2(1;2;3) = \frac{2}{3}(3;6;9)$.

b) Sai. (Đường thẳng d_1 song song với mặt phẳng $(P): x+2y+3z-1=0 \Leftrightarrow \vec{u}_{d_1} \cdot \vec{n}_P = 0$) Ta có $\vec{u}_{d_1}(1;2;3), \vec{n}_P(1;2;3) \Rightarrow \vec{u}_{d_1} \cdot \vec{n}_P = 1.1 + 2.2 + 3.3 = 14 \neq 0$ Vậy đường thẳng d_1 không song song với mặt phẳng (P) .

c) Sai. (Đường thẳng d_2 vuông góc với mặt phẳng $(Q): x+y-z-4=0 \Leftrightarrow \vec{u}_{d_2} = k \cdot \vec{n}_Q$) Ta có $\vec{u}_{d_2}(2;4;6), \vec{n}_Q(1;1;-1)$

Ta thấy không tồn tại k thỏa mãn $\vec{u}_{d_2} = k \cdot \vec{n}_Q$. Vậy đường thẳng d_2 không vuông góc với mặt phẳng (Q) .

d) Sai. Ta có vector chỉ phương của d_1, d_2 lần lượt là $\vec{u}_1(1; 2; 3), \vec{u}_2(2; 4; 6)$ Vì $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \Rightarrow d_1 \equiv d_2$.

$$d_1: \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad d_2: \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = u \end{cases} \quad \text{Xét tính}$$

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a) Đường thẳng d_1 đi qua điểm $A(2; -2; 1)$.
b) Đường thẳng d_2 song song với mặt phẳng (Oxy) .
c) Đường thẳng d_2 song song với trục Oz .
d) d_1 và d_2 chéo nhau.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Đúng.

b) Sai. (Đường thẳng d_2 song song với mặt phẳng $(Oxy) \Leftrightarrow \vec{u}_2 \cdot \vec{n} = 0$) Ta có vector chỉ phương của đường thẳng d_2 là $\vec{u}_2(0; 0; 1)$ và vector pháp tuyến của mặt phẳng $(Oxy): z = 0$ là $\vec{n}(0; 0; 1)$. Suy ra $\vec{u}_2 \cdot \vec{n} = 1 \neq 0 \Rightarrow d_2$ không song song với mặt phẳng (Oxy) .

c) Đúng. Ta có phương trình tham số của trục $Oz: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$ Dựa vào phương trình đường thẳng d_2, Oz ta thấy $d_2 \cap Oz = \emptyset$ và $\vec{u}_2 = (0; 0; 1) = \vec{u}_{Oz} \Rightarrow d_2 // Oz$.

d) Đúng. (d_1 và d_2 chéo nhau $\Leftrightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{M_1M_2} \neq 0$) Vector chỉ phương của d_1, d_2 lần lượt là $\vec{u}_1(1; -1; 0), \vec{u}_2(0; 0; 1) \Rightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-1; -1; 0)$ Chọn $M_1(0; 0; 1) \in d_1, M_2(0; 2; 1) \in d_2 \Rightarrow \vec{M_1M_2}(0; 2; 0)$. Xét tích $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{M_1M_2} = -2 \neq 0 \Rightarrow d_1$ và d_2 chéo nhau.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{-1}$ và $d_2: \begin{cases} x = -3 - t \\ y = 6 + t \\ z = -3 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M(4; -3; -5)$.
b) Đường thẳng d_2 song song với mặt phẳng (Oxy) .
c) Đường thẳng d_1 vuông góc với mặt phẳng $(P): x - 2y - z - 3 = 0$.

d) d_1 và d_2 chéo nhau.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Đúng.

b) Đúng. Mặt phẳng $(Oxy): z=0$ có vector pháp tuyến là $n(0;0;1)$. Đường thẳng d_2 có vector chỉ phương là $u_2(-1;1;0)$.

$$\Rightarrow n \cdot u_2 = 0 \Rightarrow d_2 \parallel (Oxy)$$

c) Đúng. Đường thẳng d_1 có vector chỉ phương $u_1(1;-2;-1)$. Và mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $n_p(1;-2;-1)$.

$$\text{Ta có } u_1 = n_p \Rightarrow d_1 \perp (P)$$

d) Sai. (d_1 và d_2 chéo nhau $\Leftrightarrow [u_1, u_2] \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} \neq 0$) Vector chỉ phương của d_1, d_2 lần lượt là $u_1(1;-2;-1), u_2(-1;1;0) \Rightarrow [u_1, u_2] = (1;1;-1)$.

$$\text{Chọn } M_1(2;1;-3) \in d_1, M_2(0;3;-3) \in d_2 \Rightarrow \overrightarrow{M_1 M_2} = (-2;2;0)$$

$$\text{Xét tích } [u_1, u_2] \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} = -2 + 2 + 0 = 0 \Rightarrow d_1 \text{ và } d_2 \text{ cắt nhau.}$$

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{2}$ và $\Delta_2: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-4}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai

a) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M(-3;0;7)$.

b) Một vector chỉ phương của đường thẳng Δ_2 là $u_2(-3;1;-2)$.

c) Góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 bằng 60° .

d) Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 và song song với đường thẳng Δ_2 thì khoảng cách từ gốc toạ độ O đến (P) bằng $\frac{2}{3}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

a) Đúng.

b) Sai.

$$\text{Một vector chỉ phương của đường thẳng } \Delta_2 \text{ là } u_2(1;1;-4).$$

c) Sai.

Véc tơ chỉ phương của Δ_1 là $\vec{u}_1(-2;1;2)$.

Véc tơ chỉ phương của Δ_2 là $\vec{u}_2(1;1;-4)$.

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \left| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \right| = \frac{\left| \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \right|}{\left| \vec{u}_1 \right| \cdot \left| \vec{u}_2 \right|} = \frac{|(-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-4)|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2}} = \frac{9}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Do đó góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là 45° .

d) Sai.

Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 và song song với đường thẳng Δ_2 nên sẽ có 2 vector chỉ phương là: $\vec{u}_1(-2;1;2), \vec{u}_2(1;1;-4)$

Suy ra một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2;2;1)$

Mặt phẳng (P) qua $F(1;-2;3)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n} = (2;2;1)$ có phương trình tổng quát là $2(x-1) + 2(y+2) + 1(z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z - 1 = 0$

Vậy khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (P) là $d(O, (P)) = \frac{|2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{3}$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(1;4;0), B(2;6;-1), C(-3;0;4), D(-1;1;5)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai

a) Trọng tâm tam giác ABC là $G\left(0; \frac{10}{3}; 1\right)$.

b) Phương trình đường thẳng AB là: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z}{1}$.

c) Góc giữa hai đường thẳng AB và CD là 30° .

d) Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
----------------	----------------	---------------	----------------

a) Đúng.

Trọng tâm của tam giác ABC là $I = \left(\frac{1+2+(-3)}{3}; \frac{4+6+0}{3}; \frac{0+(-1)+4}{3} \right) = \left(0; \frac{10}{3}; 1 \right)$

b) Đúng.

Đường thẳng AB đi qua điểm $A(1;4;0)$ và có vector chỉ phương $\vec{AB}(1;2;-1)$ có phương trình

chính tắc là: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z}{-1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{-1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z}{1}$

c) Sai.

Vector chỉ phương của đường thẳng AB là $\vec{u}_1 = \vec{AB}(1; 2; -1)$

Vector chỉ phương của đường thẳng CD là $\vec{u}_2 = \vec{CD}(2; 1; 1)$

$$\Rightarrow \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \left| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \right| = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{1+4+1} \cdot \sqrt{4+1+1}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Suy ra $(\vec{u}_1; \vec{u}_2) = 60^\circ$

d) Đúng.

Mặt phẳng (ABC) có 2 vector chỉ phương là $\vec{AB}(1; 2; -1), \vec{AC}(-4; -4; 4) = (1; 1; -1)$

Suy ra một vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}] = (1; 0; 1)$

Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) là $1(x-1) + 0(y-4) + 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow x + z - 1 = 0$

Suy ra khoảng cách từ D đến mặt phẳng (ABC) là $d(D, (ABC)) = \frac{|-1 + 5 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Câu 44. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x - y - 2z - 4 = 0$. Các mệnh đề sau đúng hay sai

a) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_{(P)} = (2; 1; -1)$

b) Khoảng cách từ điểm $M(-2; -2; 1)$ đến mặt phẳng (P) bằng $\sqrt{6}$

c) Góc giữa d và (P) bằng 60°

d) Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (P) thì khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ đến mặt phẳng (Q) bằng $\sqrt{3}$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------------	----------------	---------------	---------------

a) Sai.

b) Đúng.

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là $d(M, (P)) = \frac{|-2 - (-2) - 2 \cdot 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

c) Sai.

Đường thẳng d có vector chỉ phương là $\vec{u}_d(2; 1; -1)$, mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}(1; -1; -2)$

Gọi φ là góc giữa d và (P) thì: $\sin \varphi = \left| \cos(\vec{u}_d; \vec{n}_{(P)}) \right| = \frac{|2 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2}$

Suy ra $\varphi = 30^\circ$.

d) Sai.

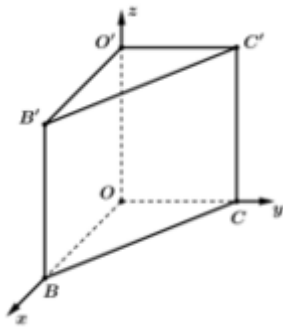
Vector chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d(2; 1; -1)$ và vector pháp tuyến của $mp(P)$ là $\vec{n}_p(1; -1; -2)$

Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là: $\vec{n}_Q = [\vec{u}_d, \vec{n}_p] = (1; -1; 1)$

Mặt phẳng (Q) đi qua điểm $N(1; 0; -2)$ và có vector pháp tuyến là $\vec{n}_Q(1; -1; 1)$ có phương trình là $1(x-1) - (y-0) + 1(z+2) = 0 \Leftrightarrow x - y + z + 1 = 0$

Suy ra khoảng cách từ $O(0; 0; 0)$ đến mặt phẳng (Q) là $d(O, (Q)) = \frac{|0 - 0 + 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 45. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ đứng $OBC \cdot O'B'C'$ với $O'(0; 0; 3a), a > 0$.



Các mệnh đề sau đúng hay sai

a) Tọa độ của điểm B' là $B'(3a; 0; 2a)$.

b) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng $(BCC'B')$ là $n(1; -2; 0)$.

c) Phương trình mặt phẳng $(O'BC)$ là $3x + 6y + 2z - 6a = 0$.

d) Sin của góc giữa đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng $(O'BC)$ bằng $\frac{3\sqrt{14}}{49}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------------	---------------	----------------	----------------

a) Sai.

Ta có: $\vec{BB'} = \vec{OO'} = (0; 0; 3a)$

Suy ra $x_{B'} = x_B = 2a, y_{B'} = y_B = 0, z_{B'} - 0 = 3a$, tức là $B'(2a; 0; 3a)$.

b) Sai.

Ta có: mặt phẳng $(BCC'B')$ có cặp vtcp là $(0;0;1)$ và $\overrightarrow{BC}(-2a;a;0)=a(-2;1;0)$

Do đó một vector pháp tuyến của mặt phẳng $(BCC'B')$ là $n=[(0;0;1);(-2;1;0)]=-(1;2;0)$.

c) Đúng.

Vì $B(2a;0;0), C(0;a;0), O'(0;0;3a)$ nên mặt phẳng $(O'BC)$ có phương trình là

$$\frac{x}{2a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{3a} = 1$$

$$\Leftrightarrow 3x + 6y + 2z - 6a = 0$$

d) Đúng.

Mặt phẳng $(O'BC)$ có một vector pháp tuyến là $n=(3;6;2)$.

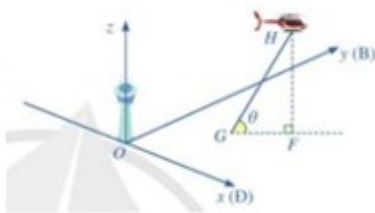
Do $B'(2a;0;3a), C(0;a;0)$ nên $\overrightarrow{B'C}=(-2a;a;-3a)$, suy ra vector $\overrightarrow{B'C}=(-2a;a;-3a)$ cùng phương với vector $u=(-2;1;-3)$

Vì thế vector $u=(-2;1;-3)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng $B'C$.

Suy ra sin của góc giữa đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng $(O'BC)$ bằng

$$\frac{|3 \cdot (-2) + 6 \cdot 1 + 2 \cdot (-3)|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{6}{7\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{49}$$

Câu 46. Hình vẽ minh họa đường bay của một chiếc trực thăng H cất cánh từ một sân bay. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O là chân tháp điều khiển của sân bay; trục Ox là hướng đông, trục Oy là hướng bắc và trục Oz là trục thẳng đứng, đơn vị trên mỗi trục là kilômét. Trực thăng cất cánh từ điểm G . Vector r chỉ vị trí của trực thăng tại thời điểm t phút sau khi cất cánh ($t \geq 0$) có tọa độ là: $r=(1+t;0,5+2t;2t)$.



Các mệnh đề sau đúng hay sai

a) Góc θ mà đường bay tạo với phương ngang (làm tròn đến hàng đơn vị của độ) bằng 48° .

b) Phương trình đường thẳng GF , trong đó F là hình chiếu của điểm H lên mặt phẳng (Oxy) là

$$\begin{cases} x = 1 + u \\ y = 0,5 + 3u \\ z = 0 \end{cases}$$

c) Trực thăng bay vào mây ở độ cao 2 km. Tọa độ điểm mà máy bay trực thăng bắt đầu đi vào đám mây là $E(2;3,5;2)$.

d) Giả sử một đỉnh núi nằm ở điểm $M(5;4,5;3)$. Khi HM vuông góc với đường bay GH thì khoảng cách từ máy bay trực thăng đến đỉnh núi tại thời điểm đó bằng $\sqrt{5}(km)$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
--------	--------	--------	---------

a) Sai. Ta có: góc θ mà đường bay tạo với phương ngang chính là góc giữa đường thẳng GH và mặt phẳng (Oxy) .

Tại thời điểm $t=0$ thì $\vec{r}_0 = (1; 0,5; 0)$. Trực thăng cất cánh từ điểm G nên $G(1; 0,5; 0)$.

Tại thời điểm $t=1$, trực thăng bay đến vị trí K thuộc đường thẳng GH với $K(2; 2,5; 2)$.

Đường thẳng GH có vector chỉ phương $\vec{GK} = (1; 2; 2)$ và mặt phẳng (Oxy) có vector pháp tuyến $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

$$\sin(GH, (Oxy)) = \frac{|1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}$$

Ta có:

Suy ra $(GH, (Oxy)) \approx 42^\circ$

b) Sai. Gọi K' là hình chiếu của điểm K lên mặt phẳng (Oxy) . Khi đó $K'(2; 2,5; 0)$.

Vì F là hình chiếu của điểm H lên mặt phẳng (Oxy) nên $K' \in GF$.

Do đó đường thẳng GF có vector chỉ phương là $\vec{GK'} = (1; 2; 0)$.

$$\begin{cases} x = 1 + u \\ y = 0,5 + 2u \\ z = 0 \end{cases}$$

Phương trình tham số của đường thẳng GF là

c) Sai. Trực thăng bay vào mây ở độ cao 2 km, tức là vị trí điểm mà trực thăng bắt đầu đi vào đám mây có cao độ $z=2$, khi đó $2t=2$, suy ra $t=1$.

Vậy tọa độ điểm mà trực thăng bắt đầu đi vào đám mây là $(2; 2,5; 2)$.

d) Đúng. Ta có: $H(1+t; 0,5+2t; 2t)$. Khi đó, $\vec{HM} = (4-t; 4-2t; 3-2t)$.

Đường thẳng GH có vector chỉ phương $\vec{GK} = (1; 2; 2)$.

$$HM \text{ vuông góc với đường bay } GH \text{ khi } \vec{HM} \perp \vec{GK} \Leftrightarrow \vec{HM} \cdot \vec{GK} = 0 \\ \Leftrightarrow (4-t) \cdot 1 + (4-2t) \cdot 2 + (3-2t) \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow t=2$$

Vậy $t=2$ thì HM vuông góc với đường bay GH

Khi đó, khoảng cách từ đỉnh núi đến máy bay trực thăng là $HM = \sqrt{(4-2)^2 + (4-2 \cdot 2)^2 + (3-2 \cdot 2)^2} = \sqrt{5}(km)$.

- Câu 47.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=5-2t \\ z=14-3t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=1-4u \\ y=2+u \\ z=-1+5u \end{cases}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai
- a) Một vector chỉ phương của đường thẳng d_2 là $\vec{u}_2(1; 2; -1)$.
- b) Góc giữa d_1 và d_2 bằng 30° .
- c) d_1 và d_2 là hai đường thẳng chéo nhau.
- d) Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d_2 và song song với d_1 thì khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0;0;0)$ đến mặt phẳng (Q) bằng $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------------	----------------	----------------	----------------

a) Sai.

Một vector chỉ phương của đường thẳng d_2 là $\vec{u}_2(-4; 1; 5)$.

b) Đúng.

Vector chỉ phương của đường thẳng d_1 là $\vec{u}_1(1; -2; -3)$

Vector chỉ phương của đường thẳng d_2 là $\vec{u}_2(-4; 1; 5)$.

$$\Rightarrow \cos(\vec{d}_1; \vec{d}_2) = \left| \cos(\vec{u}_1; \vec{u}_2) \right| = \frac{|-4 - 2 - 15|}{\sqrt{1+4+9} \cdot \sqrt{16+1+25}} = \frac{21}{14\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra $(\vec{d}_1; \vec{d}_2) = 30^\circ$.

c) Đúng.

Nhắc lại: Hai đường thẳng chéo nhau là hai đường thẳng không song song và cũng không cắt nhau.

Cách 1: (ta chứng minh hai đường thẳng không cắt nhau và cũng không song song với nhau)

+) Xét hệ phương trình

$$(*) \begin{cases} t=1-4u \\ 5-2t=2+u \\ 14-3t=-1+5u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+4u=1(1) \\ 2t+u=3(2) \\ 3t+5u=15(3) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) và (2) ta tìm được $t = \frac{11}{7}; u = -\frac{1}{7}$

Thay vào (3) ta được $3 \cdot \frac{11}{7} - 5 \cdot \frac{1}{7} = 4 \neq 15$

Suy ra hệ $(*)$ vô nghiệm $\Rightarrow d_1$ không cắt $d_2(**)$

+) Ta có vector chỉ phương của hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt là $\vec{u}_1(1; -2; -3), \vec{u}_2(-4; 1; 5)$.

Ta thấy $\frac{1}{-4} \neq \frac{-2}{1} \Rightarrow d_1$ không song song với d_2 . (***)

Từ (**) và (***) suy ra d_1 và d_2 chéo nhau.

Cách 2: (ta so sánh $\begin{bmatrix} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \end{bmatrix} \cdot \vec{M_1 M_2}$ với 0 nếu $\begin{bmatrix} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \end{bmatrix} \cdot \vec{M_1 M_2} = 0$ thì hai đường thẳng đồng phẳng tức không chéo nhau; nếu $\begin{bmatrix} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \end{bmatrix} \cdot \vec{M_1 M_2} \neq 0$ thì hai đường thẳng không đồng phẳng tức hai đường thẳng chéo nhau)

Ta có vector chỉ phương của hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt là

$$\begin{aligned} & \vec{u}_1(1; -2; -3), \vec{u}_2(-4; 1; 5) \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \end{bmatrix} &= (-7; 7; -7). \oplus M_1(1; 3; 11) \in d_1; M_2(1; 2; -1) \in d_2 \\ \Rightarrow \vec{M_1 M_2} &= (0; -1; -12) \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \end{bmatrix} \cdot \vec{M_1 M_2} &= -7 \cdot 0 + 7 \cdot (-1) + (-7) \cdot (-12) = 77 \neq 0 \\ \Rightarrow \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{M_1 M_2} &\text{ không đồng phẳng} \Rightarrow d_1 \text{ và } d_2 \text{ chéo nhau.} \end{aligned}$$

d) Đúng.

Mặt phẳng (Q) có hai vector chỉ phương là $\vec{u}_1(1; -2; -3), \vec{u}_2(-4; 1; 5)$

Suy ra một vector pháp tuyến của (Q) là $\vec{n_Q} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \end{bmatrix} = (-7; 7; -7) = (1; -1; 1)$.

Mặt phẳng (Q) đi qua $K(1; 2; -1)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n_Q}(1; -1; 1)$ có phương trình tổng quát là $1(x-1) - 1(y-2) + 1(z+1) = 0 \Leftrightarrow x - y + z + 2 = 0$

Suy ra khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ đến mặt phẳng (Q) là $d(O, (Q)) = \frac{|0 - 0 + 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - z - 4 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{2}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai

a) Một vector chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u_\Delta}(1; -1; 2)$.

b) Khoảng cách từ điểm $M(-1; -3; 1)$ đến mặt phẳng (α) bằng $\sqrt{6}$.

c) Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) bằng 60° .

d) Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với (α) thì khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) bằng $\sqrt{3}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) Đúng.

b) Sai.

Khoảng cách từ điểm $M(-1; -3; 1)$ đến mặt phẳng (α) là

$$d(M, (\alpha)) = \frac{|-1 + 2 \cdot (-3) - 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

c) Sai.

Đường thẳng Δ có vector chỉ phương là $\vec{u}_\Delta(1; -1; 2)$, mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}(1; 2; -1)$

Gọi φ là góc giữa d và (P) thì:

$$\sin \varphi = \left| \cos(\vec{u}_\Delta; \vec{n}_{(P)}) \right| = \frac{|1 \cdot 1 - 2 \cdot 2|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

Suy ra $\varphi = 30^\circ$.

d) Đúng.

Vì (P) chứa Δ và vuông góc với (α) nên sẽ có hai vector chỉ phương là $\vec{n}_\alpha(1; 2; -1), \vec{u}_\Delta(1; -1; 2)$

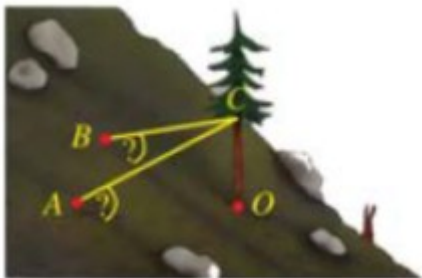
Suy ra một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_P = [\vec{n}_\alpha, \vec{u}_\Delta] = (3; -3; -3) = (1; -1; -1)$

Mặt phẳng (P) đi qua $A(1; 2; 2)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n}_P(1; -1; -1)$ có phương trình tổng quát là $1(x-1) - 1(y-2) - 1(z-2) = 0 \Leftrightarrow x - y - z + 3 = 0$

Suy ra khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) là

$$d(O, (P)) = \frac{|0 - 0 - 0 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Câu 49. Trên một sườn núi (có độ nghiêng đều), người ta trồng một cây thông và muốn giữ nó không bị nghiêng bằng hai sợi dây neo như hình. Giả thiết cây thông mọc thẳng đứng và trong một hệ tọa độ phù hợp, các điểm O (gốc cây thông) và A, B (nơi buộc dây neo) có tọa độ tương ứng là $O(0; 0; 0), A(3; -4; 2), B(-5; -2; 1)$, đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét. Biết rằng hai dây neo đều được buộc vào cây thông tại điểm $C(0; 0; 5)$ và được kéo căng tạo thành các đoạn thẳng.



Các mệnh đề sau đúng hay sai.

a) $AC = \sqrt{34}(m)$

b) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (OAB) là $n = (0; 1; 2)$

c) Góc giữa CA so với mặt phẳng sườn núi (làm tròn đến hàng đơn vị của độ) là 42° .

d) Góc giữa BC so với mặt phẳng sườn núi (làm tròn đến hàng đơn vị của độ) là 50° .

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Đúng.

Do điểm $C(0; 0; 5)$ nên $AC = \sqrt{(3-0)^2 + (-4-0)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{34}(m)$;

b) Đúng.

Ta có: $\vec{OA} = (3; -4; 2), \vec{OB} = (-5; -2; 1)$

nên

$$[\vec{OA}, \vec{OB}] = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = (0; -13; -26)$$

Vì thế, vector $n = (0; 1; 2)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (OAB) .

Mặt khác, do $\vec{CA} = (3; -4; -3), \vec{BC} = (5; 2; 4)$ nên ta có:

$$\sin(CA, (OAB)) = |\cos(CA, n)| = \frac{|\vec{CA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|3 \cdot 0 + (-4) \cdot 1 + (-3) \cdot 2|}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{170}}$$

c) Sai.

suy ra $(CA, (OAB)) \approx 50^\circ$.

Vậy góc tạo bởi dây neo CA và mặt phẳng sườn núi là khoảng 50° .

$$\sin(BC, (OAB)) = |\cos(BC, n)| = \frac{|\vec{BC} \cdot \vec{n}|}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2|}{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{3}$$

d) Sai.

suy ra $(BC, (OAB)) \approx 42^\circ$.

Vậy góc tạo bởi dây neo BC và mặt phẳng sườn núi là khoảng 42° .

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10; 3; 0)$ và chuyển động đều theo cáp có vector chỉ phương là $u = (2; -2; 1)$ với tốc độ là $4,5(m/s)$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét).



Các mệnh đề sau đúng hay sai

$$\frac{x+10}{2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z}{1}$$

a) Phương trình đường cáp là

b) Giả sử sau $t(s)$ kể từ xuất phát ($t \geq 0$), cabin đến điểm M . Toạ độ của điểm M theo t là $M(9t+10; -9t+3; t)$.

c) Cabin dừng ở điểm B có hoành độ $x_B = 550$. Độ dài quãng đường AB (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét) bằng 810 mét.

d) Đường cáp AB tạo với mặt phẳng (Oxy) góc (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ) là 19° .

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) Sai.

Phương trình chính tắc của đường cáp là: $\frac{x-10}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$

b) Sai.

Do tốc độ chuyển động của cabin là $4,5m/s$ nên độ dài AM bằng $4t(m)$.

Vì vậy $|\overrightarrow{AM}| = 4,5t(t \geq 0)$.

Do hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và u là cùng phương và cùng hướng nên $\overrightarrow{AM} = ku$ với k là số thực dương nào đó.

Suy ra $|\overrightarrow{AM}| = k|u| = k \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1} = 3k$

Do đó $3k = 4,5t$. Suy ra $k = \frac{3t}{2}$. Vì thế, ta có: $\overrightarrow{AM} = \frac{3t}{2}u = \left(3t; -3t; \frac{3t}{2}\right)$.

Gọi toạ độ của điểm M là $M(x_M; y_M; z_M)$.

Do $\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A; y_M - y_A; z_M - z_A) = \left(3t; -3t; \frac{3t}{2}\right)$

Nên $\begin{cases} x_M = 3t + x_A \\ y_M = -3t + y_A \\ z_M = \frac{3t}{2} + z_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = 3t + 10 \\ y_M = -3t + 3 \\ z_M = \frac{3t}{2} \end{cases}$

Vậy điểm M có toạ độ là $\left(3t+10; -3t+3; \frac{3t}{2}\right)$.

c) Đúng.

Do $x_B = 550$ nên $3t+10 = 550 \Rightarrow t = 180(s)$.

Do đó, ta có điểm $B(550; -537; 270)$.

$$\text{Vậy } AB = \sqrt{(550 - 10)^2 + (-537 - 3)^2 + (270 - 0)^2} = \sqrt{656100} = 810(m).$$

d) Đúng.

Đường thẳng AB có vector chỉ phương $u = (2; -2; 1)$ và mặt phẳng (Oxy) có vector pháp tuyến $k = (0; 0; 1)$.

$$\sin(\Delta; (Oxy)) = |\cos(u; k)| = \frac{|u \cdot k|}{|u| \cdot |k|} = \frac{1}{1.3} = \frac{1}{3}$$

Do đó, ta có:

$$\text{Vậy } (\Delta; (Oxy)) \approx 19^\circ.$$

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - z - 5 = 0$. Các mệnh đề sau đúng hay sai

a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1; 2; 2)$.

b) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{5}{6}$.

c) Tọa độ giao điểm của d và (P) là $A(1; 3; 2)$.

d) Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) thì $\cos \varphi = \frac{1}{3\sqrt{6}}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
--------	--------	---------	--------

a) Sai.

b) Sai.

Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) là $d(O, (P)) = \frac{|0 + 2.0 - 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$.

c) Đúng.

Phương trình tham số của đường thẳng d là
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2t \end{cases}$$

Gọi $A(2 - t; 1 + 2t; 2t)$ thuộc đường thẳng d thay tọa độ điểm A vào mặt phẳng (P) ta được: $2 - t + 2(1 + 2t) - 2t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Với $t = 1 \Rightarrow A(1; 3; 2)$ là tọa độ giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng.

d) Sai.

Vector chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d(-1; 2; 2)$ và vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_P(1; 2; -1)$.

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{n}_P|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{n}_P|} = \frac{-1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1)}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{3\sqrt{6}}$$

Suy ra

$$d: \begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \text{ . Các}$$

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 1)$ và đường thẳng

a) Một vector chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d(4; 1; -2)$.

b) Đường thẳng d đi qua điểm $M(2; -3; 1)$.

c) Gọi (Q) là mặt phẳng qua điểm A và chứa đường thẳng d thì khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (Q) bằng $\frac{9\sqrt{357}}{119}$.

d) Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A trên d thì hoành độ của điểm A' bằng 2.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------------	---------------	----------------	---------------

a) Đúng.

b) Đúng.

c) Đúng.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(2; -3; 1)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}_d(4; 1; -2)$

Suy ra $\vec{AM} = (1; -4; 0)$

Mặt phẳng (Q) đi qua điểm A và chứa đường thẳng d có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_P = [\vec{u}_d, \vec{AM}] = (8; 2; 17)$

Suy ra phương trình mặt phẳng (Q) là $8(x - 1) + 2(y - 1) + 17(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 8x + 2y + 17z - 27 = 0$

$$\Rightarrow d(O; (Q)) = \frac{|8 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 17 \cdot 0 - 27|}{\sqrt{8^2 + 2^2 + 17^2}} = \frac{27}{\sqrt{357}} = \frac{9\sqrt{357}}{119}$$

d) Đúng.

Gọi $A'(6 - 4t; -2 - t; -1 + 2t) \in d \Rightarrow \vec{AA'} = (5 - 4t; -3 - t; -2 + 2t)$

Vì $\vec{AA'} \perp d \Rightarrow \vec{AA'} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 4(5 - 4t) + 1(-3 - t) - 2(-2 + 2t) = 0 \Leftrightarrow -21t + 21 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Suy ra hoành độ của điểm A' là $x_{A'} = 6 - 4 \cdot 1 = 2$.

Câu 53. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 5y + 2z - 9 = 0$ và điểm $A(3; 6; 3)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai

a) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_{(P)} = (1; 5; -9)$.

b) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng $\sqrt{30}$.

c) Đường thẳng qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 6 - 5t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

d) Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A trên (P) thì tung độ của điểm A' bằng 3.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------------	----------------	----------------	---------------

a) Sai.

Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_{(P)} = (1; 5; 2)$.

b) Đúng.

Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) là $d(A, (P)) = \frac{|3 + 5 \cdot 6 + 2 \cdot 3 - 9|}{\sqrt{1^2 + 5^2 + 2^2}} = \sqrt{30}$.

c) Đúng.

Gọi d là đường thẳng qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) .

Một vector chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d = \vec{n}_P = (1; 5; 2) \Rightarrow (-1; -5; -2)$ cũng là một vector chỉ phương của đường thẳng d

Phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 6 - 5t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$

d) Sai.

Từ bước c) ta có phương trình đường thẳng AA' là $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 6 - 5t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$

Gọi

$$A'(3 - t; 6 - 5t; 3 - 2t) \in AA' \Rightarrow A' \in (P) \Rightarrow 3 - t + 5(6 - 5t) + 2(3 - 2t) - 9 = 0 \Leftrightarrow -30t + 30 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow A'(2; 1; 1)$$

Vậy tung độ của A' bằng 1.

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 1), B(2; 3; -1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 3z - 7 = 0$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Điểm $B \in (\alpha)$.

b) Phương trình đường thẳng AB là: $\frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

c) Phương trình mặt phẳng qua A, B và vuông góc với (α) là $x+5y+3z-14=0$.

d) Phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Oz và đi qua điểm A là $(Q): 2x-y=0$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) Sai. Xét điểm $B(2;3;-1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x-2y+3z-7=0$.

Ta có: $2-2.3+3.(-1)-7=-14 \neq 0 \Rightarrow B \notin (\alpha)$

b) Sai.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 1; -2)$

Phương trình đường thẳng AB là: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$

c) Đúng.

Ta có: Vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) là: $\overrightarrow{n_{(\alpha)}} = (1; -2; 3)$.

Suy ra: Vector pháp tuyến của mặt phẳng qua A, B và vuông góc với (α) là:

$$\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{n_{(\alpha)}}] = (1; 5; 3)$$

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là: $1(x-1)+5(y-2)+3(z-1)=0 \Rightarrow x+5y+3z-14=0$

d) Đúng. Ta có: $\overrightarrow{n_{(Q)}} = [\overrightarrow{OA}; k] = [(1; 2; 1); (0; 0; 1)] = (2; -1; 0)$

Phương trình mặt phẳng (Q) là $(Q): 2x-y=0$.

Câu 55. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x+y-z-1=0$ và $(Q): x-2y+z-5=0$. Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (Q) . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $n(2;1;-1)$.

b) Điểm $A(2;0;3)$ thuộc đường thẳng Δ .

c) Một vector chỉ phương của đường thẳng Δ là $u(1;3;5)$.

d) Phương trình tham số của đường thẳng Δ là
$$\begin{cases} x=1-t \\ y=-3-3t, t \in \mathbb{R} \\ z=-2-5t \end{cases}$$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
----------------	----------------	----------------	----------------

a) Đúng.

b) Đúng.

Điểm $(2; 0; 3)$ thỏa mãn $\begin{cases} 2.2 + 0 - 3 - 1 = 0 \\ 2 - 2.0 + 3 - 5 = 0 \end{cases}$ nên $(2; 0; 3)$ thuộc đường thẳng Δ .

c) Đúng.

$$\vec{u}_{\Delta} = - \begin{bmatrix} \vec{n}_P \\ \vec{n}_Q \end{bmatrix} = (1; 3; 5)$$

d) Đúng.

Giả sử $A(2; 0; 3) \in \Delta = (P) \cap (Q)$

Vector pháp tuyến của hai mặt phẳng $(P), (Q)$ lần lượt là $\vec{n}_P(2; 1; -1), \vec{n}_Q(1; -2; 1)$

Suy ra một vector chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}_{\Delta} = \begin{bmatrix} \vec{n}_P \\ \vec{n}_Q \end{bmatrix} = (-1; -3; -5)$.

Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3t \\ z = 3 - 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - u \\ y = -3 - 3u, t, u \in \mathbb{R} \\ z = -2 - 5u \end{cases}$

Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x - y + 3z - 1 = 0$ và $(Q): 3x - 7z + 2 = 0$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}(3; -7; 2)$.

b) Điểm $(-3; -7; -1)$ thuộc đường thẳng Δ .

c) Một vector chỉ phương của Δ là $(7; -13; 6)$.

d) Phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = 4 - 7t \\ y = 9 - 13t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 6t \end{cases}$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------------	----------------	---------------	---------------

a) Sai. Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}(3; 0; -7)$.

b) Đúng.

(Vì Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) nên nếu điểm $(-3; -7; -1)$ thuộc đường thẳng Δ thì tọa độ điểm trên sẽ thỏa mãn hai phương trình $mp(P)$ và (Q) và ngược lại.)

Sau khi kiểm tra, ta thấy điểm $(-3; -7; -1)$ thỏa mãn hai phương trình $mp(P)$ và (Q)

$\Rightarrow$ Điểm $(-3; -7; -1)$ thuộc đường thẳng Δ .

c) Sai.

Ta có vector pháp tuyến của hai mặt phẳng $(P), (Q)$ lần lượt là $\vec{n}_P(1; -1; 3), \vec{n}_Q(3; 0; -7)$

Suy ra một vector chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (7; 16; 3)$.

d) Sai.

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là
$$\begin{cases} x = -3 + 7t \\ y = -7 + 16t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

Câu 57. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1}$ và điểm $A(1; 3; -1)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Một vector chỉ phương của đường thẳng d là $a(2; 3; -1)$.

b) Phương trình đường thẳng qua A và song song với d là $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

c) Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với d là $2x + 3y - z - 12 = 0$.

d) Phương trình mặt phẳng (P) chứa d và đi qua A là: $x + y + 5z + 1 = 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Đúng. Đường thẳng d có vector chỉ phương là $u(2; 3; -1)$

b) Sai. Vì đường thẳng cần Viết song song với d nên nhận vector chỉ phương của d làm vector chỉ phương của mình.

Phương trình đường thẳng đi qua A và song song với d là: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{-1}$

c) Đúng. Gọi phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với d là mặt phẳng (P) .

Suy ra, (P) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_P = u = (2; 3; -1)$.

$$2 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - 3) - 1 \cdot (z + 1) = 0$$

Phương trình mặt phẳng (P) là: $\Rightarrow 2x - 2 + 3y - 9 - z - 1 = 0 \Rightarrow 2x + 3y - z - 12 = 0$

d) Đúng. Đường thẳng d đi qua một điểm $M(3; 1; -1) \Rightarrow \vec{MA} = (-2; 2; 0)$.

Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và đi qua điểm A có vector pháp tuyến là: $\vec{n} = [\vec{MA}; u] = (-2; -2; -10) = -2(1; 1; 5)$. Suy ra phương trình mặt phẳng (P) là: $x + y + 5z + 1 = 0$.

- Câu 58.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;3;2)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$. Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và chứa đường thẳng d . Các mệnh đề sau đúng hay sai.
- a) Một vector chỉ phương của đường thẳng d là $u(-2;1;2)$.
- b) Đường thẳng qua A và song song với d có phương trình là $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2}$.
- c) Mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là $2x - y - 2z + 1 = 0$.
- d) Khoảng cách từ điểm $M(0;4;-3)$ đến mặt phẳng (Q) bằng 5.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

a) Một vector chỉ phương của đường thẳng d là $u(-2;1;2)$.

b) Đường thẳng qua A và song song với d có phương trình là $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{-2}$.

c) Mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là $2(x-3) - (y-3) - 2(z-2) = 0$ hay $2x - y - 2z - 1 = 0$.

d) Lấy $M(-1;2;3) \in d$.

Ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (-4; -1; 1) \\ n_d = (2; -1; -2) \end{cases} \Rightarrow (\overrightarrow{AM}, n_d) = (3; -6; 6) = 3(1; -2; 2)$$

Phương trình mặt phẳng (Q) qua A và chứa đường thẳng d là $(x-3) - 2(y-3) + 2(z-2) = 0$ hay $x - 2y + 2z - 1 = 0$.

Khoảng cách từ điểm $M(0;4;-3)$ đến mặt phẳng (Q) bằng

$$d(M, (Q)) = \frac{|0 - 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 5$$

- Câu 59.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3;2;3)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = -1+2t \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Đường thẳng qua A và song song với d có phương trình là $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1}$.

b) Mặt phẳng qua A và chứa đường thẳng d có một vector pháp tuyến là $n(0;2;-1)$.

c) Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d bằng $\sqrt{30}$.

d) Đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt đường thẳng d có một vector chỉ phương là $(5; -1; 2)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------------	----------------	----------------	---------------

a) Sai.

Gọi d' là đường thẳng đi qua A và song song với d . Vì $d' // d \Rightarrow$

Một vector chỉ phương của đường thẳng d' là $u(1;1;2)$.

$$\Rightarrow \text{Phương trình đường thẳng } d' \text{ là } \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}.$$

b) Đúng.

Gọi (P) là mặt phẳng qua A và chứa đường thẳng d

Chọn điểm $B(1;0;-1) \in d \Rightarrow \overrightarrow{AB}(4;-2;-4)$

Mặt phẳng (P) có hai vector chỉ phương là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_d}(1;1;2)$

$$\Rightarrow \text{Một vector pháp tuyến của } (P) \text{ là } \overrightarrow{n_p} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_d} \right] = (0; -12; 6) = -6(0; 2; -1)$$

c) Đúng.

Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng d .

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH}(1+t; t; -1+2t)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = (4+t; t-2; -4+2t)$$

$$\text{Vì } \overrightarrow{AH} \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot (4+t) + 1 \cdot (t-2) + 2 \cdot (-4+2t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6t - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow H(2;1;1) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{30}$$

d) Sai.

(Ghi nhớ: Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước)

Dựa vào **Lời giải** phần c) ta suy ra $\overrightarrow{AH} \equiv \Delta$

Suy ra một vector chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{AH}(5; -1; -2)$.

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$, đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 1 = 0$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{2}$$

a) Đường thẳng qua A và song song với d có phương trình là

b) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng $\sqrt{6}$.

c) Cosin góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng $\frac{\sqrt{21}}{14}$.

d) Gọi Δ là đường thẳng đi qua A cắt đường thẳng d và song song với (P) thì Δ có một vector chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = (2; -9; -5)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

a) Sai.

Gọi d' là đường thẳng qua A và song song với d

$$\forall d' // d \Rightarrow \vec{u}_{d'} = \vec{u}_d = (1; 3; 2)$$

Suy ra phương trình đường thẳng d' là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}$.

b) Đúng.

Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) là $d(A, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 + 1 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$.

c) Sai.

Ta có vector chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d(1; 3; 2)$; vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_p(2; 1; -1)$

$$\sin(d, (P)) = \cos(\vec{u}_d, \vec{n}_p) = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{n}_p|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{n}_p|} = \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{21}}{14}$$

Ta có:

d) Đúng.

Giả sử $\Delta \cap d = M \Rightarrow M(2+t; 3t; -2+2t)$

Suy ra vector chỉ phương của $\Delta: \vec{AM}(1+t; 3t-2; -1+2t)$

Ta lại có $\Delta \perp (P)$

$$\Rightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n}_p = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (1+t) + 1 \cdot (3t-2) - 1 \cdot (-1+2t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3t+1=0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \vec{AM} \left(\frac{2}{3}; -3; -\frac{5}{3} \right)$$

$\Rightarrow (2; -9; -5)$ cũng là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ .

Câu 61. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x - y - z - 1 = 0$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_{(P)} = (-1; 1; 1)$.

b) Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) .

c) Khoảng cách từ điểm $A(-2; 1; -1)$ đến mặt phẳng (P) bằng $\sqrt{3}$.

d) Gọi (Δ) đường thẳng đi qua điểm $M(1; 1; -2)$ cắt (d) và song song với mặt phẳng (P) thì (Δ) có một vector chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = (8; 3; 5)$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------	---------	---------	---------

a) Đúng.

b) Đúng.

Cách 1:

Giả sử $M(-1+2t; 1+t; 2+3t) \in d$

Thay tọa độ điểm M vào phương trình mặt phẳng (P) ta được:
 $-1+2t - (1+t) - (2+3t) - 1 = 0 \Leftrightarrow -2t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{5}{2}$ (phương trình có 1 nghiệm)

Suy ra $d \cap (P) = M$ hay đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) .

Cách 2: Ta có vector chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d(2; 1; 3)$ và vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_p(1; -1; -1)$.

Ta xét tích $\vec{u}_d \cdot \vec{n}_p = 2 - 1 - 3 = -2 \neq 0$

$\Rightarrow d$ cắt mặt phẳng (P) .

c) Đúng.

Khoảng cách từ điểm $A(-2; 1; -1)$ đến mặt phẳng (P) là
 $d(A, (P)) = \frac{|-2 - 1 + 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

d) Đúng.

Giả sử $\Delta \cap d = N \Rightarrow N(-1+2t; 1+t; 2+3t)$

Suy ra vector chỉ phương của $\Delta : \vec{MN}(-2+2t; t; 4+3t)$

Ta lại có: $\Delta \perp (P) \Rightarrow \vec{MN} \cdot \vec{n}_p = 0$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot (-2+2t) - 1 \cdot t - 1 \cdot (4+3t) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2t - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -3$$

$$\Rightarrow \vec{MN}(-8; -3; -5)$$

$\Rightarrow (8; 3; 5)$ cũng là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ .

Câu 62. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z = 0$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Một vector chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d = (1; 1; -1)$.
- b) Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) .
- c) Khoảng cách từ điểm $M(1; 3; 1)$ đến mặt phẳng (P) bằng 3.
- d) Đường thẳng Δ nằm trong (P) , cắt d và vuông góc với d có phương trình là
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$
.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
----------------	----------------	---------------	----------------

a) Đúng.

b) Đúng.

Cách 1:

Xét tích vô hướng $\vec{u}_d \cdot \vec{n}_P$ và thay tọa độ điểm thuộc đường thẳng d vào phương trình mặt phẳng (P)

Ta có $\vec{u}_d = (-1; -1; 1); \vec{n}_P = (2; 1; -2)$

$$\Rightarrow \vec{u}_d \cdot \vec{n}_P = -2 - 1 - 2 = -5 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) .

Cách 2:

Chọn điểm $E \in d \Rightarrow E(2-t; -1-t; -1+t)$

Thay tọa độ điểm E vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $2 \cdot (2-t) + (-1-t) - 2 \cdot (-1+t) = 0 \Leftrightarrow -5t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

$\Rightarrow$ Phương trình có một nghiệm duy nhất.

$\Rightarrow$ Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) .

c) Sai.

Khoảng cách từ điểm $M(1; 3; 1)$ đến mặt phẳng (P) là
$$d(M, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 + 3 - 2 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{3} = 1$$
.

d) Đúng.

Dựa vào **Lời giải** phần b), ta có $d \cap (P) = E(1; -2; 0) \in \Delta$

Lại có: $u_{\Delta} = \begin{bmatrix} u_d & u_p \end{bmatrix} = (1; 0; 1)$

$$\Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Câu 63. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{3}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1; -1; 3)$.

b) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) Gọi $A(a; b; c)$ là giao điểm của d và (P) thì $a+b+c=3$.

d) Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (P) có phương trình tham số là

$$\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 8t \\ z = 7t \end{cases}$$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

a) Sai.

b) Đúng.

c) Sai.

Ta có $A \in d \Rightarrow$

Tham số hoá điểm A ta được $A(1+t; 1-2t; -3+3t); A \in (P)$

$$\Rightarrow 1+t+1-2t-3+3t-1=0$$

$$\Leftrightarrow 2t-2=0$$

$$\Leftrightarrow t=1$$

$$\Rightarrow A(2; -1; 0)$$

$$\Rightarrow a+b+c=1$$

d) Đúng.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm.

Gọi A là giao điểm của d và (P) .

Gọi $A(1+t; 1-2t; -3+3t) \in d$

Cho $A \in (P)$

$$\Rightarrow 1+t+1-2t-3+3t-1=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow A(2; -1; 0) \in \Delta$$

Áp dụng công thức nhanh

Ta có: $\vec{u}_\Delta = \left[\vec{n}_{(P)}; \left[\vec{u}_d; \vec{n}_{(P)} \right] \right] = - (1; -8; 7)$

Do đó $\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 8t \\ z = 7t \end{cases}$

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -3 - 2t \end{cases} \text{ và mặt phẳng}$$

Câu 64. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(P): 2x + 2y - z - 1 = 0$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d = (1; 2; -3)$.

b) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{1}{3}$.

c) Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) thì $\sin \varphi = \frac{4\sqrt{5}}{15}$.

d) Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (P) có một vectơ chỉ phương là $(-1; 8; -14)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------------	----------------	----------------	---------------

a) Sai.

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d = (1; 0; -2)$.

b) Đúng.

c) Đúng.

Ta có vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d = (1; 0; -2)$ và một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_P(2; 2; -1)$.

Áp dụng công thức, ta có

$$\sin \varphi = \cos(\vec{u}_d, \vec{n}_P) = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{n}_P|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{n}_P|} = \frac{|1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{4\sqrt{5}}{15}$$

d) Sai.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm.

Gọi A là giao điểm của d và (P) Gọi $A(1+t; 2; -3-2t) \in d$, cho $A \in (P) \Rightarrow 2+2t+4+3+2t-1=0 \Leftrightarrow t=-2 \Rightarrow A(-1; 2; 1) \in \Delta$

Áp dụng công thức nhanh ta có: $\vec{u}_\Delta = \left[\vec{n}_{(P)}; \left[\vec{u}_d; \vec{n}_{(P)} \right] \right] = -2(1; -8; -14)$

Câu 65. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{2}, d_2: \begin{cases} x=1+3t \\ y=1-4t \\ z=-1 \end{cases}. \text{ Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau}$$

a) Đường thẳng d_2 có một vector chỉ phương là $\vec{u}_2 = (3; -4; -1)$.

b) d_1 và d_2 là hai đường thẳng chéo nhau.

c) Cosin góc tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2 là $\frac{11}{15}$.

d) Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi đường thẳng d_1, d_2 có vector chỉ phương là $(7; -11; 5)$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) Sai.

Đường thẳng d_2 có một vector chỉ phương là $\vec{u}_2 = (3; -4; 0)$.

b) Sai.

Cách 1:

Vector chỉ phương của hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt là $\vec{u}_1(1; -2; 2), \vec{u}_2(3; -4; 0)$.

$$\Rightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (8; 6; 2)$$

Chọn $M_1(1; 1; -1) \in d_1, M_2(4; -3; -1) \in d_2 \Rightarrow \vec{M_1M_2} = (3; -4; 0)$

Suy ra $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{M_1M_2} = 16 - 12 - 4 = 0$ (Vì $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{M_1M_2} \neq 0 \Leftrightarrow d_1$ và d_2 chéo nhau)

Vậy d_1 và d_2 không chéo nhau.

Cách 2:

Để dàng thấy được $\begin{cases} K(1; 1; -1) \in d_1 \\ K(1; 1; -1) \in d_2 \end{cases} \Rightarrow K = d_1 \cap d_2$

c) Đúng.

Vector chỉ phương của đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt là $\vec{u}_1(1; -2; 2), \vec{u}_2(3; -4; 0)$.

$$\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|} = \frac{|3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-4) + 0 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} = \frac{11}{15}$$

Ta có

d) Đúng.

Hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm $K(1; 1; -1)$ và có vector chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1(1; -2; 2), \vec{u}_2(3; -4; 0)$.

Ta có: $|\vec{u}_1| = 3, |\vec{u}_2| = 5$ và $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 11 > 0$ nên góc giữa $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ là góc nhọn.

Do đó
$$\vec{u}_\Delta = \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|} + \frac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|} = \frac{(1; -2; 2)}{3} + \frac{(3; -4; 0)}{5} = \frac{1}{15}(14; -22; 10) = \frac{2}{15}(7; -11; 5)$$

Câu 66. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ΔABC có $A(1; -2; 1), B(-2; 2; 1)$ và $C(1; -2; 2)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Độ dài đoạn thẳng $AB = 5$.

b) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 5$.

c) Diện tích tam giác ABC bằng 5.

d) Đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC cắt mặt phẳng (Oyz) tại điểm $\left(0; \frac{-2}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Đúng.

b) Sai.

Ta có $\vec{AB}(-3; 4; 0), \vec{AC}(0; 0; 1) \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$

c) Sai.

Dựa vào kết quả phần b) ta có $AB \perp AC$

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{5}{2}$.

d) Đúng.

Ta có: $\vec{AB}(-3; 4; 0), \vec{AC}(0; 0; 1)$ và $AB = 5, AC = 1$

Vector chỉ phương của đường phân giác trong góc A của tam giác ABC là:

$$\vec{u} = \frac{\vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{AC}}{AC} = \frac{1}{5}(-3; 4; 0) + \frac{(0; 0; 1)}{1} = \left(-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 1\right) = \frac{1}{5}(-3; 4; 5)$$

$$AD: \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + 4t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$$

Phương trình đường phân giác là:

$$\Rightarrow AD \cap (Oyz): x = 0 \text{ khi } t = \frac{1}{3}.$$

Do đó giao điểm là $\left(0; \frac{-2}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

Câu 67. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$ và $\Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M(1; -2; -1)$.

b) Cosin góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng $\frac{11}{14}$.

c) d_1 và d_2 là hai đường thẳng cắt nhau.

d) Đường thẳng song song với $d: \begin{cases} x=3 \\ y=-1+t \\ z=4+t \end{cases}$ và cắt cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 lần lượt tại A và B thì $AB = \sqrt{2}$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) Sai.

b) Đúng.

Vector chỉ phương của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt là $\vec{u}_1(3; 1; 2), \vec{u}_2(1; 2; 3)$.

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|} = \frac{|3+2+6|}{\sqrt{3^2+1^2+2^2} \cdot \sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{11}{14}$$

Suy ra

c) Sai.

d_1 và d_2 là hai đường chéo nhau.

d) Đúng.

Đường thẳng cần lập là Δ ta có $\Delta // d \Rightarrow \vec{u}_\Delta = \vec{u}_d = (0; 1; 1)$.

Giả sử đường thẳng Δ cắt Δ_1 và Δ_2 lần lượt tại A, B

$$\Rightarrow A(-1+3a; 2+a; 1+2a), \quad B(1+b; 2b; -1+3b)$$

Ta có $\vec{AB}(-3a+b+2; -a+2b-2; -2a+3b-2)$

$$\text{Ta có: } \vec{AB} // \vec{u}_d \Rightarrow \vec{AB} = k(0; 1; 1) \Rightarrow \begin{cases} -3a+b+2=0 \\ -a+2b-2=k \\ -2a+3b-2=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ k=-1 \end{cases} \Rightarrow AB = \sqrt{2}$$

Câu 68. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình lần lượt là

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}, \quad \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1+t \\ z = 3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M(0; -1; 2)$.

b) Một vector chỉ phương của đường thẳng d_2 là $\vec{u}_2 = (2; 1; 3)$.

c) d_1 và d_2 là hai đường thẳng chéo nhau.

d) Phương trình đường thẳng vuông góc với $(P): 7x + y - 4z = 0$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 là $\frac{x-2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-4}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------------	---------------	----------------	----------------

a) Sai.

b) Sai.

Một vector chỉ phương của đường thẳng d_2 là $\vec{u}_2 = (2; 1; 0)$.

c) Đúng.

Ghi nhớ: d_1 và d_2 chéo nhau

$\Leftrightarrow [\vec{u}_1; \vec{u}_2] \cdot \vec{M_1M_2} \neq 0$. (Trong đó, $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ lần lượt là vector chỉ phương của đường thẳng $d_1, d_2; M_1 \in d_1, M_2 \in d_2$.)

Vector chỉ phương của hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt là $\vec{u}_1(2; -1; 1), \vec{u}_2(2; 1; 0)$

$$\Rightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-1; 2; 4)$$

Chọn $M_1(0; 1; -2) \in d_1, M_2(-1; 1; 3) \in d_2 \Rightarrow \vec{M_1M_2}(-1; 0; 5)$

Xét tích $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{M_1M_2} = 1 + 0 + 20 = 21 \neq 0$

$\Rightarrow d_1$ và d_2 chéo nhau.

d) Đúng.

Gọi d là đường thẳng vuông góc với (P) và cắt hai đường thẳng d_1, d_2

Giả sử d cắt d_1, d_2 lần lượt tại A, B .

Suy ra phương trình đường thẳng d là $\frac{x-2}{-7} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{4} \Leftrightarrow \frac{x-2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-4}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow A(2u; 1-u; -2+u), B(-1+2t; 1+t; 3) \\
&\Rightarrow \overrightarrow{AB}(-1+2t-2u; t+u; 5-u) \text{ Vì } d \perp (P) \\
&\Rightarrow u_d = \overrightarrow{AB} / |n_p| \Rightarrow \overrightarrow{AB} = k(7; 1; -4) \\
&\Rightarrow \begin{cases} -1+2t-2u=7k \\ t+u=k \\ 5-u=-4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ k=-1 \\ u=1 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}(-7; -1; 4)
\end{aligned}$$

Câu 69. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$ và $d_2: \begin{cases} x=3+t \\ y=2+t \\ z=5 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M(2; 1; 2)$.

b) Một vector chỉ phương của đường thẳng d_2 là $\vec{u}_2 = (1; 1; 0)$.

c) d_1 và d_2 tạo với nhau một góc bằng 60° .

d) Đường vuông góc chung của d_1 và d_2 đi qua điểm $Q(4; -1; 9)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
----------------	----------------	---------------	----------------

a) Đúng.

b) Đúng.

c) Sai.

Vector chỉ phương của đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt là $\vec{u}_1(1; -1; -1), \vec{u}_2(1; 1; 0)$.

$$\cos(\vec{d}_1, \vec{d}_2) = \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = 0$$

Ta có

Suy ra góc giữa d_1 và d_2 bằng 90° .

d) Đúng.

Gọi d là đường vuông góc chung của d_1 và d_2

Chọn $A(2+u; 1-u; 2-u) \in d_1; B(3+t; 2+t; 5) \in d_2$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1+t-u; 1+t+u; 3+u)$$

Ta có vector chỉ phương của đường thẳng d_1, d_2 lần lượt là $\vec{u}_1(1; -1; -1), \vec{u}_2(1; 1; 0)$.

$$\begin{aligned}
&\bullet \begin{cases} d \perp d_1 \\ d \perp d_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 1(1+t-u) - 1(1+t+u) - 1(3+u) = 0 \\ 1(1+t-u) + 1(1+t+u) + 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3u - 3 = 0 \\ 2t + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ t = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A(1; 2; 3), \overrightarrow{AB}(1; -1; 2)$$

Đường thẳng d đi qua $A(1; 2; 3)$ và có vector chỉ phương $\overrightarrow{AB}(1; -1; 2)$ có phương trình là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$.

Thay tọa độ điểm $Q(4; -1; 9)$ ta thấy thỏa mãn phương trình đường thẳng d .

Suy ra đường vuông góc chung của d_1 và d_2 đi qua điểm $Q(4; -1; 9)$.

Câu 70. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình

$$d_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=-5+t \end{cases} \quad \text{và} \quad d_2: \begin{cases} x=0 \\ y=4-2u \\ z=5+3u \end{cases} \quad \text{Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau}$$

a) Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M(1; 0; -5)$.

b) Một vector chỉ phương của đường thẳng d_2 là $\vec{u}_2 = (0; 4; 5)$.

c) d_1 và d_2 là hai đường thẳng cắt nhau.

d) Đường vuông góc chung của d_1 và d_2 là $\frac{x-4}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{-2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) Đúng.

b) Sai.

Một vector chỉ phương của đường thẳng d_2 là $\vec{u}_2 = (0; -2; 3)$.

c) Sai.

$$\text{Ghi nhớ: } d_1 \text{ và } d_2 \text{ cắt nhau khi và chỉ khi } \begin{cases} \begin{bmatrix} \vec{u}_1; \vec{u}_2 \end{bmatrix} \cdot \vec{M_1M_2} = 0 \\ \vec{u}_1 \neq k \vec{u}_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \vec{u}_1(1; 0; 1), \vec{u}_2(0; -2; 3) &\Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{u}_1; \vec{u}_2 \end{bmatrix} = (2; -3; -2) \\ M_1(1; 0; -5) \in d_1; M_2(0; 4; 5) \in d_2 &\Rightarrow \vec{M_1M_2}(-1; 4; 10) \\ + \begin{bmatrix} \vec{u}_1; \vec{u}_2 \end{bmatrix} \cdot \vec{M_1M_2} &= -2 - 12 - 20 = -34 \neq 0 \end{aligned}$$

Vậy d_1 và d_2 không cắt nhau.

d) Đúng.

Gọi d là đường vuông góc chung của d_1 và d_2

$$\text{Chọn } A(1+t; 0; -5+t) \in d_1; B(0; 4-2u; 5+3u) \in d_2 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1-t; 4-2u; 10+3u-t)$$

Ta có vector chỉ phương của đường thẳng d_1, d_2 lần lượt là $\vec{u}_1(1; 0; 1), \vec{u}_2(0; -2; 3)$.

$$\text{Vì } \begin{cases} d \perp d_1 \\ d \perp d_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \vec{AB} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1(-1-t) + 0 + 1(10+3u-t) = 0 \\ 0 - 2(4-2u) + 3(10+3u-t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2t+3u = -9 \\ -3t+13u = -22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ u=-1 \end{cases} \Rightarrow A(4; 0; -2), \vec{AB}(-4; 6; 4)$$

Đường thẳng d đi qua $A(4; 0; -2)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}_d(2; -3; -2)$ có phương trình là $\frac{x-4}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{-2}$.

Câu 71. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -1; 1)$ và hai đường $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+1}{-2}$ và $d_2: \begin{cases} x=2-t \\ y=t \\ z=3t \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M(1; -3; -1)$.

b) Đường thẳng qua A và song song với d_2 có phương trình là $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3}$.

c) d_1 và d_2 là hai đường thẳng chéo nhau.

d) Đường thẳng d đi qua A đồng thời cắt cả hai đường d_1 và d_2 có một vector chỉ phương là $(1; 1; 0)$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng.

b) Sai.

Gọi d là đường thẳng qua A và song song với d_2

Suy ra phương trình đường thẳng d là $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{3}$.

c) Đúng.

Ghi nhớ: d_1 và d_2 chéo nhau $\Leftrightarrow [\vec{u}_1; \vec{u}_2] \cdot \vec{M_1M_2} \neq 0$. (Trong đó, $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ lần lượt là vector chỉ phương của đường thẳng d_1, d_2 ; $M_1 \in d_1, M_2 \in d_2$.)

Ta có $\vec{u}_1(2; 1; -2), \vec{u}_2(-1; 1; 3)$ và $M_1(1; -3; -1), M_2(2; 0; 3)$.

$$\Rightarrow [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (5; -4; 3), \vec{M_1M_2}(1; 3; 4) \Rightarrow [\vec{u}_1; \vec{u}_2] \cdot \vec{M_1M_2} = 5 - 12 + 12 = 5 \neq 0$$

Suy ra d_1 và d_2 chéo nhau.

d) Sai.

Giả sử đường thẳng d cắt d_1 và d_2 lần lượt tại B và C .

Tham số hóa các điểm B, C ta có $B(2u+1; u-3; -2u-1) \in d_1$ và $C(2-t; t; 3t) \in d_2$.

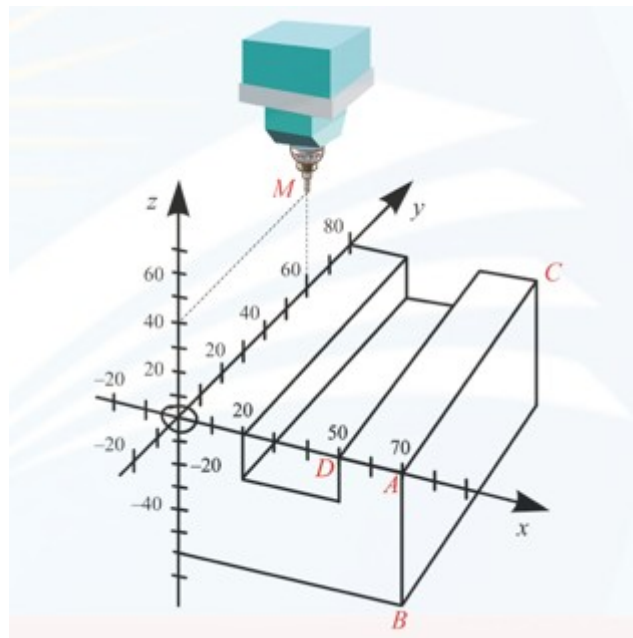
Tính các vector $\overrightarrow{AB}(2u; u-2; -2u-2), \overrightarrow{AC}(1-t; t+1; 3t-1)$.

Do A, B, C thẳng hàng: $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u = k(1-t) \\ u-2 = k(t+1) \\ -2u-2 = k(3t-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u-k+kt=0 \\ u-k-kt=2 \\ -2u+k-3kt=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=0 \\ k=-1 \\ kt=-1 \end{cases}$$

Suy ra $u=0, t=1 \Rightarrow \overrightarrow{u_d} = (0; 1; 1)$

16. Phần mềm của máy tiện kỹ thuật số CNC (Computer Numerical Control) đang biểu diễn một chi tiết máy như Hình.



a) Tìm tọa độ các điểm A, B, C, D .

b) Viết phương trình mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (ACD) .

c) Viết phương trình tham số của đường thẳng AC .

d) Cho biết đầu mũi tiện đang đặt tại điểm $M(0; 60; 40)$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ABC) .

Lời giải

a) Tọa độ các điểm: $A(70; 0; 0), B(70; 0; -60), C(70; 80; 0), D(50; 0; 0)$.

b) Mặt phẳng (ABC) có cặp vector chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (0; 0; -60), \overrightarrow{AC} = (0; 80; 0)$ nên có vector pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (4800; 0; 0)$.

Phương trình của mặt phẳng (ABC) là $4800(x-70) + 0(y-0) + 0(z-0) = 0 \Leftrightarrow x-70=0$.

Mặt phẳng (ACD) có cặp vector chỉ phương là $\overrightarrow{AC} = (0; 80; 0), \overrightarrow{AD} = (-20; 0; 0)$ nên có vector pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2} = [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = (0; 0; 1600)$.

Phương trình của mặt phẳng (ACD) là $0(x - 70) + 0(y - 0) + 1600(z - 0) = 0 \Leftrightarrow z = 0$

c) Đường thẳng AC có một vector chỉ phương là $\frac{1}{80} \overrightarrow{AC} = (0; 1; 0)$.

Phương trình tham số của đường thẳng AC là
$$\begin{cases} x = 70 \\ y = t \\ z = 0. \end{cases}$$

d) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (ABC) là $d(M, (ABC)) = \frac{|0 - 70|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = 70$.