

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -2; 4)$, $B(-3; 3; -1)$, $C(-1; -1; -1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 8 = 0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (P) , tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2MA^2 + MB^2 - MC^2$.

Lời giải

Trả lời: 102

Gọi I là điểm thỏa $2\vec{IA} + \vec{IB} - \vec{IC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{2x_A + x_B - x_C}{2} = 1 \\ y_I = \frac{2y_A + y_B - y_C}{2} = 0 \\ z_I = \frac{2z_A + z_B - z_C}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow I(1; 0; 4)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} T &= 2MA^2 + MB^2 - MC^2 = 2(\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 - (\vec{MI} + \vec{IC})^2 \\ &= 2MI^2 + 2\vec{MI} \cdot \begin{pmatrix} 2\vec{IA} + \vec{IB} - \vec{IC} \\ 0 \end{pmatrix} + (2IA^2 + IB^2 - IC^2) = 2MI^2 + (2IA^2 + IB^2 - IC^2) \end{aligned}$$

Để T nhỏ nhất thì $2MI^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ ngắn nhất M là hình chiếu của điểm $I/(P)$. Khi đó $MI = d(I, (P)) = 6$; $2IA^2 + IB^2 - IC^2 = 30 \Rightarrow \min T = 102$

Câu 2. (Chuyên Lam Sơn 2019) Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(-1; 3; 5)$; $B(2; 6; -1)$; $C(-4; -12; 5)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 5 = 0$. Gọi M là điểm di động trên (P) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = |\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}|$ là?

Lời giải

Trả lời: 14

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC nên $G(-1; -1; 3)$ và $S = |\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = 3|\vec{MG}| = 3MG$

Vì $G \notin (P)$ nên $GM \geq GH$ với H là chân đường vuông góc từ G đến $mp(P)$

$$S_{\min} = 3GH = 3d_{(G, (P))} = 3 \frac{|-1 - 2 - 6 - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 14$$

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1; -1; 3)$, $B(2; 1; 0)$, $C(-3; -1; -3)$ và mặt phẳng $(P): x + y - z - 4 = 0$. Gọi $M(a, b, c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $T = |3\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S = a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 2

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{3IA} - \overrightarrow{2IB} + \overrightarrow{IC} = 0$
 Ta có $\overrightarrow{IA} = (1 - x; 1 - y; 3 - z) \Rightarrow \overrightarrow{3IA} = (3 - 3x; -3 - 3y; 9 - 3z)$
 $\overrightarrow{IB} = (2 - x; 1 - y; -z) \Rightarrow \overrightarrow{2IB} = (4 - 2x; 2 - 2y; -2z)$
 $\overrightarrow{IC} = (-3 - x; -1 - y; -3 - z)$

Khi đó $\overrightarrow{3IA} - \overrightarrow{2IB} + \overrightarrow{IC} = (-2x - 4; -2y - 6; -2z + 6) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 4 = 0 \\ -2y - 6 = 0 \\ -2z + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \\ z = 3 \end{cases} \text{ . Vậy } I(-2; -3; 3)$$

Ta có $T = |\overrightarrow{3MA} - \overrightarrow{2MB} + \overrightarrow{MC}| = |3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})| = 2|\overrightarrow{MI}|$

Suy ra $T_{\min} \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI}|_{\min}$ khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P)

Đường thẳng MI đi qua $I(-2; -3; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình tham số

$$MI: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -3 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \text{ . Lấy } M(-2 + t; -3 + t; 3 - t) \in MI$$

Mặt khác $M \in (P) \Rightarrow (-2 + t) + (-3 + t) - (3 - t) - 4 = 0 \Rightarrow t = 4$

Suy ra $M(2; 1; -1)$. Vậy $a + b + c = 2$

Câu 4. (Ngô Quyền - Hải Phòng 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 2; 0)$, $C(3; -1; 2)$ và điểm M thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 7 = 0$. Tính giá trị nhỏ nhất của $P = |\overrightarrow{3MA} + \overrightarrow{5MB} - \overrightarrow{7MC}|$.

Lời giải

Trả lời: 27

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{3IA} + \overrightarrow{5IB} - \overrightarrow{7IC} = 0$

$$\Leftrightarrow 3(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI}) + 5(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}) - 7(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OI}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = 3\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB} - 7\overrightarrow{OC}$$

$$\Rightarrow \text{Tọa độ điểm } I = (-23; 20; -11)$$

Khi đó: $u = \overrightarrow{3MA} + \overrightarrow{5MB} - \overrightarrow{7MC} = 3(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM}) + 5(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM}) - 7(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IM})$

$$= -\overrightarrow{IM} + (\overrightarrow{3IA} + \overrightarrow{5IB} - \overrightarrow{7IC}) = -\overrightarrow{IM}$$

Nên: $P = |\overrightarrow{3MA} + \overrightarrow{5MB} - \overrightarrow{7MC}| = |-\overrightarrow{IM}| = IM \geq d(I, (\alpha))$

Vậy: $P_{\min} = d(I, (\alpha)) = \frac{|2 \cdot (-23) - 20 + 2 \cdot (-11) + 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 27$

Câu 5. (SGD Hưng Yên 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(P): 3x + 3y - 2z - 29 = 0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (P) sao cho biểu thức $T = MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt GTNN. Tính tổng $a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 8

Gọi I là điểm thỏa mãn hệ thức: $\vec{IA} + \vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0}$ (*)

$$(*) \Leftrightarrow \vec{OI} = \frac{1}{5}\vec{OA} + \frac{1}{5}\vec{OB} + \frac{3}{5}\vec{OC} = (2;1;1) \Leftrightarrow I(2;1;1)$$

Khi đó,

Mặt khác, áp dụng tính chất tâm tỉ cự của hệ điểm $\Rightarrow T = 5MI^2 + IA^2 + IB^2 + 3IC^2$.

Vì $IA^2 + IB^2 + 3IC^2$ là hằng số nên suy ra T đạt GTNN $\Leftrightarrow MI$ đạt GTNN

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ \vec{IM} \perp \vec{ngn}_{(P)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 3b - 2c = 29 \\ \frac{a-2}{3} = \frac{b-1}{3} = \frac{c-1}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \\ c = -1 \end{cases}$$

Vậy $a + b + c = 8$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-3)$, $B(0;-2;3)$ và mặt cầu $(S): (x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 1$. Xét điểm M thay đổi luôn thuộc mặt cầu (S) , giá trị lớn nhất của $MA^2 + 2MB^2$ bằng?

Lời giải

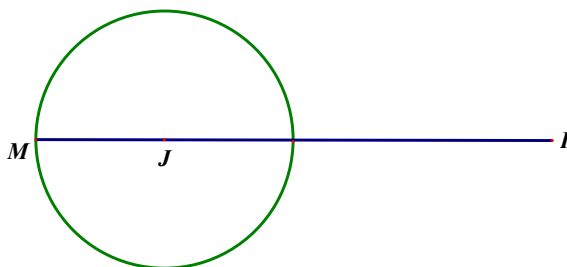
Trả lời: 84

Gọi I là điểm thỏa mãn hệ thức $\vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0} \Rightarrow I(1;-1;1)$.

$$\begin{aligned} T &= MA^2 + 2MB^2 = \vec{MA}^2 + 2\vec{MB}^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + 2(\vec{MI} + \vec{IB})^2 \\ \text{Ta có} \quad &= 3MI^2 + IA^2 + 2IB^2 = 3MI^2 + 36 \end{aligned}$$

Mặt cầu (S) có tâm $J(-1;0;3)$, bán kính $R=1$.

Ta có: $IJ > R \Rightarrow I$ nằm ngoài mặt cầu (S) .



Ta có: T lớn nhất $\Leftrightarrow IM$ lớn nhất.

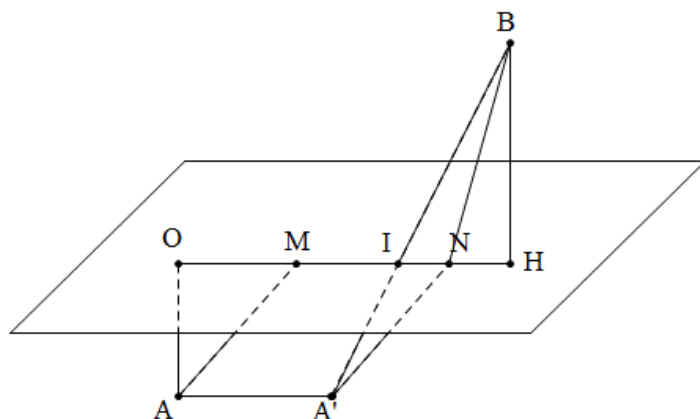
$$\text{Mà } IM_{\max} = IJ + R = 3 + 1 = 4$$

Do đó: $T_{\max} = 3.4^2 + 36 = 84$.

Câu 7. (Hậu Lộc 2-Thanh Hóa -2019) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;2)$ và $B(3;4;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 25$ với $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0$. M, N là hai điểm thuộc (P) sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ là?

Lời giải

Trả lời: 5



$$\begin{cases} (S_1): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 25 & (1) \\ (S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2), ta được $6z = 0$ hay

$(P): z = 0$ tức là $(P) \equiv (Oxy)$.

Dễ thấy A, B nằm khác phía đối với (P) , hình chiếu của A trên (P) là O , hình chiếu của B trên (P) là $H(3;4;0)$.

Lấy A' sao cho $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$.

Khi đó $AM + BN = A'N + BN \geq A'B$ và cực trị chỉ xảy ra khi $\overrightarrow{MN}$ cùng phương $\overrightarrow{OH}$.

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{OH}}{|\overrightarrow{OH}|} = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 0 \right).$$

Lấy $A' \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 0 \right)$. Khi đó vì $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$ nên Do đó $AM + BN = A'N + BN \geq A'B = 5$.

Câu 8. (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019) Trong hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;5)$, $B(2;6;-1)$, $C(-4;-12;5)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 5 = 0$. Gọi M là điểm di động trên (P) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ là ?

Lời giải

Trả lời: 14

Gọi $G(x_1; y_1; z_1)$ là trọng tâm tam giác ABC .

Vì G là trọng tâm tam giác ABC và M là điểm tùy ý nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$.

Vậy $S = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{0}| = 0$.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-1 + 2 + 4}{3} = \frac{5}{3} \\ y_1 = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{3 + 6 + 12}{3} = 7 \\ z_1 = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{5 + 1 + 5}{3} = \frac{11}{3} \end{cases}$$

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên

Vì G cố định nên $S = 3MG$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất. Tức là $MG \perp (P)$.

$$d(G, (P)) = \frac{|-1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{14}{3} = MG.$$

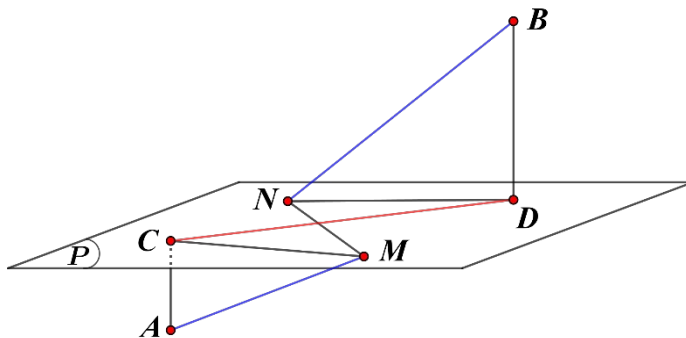
Ta có:

Vậy giá trị nhỏ nhất $S = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{0}| = 0$.

Câu 9. (Chuyên Sơn La 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 0; 0)$ và $B(2; 3; 4)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1): (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 4$ và $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0$. Xét M, N là hai điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 5



• Xét hệ $\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$

Vậy $(P): x = 0$ ((P) chính là mặt phẳng (Oyz)).

Gọi $C(0;0;0)$ và $D(0;3;4)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(-1;0;0)$ và $B(2;3;4)$ trên mặt phẳng (P) . Suy ra $AC=1$, $BD=2$, $CD=5$.

• Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$, ta được

$$\begin{aligned} AM+BN &= \sqrt{AC^2+CM^2}+\sqrt{BD^2+DN^2} \\ &\geq \sqrt{(AC+BD)^2+(CM+DN)^2} \\ &\geq \sqrt{9+(CM+DN)^2} \end{aligned}$$

Lại có $CM+MN+ND\geq CD=5$ nên suy ra $CM+ND\geq 4$. Do đó $AM+BN\geq 5$.

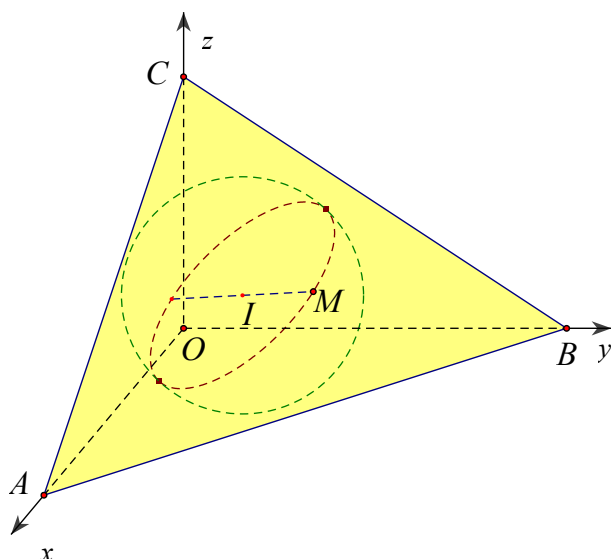
Đẳng thức xảy ra khi C, M, N, D thẳng hàng theo thứ tự đó và $\frac{AC}{CM}=\frac{BD}{DN}$, tức là $M\left(0;\frac{4}{5};\frac{16}{15}\right)$ và $N\left(0;\frac{7}{5};\frac{28}{15}\right)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ là 5.

Câu 10. (THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=1$. Điểm $M\in(S)$ có tọa độ dương; mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) tại M cắt các tia $Ox; Oy; Oz$ tại các điểm A, B, C . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=(1+OA^2)(1+OB^2)(1+OC^2)$ là?

Lời giải

Trả lời: 64



(S) có tâm (O) và bán kính $R=1$.

Theo đề bài ta có $A(a,0,0); B(0,b,0); C(0,0,c); (a,b,c > 0)$ khi đó phương trình mặt phẳng

$$(P) \text{ là: } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$$(P) \text{ tiếp xúc với } (S) \text{ tại } M \in (S) \Leftrightarrow d(O; (P)) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = 1$$

$$\Leftrightarrow abc = \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \geq \sqrt{3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}} \Rightarrow abc \geq 3\sqrt{3} \quad (1) \text{ vì } (a,b,c > 0)$$

$$\text{Khi đó: } T = (1+OA^2)(1+OB^2)(1+OC^2) = (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$$

$$\Rightarrow T = 1 + a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2c^2 = 1 + a^2 + b^2 + c^2 + 2a^2b^2c^2$$

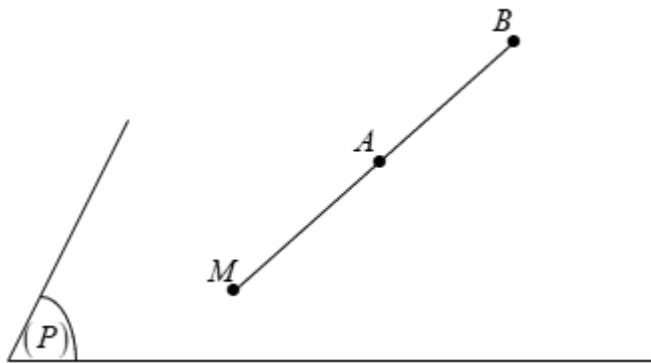
$$\text{Mặt khác } 1 + a^2 + b^2 + c^2 + 2a^2b^2c^2 \geq 1 + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} + 2a^2b^2c^2 \geq 64 \quad (2) \Rightarrow T \geq 64$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 64 khi (1) và (2) xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow a = b = c = \sqrt{3}$.

Câu 11. (Chuyên Long An - 2021) Cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$ và hai điểm $A(1;1;1), B(1;1;0)$. Gọi $M(a;b;c) \in (P)$ sao cho $|MB - MA|$ lớn nhất. Tính $2a - b + c$

Lời giải

Trả lời: 3



Thay lần lượt toạ độ điểm A và điểm B vào vế trái của phương trình mặt phẳng (P) , ta được :

$$\begin{cases} 1+1+1-4 = -1 < 0 \\ 1+1+0-4 = -2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{hai điểm A và B nằm cùng một phía với mặt phẳng } (P).$$

Ta có : $|MB - MA| \leq AB$. Do đó $|MB - MA|$ lớn nhất bằng AB khi và chỉ khi M là giao điểm của AB và mặt phẳng (P) .

Mặt khác, ta có $d(B; (P)) = \frac{2}{\sqrt{3}}; d(A; (P)) = \frac{1}{\sqrt{3}}; d(B; (P)) = 2d(A; (P))$ nên A là trung điểm của đoạn thẳng BM $\Rightarrow M(1;1;2)$.

Suy ra $a=1; b=1; c=2$. Vậy $2a - b + c = 3$.

Câu 12. (THPT huyện Mỹ Lộc – Vụ Bản – Nam Định 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-10; 6; -2), B(-5; 10; -9)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y - z + 12 = 0$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc (α) sao cho MA, MB tạo với (α) các góc bằng nhau và biểu thức $T = 2MA^2 - MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $a + b + c$ bằng?

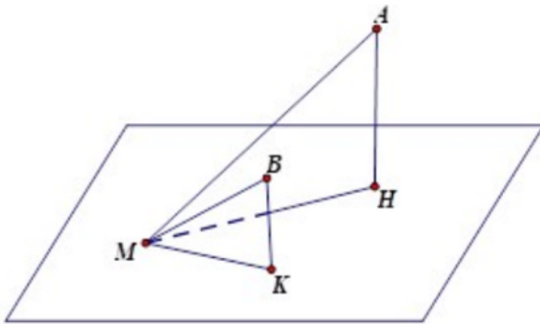
Lời giải

Trả lời: - 6

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên mặt phẳng (α) , khi đó:

$$AH = d(A; (\alpha)) = \frac{|2 \cdot (-10) - 2 \cdot 6 - (-2) + 12|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 6;$$

$$BK = d(B; (\alpha)) = \frac{|2 \cdot (-5) - 2 \cdot 10 - (-9) + 12|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3.$$



Vì MA, MB tạo với (α) các góc bằng nhau nên $\angle AMH = \angle BMK$. Từ $AH = 2BK$ suy ra $MA = 2MB$.

Ta có: $MA = 2MB \Leftrightarrow MA^2 = 4MB^2$

$$\Leftrightarrow (a+10)^2 + (b-6)^2 + (c+2)^2 = 4[(a+5)^2 + (b-10)^2 + (c+9)^2]$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + \frac{20}{3}a - \frac{68}{3}b + \frac{68}{3}c + 228 = 0.$$

Như vậy, điểm M nằm trên mặt cầu (S) có tâm $I\left(-\frac{10}{3}; \frac{34}{3}; -\frac{34}{3}\right)$ và bán kính $R = 2\sqrt{10}$.

Mà M thuộc (α)

Do đó, M thuộc đường tròn (C) là giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α) , nên tâm J của đường tròn (C) là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (α)

Tìm được $J = (-2; 10; -12)$ và bán kính (C) là $r = \sqrt{R^2 - IJ^2} = 6$

Gọi điểm E thỏa mãn $\vec{2EA} - \vec{EB} = \vec{0} \Rightarrow E(-15; 2; 5)$.

Khi đó $T = 2(\vec{ME} + \vec{EA})^2 - (\vec{ME} + \vec{EB})^2 = ME^2 + 2EA^2 - EB^2$ và $2EA^2 - EB^2$ không đổi.

Vậy $T_{\min} \Leftrightarrow ME_{\min}$

Gọi F là hình chiếu của E trên (α) , tìm được $F(-9; -4; 2) \Rightarrow FJ = 21 > r$ nên F nằm ngoài (C) .

Suy ra $FM_{\min} = FJ - r = 15$

Khi đó $ME_{\min} = \sqrt{EF^2 + FM_{\min}^2} = 3\sqrt{34}$ khi M là giao điểm của FJ và (C) , M nằm giữa F, J

$$\Rightarrow FM = \frac{15}{21} FJ = \frac{5}{7} FJ \Rightarrow M(-4; 6; -8) \Rightarrow a+b+c = -6$$

Câu 13. (Sở Nam Định 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-10; -5; 8), B(2; 1; -1), C(2; 3; 0)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 9 = 0$. Xét M là điểm thay đổi trên (P) sao cho $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tính $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$?

Lời giải

Trả lời: 282

Chèn điểm $I(a; b; c)$ vào đẳng thức $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ ta được:

$$\begin{aligned} MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 &= |\vec{MA}|^2 + 2|\vec{MB}|^2 + 3|\vec{MC}|^2 = |\vec{MI} + \vec{IA}|^2 + 2|\vec{MI} + \vec{IB}|^2 + 3|\vec{MI} + \vec{IC}|^2 \\ &= |\vec{MI}|^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IA} + |\vec{IA}|^2 + 2(|\vec{MI}|^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IB} + |\vec{IB}|^2) + 3(|\vec{MI}|^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IC} + |\vec{IC}|^2) \\ &= |\vec{MI}|^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IA} + |\vec{IA}|^2 + 2(|\vec{MI}|^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IB} + |\vec{IB}|^2) + 3(|\vec{MI}|^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IC} + |\vec{IC}|^2) \\ &= 6|\vec{MI}|^2 + |\vec{IA}|^2 + 2|\vec{IB}|^2 + 3|\vec{IC}|^2 + 2\vec{MI}(\vec{IA} + 2\vec{IB} + 3\vec{IC}) \quad (*) \end{aligned}$$

Cho $\vec{IA} + 2\vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -10 - a + 2(2 - a) + 3(2 - a) = 0 \\ -5 - b + 2(1 - b) + 3(3 - b) = 0 \\ 8 - c + 2(-1 - c) + 3(0 - c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow I = (0; 1; 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{IA} = (-10; -6; 7) \\ \vec{IB} = (2; 0; -2) \\ \vec{IC} = (2; 2; -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{IA}|^2 = 185 \\ |\vec{IB}|^2 = 8 \\ |\vec{IC}|^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 = 6|\vec{MI}|^2 + |\vec{IA}|^2 + 2|\vec{IB}|^2 + 3|\vec{IC}|^2 + 2\vec{MI}(\vec{IA} + 2\vec{IB} + 3\vec{IC}) \\ &= 6|\vec{MI}|^2 + 185 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9 = 6|\vec{MI}|^2 + 228 \\ &\Rightarrow (MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2)_{\min} \text{ khi } |\vec{MI}|_{\min} \end{aligned}$$

Nhận xét: $I \notin (P)$

$|\vec{MI}|_{\min}$ khi M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P)

Khi đó $\vec{MI}$ cùng phương với $\vec{n}_P$

Gọi $M = (x; y; z)$ thì

$$\vec{MI} = k \vec{n_p} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 - x = k.1 \\ 1 - y = k.2 \\ 1 - z = k.(-2) \end{cases} \text{ và } M \in (P) \text{ nên } x + 2y - 2z - 9 = 0$$

Ta lập hệ bốn phương trình:

$$\begin{cases} 0 - x = k.1 \\ 1 - y = k.2 \\ 1 - z = k.(-2) \\ x + 2y - 2z - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -1 \\ k = -1 \end{cases} \Rightarrow M = (1; 3; -1) \Rightarrow \vec{MI} = (-1; -2; 2) \Rightarrow MI^2 = 9$$

$$\text{Vậy } (MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2)_{\min} = 6MI_{\min}^2 + 202 = 6.9 + 228 = 282$$

Câu 14. (Sở Hải Phòng 2023) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, từ điểm $A(1; 1; 0)$ kẻ các tiếp tuyến đến mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 1; 1)$ và bán kính $R = 1$. Gọi $M(a; b; c)$ là một trong các tiếp điểm ứng với các tiếp tuyến trên. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |2a + c - 1|$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 3

$$(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$$

Mặt phẳng chứa các tiếp điểm: $(P): 2x - z + 2 = 0$

$$M \in (P) \cap (S) \Rightarrow \begin{cases} 2a - c + 2 = 0 \\ (a+1)^2 + (b-1)^2 + (2a+1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2a + 2 \\ 5a^2 + 6a + 2 + (b-1)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } 5a^2 + 6a + 2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq a \leq -\frac{1}{5}$$

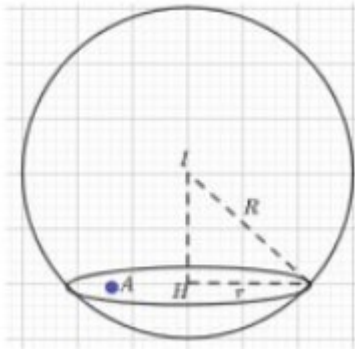
$$T = |2a + c - 1| = |4a + 1|, a \in \left[-1; -\frac{1}{5}\right] \Rightarrow T_{\max} = 3$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $M(-1; 1; 0)$

Câu 15. (Sở Kon Tum 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+5)^2 = 12$ và điểm $A(0; 1; -3)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm A , cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là $ax + by + cz + 14 = 0, (a, b, c \in \mathbb{Z})$. Giá trị của biểu thức $M = a - b + c$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 8



Ta có: $I(-1; 2; -5), R = 2\sqrt{3}$ lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu (S) .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P) .

$\Rightarrow (P)$ cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$.

Khi đó $r_{\min} \Leftrightarrow IH_{\max}$, mà $IH \leq IA$, do đó $IH_{\max} = IA \Leftrightarrow H \equiv A$.

$\Rightarrow \vec{IA} = (1; -1; 2)$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

$$x - y + 2z + 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = 4 \end{cases}$$

Do đó phương trình của (P) là:

Vậy $M = a - b + c = 8$.

Câu 16. (Chuyên KHTN 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(6; 2; -4)$, mặt phẳng $(P): x + y + 2z + 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + (y - 1)^2 + (z - 4)^2 = 1$. Xét các điểm M thuộc (P) và N thuộc (S) sao cho $AM + MN$ nhỏ nhất. Gọi $(a; b; c)$ là tọa độ điểm M , tổng $a + b + c$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 1

Đầu tiên ta có mặt cầu (S) tâm $I(0; 1; 4)$, bán kính $R = 1$. Tiếp đến thế tọa độ I, A vào mặt phẳng (P) thì dễ thấy rằng $(x_A + y_A + 2z_A + 3)(x_I + y_I + 2z_I + 3) > 0$ tức A, I cùng phía với mặt phẳng (P) . Khi đó ta gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P) , với $A'(5; 1; -6)$, ta suy ra $AM + MN = A'M + MN = A'I - R = 5\sqrt{5} - 1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M = A'I \cap (P)$. Ta có phương trình đường thẳng

$$(A'I): \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 4 - 2t \end{cases}$$

Thế vào mặt phẳng (P) suy ra: $t = 4 \Rightarrow M(4; 1; -4) \Rightarrow a + b + c = 1$.

Câu 17. (Sở Hải Dương 2023) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ và hai điểm $A(4; 2; 4), B(1; 4; 2)$. MN là dây cung của mặt cầu

thỏa mãn $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $u = (0; 1; 1)$ và $MN = 4\sqrt{2}$. Tính giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$

Lời giải

Trả lời: 7

Ta có: $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $u = (0; 1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (0; k; k)$

Mà $MN = 4\sqrt{2} \Rightarrow k = 4 \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = (0; 4; 4)$

Lấy A' sao cho $AMNA'$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow A'(4; 6; 8)$

Vì $AMNA'$ là hình bình hành nên $AM = A'N$

Xét $|AM - BN| = |A'N - BN| \leq A'B = 7$

Vậy GTLN của $|AM - BN|$ bằng 7 khi A', B, N thẳng hàng.

Câu 18. (Sở Bạc Liêu 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 14 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 3 = 0$. Gọi tọa độ điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ (M) đến mặt phẳng (P) là nhỏ nhất. Giá trị của biểu thức $T = 3a + 2b - c$ là?

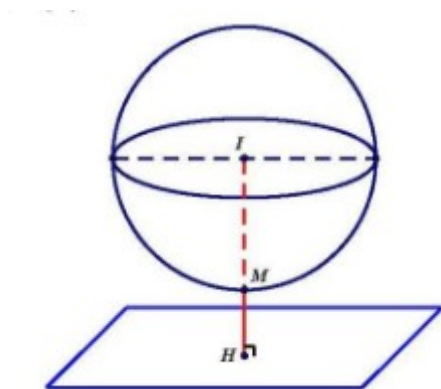
Lời giải

Trả lời: 8

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 1; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2 + 3} = 3$.

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là $d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 1 + 14|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 5$.

Do $d(I, (P)) > R$ nên $(P) \cap (S) = \emptyset$.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P) . Suy ra $H\left(-\frac{4}{3}; \frac{13}{3}; -\frac{8}{3}\right)$.

Khi đó $d(M, (P))$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M = IH \cap (S) \Rightarrow \frac{IM}{IH} = \frac{R}{d(I, (P))} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{IM}{IH} = \frac{3}{5}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2=\frac{3}{5}\left(-\frac{10}{3}\right) \\ b-1=\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{3} \\ c+1=\frac{3}{5}\left(-\frac{5}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=3 \\ c=-2 \end{cases}$$

Suy ra $T = 3a + 2b - c = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 2 = 8$.

Câu 19. (Sở Hậu Giang 2023) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1), B(-2; 3; 4)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 6 = 0$. Xét điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc (P) sao cho biểu thức $|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S = x_0 + y_0 + z_0$

Lời giải

Trả lời: 7

Ta tìm điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$. Suy ra A là trung điểm của $BI \Rightarrow I(4; 1; -6)$.

Khi đó $|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = |2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IB}| = |\overrightarrow{MI}| = MI$.

Để biểu thức $|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì M là hình chiếu của I trên (P) .

$$IM: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -6 - t \end{cases} \Rightarrow M(4+t; 1-2t; -6-t)$$

Ta có

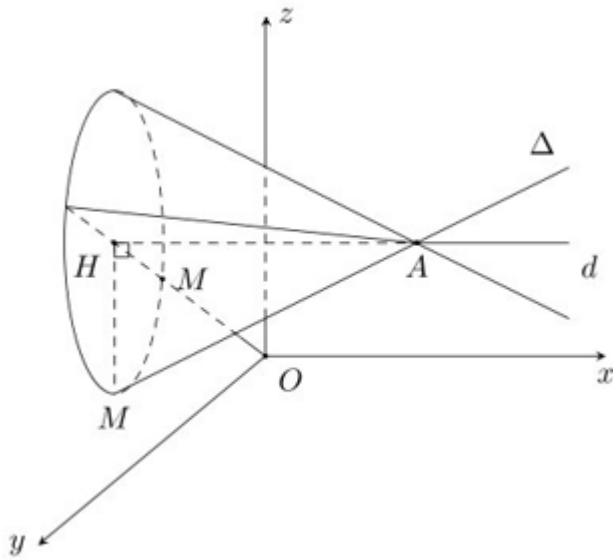
Do $M \in (P)$ nên $(4+t) - 2(1-2t) - (-6-t) + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -4 \Rightarrow M(0; 9; -2) \Rightarrow S = 7$.

Câu 20. (Sở Hà Tĩnh 2023) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 3; 4)$. Xét các đường thẳng Δ qua A và tạo với (Oyz) một góc 45° . Gọi M là giao điểm của đường thẳng Δ với mặt phẳng (Oyz) . Khi OM nhỏ nhất, Δ có một vector chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = (1; a; b)$. Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 1

Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc mặt phẳng (Oyz) .



Suy ra
$$d: \begin{cases} x=1+t \\ y=3 \\ z=4. \end{cases}$$

Gọi $H = d \cap (Oyz) \Rightarrow H(0; 3; 4)$ và $AH = 1$.

Ta có $(\Delta, (Oyz)) = \angle AMH = 45^\circ$.

Xét tam giác AHM vuông tại H có $MH = AH \cot 45^\circ = 1$.

Suy ra M nằm trên đường tròn tâm H bán kính $R = MH = 1$

Ta có OM nhỏ nhất khi O, H, M thẳng hàng và M ở giữa O, H .

Suy ra OM đạt nhỏ nhất khi $OM = OH - HM = 5 - 1 = 4$.

$$\frac{OM}{OH} = \frac{4}{5} \Rightarrow \vec{OM} = \frac{4}{5} \vec{OH} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{4}{5} \cdot 0 = 0 \\ y_M = \frac{4}{5} \cdot 3 = \frac{12}{5} \\ z_M = \frac{4}{5} \cdot 4 = \frac{16}{5} \end{cases}$$

Ta lại có

Suy ra $M \left(0; \frac{12}{5}; \frac{16}{5} \right)$.

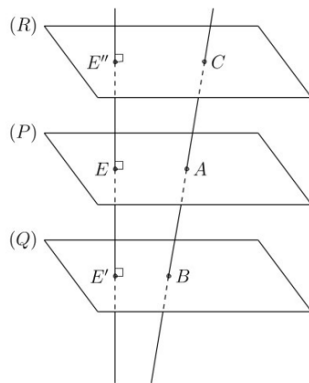
Vậy vector chỉ phương
$$\vec{u}_\Delta = \vec{MA} = \left(1; \frac{3}{5}; \frac{4}{5} \right)$$
.

Câu 21. (Sở Hà Tĩnh 2023) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 1 = 0$, $(Q): x - 2y + 2z - 8 = 0$, $(R): x - 2y + 2z + 4 = 0$. Một đường thẳng Δ thay đổi cắt ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại các điểm A, B, C . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $AB + \frac{96}{AC^2}$ là?

Lời giải

Trả lời: 18

Để thấy các mặt phẳng $(P), (Q)$ và (R) song song với nhau.



Do giả thiết suy ra $d((R), (P)) = EE'' = 1$ và $d((P), (Q)) = EE' = 3$.

Theo định lý Ta-lét trong không gian ta có $\frac{EE''}{EE'} = \frac{AC}{AB}$ suy ra $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow AB = 3AC$.

Đặt $S = AB + \frac{96}{AC^2}$ suy ra $S = 3AC + \frac{96}{AC^2}$.

Khi đó áp dụng bất đẳng thức AM - GM

$$S = \frac{3AC}{2} + \frac{3AC}{2} + \frac{96}{AC^2} \geq 3\sqrt{\frac{3AC}{2} \cdot \frac{3AC}{2} \cdot \frac{96}{AC^2}} \Leftrightarrow S \geq 18.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{3AC}{2} = \frac{96}{AC^2} \Leftrightarrow AC^3 = 64 \Leftrightarrow AC = 4$.

Vậy $\min S = 18$ khi $AC = 4$.

Câu 22. (Mã 120-2021-Lần 2) Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 1$. Có bao nhiêu điểm M thuộc (S) sao cho tiếp diện của (S) tại M cắt trục Ox , Oy lần lượt tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ mà a, b là các số nguyên dương và $\angle AMB = 90^\circ$?

Lời giải

Trả lời: 1

Ta có: $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 1$ Suy ra tâm $I(3;2;-1)$ và bán kính $R = 1$

Gọi K là trung điểm của $AB \Rightarrow K\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; 0\right)$

$$MK = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

$\triangle IMK$ vuông tại $M \Rightarrow IM^2 + MK^2 = IK^2$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{a^2 + b^2}{4} = \left(\frac{a}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 2\right)^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow -3a - 2b + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3a + 2b = 13$$

a	01234
b	Loại5loại2loại

Trường hợp 1: $A(1; 0; 0)$, $B(0; 5; 0)$ Không thỏa mãn.

Trường hợp 2: $A(3; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ Thỏa mãn do A, B nằm ngoài.

Câu 23. (Sở Hòa Bình - 2021) Trong không gian cho điểm $A(13; -7; -13)$, $B(1; -1; 5)$ và $C(1; 1; -3)$. Xét các mặt phẳng (P) đi qua C sao cho A và B nằm cùng phía so với (P) . Khi $d(A, (P)) + 2d(B, (P))$ đạt giá trị lớn nhất thì (P) có dạng $ax + by + cz + 3 = 0$. Giá trị của $a + b + c$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 1

Gọi $n(a'; b'; c')$ là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Do (P) đi qua $C(1; 1; -3)$ nên $(P): a'(x - 1) + b'(y - 1) + c'(z + 3) = 0$

$$\Leftrightarrow a'x + b'y + c'z - a' - b' + 3c' = 0$$

Do $A(13; -7; -13)$, $B(1; -1; 5)$ nằm cùng phía so với (P) nên ta có

$$(13a' - 7b' - 13c' - a' - b' + 3c')(a' - b' + 5c' - a' - b' + 3c') > 0$$

$$\Leftrightarrow (12a' - 8b' - 10c')(-2b' + 8c') > 0$$

$$T = d(A, (P)) + 2d(B, (P)) = \frac{|12a' - 8b' - 10c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} + 2 \frac{|-2b' + 8c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

Ta có

$$= \frac{|(12a' - 8b' - 10c') + (-4b' + 16c')|}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} = \frac{|12a' - 12b' + 6c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$(12a' - 12b' + 6c')^2 \leq (12^2 + 12^2 + 6^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) \Rightarrow |12a' - 12b' + 6c'| \leq \sqrt{324} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}$$

Suy ra $T \leq \sqrt{324} = 18$.

$$\frac{a'}{12} = \frac{b'}{-12} = \frac{c'}{6} \Leftrightarrow a' = -b' = 2c'$$

Chọn $c' = 1$ ta được $a' = 2, b' = -2$. Khi đó $(P): 2x - 2y + z + 3 = 0$.

Suy ra $a = 2, b = -2, c = 1 \Rightarrow a + b + c = 1$.

Câu 24. (Sở Hà Tĩnh 2022) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -3; -5), I(2; 0; -1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 5 = 0$. Điểm $M(a; b; c)$ thay đổi thuộc mặt phẳng (P) sao cho $IM = 5$ và độ dài đoạn AM lớn nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T = a + b + 2c$ bằng?

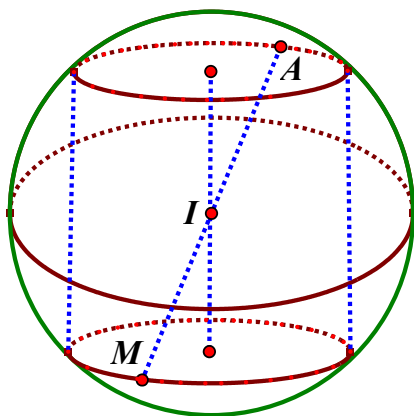
Lời giải

Trả lời: 11

♦ Có M thuộc mặt cầu (S) (tâm I , bán kính $R = 5$).

Do $d(I, (P)) = \frac{|4 - 0 + 2 + 5|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{11}{3} < 5$ nên (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn (C_1) và $M \in (C_1)$.

♦ Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và song song với (P) , có $(Q): 2x - y - 2z - 17 = 0$ và $d(I, (Q)) = \frac{|4 - 0 + 2 - 17|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{11}{3}$. Suy ra (S) cắt (Q) theo giao tuyến là đường tròn (C_2) và $A \in (C_2)$ (do $IA = 5$ nên $A \in (S)$).

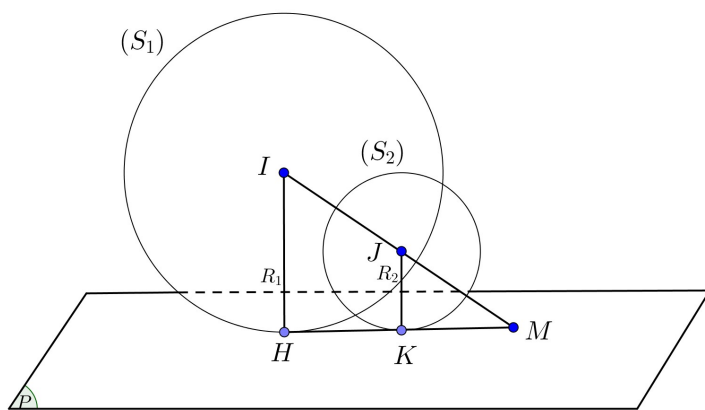


♦ Do $d(I, (P)) = d(I, (Q))$ nên (C_1) bằng (C_2) và A, M lần lượt thuộc hai đường tròn đáy của hình trụ. Do đó AM lớn nhất khi M là điểm đối xứng với A qua I , suy ra $M(2; 3; 3)$ và $T = 2 + 3 + 2 \cdot 3 = 11$.

Câu 25. (THPT Kinh Môn - Hải Dương - 2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I(2; 1; 1)$ có bán kính bằng 4 và mặt cầu (S_2) có tâm $J(2; 1; 5)$ có bán kính bằng 2. Gọi (P) là mặt phẳng thay đổi tiếp xúc với hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$. Đặt M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (P) . Giá trị $M + m$ bằng ?

Lời giải

Trả lời: 9



(S_1) có bán kính $R_1 = 4$, (S_2) có bán kính $R_2 = 2$.

Nhận xét: $R_1 - R_2 < IJ = 4 < R_1 + R_2$ nên hai mặt cầu này cắt nhau.

Vì $R_2 = \frac{1}{2}R_1$ nên theo định lý Talet suy ra J là trung điểm đoạn MI nên $M(2; 1; 9)$.

(P) qua $M(2; 1; 9)$ và có vector pháp tuyến $n = (a; b; c), (a^2 + b^2 + c^2 > 0)$ nên phương trình

(P) có dạng: $ax + by + cz - 2a - b - 9c = 0$.

Ta có: $d(I, (P)) = 4 \Leftrightarrow \frac{|-8c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 4 \Leftrightarrow \frac{|2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 1 \Leftrightarrow 3c^2 = a^2 + b^2$.

Nếu $c = 0$ thì $a = b = 0$ (vô lý) nên $c \neq 0$. Không mất tính tổng quát, chọn $c = 1$, suy ra $a^2 + b^2 = 3$.

Do đó tồn tại $t \in [0; 2\pi]$ sao cho $a = \sqrt{3} \sin t, b = \sqrt{3} \cos t$.

Mặt khác: $d \equiv d(O, (P)) = \frac{|2a + b + 9c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2\sqrt{3} \sin t + \sqrt{3} \cos t + 9|}{2} = \frac{2\sqrt{3} \sin t + \sqrt{3} \cos t + 9}{2}$,

(vì $2\sqrt{3} \sin t + \sqrt{3} \cos t + 9 > 0, \forall t \in [0; 2\pi]$).

Biến đổi ta được: $2\sqrt{3} \sin t + \sqrt{3} \cos t = 2d - 9$.

Điều kiện có nghiệm:

$$(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 \geq (2d - 9)^2 \Leftrightarrow 4d^2 - 36d + 66 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{9 - \sqrt{15}}{2} \leq d \leq \frac{9 + \sqrt{15}}{2}$$

Vậy $M = \frac{9 + \sqrt{15}}{2}, m = \frac{9 - \sqrt{15}}{2}$ nên $M + m = 9$.

Câu 26. (THPT Trần Nhân Tông – Quảng Ninh 2022) Trong không gian Q_{xyz} , cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 7 = 0$, điểm $M(2; -1; 1)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 4z - 7 = 0$.

Đường thẳng (d) đi qua M cắt $(P), (S)$ lần lượt tại các điểm A và B sao cho M là trung điểm AB . Biết độ dài ngắn nhất của đoạn AB là $2\sqrt{a-2\sqrt{b}}$, giá trị $a+b$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 232

Ta có mặt cầu (S) tâm $I(-2; -1; 2)$, bán kính $R=4$ và $d(I; (P))=5 > R=4$ nên suy ra mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S) . Tiếp đến ta tìm mặt phẳng (Q) đối xứng với (P) qua M .

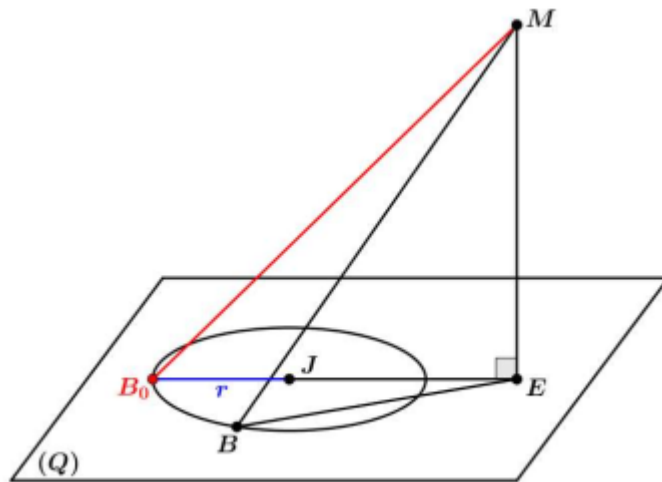
Ta có $(Q): x+2y-2z+D=0$ và $d(M; (P))=d(M; (Q))=3 \Leftrightarrow \frac{|D-2|}{3}=3 \Leftrightarrow D=11$

Suy ra: $(Q): x+2y-2z+11=0$. Tới đây ta tìm quỹ tích điểm B như sau:

Theo giả thiết, ta có $MA=MB \Rightarrow B \in (Q)$, do đó B luôn nằm trong hình tròn (C) được tạo từ mặt phẳng (Q) cắt mặt cầu (S) . Gọi J là hình chiếu của I lên trên (Q) , giải hình chiếu trên ra $J\left(-\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Từ đó ta suy ra bán kính của (C) bằng $r=\sqrt{R^2-IJ^2}=\sqrt{15}$.

Suy ra điểm B luôn thuộc đường tròn (C) tâm $J\left(-\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$, bán kính $r=\sqrt{15}$.

Do $AB=2MB$ nên AB lớn nhất chỉ khi MB lớn nhất, khi đó ta có hình vẽ như sau:



Từ hình vẽ trên ta suy ra

$$AB=2MB \leq 2MB_0 = 2\sqrt{ME^2 + EB_0^2} = 2\sqrt{ME^2 + (EJ + r)^2} = 2\sqrt{9 + (\sqrt{15} + \sqrt{13})^2}$$

$$= 2\sqrt{37 + 2\sqrt{195}}. \text{ Đồng nhất hệ số ra } a=37, b=195 \text{ tức } a+b=232.$$

Câu 27. (Chuyên Trần Phú - Hải Phòng 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 5; -2), B(-1; 3; 2)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+9=0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C . Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của độ dài OC . Giá trị $M^2 + m^2$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 72

Ta có $AB: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 5 - t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$. Gọi $M(3 - 2t; 5 - t; -2 + 2t)$ là giao điểm của AB và mặt phẳng (P) .

$$M \in (P) \Rightarrow 2(3 - 2t) + (5 - t) - 2(-2 + 2t) + 9 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{8}{3} \Rightarrow M\left(-\frac{7}{3}; \frac{7}{3}; \frac{10}{3}\right) \Rightarrow OM = \sqrt{22}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = \left(-\frac{16}{3}; -\frac{8}{3}; \frac{16}{3}\right) \\ \overrightarrow{BM} = \left(-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM = 8 \\ BM = 2 \end{cases} \Rightarrow MC^2 = MA \cdot MB = 16 \Leftrightarrow MC = 4$$

do MC là tiếp tuyến của mặt cầu của (S)

Khi đó tập hợp điểm C là đường tròn giao tuyến (C) nằm trên (P) có tâm là $M\left(-\frac{7}{3}; \frac{7}{3}; \frac{10}{3}\right)$ và bán kính là 4

Gọi C' và C'' lần lượt là hai điểm trên đường tròn (C) sao cho OC' và OC'' lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của độ dài OC , khi đó C', M và C'' theo thứ tự thẳng hàng.

$$Do \text{ đó } M^2 + m^2 = OC'^2 + OC''^2 = 2OM^2 + \frac{C'C''^2}{2} = 2 \cdot \sqrt{22}^2 + \frac{8^2}{2} = 76$$

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1; -7; -8)$, $B(2; -5; -9)$ sao cho khoảng cách từ điểm $M(7; -1; -2)$ đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Biết (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b; 4)$, khi đó giá trị của tổng $a + b$ là?

Lời giải

Trả lời: 3

$$\text{Phương trình tham số của đường thẳng } AB \text{ là } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -7 + 2t \\ z = -8 - t \end{cases}$$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M trên (P) và đường thẳng AB .

Ta tìm được điểm $K(3; -3; -10)$. Ta luôn có bất đẳng thức $d(M, (P)) = MH \leq MK$.

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } H \equiv K. \text{ Khi đó } \overrightarrow{MH} = (-4; -2; -8) = -2(2; 1; 4)$$

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; 1; 4)$. Vậy ta có $a + b = 3$.

Câu 29. (Chuyên Phan Bội Châu 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3), B(5; -4; -1)$ và mặt phẳng (P) qua Ox sao cho $d_{(B, (P))} = 2d_{(A, (P))}$, (P) cắt AB tại $I(a; b; c)$ nằm giữa AB . Tính $a + b + c$

Lời giải

Trả lời: 4

Do mặt phẳng (P) qua Ox nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng $by + cz = 0$ ($b^2 + c^2 > 0$)

$$d_{(B,(P))} = 2d_{(A,(P))} \Leftrightarrow \frac{|-4b - c|}{\sqrt{b^2 + c^2}} = 2 \cdot \frac{|2b + 3c|}{\sqrt{b^2 + c^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} -4b - c = 4b + 6c \\ -4b - c = -4b - 6c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8b + 7c = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $8b + 7c = 0$ chọn $b = 7; c = -8$ khi đó $(P): 7y - 8z = 0$

Xét $f(y, z) = 7y - 8z$

Thay tọa độ A, B vào ta được $(7.2 - 8.3)(7.(-4) - 8.(-1)) > 0$ suy ra A, B nằm cùng phía so với (P) (loại)

Trường hợp 2: $c = 0$ suy ra phương trình $(P): y = 0$

Thay tọa độ A, B vào ta được $2.(-4) < 0$ suy ra A, B nằm khác phía so với (P) . Do đó đường thẳng AB cắt (P) tại I nằm giữa AB

Phương trình tham số của đường thẳng AB :

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 6t \\ z = 3 - 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Tọa độ điểm I là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 6t \\ z = 3 - 4t \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ x = \frac{7}{3} \\ y = 0 \\ z = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{7}{3}; 0; \frac{5}{3}\right)$$

Vậy $a + b + c = \frac{7}{3} + 0 + \frac{5}{3} = 4$

Câu 30. (Bắc Giang 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x + my + (2m + 1)z - m - 2 = 0$, m là tham số. Gọi $H(a; b; c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên (P) . Tính $a + b$ khi khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất ?

Lời giải

Trả lời: 1,5

$$x + my + (2m+1)z - m - 2 = 0 \Leftrightarrow m(y + 2z - 1) + x + z - 2 = 0 \quad (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm với $\forall m \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2z - 1 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$

Suy ra (P) luôn đi qua đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$

$$K \in d \Rightarrow K(2-t; 1-2t; t), \quad AK(-t; -2t; t-3)$$

Đường thẳng d có VTCP $u(-1; -2; 1)$

$$\overrightarrow{AK} \cdot u = 0 \Leftrightarrow t + 4t + t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow K\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$$

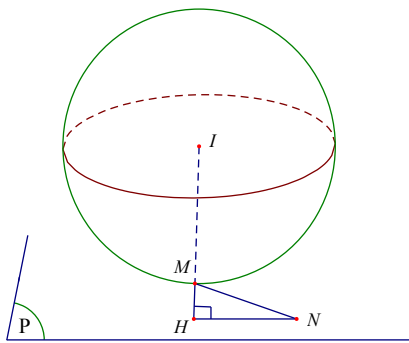
Ta có $AH \leq AK \Rightarrow AH_{\max} = AK \Leftrightarrow H \equiv K$

Vậy $a + b = \frac{3}{2}$

Câu 31. (HSG Bắc Ninh 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 14 = 0$. Điểm M thay đổi trên (S) , điểm N thay đổi trên (P) . Độ dài nhỏ nhất của MN bằng?

Lời giải

Trả lời: 1



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; -1)$, bán kính $R = 3$; $d(I; (P)) = 4 > R \Rightarrow$ mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) không có điểm chung.

Dựng $IH \perp (P), (H \in (P))$. Ta có: MN nhỏ nhất khi M là giao điểm của đoạn IH với (S) và $N \equiv H$.

Phương trình đường thẳng $IH: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

Điểm $M(1+2t; -2-t; -1+2t) \in (S)$ nên $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9$
 $\Leftrightarrow (2t)^2 + (-t)^2 + (2t)^2 = 9 \Leftrightarrow t = \pm 1$. Khi đó $M_1(3; -3; 1), M_2(-1; -1; -3)$.

Thử lại: $d(M_1; (P)) = 1$; $d(M_2; (P)) = 7 > IH = 4$ (loại).

Vậy $MN_{\min} = MH = 1$ khi $M(3; -3; 1); N\left(\frac{11}{3}; -\frac{10}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Câu 32. (Sở Thanh Hóa 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): y - 1 = 0$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - t \\ z = 1 \end{cases}$ và hai điểm $A(-1; -3; 11)$, $B\left(\frac{1}{2}; 0; 8\right)$. Hai điểm M, N thuộc mặt phẳng (P) sao cho $d(M, d) = 2$ và $NA = 2NB$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn MN .

Lời giải

Trả lời: 1

Gọi $I = d \cap (P) \Rightarrow I(1; 2 - t; 1)$

$I \in (P) \Rightarrow 2 - t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow I(1; 1; 1)$

Ta có $d \perp (P) \Rightarrow M$ thuộc đường tròn tâm $I(1; 1; 1), R_1 = 2$.

$N(x; y; z) \Rightarrow NA(-1-x; -3-y; 11-z); NB\left(\frac{1}{2}-x; -y; 8-z\right)$

$NA = 2NB \Leftrightarrow (1+x)^2 + (3+y)^2 + (11-z)^2 = 4\left[\left(\frac{1}{2}-x\right)^2 + y^2 + (8-z)^2\right]$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x - 6y - 42z + 126 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14z + 42 = 0$

Vậy $N \in S(J(1; 1; 7); R_2 = 3)$ và $J \in (P): y = 1$

Nên N thuộc đường tròn tâm $J(1; 1; 7); R_2 = 3$

Ta có $IJ = 6 > R_1 + R_2 \Rightarrow MN_{\min} = IJ - R_1 - R_2 = 1$

Câu 33. (Chuyên Bắc Giang 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$, $M(2; 1; 0)$. Gọi $H(a; b; c)$ là điểm thuộc d sao cho MH có độ dài nhỏ nhất. Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

Lời giải

Trả lời: 6

Phương trình tham số của đường thẳng $d \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}$. Vì $H \in d$ nên tọa độ điểm H có dạng $H(1+2t; -1+t; -t)$. Độ dài MH nhỏ nhất khi và chỉ khi H là hình chiếu của M lên d .

Ta có $\vec{u}(2; 1; -1)$ là vector chỉ phương của d , $\vec{MH}(-1+2t; -2+t; -t)$.

H là hình chiếu của M lên $d \Leftrightarrow \vec{MH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(-1+2t) + (-2+t) - t = 0 \Leftrightarrow 6t - 4 = 0$

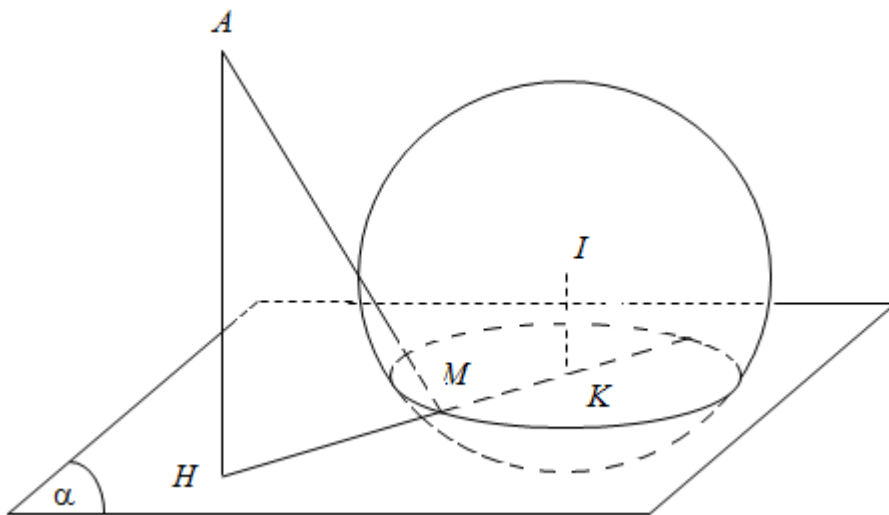
$$\Leftrightarrow t = \frac{2}{3}. \text{ Tọa độ điểm } H\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right) \text{ suy ra } \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \\ c = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy $T = a^2 + b^2 + c^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 6$.

Câu 34. (Sở Phú Thọ 2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+2)^2 + y^2 + (z+5)^2 = 24$ cắt mặt phẳng $(\alpha): x+y+4=0$ theo giao tuyến là đường tròn (C) . Điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến $A(4; -12; 1)$ nhỏ nhất. Tung độ của điểm M bằng

Lời giải

Trả lời: -4



Mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 0; -5)$, bán kính $R = 2\sqrt{6}$.

Ta có: $A \notin (\alpha); AI = \sqrt{(-6)^2 + 12^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{6} \Rightarrow A$ nằm ngoài mặt cầu (S) .

Khoảng cách từ tâm I đến (α) là: $d = d(I, (\alpha)) = \frac{|-2+0+4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Suy ra bán kính đường tròn (C) là: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{22}$

Gọi K là hình chiếu của I trên (α) .

Ta có $IK \perp (\alpha)$ nên đường thẳng IK nhận vector $\vec{n}_\alpha = (1; 1; 0)$ làm vector chỉ phương.

$$\text{Phương trình } IK: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = t \\ z = -5 \end{cases} \Rightarrow K(-2+t; t; -5)$$

Vì $K \in (\alpha)$ nên: $-2+t+t+4=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow K(-3; -1; -5)$

Gọi H là hình chiếu của A trên (α) .

Ta có $AH \perp (\alpha)$ nên đường thẳng AH nhận vector $\vec{n}_\alpha = (1; 1; 0)$ làm vector chỉ phương.

$$\text{Phương trình } AH: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -12 + t \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow H(4+t; -12+t; 1)$$

Vì $H \in (\alpha)$ nên: $4+t-12+t+4=0 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow H(6; -10; 1) \Rightarrow AH = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow KH = \sqrt{9^2 + 9^2 + 6^2} = 3\sqrt{22} > r \Rightarrow H$ nằm ngoài đường tròn (C) .

Khi đó ta có: $AM = \sqrt{AH^2 + HM^2} = \sqrt{HM^2 + 8}$

Suy ra $AM_{\min}$ khi $HM_{\min} \Leftrightarrow H, M, K$ thẳng hàng (theo thứ tự đó).

Khi đó: $\frac{HM}{HK} = \frac{2}{3}$ (*).

$$\text{Gọi } M(a; b; c). \text{ Từ (*) ta có: } \begin{cases} x-6 = \frac{2}{3}(-9) \\ y+10 = \frac{2}{3} \cdot 9 \\ z-1 = \frac{2}{3}(-6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-4 \\ z=-3 \end{cases}$$

Vậy, $M(0; -4; -3)$ nên tung độ của M bằng -4 .

Câu 35. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định 2022) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; -2; 4), B(-2; 6; 4)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \\ z=t \end{cases}$. Gọi M là điểm di động thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $\angle AMB = 90^\circ$ và N là điểm di động thuộc d . Tìm giá trị nhỏ nhất của MN .

Lời giải

Trả lời: 2

Vì $M \in (Oxy) \Rightarrow M(a; b; 0), \vec{MA} = (4-a; -2-b; 4), \vec{MB} = (-2-a; 6-b; 4)$.

Mà $\angle AMB = 90^\circ \Rightarrow \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 = 9 \Rightarrow M \in (C)$ tâm $I(1; 2; 0)$, bán kính $R=3$.

Lại có $\vec{u}_d = (0; 0; 1) \Rightarrow d \perp (Oxy)$.

Giao điểm của d và (Oxy) là $H(5; -1; 0)$ và $IH \perp d$ tại $H(5; -1; 0)$.

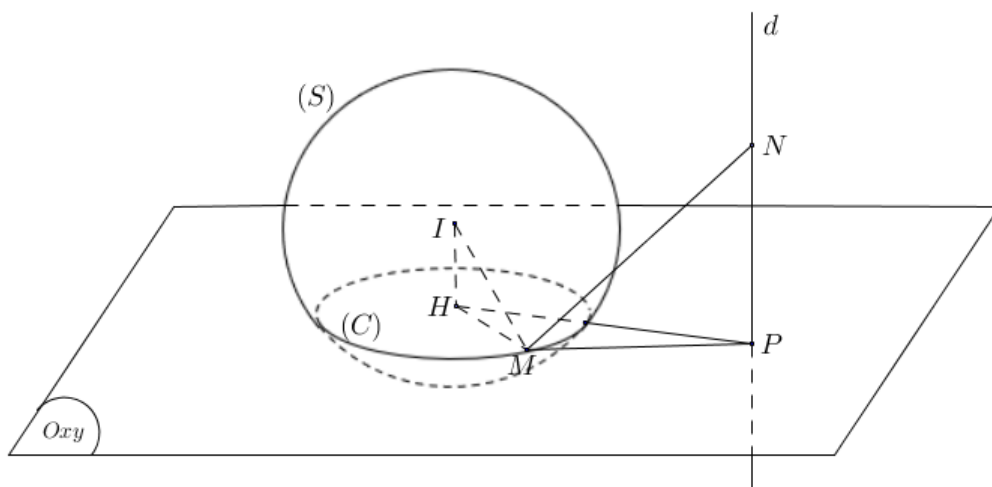
N là điểm di động thuộc d nên MN nhỏ nhất khi $N \equiv H; M = IH \cap (C) = M_0$.

Ta có $IH = 5 \Rightarrow MN_{\min} = M_0H = IH - IM_0 = 5 - 3 = 2$.

Câu 36. (Chuyên Quang Trung - Bình Phước 2022) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; -2; 4), B(-2; 6; 4)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \\ z=t \end{cases}$. Gọi M là điểm di động thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $\angle AMB = 90^\circ$ và N là điểm di động thuộc d . Tìm giá trị nhỏ nhất của MN .

Lời giải

Trả lời: 2



(Oxy) có 1 vector pháp tuyến $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

d có 1 vector chỉ phương $\vec{u} = (0; 0; 1)$. Nên $d \perp (Oxy)$.

Gọi $P = d \cap (Oxy) \Rightarrow P(5; -1; 0)$

Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow I(1; 2; 4)$.

$\angle AMB = 90^\circ \Rightarrow M$ thuộc mặt cầu (S) đường kính AB , bán kính $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(-6)^2 + 8^2 + 0^2}}{2} = 5$.

Mà $M \in (Oxy)$ nên M thuộc đường tròn (C) là giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (Oxy) .

Gọi H là hình chiếu của I lên mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow H(1; 2; 0)$.

Suy ra M thuộc đường tròn (C) tâm $H(1; 2; 0)$, bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$.

Ta có: $MN \geq MP \geq HP - r = \sqrt{16 + 9} - 3 = 2$.

Vậy $MN_{\min} = 2$.

Dấu “=” xảy ra khi $N \equiv P$ và H, M, P thẳng hàng (M nằm giữa H, P).

Câu 37. (Sở Hòa Bình 2022) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 1 = 0$. Đường thẳng Δ song song với (P) đồng thời tạo với d góc bé nhất. Biết rằng Δ có một véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (m; n; 1)$. Giá trị biểu thức $T = m^2 + n^2$ bằng ?

Lời giải

Trả lời: 4

Đường thẳng d có một VTCP là $\vec{u}_d = (4; -4; 3)$, đường thẳng Δ có một VTCP là $\vec{u}_\Delta = (m; n; 1)$, mặt phẳng (P) có một VTPT là $\vec{n}_P = (2; -1; 2)$.
Do $\Delta \parallel (P)$ nên $\vec{n}_P \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow 2m - n + 2 = 0 \Leftrightarrow n = 2m + 2$

Ta có $\cos(\Delta; d) = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{u}_\Delta|}{|\vec{u}_d| |\vec{u}_\Delta|} = \frac{1}{\sqrt{41}} \cdot \frac{|4m - 4n + 3|}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{41}} \cdot \frac{|-5m - 4|}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{41}} \sqrt{\frac{16m^2 + 40m + 25}{5m^2 + 8m + 5}}$

$$f(x) = \frac{16m^2 + 40m + 25}{5m^2 + 8m + 5} \Rightarrow f'(m) = \frac{-18m(4m + 5)}{(5m^2 + 8m + 5)^2}$$

Xét hàm số

Bảng biến thiên:

m	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		0		$+\infty$
$f'(m)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(m)$	$\frac{16}{5}$				5		$\frac{16}{5}$

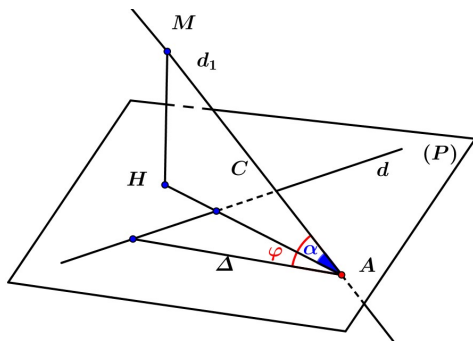
Ta có (Δ, d) bé nhất $\Leftrightarrow \cos(\Delta; d)$ lớn nhất $\Leftrightarrow m = 0$ nên $n = 2$.

Vậy $T = m^2 + n^2 = 4$.

Câu 38. (THPT Phan Châu Trinh - Đà Nẵng 2022) Cho điểm $A(-1; 0; -1)$, hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$, đường thẳng Δ đi qua A cắt đường thẳng d sao cho góc φ giữa Δ và d' nhỏ nhất, khi đó $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{b}}$ ($a, b \in \mathbb{N}$). Tổng $a + b$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 7



Đường thẳng d đi qua điểm $N(1; 2; -2)$ và có một vector chỉ phương $u_d = (2; 1; -1)$.

Gọi d_1 là đường thẳng qua A và $d_1 \parallel d' \Rightarrow (\Delta, d') = (\Delta, d_1) = \varphi$.

$$d_1: \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Ta có phương trình tham số của đường thẳng

Gọi (P) là mặt phẳng qua A và chứa d . Nên mặt phẳng (P) đi qua điểm A và có một vector pháp tuyến là $n = [u_d, \overrightarrow{AN}] = (1; 0; 2)$. Do đó, phương trình của mặt phẳng $(P): x + 2z + 3 = 0$.

Lấy điểm $M(-2; 2; 1) \in d_1$ và điểm M khác điểm A . Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (P) . Suy ra $H = MH \cap (P)$.

$$MH: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Ta có phương trình tham số của

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 \\ z = 1 + 2t \\ x + 2z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{13}{5}; 2; -\frac{1}{5}\right)$$

Suy ra tọa độ của H là nghiệm của hệ:

Để dàng chứng minh được AH cắt được d .

Gọi $\alpha = (\overline{d_1}, AH) = \widehat{MAH}$. Suy ra: $\varphi \geq \alpha$.

Suy ra φ nhỏ nhất là khi bằng α .

Ta có: $AM = 3, AH = \frac{6\sqrt{5}}{5}$. Suy ra: $\cos \varphi = \cos \widehat{MAH} = \frac{AH}{AM} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Theo đề, ta có: $a = 2, b = 5$ nên $a + b = 7$.

$$\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = -2 + t \end{cases}$$

Câu 39. (Sở Ninh Bình 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = -2 + t \end{cases}$ và mặt cầu $(S): (x - 2 - m)^2 + (y - 1 + m)^2 + (z - 2 + m)^2 = 25$, với m là tham số. Gọi I là tâm của (S) . Khi Δ cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách lớn nhất, OI bằng?

Lời giải

Trả lời: 3

$$d: \begin{cases} x = 2 + t' \\ y = 1 - t' \\ z = 2 - t' \end{cases}$$

Ta có $I(2 + m, 1 - m, 2 - m)$. Suy ra I thuộc đường thẳng

Để thấy Δ và d là hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau.

Mặt khác (S) có bán kính bằng 5.

Khi Δ cắt (S) tại hai điểm, gọi A, B là hai giao điểm và h là khoảng cách từ I đến Δ . Ta có $\frac{AB}{2} = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{25 - h^2}$. Do đó để AB lớn nhất thì h phải nhỏ nhất.

Ta thấy h nhỏ nhất bằng khoảng cách giữa Δ và d . Khi đó I là một điểm đầu của đoạn vuông góc chung của Δ và d .

Dễ tìm được $I = (2; 1; 2)$ và điểm đầu còn lại của đoạn vuông góc chung là $J(3; 3; 1)$. Ta có $h_{\min} = \sqrt{6}$ và $OI = 3$.

Câu 40. (THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương

trình $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases}$ và ba điểm $A(6; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 4)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc d sao cho biểu thức $P = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $a + b + c$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 4

Vì $M \in d$ nên giả sử $M(1 - t; 2 + t; -t)$.

Ta có: $MA^2 = 3t^2 + 14t + 29$; $MB^2 = 3t^2 - 4t + 2$; $MC^2 = 3t^2 + 10t + 21$

$\Rightarrow P = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 = 18t^2 + 36t + 96 = 18(t + 1)^2 + 78 \geq 78$

Do đó $P = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = -1$, khi đó:

$M(2; 1; 1) \Rightarrow a + b + c = 4$.

Câu 41. (THPT Chu Văn An - Hà Nội - 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng

$\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ và hai điểm $A(1; 2; -5)$, $B(-1; 0; 2)$. Biết điểm M thuộc Δ sao cho biểu thức $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất $T_{\max}$. Khi đó, $T_{\max}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 3

Do M thuộc Δ nên $M(t; 1+t; t)$.

Khi đó $MA = \sqrt{3t^2 - 6t + 27} = \sqrt{3(1-t)^2 + 24}$, $MB = \sqrt{3t^2 + 6}$.

Do đó $|MA - MB| = \left| \sqrt{3(1-t)^2 + 24} - \sqrt{3t^2 + 6} \right|$.

Xét hai véc tơ $u = (\sqrt{3}(1-t); \sqrt{24})$ và $v = (\sqrt{3}t; -\sqrt{6})$.

Ta có $\left| |u| - |v| \right| \leq |u + v| = 3$ nên $T_{\max} = 3$.

Dấu bằng xảy ra khi $u = (\sqrt{3}(1-t); \sqrt{24})$ và $v = (\sqrt{3}t; -\sqrt{6})$ ngược hướng hay $t = 1$.

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$ và hai điểm $A(2; 0; 3)$, $B(2; -2; -3)$. Biết điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc d thỏa mãn $MA^4 + MB^4$ nhỏ nhất. Tìm x_0 .

Lời giải

Trả lời: 2

Gọi I là trung điểm của AB . Khi đó ta có

$$\begin{aligned} MA^4 + MB^4 &= (MA^2 + MB^2)^2 - 2MA^2 \cdot MB^2 = \left(2MI^2 + \frac{AB^2}{2} \right)^2 - 2 \left(MI^2 - \frac{AB^2}{4} \right)^2 \\ &= 4MI^4 + 2MI^2 AB^2 + \frac{AB^4}{4} - 2MI^4 + MI^2 AB^2 - \frac{AB^4}{8} \\ &= 2MI^4 + 3MI^2 AB^2 + \frac{AB^4}{4} = 2 \left(MI^2 + \frac{3AB^2}{4} \right)^2 - \frac{7}{10} AB^4 \end{aligned}$$

Do đó, $MA^4 + MB^4$ đạt GTNN khi MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I lên d .

Điểm $I(2; -1; 0)$. Lấy $M(2+t; -1+2t; 3t) \in d$. $\overrightarrow{IM} = (t; 2t; 3t)$

$$\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{u_d} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t + 4t + 9t = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Suy ra $M \equiv I$.

Vậy $x_0 = 2$

Câu 43. (Chuyên Hà Tĩnh - 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 0; 1)$, $B(3; 2; 1)$, $C(5; 3; 7)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $MA = MB$ và $MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = a + b + c$

Lời giải

Trả lời: 5

Gọi I là trung điểm của AB , suy ra $I(1; 1; 1)$; $\overrightarrow{AB} = (4; 2; 0)$.

Phương trình mặt phẳng trung trực của AB : $(\alpha): 2x + y - 3 = 0$.

Vì $(2.3 + 1.2 - 3) \cdot (2.5 + 1.3 - 3) = 50 > 0$ nên B, C nằm về một phía so với (α) , suy ra A, C nằm về hai phía so với (α) .

Điểm M thỏa mãn $MA = MB$ khi $M \in (\alpha)$. Khi đó $MB + MC = MA + MC \geq AC$.

$MB + MC$ nhỏ nhất bằng AC khi $M = AC \cap (\alpha)$.

Phương trình đường thẳng AC : $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, do đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương

Câu 44. (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-8;1;1)$, $B(2;1;3)$ và $C(6;4;0)$. Một điểm M di động trong không gian sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 34$. Cho biết $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất khi điểm M trùng với điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Tính tích số $x_0 y_0 z_0$.

Lời giải

Trả lời: 18

Gọi $M = (a; b; c)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 34 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 34 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 34$

Mặt khác $\overrightarrow{MA} = (-8 - a; 1 - b; 1 - c)$, $\overrightarrow{BC} = (4; 3; -3)$

Suy ra $4(-8 - a) + 3(1 - b) - 3(1 - c) = 34 \Leftrightarrow -4a - 3b + 3c - 66 = 0$.

Vậy $M \in (P)$ có phương trình $-4x - 3y + 3z - 66 = 0$.

Ký hiệu $f(M) = f(x; y; z) = -4x - 3y + 3z - 66$, với $M(x; y; z)$

Ta có $f(A) \cdot f(B) = (-4(-8) - 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 66)((-4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 66)) = (-34) \cdot (-68) = 2312 > 0$

Suy ra điểm $A(-8;1;1)$ và điểm $B(2;1;3)$ nằm về cùng 1 phía so với mặt phẳng (P) .

Khi đó $|MA - MB| \leq AB$ (tính chất 3 cạnh của tam giác) suy ra $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất khi M, A, B thẳng hàng và M nằm ngoài đoạn thẳng AB hay M là giao điểm của đường thẳng AB với (P) .

Đường thẳng AB có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (10; 0; 2)$ và qua điểm $B(2;1;3)$ nên có phương trình

$$\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Suy ra $-4(2 + 5t) - 3 \cdot 1 + 3(3 + t) - 66 = 0 \Leftrightarrow -17t = 68 \Leftrightarrow t = -4$.

Vậy $M(-18; 1; -1)$ hay $x_0 y_0 z_0 = 18$.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;2)$, $B(3;1;-1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$. Gọi $M(a; b; c) \in (P)$ sao cho $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S = 9a + 3b + 6c$.

Lời giải

Trả lời: 3

Gọi $I(m; n; p)$ là điểm thỏa mãn: $3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Ta có $\vec{IA} = (1-m; -n; 2-p); \vec{IB} = (3-m; 1-n; -1-p)$.

$$3\vec{IA} - 2\vec{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(1-m) - 2(3-m) = 0 \\ 3(-n) - 2(1-n) = 0 \\ 3(2-p) - 2(-1-p) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ n = -2 \\ p = 8 \end{cases} \Rightarrow I(-3; -2; 8).$$

Ta có $|\vec{3MA} - 2\vec{MB}| = |3(\vec{MI} + \vec{IA}) - 2(\vec{MI} + \vec{IB})| = |\vec{MI}| = MI$.

Khi đó, $|\vec{3MA} - 2\vec{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $M \in (P) \Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất, $M \in (P) \Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P) .

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (P) . Khi đó Δ nhận vector pháp tuyến của (P)

$$\Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -2 + t \\ z = 8 + t \end{cases}$$

à $\vec{n} = (1; 1; 1)$ làm vectơ chỉ phương

$$\begin{cases} x = -3 + t \\ y = -2 + t \\ z = 8 + t \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{2}{3} \\ x = -\frac{11}{3} \\ y = -\frac{8}{3} \\ z = \frac{22}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{11}{3} \\ b = -\frac{8}{3} \\ c = \frac{22}{3} \end{cases} \Rightarrow S = 9a + 3b + 6c = 3.$$

Tọa độ M là nghiệm của hệ

Câu 46. (KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ O_{xyz} , cho ba điểm $A(1; 4; 5), B(3; 4; 0), C(2; -1; 0)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x - 3y - 2z - 12 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ thuộc (α) sao cho $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $S = a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 3

Gọi điểm $I(x; y; z)$ thỏa mãn $\vec{IA} + \vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0}$.

$$\begin{cases} \vec{IA} = (1-x; 4-y; 5-z) \\ \vec{IB} = (3-x; 4-y; -z) \\ \vec{IC} = (2-x; -1-y; -z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{IA} = (1-x; 4-y; 5-z) \\ \vec{IB} = (3-x; 4-y; -z) \\ 3\vec{IC} = (6-3x; -3-3y; -3z) \end{cases}$$

Mà $\Rightarrow \vec{IA} + \vec{IB} + 3\vec{IC} = (10-5x; 5-5y; 5-5z)$

$$\vec{IA} + \vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow I(2; 1; 1).$$

Do đó:

Mặt khác: $MA^2 + MB^2 + 3MC^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 + 3(\vec{MI} + \vec{IC})^2$

$$= 5MI^2 + 2.MI.\left(\vec{IA} + \vec{IB} + 3\vec{IC}\right) + IA^2 + IB^2 + 3IC^2$$

Vì I, A, B, C cố định nên $IA^2 + IB^2 + 3IC^2$ không đổi

Do đó: $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên mặt phẳng (α) .

Phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng (α) là:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{-2}.$$

Gọi $\{M\} = d \cap (\alpha)$. Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{-2} \\ 3x-3y-2z-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+6=3y-3 \\ -2x+4=3z-3 \\ 3x-3y-2z-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right).$$

Vậy $a=\frac{7}{2}, b=-\frac{1}{2}, c=0 \Rightarrow S=a+b+c=3.$

Câu 47. (Đề Thi Công Bằng KHTN 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1; 2; 0), B(1; -1; 3), C(1; -1; -1)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 3y + 2z - 15 = 0$. Xét $M(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $2MA^2 - MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất. Giá trị của $a+b+c$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 3

Gọi I là điểm thỏa mãn: $2\vec{IA} + \vec{IC} - \vec{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\vec{OA} - \vec{OI}) + (\vec{OC} - \vec{OI}) - (\vec{OB} - \vec{OI}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \vec{OI} = \frac{2\vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OB}}{2} \Rightarrow I(1; 2; -2)$$

Ta có $2MA^2 = 2\vec{MA}^2 = 2(\vec{MI} + \vec{IA})^2 = 2\vec{MI}^2 + 2\vec{IA}^2 + 4\vec{MI} \cdot \vec{IA}$

$$MB^2 = \vec{MB}^2 = (\vec{MI} + \vec{IB})^2 = \vec{MI}^2 + \vec{IB}^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IB}$$

$$MC^2 = \vec{MC}^2 = (\vec{MI} + \vec{IC})^2 = \vec{MI}^2 + \vec{IC}^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IC}$$

Suy ra $2MA^2 - MB^2 + MC^2 = 2\vec{MI}^2 + 2\vec{IA}^2 + \vec{IC}^2 - \vec{IB}^2 + 2\vec{MI} \cdot (2\vec{IA} + \vec{IC} - \vec{IB})$

Suy ra $2MA^2 - MB^2 + MC^2 = 2MI^2 + 2IA^2 + IC^2 - IB^2$. Do I cố định nên $2IA^2 + IC^2 - IB^2$ không đổi. Vậy $2MA^2 - MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên (P) .

• Đường thẳng Δ qua $I(1; 2; -2)$ và vuông góc với (P) là:
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$$

Suy ra tọa độ điểm M là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = -2 + 2t \\ 3x - 3y + 2z - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow M(4; -1; 0)$$

Suy ra $a + b + c = 3$

Câu 48. (Trần Phú - Hà Tĩnh - 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 1)$, $B(5; 0; -1)$, $C(3; 1; 2)$ và mặt phẳng $(Q): 3x + y - z + 3 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc (Q) thỏa mãn $MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ nhỏ nhất. Tính tổng $a + b + 5c$.

Lời giải

Trả lời: 9

Gọi E là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = \vec{0} \Rightarrow E(3; 0; 1)$.

Ta có: $S = MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + 2\overrightarrow{MC}^2$
 $= (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA})^2 + (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB})^2 + 2(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EC})^2 = 4ME^2 + EA^2 + EB^2 + 2EC^2$.

Vì $EA^2 + EB^2 + 2EC^2$ không đổi nên S nhỏ nhất khi và chỉ khi ME nhỏ nhất.

$\Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của E lên (Q) .

Phương trình đường thẳng ME :
$$\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = t \\ z = 1 - t \\ 3x + y - z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \\ t = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow M(0; -1; 2) \Rightarrow a = 0, b = -1, c = 2$.

$\Rightarrow a + b + 5c = 0 - 1 + 5 \cdot 2 = 9$.

Câu 49. (Chuyên Phan Bội Châu 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ O_{xyz} , cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S) . Gọi m, n là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2MA^2 - MB^2$. Xác định $(m - n)$.

Lời giải

Trả lời: 60

Xét điểm I sao cho: $\vec{2IA} - \vec{IB} = \vec{0}$. Giả sử $I(x; y; z)$, ta có:

$$\vec{IA}(4-x; 3-y; 1-z), \vec{IB}(3-x; 1-y; 3-z).$$

$$\vec{2IA} - \vec{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(4-x) = 3-y \\ 2(3-y) = 1-z \\ 2(1-z) = 3-x \end{cases} \Leftrightarrow I(5; 5; -1).$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } P &= 2MA^2 - MB^2 = 2(\vec{MI} + \vec{IA})^2 - (\vec{MI} + \vec{IB})^2 \\ &= 2\vec{MI}^2 + 2\vec{IA}^2 + 4\vec{MI} \cdot \vec{IA} - (\vec{MI}^2 + \vec{IB}^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IB}) \\ &= \vec{MI}^2 + 2\vec{IA}^2 - \vec{IB}^2 + 2\vec{MI}(\vec{2IA} - \vec{IB}) = \vec{MI}^2 + 2\vec{IA}^2 - \vec{IB}^2 + 2\vec{MI}(\vec{2IA} - \vec{IB}) \\ &= \vec{MI}^2 + 2\vec{IA}^2 - \vec{IB}^2. \end{aligned}$$

Do I cố định nên $\vec{IA}^2, \vec{IB}^2$ không đổi. Vậy P lớn nhất (nhỏ nhất) $\Leftrightarrow \vec{MI}^2$ lớn nhất (nhỏ nhất).
 $\Leftrightarrow MI$ lớn nhất (nhỏ nhất) $\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đường thẳng IK (với $K(1; 2; -1)$ là tâm của mặt cầu (S)) với mặt cầu (S) .

Ta có: MI đi qua $I(5; 5; -1)$ và có vector chỉ phương là $\vec{KI}(4; 3; 0)$.

$$\text{Phương trình của } MI \text{ là: } \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1. \end{cases}$$

Tọa độ điểm M cần tìm ứng với giá trị t là nghiệm của phương trình:

$$(1+4t-1)^2 + (2+3t-2)^2 + (-1+1)^2 = 9 \Leftrightarrow 25t^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{5} \\ t = -\frac{3}{5}. \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{3}{5} \Rightarrow M_1\left(\frac{17}{5}; \frac{19}{5}; -1\right) \Rightarrow M_1I = 2 \text{ (min).}$$

$$\text{Với } t = -\frac{3}{5} \Rightarrow M_2\left(-\frac{7}{5}; \frac{1}{5}; -1\right) \Rightarrow M_2I = 8 \text{ (max).}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} m = P_{\max} = 48 \\ n = P_{\min} = -12 \end{cases} \Rightarrow m - n = 60.$$

Câu 50. (Chuyên KHTN 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(8;5;-11), B(5;3;-4), C(1;2;-6)$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2 = 9$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ là điểm trên (S) sao cho $|\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm $a+b$.

Lời giải

Trả lời: 2

Gọi N là điểm thỏa mãn $\vec{NA} - \vec{NB} - \vec{NC} = \vec{0}$, suy ra $N(-2;0;1)$.

Khi đó:

$$|\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}| = |(\vec{MN} + \vec{NA}) - (\vec{MN} + \vec{NB}) - (\vec{MN} + \vec{NC})| = |(\vec{NA} - \vec{NB} - \vec{NC}) - \vec{MN}| = |\vec{MN}|$$

Suy ra $|\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}|$ nhỏ nhất khi MN nhỏ nhất. Mặt cầu (S) có tâm $I(2;4;-1)$, suy ra:

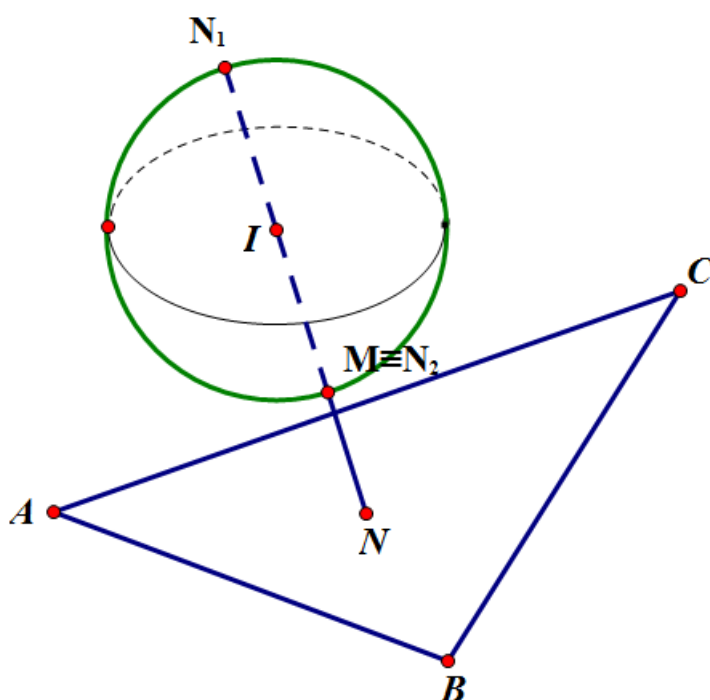
$$\vec{NI} = (4;4;-2) = (2;2;-1) \cdot 2. \text{ Phương trình } \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}. \text{ Thay phương trình NI vào phương}$$

$$\text{trình } (S) \text{ ta được: } (2t)^2 + (2t)^2 + (-t)^2 = 9 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}.$$

Suy ra NI cắt (S) tại hai điểm phân biệt $N_1(3;6;-2), N_2(0;2;0)$.

Vì $NN_1 > NN_2$ nên MN nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv N_2$. Vậy $M(0;2;0)$ là điểm cần tìm.

Suy ra: $a+b=2$.



Câu 51. Cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$ và hai điểm $A(1; 1; 3)$, $B(21; 9; -13)$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho $3MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T = a.b.c$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 8

Gọi điểm I thỏa mãn $3\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \Rightarrow I(6; 3; -1)$.

Khi đó $3MA^2 + MB^2 = 3(\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 = 4MI^2 + 3IA^2 + IB^2 + 2\vec{MI} \cdot (3\vec{IA} + \vec{IB})$
 $= 4MI^2 + 3IA^2 + IB^2$.

Do $3IA^2 + IB^2$ không đổi vì ba điểm $A; B; I$ cố định nên $3MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất. Khi đó M là giao điểm của đường thẳng IJ với mặt cầu (S) , $J(2; 1; 3)$ là tâm của mặt cầu (S) .

Ta có phương trình đường thẳng IJ là
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \Rightarrow IJ \cap (S) = \begin{cases} M_1(4; 2; 1) \\ M_2(0; 0; 5) \end{cases}$$

Kiểm tra $IM_1 < IM_2$ ($3 < 9$) nên $M_1(4; 2; 1)$ là điểm cần tìm. Vậy $T = a.b.c = 8$.

Câu 52. (Đại học Hồng Đức – Thanh Hóa 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-3; 1; 1)$, $B(5; 1; 1)$ và hai mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 4 = 0$, $(Q): -x + y + z - 1 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm nằm trên hai mặt phẳng (P) và (Q) sao cho $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

Lời giải

Trả lời: 3

Từ giả thiết ta có M thuộc giao tuyến d của hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_P = (1; 2; 1)$. Mặt phẳng (Q) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_Q = (-1; 1; 1)$. Khi đó đường thẳng d đi qua $N(1; 1; 1)$ và có một vector chỉ phương là

$$\vec{u}_d = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (1; -2; 3)$$
 nên có phương trình tham số là
$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$
 suy ra $M(1+t; 1-2t; 1+3t)$.

$$MA + MB = \sqrt{(t+4)^2 + 4t^2 + 9t^2} + \sqrt{(t-4)^2 + 4t^2 + 9t^2} = \sqrt{14t^2 + 8t + 16} + \sqrt{14t^2 - 8t + 16}$$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(t) = \sqrt{14t^2 + 8t + 16} + \sqrt{14t^2 - 8t + 16} = \sqrt{14} \left[\sqrt{t^2 + \frac{4}{7}t + \frac{8}{7}} + \sqrt{t^2 - \frac{4}{7}t + \frac{8}{7}} \right]$$

$$= \sqrt{14} \left[\sqrt{\left(t + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2} + \sqrt{\left(t - \frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2} \right]$$

Đặt $\vec{u} = \left(t + \frac{2}{7}; \frac{2}{\sqrt{7}}\right)$, $\vec{v} = \left(\frac{2}{7} - t; \frac{2}{\sqrt{7}}\right)$,

Khi đó $f(t) = \sqrt{14} \left[|\vec{u}| + |\vec{v}| \right] \geq \sqrt{14} |\vec{u} + \vec{v}|$. Suy ra $f(t) \geq \sqrt{14} \cdot \sqrt{\left(\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{7}}\right)^2} = \frac{8\sqrt{7}}{49}$

$$\frac{t + \frac{2}{7}}{\frac{2}{7} - t} = \frac{\frac{2}{\sqrt{7}}}{\frac{2}{\sqrt{7}}} > 0 \Rightarrow t = 0$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng hay

Do đó $M(1; 1; 1)$. Vậy $T = a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Câu 53. (THPT Võ Nguyên Giáp - Quảng Bình - 2022) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 3), B(0; 1; 0), C(1; 0; -2)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 2 = 0$. Điểm $M(a; b; c)$ nằm trên (P) sao cho biểu thức $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T = a - b + 9c$ bằng ?

Lời giải

Trả lời: - 13

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thoả mãn $\vec{IA} + 2\vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0} \Rightarrow I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right)$.

Ta có: $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 = 6MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 + 2\vec{MI}(\vec{IA} + 2\vec{IB} + 3\vec{IC})$
 $= 6MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2$

Vì $IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2$ không đổi nên biểu thức $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của điểm I trên (P) .

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm I và vuông góc với mặt phẳng (P) .

Phương trình tham số của Δ
$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} + t \\ y = \frac{2}{3} + t \\ z = -\frac{1}{2} + t \end{cases}$$

Xét phương trình: $\frac{2}{3} + t + \frac{2}{3} + t - \frac{1}{2} + t + 2 = 0 \Rightarrow t = -\frac{17}{18} \Rightarrow M\left(-\frac{5}{18}; -\frac{5}{18}; -\frac{13}{9}\right)$

$$\text{Vậy } T = a - b + 9c = \frac{-5}{18} + \frac{5}{18} + 9 \cdot \frac{-13}{9} = -13$$

Câu 54. (Chuyên Hà Tĩnh 2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-9)^2 + z^2 = 18$ và hai điểm $A(8;0;0), B(4;4;0)$. Điểm M bất kỳ thuộc mặt cầu (S) . Biết $MA + 3MB$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm M có tọa độ $M(x_0; y_0; z_0)$. Giá trị biểu thức $T = 4x_0 - 9y_0$ bằng?

Lời giải

Trả lời: -46

Mặt cầu (S) có tâm và bán kính lần lượt là $I(-1; 9; 0), R = 3\sqrt{2}$.

Gọi $M(x; y; z)$

$$\text{Vì } M \in (S) \Rightarrow (x+1)^2 + (y-9)^2 + z^2 = 18$$

Ta có

$$\begin{aligned} MA + 3MB &= \sqrt{(x-8)^2 + y^2 + z^2} + 3\sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2 + z^2} \\ &= \sqrt{(x-8)^2 + y^2 + z^2 + 8[(x+1)^2 + (y-9)^2 + z^2 - 18]} + 3\sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2 + z^2} \\ &= 3\left[\sqrt{x^2 + (y-8)^2 + z^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2 + z^2}\right] \end{aligned}$$

$$\text{Xét } C(0; 8; 0) \text{ suy ra } MA + 3MB = 3(MB + MC) \geq 3BC = 12\sqrt{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M là giao của đường thẳng BC và mặt cầu (S) và M nằm giữa B, C .

$$BC: \begin{cases} x=t \\ y=8-t \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow M(t; 8-t; 0)$$

Phương trình đường thẳng

$$M \in (S) \Leftrightarrow 2(t+1)^2 = 18 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \Rightarrow M(2; 6; 0) \\ t=-4 \Rightarrow M(-4; 12; 0) \end{cases}$$

Mà

$$\text{Vậy } x_0 = 2; y_0 = 6 \Rightarrow T = 4 \cdot 2 - 9 \cdot 6 = -46$$

Câu 55. (THPT Hoàng Hoa Thám - Quảng Ninh - 2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = \frac{13}{2}$ và ba điểm $A(-1; 2; 3), B(0; 4; 6), C(-2; 1; 5); M(a; b; c)$

là điểm thay đổi trên (S) sao cho biểu thức $2MA^2 + MB^2 - 2MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $a+b+c$.

Lời giải

Trả lời: 6

Mặt cầu (S) có tâm $J(-2; 3; 1)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{26}}{2}$.

$$2\vec{IA} + \vec{IB} - 2\vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{IB} = 2\vec{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 - x = 2 \cdot (-1) \\ 4 - y = 2 \cdot (-1) \\ 6 - z = 2 \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \\ z = 2 \end{cases}$$

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn

$$\Rightarrow I(2; 6; 2) \Rightarrow \vec{JI} = (4; 3; 1) \Rightarrow JI = \sqrt{26} > \frac{\sqrt{26}}{2} \Rightarrow I \text{ nằm ngoài mặt cầu } (S).$$

$$P = 2MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 2(\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 - 2(\vec{MI} + \vec{IC})^2 =$$

$$= MI^2 + 2\vec{MI} \cdot (2\vec{IA} + \vec{IB} - 2\vec{IC}) + 2IA^2 + IB^2 - 2IC^2 = MI^2 + 2IA^2 + IB^2 - 2IC^2$$

$$P_{\min} \Leftrightarrow IM_{\min} \Leftrightarrow \begin{cases} M = JI \cap (S) \\ JM + MI = JI \end{cases}$$

Từ đó, ta có

$$JI : \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 3 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}, \text{ thế } x, y, z \text{ vào phương trình mặt cầu, ta được:}$$

$$16t^2 + 9t^2 + t^2 = \frac{13}{2} \Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \Rightarrow M\left(0; \frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right) (t/m) \\ t = -\frac{1}{2} \Rightarrow M\left(-4; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) (l) \end{cases}$$

Vậy $a + b + c = 6$.

Câu 56. (Sở Hậu Giang 2022) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - 3y + 2z - 15 = 0$ và ba điểm $A(1; 2; 0)$, $B(1; -1; 3)$, $C(1; -1; -1)$. Điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc (P) sao cho $2MA^2 - MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $T = 2x_0 + 3y_0 + z_0$.

Lời giải

Trả lời: 5

$$\text{Gọi } I \text{ là điểm thỏa mãn } 2\vec{IA} - \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0} \Rightarrow 2\vec{IA} = \vec{IB} - \vec{IC} = \vec{CB} \Rightarrow \vec{IA} = \frac{1}{2}\vec{CB}$$

$$\text{Có } \vec{CB} = (0; 0; 4) \Rightarrow \vec{IA} = (0; 0; 2) \Rightarrow I(1; 2; -2)$$

$$\text{Ta có } 2MA^2 - MB^2 + MC^2 = 2(\vec{MI} + \vec{IA})^2 - (\vec{MI} + \vec{IB})^2 + (\vec{MI} + \vec{IC})^2$$

$$= 2MI^2 + 2\vec{MI} \cdot (2\vec{IA} - \vec{IB} + \vec{IC}) + 2IA^2 - IB^2 + IC^2 = 2MI^2 + 2IA^2 - IB^2 + IC^2$$

Vì điểm I cố định nên $2MA^2 - MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất. Do đó M là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P) .

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $n_p = (3; -3; 2)$.

Vì $IM \perp (P)$ nên đường thẳng IM có vector chỉ phương $u = (3; -3; 2)$.

Phương trình đường thẳng IM là
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$$

Vì $M \in IM \Rightarrow M(1 + 3t; 2 - 3t; -2 + 2t)$

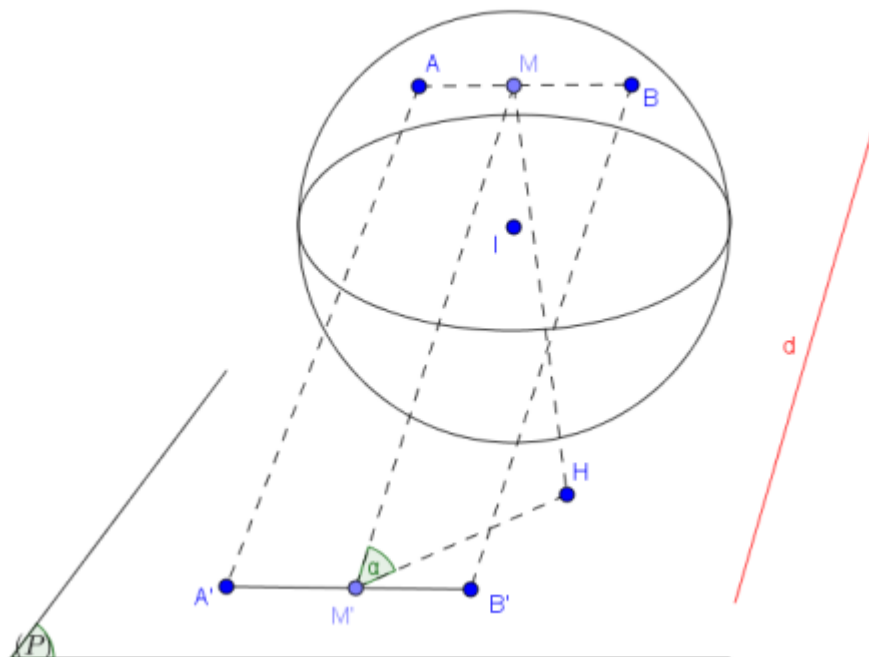
Vì $M \in (P) \Rightarrow 3(1 + 3t) - 3(2 - 3t) + 2(-2 + 2t) - 15 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(4; -1; 0)$

Vậy $T = 5$.

Câu 57. (THPT Gia Định – HCM – 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y + z + 7 = 0$, đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{2}$ và mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 5$. Gọi A, B là hai điểm trên mặt cầu (S) và $AB = 4$; A', B' là hai điểm nằm trên mặt phẳng (P) sao cho AA', BB' cùng song song với đường thẳng d . Giá trị lớn nhất của tổng $AA' + BB'$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 14,1



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; 2)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

$d(I;(P)) = \frac{10\sqrt{3}}{3} > R$ nên (P) và mặt cầu (S) không giao nhau.

Gọi M là trung điểm của AB , M' là trung điểm của $A'B'$ thì $AA' + BB' = 2MM' = 2 \cdot \frac{MH}{\sin(M;(P))}$.

Khi đó $MH_{\max} = \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}} + d(I;(P)) = \sqrt{5 - 4} + \frac{10\sqrt{3}}{3} = \frac{3 + 10\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $\sin(M;(P)) = \sin(d;(P)) = \frac{5\sqrt{3}}{9}$.

$$(AA' + BB')_{\max} = 2 \cdot \frac{\frac{3 + 10\sqrt{3}}{3}}{\frac{5\sqrt{3}}{9}} = \frac{60 + 6\sqrt{3}}{5} \approx 14,1$$

Vậy

Câu 58. (THPT Nguyễn Huệ - Huế - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng

$(d): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ và hai điểm $A(1; 5; 0)$, $B(3; 3; 6)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm trên (d) sao cho chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 3

$$M \in d \Rightarrow M(-1 + 2t; 1 - t; 2t)$$

Chu vi tam giác MAB là: $AM + BM + AB$. Vì $AB = \text{const}$ nên chu vi nhỏ nhất khi $(AM + BM)$ nhỏ nhất.

$$\overrightarrow{AM}(2t - 2; -t - 4; 2t) \quad \overrightarrow{BM}(2t - 4; -t - 2; 2t - 6)$$

$$AM + BM = \sqrt{9t^2 + 20} + \sqrt{9t^2 - 36t + 56} = \sqrt{(3t)^2 + (2\sqrt{5})^2} + \sqrt{(6 - 3t)^2 + (2\sqrt{5})^2}$$

Đặt $u = (3t; 2\sqrt{5})$, $v = (6 - 3t; 2\sqrt{5}) \Rightarrow u + v = (6; 4\sqrt{5})$

Áp dụng bất đẳng thức vector: $|u| + |v| \geq |u + v|$. Dấu bằng xảy ra khi u, v cùng hướng.

Ta có: $AM + BM = |u| + |v| \geq |u + v| = \sqrt{6^2 + (4\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{29}$. Do đó $(AM + BM)$ nhỏ nhất khi

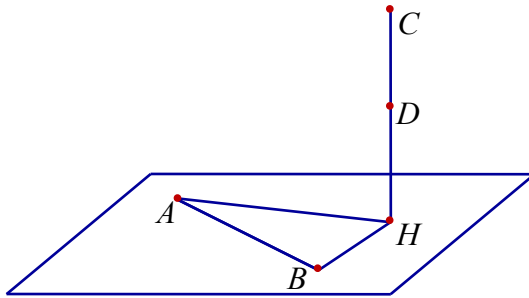
tồn tại số k dương sao cho $u = kv \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = k(6 - 3t) \\ 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ k = 1 \end{cases}$. Khi đó $M(1; 0; 2)$.

Vậy $P = a + b + c = 1 + 0 + 2 = 3$.

Câu 59. (Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(-1; 1; 6)$, $B(-3; -2; -4)$, $C(1; 2; -1)$, $D(2; -2; 0)$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc đường thẳng CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất. Tính $a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 1



Gọi C_{ABM} là chu vi của tam giác ABM .

$$\overrightarrow{AB} = (-2; -3; -10) \Rightarrow AB = \sqrt{113}$$

$$\overrightarrow{AB} = (-2; -3; -10), \overrightarrow{CD} = (1; -4; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -2 + 12 - 10 = 0 \Rightarrow AB \perp CD.$$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với đường thẳng CD .

H là giao điểm của (P) và đường thẳng CD .

Phương trình mặt phẳng (P) qua $A(-1; 1; 6)$ có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{CD} = (1; -4; 1)$ là:
 $x - 4y + z - 1 = 0$.

$$\text{Phương trình đường thẳng } CD: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 4t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

$$H \in CD \Leftrightarrow H(1+t; 2-4t; -1+t)$$

$$H \in (P) \Leftrightarrow 1+t - 4(2-4t) - 1+t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow H\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Với } \forall M \in CD, \text{ ta có } \begin{cases} AM \geq AH \\ BM \geq BH \end{cases} \Rightarrow AM + BM \geq AH + BH.$$

$$C_{ABM} = AB + AM + BM \geq \sqrt{113} + AH + BH, \forall M \in CD.$$

$$\text{Suy ra } \min C_{ABM} = \sqrt{113} + AH + BH, \text{ đạt được } M \equiv H \Leftrightarrow M\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Vậy } a + b + c = 1.$$

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$ có $A(-1; 1; 6)$, $B(-3; -2; -4)$, $C(1; 2; -1)$, $D(2; -2; 0)$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc đường thẳng CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất. Tính $a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 1

Ta có $C_{\Delta ABM} = AM + BM + AB$ mà AB không đổi suy ra $C_{\Delta ABM}$ nhỏ nhất khi $AM + BM$ nhỏ nhất.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -3; -10)$, $\overrightarrow{CD} = (1; -4; 1)$.

Xét $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow AB \perp CD$. Gọi (α) qua AB và vuông góc với CD .

(α) đi qua $A(-1; 1; 6)$ và nhận $\overrightarrow{CD} = (1; -4; 1)$ làm véc tơ pháp tuyến.

Suy ra (α) có phương trình là: $x - 4y + z - 1 = 0$.

Vì điểm M thuộc CD sao cho $AM + BM$ nhỏ nhất nên $M = CD \cap (\alpha)$.

$(\alpha): x - 4y + z - 1 = 0$, CD có phương trình:
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 4t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

$M = CD \cap (\alpha) \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{-1}{2}\right) \Rightarrow a + b + c = \frac{3}{2} + 0 + \frac{-1}{2} = 1$.

Câu 61. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z + 2 = 0$ và hai điểm $A(3; 4; 1); B(7; -4; -3)$. Điểm $M(a; b; c) (a > 2)$ thuộc (P) sao cho tam giác ABM vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Khi đó giá trị biểu thức $T = a + b + c$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 0

Ta có: $S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot MH$ với H là hình chiếu vuông góc của M lên AB .

Do AB không đổi nên $S_{\Delta ABM}$ nhỏ nhất khi MH nhỏ nhất.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (4; -8; -4) \\ \overrightarrow{n_p} = (1; 1; -1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n_p} = 0 \Rightarrow AB // (P)$$

MH nhỏ nhất khi M nằm trên giao tuyến của mặt phẳng (Q) và (P) ;

với (Q) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mp (P) .

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (4; -8; -4) \\ \overrightarrow{n_p} = (1; 1; -1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = (3; 0; 3) \Rightarrow \text{phương trình mp } (Q) \text{ là } x + z - 4 = 0.$$

M nằm trên giao tuyến của mặt phẳng (Q) và (P) nên tọa độ M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + z - 4 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \\ z = 4 - t \end{cases} \Rightarrow M(t; 2 - 2t; 4 - t) \text{ với } t > 2.$$

Ta có $\overrightarrow{AM} = (t - 3; -2 - 2t; 3 - t); \overrightarrow{BM} = (t - 7; 6 - 2t; 7 - t)$

Tam giác ABM vuông tại M nên

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (t - 3)(t - 7) + (-2 - 2t)(6 - 2t) + (3 - t)(7 - t) = 0$$

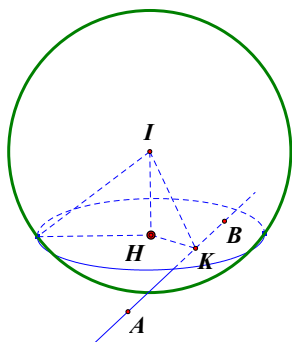
$$\Leftrightarrow (t - 3)(t - 7) + 2(t - 3)(t + 1) = 0 \Leftrightarrow (t - 3)(3t - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \text{ (n)} \\ t = \frac{5}{3} \text{ (l)} \end{cases}$$

$$+ t = 3 \Rightarrow M(3; -4; 1) \Rightarrow a + b + c = 3 - 4 + 1 = 0$$

Câu 62. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 6)$, $B(0; 1; 0)$ và mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 2 = 0$ đi qua A, B và cắt theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 3



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = 5$.

Mặt phẳng (P) có vec-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_p} = (a; b; c)$

Theo giả thiết $B(0; 1; 0) \in (P): b - 2 = 0 \Leftrightarrow b = 2$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -6)$ cùng phương với $\overrightarrow{u} = (1; -1; 2)$.

$$AB: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến. K là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng AB , H là hình chiếu vuông góc của I lên (P)

Ta có: $K \in AB \Rightarrow K(t; 1-t; 2t) \Rightarrow \overrightarrow{IK} = (t-1; -t-1; 2t-3)$

$$\overrightarrow{IK} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IK} = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \overrightarrow{IK} = (0; -2; -1)$$

$$r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))} = \sqrt{25 - d^2(I, (P))} = \sqrt{25 - IH^2}$$

Ta có: $r_{\min} \Leftrightarrow IH_{\max}$

Mà $IH \leq IK \Rightarrow IH_{\max} = IK \Leftrightarrow H \equiv K \Rightarrow (P) \perp IK \Rightarrow n_P$ và $\overrightarrow{IK}$ cùng phương.

$$\Rightarrow \vec{n_P} = k \cdot \overrightarrow{IK} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -2k \\ c = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ k = -1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow t = a + b + c = 0 + 2 + 1 = 3.$$

Câu 63. (THPT Kim Liên – Hà Nội – 2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 25$ và hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ lần lượt có phương trình

$d_1: \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = -1 \\ z = 1 + t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 \\ z = 1 - mt \end{cases}$. Có bao nhiêu giá trị của m để $(d_1), (d_2)$ cắt mặt cầu (S) tại 4 điểm phân biệt sao cho bốn điểm đó tạo thành tứ giác có diện tích lớn nhất

Lời giải

Trả lời: 2

Ta có đánh giá khác như sau: (Gọi R_C là bán kính của đường tròn thiết diện (C))

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2} MP \cdot NQ = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{R_C^2 - d^2(O'; MP)} \cdot 2\sqrt{R_C^2 - d^2(O'; NQ)} \leq 2 \left(\frac{2R_C^2 - d^2(O'; MP) - d^2(O'; NQ)}{2} \right) \\ = 2R_C^2 - O'A^2 = \text{const với } O'(-1; -1; 2) \text{ là tâm đường tròn } (C).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $d(O'; MP) = d(O'; NQ) \Leftrightarrow d(O'; d_1) = d(O'; d_2) \Leftrightarrow \left| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right|$

$$\Leftrightarrow |2+m| = |-2m+1| \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -\frac{1}{3} \end{cases}, \text{ Vậy chỉ có 2 giá trị } m \text{ thỏa mãn yêu cầu đề bài.}$$

Câu 64. (Chuyên Lam Sơn 2022) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $I(1;0;0)$, điểm

$M\left(\frac{7}{9}; \frac{4}{9}; \frac{4}{9}\right)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=2 \\ y=t \\ z=1+t \end{cases} \cdot N(a,b,c)$ là điểm thuộc đường thẳng d sao cho diện tích tam giác IMN nhỏ nhất. Khi đó $a+b+c$ có giá trị bằng?

Lời giải

Trả lời: -2

Ta có $IM = \frac{2}{3}$.

Gọi H là hình chiếu của N trên đường thẳng d' đi qua I, M , ta có:

$$S_{\triangle IMN} = \frac{1}{2} IM \cdot NH = \frac{1}{3} NH$$

Diện tích tam giác IMN nhỏ nhất khi và chỉ khi độ dài NH nhỏ nhất.
 $N \in d \Rightarrow N(2; n; 1+n) \Rightarrow \overrightarrow{IN} = (1; n; 1+n)$.

Đường thẳng d' có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'} = (1; -2; -2) \cdot [\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{u}] = (2; n+3; -n-2)$.

$$NH = d(N; d') = \frac{\left| \left[\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{u'} \right] \right|}{\left| \overrightarrow{u'} \right|} = \frac{\sqrt{2^2 + (n+3)^2 + (-n-2)^2}}{3} = \frac{\sqrt{2\left(n+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}}}{3} \geq \frac{1}{2}.$$

Dấu = xảy ra khi $n = -\frac{5}{2}$, suy ra: $N\left(2; -\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. Vậy $a+b+c = -2$.

Câu 65. (Sở Bắc Ninh 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ và hai điểm $A(1;5;0), B(3;3;6)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm nằm trên d sao cho chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $P = abc$ là?

Lời giải

Trả lời: 0

Gọi $M(-1+2t; 1-t; 2t) \in d$ và $AB = 2\sqrt{11}$.

Ta có: chu vi tam giác $P_{MAB} = MA + MB + AB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $(MA + MB)_{\min}$

$$\begin{aligned} MA + MB &= \sqrt{(2-2t)^2 + (4+t)^2 + 4t^2} + \sqrt{(4-2t)^2 + (2+t)^2 + (6-2t)^2} \\ &= \sqrt{9t^2 + 20} + \sqrt{(6-3t)^2 + 20} \end{aligned}$$

Xét hai vectơ $u = (3t; \sqrt{20})$ và $v = (6-3t; \sqrt{20})$.

Ta có: $|u| + |v| \geq |u+v| = 6 + 2\sqrt{20}$ khi $3t = 6-3t \Leftrightarrow t = 1$.

Vậy $\text{Min } p_{MAB} = 6 + 2(\sqrt{20} + \sqrt{11})$ khi $M(1; 0; 2)$.