

ĐỀ 41

Câu 1 (3,5đ). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 8(\sqrt{y}-\sqrt{x})+\frac{5-8y^2}{x}=\sqrt{\frac{y}{x}}\left(8\sqrt{xy}+\frac{1}{xy}\right) \\ 8(x^2+y^2)+\frac{1}{\sqrt{xy}}=5 \end{cases} \quad (x,y \in \mathbb{R})$$

Câu 2(2đ). Gọi S là tập hợp các số có ba chữ số có dạng $\overline{abc}$. Tính xác suất để rút ngẫu nhiên 1 số từ tập S thỏa mãn a, b, c là ba cạnh của một tam giác cân, đồng thời là tam giác nhọn .

Câu 3

a. (3,5đ). Cho hàm số $y = \frac{3x+4}{3x+3}$ có đồ thị (C). Tổng các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tam giác OAB đều (với O là gốc tọa độ) .

b. (2đ). Cho hàm số $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$.

Câu 4. Cho tứ diện ABCD có $AB = b, AC = c, AD = d$ đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa mặt phẳng (BCD) với các mặt phẳng (ACD), (ABD), (ABC) .

a. (3đ) Chứng minh $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

b. (2đ) Tính S_{BCD} theo khi $\alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 60^\circ$.

Câu 5

a.(2đ) Cho tứ diện D.ABC. Gọi A'B'C' theo thứ tự là các điểm trên DA,DB,DC sao cho $DA'.DA = DB'.DB = DC'.DC$, H là trực tâm của tam giác A'B'C' và I là giao điểm của DH với mặt phẳng (ABC). Một điểm M di động trong tam giác ABC, đường thẳng Δ đi qua M cùng phương (song song hoặc trùng) với ID lần lượt cắt các mặt phẳng (DAB),(DBC),(DCA) tại MNQ. Tìm giá

trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2} + \frac{1}{MQ^2}$.

b.(2đ) Cho hai số thực x,y thỏa mãn: $9x^3 + (2 - y\sqrt{3xy-5})x + \sqrt{3xy-5} = 0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2 + 1)(x + y - 2)$

ĐÁP ÁN

Câu 1 (3,5đ). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 8(\sqrt{y} - \sqrt{x}) + \frac{5-8y^2}{x} = \sqrt{\frac{y}{x}} \left(8\sqrt{xy} + \frac{1}{xy} \right) \\ 8(x^2 + y^2) + \frac{1}{\sqrt{xy}} = 5 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải : Điều kiện : $x > 0, y > 0$

Phương trình thứ nhất được biến đổi thành phương trình :

$$8x(\sqrt{y} - \sqrt{x}) + 5 - 8y^2 = \sqrt{xy} \left(8\sqrt{xy} + \frac{1}{xy} \right)$$

Lấy phương trình vừa biến đổi cộng với phương trình thứ hai trong hệ về theo về ta thu được :

$$x - \sqrt{x} = y - \sqrt{y} \Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1)(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \end{cases}$$

- Trường hợp 1 : $x = y$. Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$16x^2 + \frac{1}{x} = 5 \Leftrightarrow 16x^3 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{8} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{8} \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được $x = y = \frac{1}{4}; x = y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{8}$

- Trường hợp 2 : $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$. Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x} \\ b = \sqrt{y} \end{cases}, a, b > 0$.

Khi đó ta có hệ mới :
$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 8(a^4 + b^4) + \frac{1}{ab} = 5 \end{cases}$$

Ta có $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$. Do đó : $a^4 + b^4 \geq \frac{(a^2 + b^2)^2}{2} \geq \frac{\left(\frac{(a+b)^2}{2} \right)^2}{2} = \frac{1}{8}$.

Vậy ta có : $8(a^4 + b^4) \geq 1$.

Mặt khác ta có : $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{ab} \geq 4$

Từ hai đánh giá trên ta có : $8(a^4 + b^4) + \frac{1}{ab} \geq 5$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a+b=1 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=\frac{1}{2} \\ \sqrt{y}=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\left\{\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right);\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{8};\frac{-1+\sqrt{17}}{8}\right)\right\}$.

Câu 2(2đ). Gọi S là tập hợp các số có ba chữ số có dạng $\overline{abc}$. Tính xác suất để rút ngẫu nhiên 1 số từ tập S thỏa mãn a, b, c là ba cạnh của một tam giác cân, đồng thời là tam giác nhọn.

Số các số có ba chữ số là: $n(\Omega)=9.10.10=900$.

Gọi A là biến cố rút 1 số từ tập S thỏa mãn a, b, c là ba cạnh của một tam giác vừa cân, vừa nhọn.

Do tam giác cân, nên ta gọi ba cạnh của tam giác lần lượt là: a;b;c với

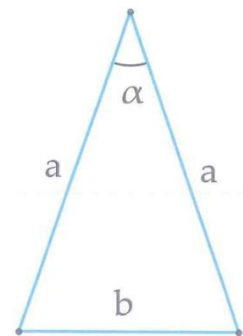
$$a=c.$$

Gọi α là góc ở đỉnh cân (hình vẽ).

Khi đó tam giác nhọn $\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{2a^2 - b^2}{2a^2} > 0 \Leftrightarrow 2a^2 > b^2$.

Vậy điều kiện để tam giác cân đồng thời nhọn là:

$$\begin{cases} 2a > b \\ 2a^2 > b^2 \end{cases} \Leftrightarrow 2a^2 > b^2.$$



+) Với $a=1 \Rightarrow b=1 \Rightarrow \Delta$ đều được lấy ra từ số 111, nghĩa là có 1 cách.

+) Với $a=2 \Rightarrow b \in \{1; 2\} \Rightarrow$ số khả năng $1+3=4$ (cách) (gồm 1 tam giác đều, 3 tam giác cân không đều).

+) Với $a=3 \Rightarrow b \in \{1; 2; 3; 4\} \Rightarrow$ số khả năng $1+3.3=10$ (cách)

+) Với $a=4 \Rightarrow b \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow$ số khả năng $1+4.3=13$ (cách)

+) Với $a=5 \Rightarrow b \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\} \Rightarrow$ số khả năng $1+6.3=19$ (cách)

+) Với $a=6 \Rightarrow b \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\} \Rightarrow$ số khả năng $1+7.3=22$ (cách)

+) Với $a \in \{7; 8; 9\} \Rightarrow b \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\} \Rightarrow$ số khả năng $3.(1+8.3)=75$ (cách)

Suy ra $n(A)=1+4+10+13+19+22+75=144$.

Vậy xác suất cần tính là: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{144}{900}=\frac{4}{25}$.

Câu 3

a. (3,5đ). Cho hàm số $y=\frac{3x+4}{3x+4}$ có đồ thị (C). Tổng các giá trị của tham số m để đường thẳng

$d: y=x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tam giác OAB đều (với O là gốc tọa độ).

Giải

Hoành độ giao điểm của đường thẳng $d: y = x + m$ và đồ thị (C) là nghiệm của phương trình

$$\frac{3x+4}{3x+3} = x+m \Leftrightarrow 3x+4 = (x+m)(3x+3) \text{ (điều kiện } x \neq -1).$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3mx + 3m - 4 = 0$$

$$\text{Ta có } \Delta = 9m^2 - 12(3m-4) = 9(m-2)^2 + 12 > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Vậy với mọi $m \in \mathbb{R}$ thì đường thẳng $d: y = x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B . Khi đó $A(x_A; x_A + m)$ và $B(x_B; x_B + m)$.

$$\text{Theo định lý Vi-ét ta có: } \begin{cases} x_A + x_B = -m \\ x_A \cdot x_B = \frac{3m-4}{3} \end{cases} (*)$$

$$\text{Ta có: } OA = OB \Leftrightarrow x_A^2 + (x_A - m)^2 = x_B^2 + (x_B + m)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x_A^2 + 2mx_A + m^2 = 2x_B^2 + 2mx_B + m^2 \Leftrightarrow 2(x_A^2 - x_B^2) + 2m(x_A - x_B) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x_A - x_B)(x_A + x_B + m) = 0 \Leftrightarrow x_A + x_B + m = 0 \text{ (do } x_A \neq x_B) \text{ (luôn đúng theo (*))}.$$

$$AB = \sqrt{2(x_B - x_A)^2}. \text{ Tam giác } OAB \text{ đều} \Leftrightarrow OAC = 60^\circ \Leftrightarrow d(O, AB) = \frac{\sqrt{3}}{2} AB$$

$$\Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{2(x_B - x_A)^2} \Leftrightarrow m^2 = 3[(x_B + x_A)^2 - 4x_Bx_A] (**)$$

$$\text{Thay (*) vào (**), ta được } \Leftrightarrow m^2 = 3\left[(-m)^2 - 4 \cdot \frac{3m-4}{3}\right]$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 3m^2 - 12m + 16 \Leftrightarrow 2m^2 - 12m + 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 2 \\ m_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow m_1 + m_2 = 6.$$

b. (2đ). Cho hàm số

. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}.$$

Lời giải

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm } x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0(1)$$

Nhận xét $x = 0$ không phải là nghiệm. Với $x \neq 0$ phương trình trở thành

$$(1) \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = -\left(x^3 + \frac{1}{x}\right) (x \neq 0)$$

$$\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^2 = (ax^2 + bx + c)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^4 + x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^2}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1}$$

$$t = x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow t \geq 2 \Rightarrow f(t) = \frac{t^2}{t+1}, \forall t \geq 2 \Rightarrow f'(t) = \frac{t^2 + 2t}{(t+1)^2} > 0, \forall t \geq 2$$

Bảng biến thiên

Vậy để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành thì

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$$

Câu 4. Cho tứ diện ABCD có $AB=b, AC=c, AD=d$ đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa mặt phẳng (BCD) với các mặt phẳng (ACD), (ABD), (ABC).

a. (3đ) Chứng minh $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

b. (2đ) Tính S_{BCD} theo khi $\alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 60^\circ$.

Lời giải.

a) **Cách 1.**

Kẻ đường cao AH của tam giác ACD, do

$$\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACD) \Rightarrow AB \perp CD.$$

Vậy $(ABH) \perp CD$ và CD là giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) nên $\alpha = \angle AHB$.

Ta có

$$\tan \alpha = \frac{AB}{AH} = \frac{b}{AH}, \text{ mà } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}$$

$$\text{nên } \tan \alpha = \frac{b\sqrt{c^2 + d^2}}{cd}.$$

$$\text{Mặt khác } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{c^2 d^2}{b^2 c^2 + c^2 d^2 + d^2 b^2}.$$

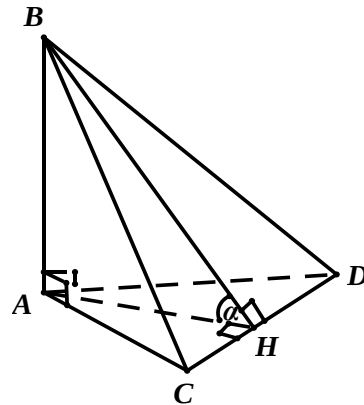
Tương tự ta có :

$$\cos^2 \beta = \frac{b^2 d^2}{b^2 c^2 + c^2 d^2 + d^2 b^2}, \cos^2 \gamma = \frac{b^2 c^2}{b^2 c^2 + c^2 d^2 + d^2 b^2}$$

Từ đó suy ra $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Cách 2. Gọi H là hình chiếu của A trên (BCD) và I là trung điểm của CD. Đặt

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{AD} = \vec{d} \Rightarrow |\vec{b}| = b, |\vec{c}| = c, |\vec{d}| = d.$$



Để thấy $\overrightarrow{AH} \perp (BCD)$ và $\begin{cases} BH \cdot BI = BA^2 = b^2 \\ IH \cdot IB = IA^2 = \frac{c^2 d^2}{c^2 + d^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{BH}{IH} = \frac{b^2(c^2 + d^2)}{c^2 d^2} = k$

Suy ra $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{1+k} \overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k} \overrightarrow{AI}$, mà $\frac{IC}{ID} = \frac{AC^2}{AD^2} = \frac{c^2}{d^2} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{d^2}{c^2 + d^2} \overrightarrow{AC} + \frac{c^2}{c^2 + d^2} \overrightarrow{AD}$ nên

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} &= \frac{c^2 d^2}{b^2 c^2 + c^2 d^2 + d^2 b^2} \overrightarrow{AB} + \frac{b^2 c^2 + d^2 b^2}{b^2 c^2 + c^2 d^2 + d^2 b^2} \left(\frac{d^2}{c^2 + d^2} \overrightarrow{AC} + \frac{c^2}{c^2 + d^2} \overrightarrow{AD} \right) \\ &= \frac{c^2 d^2}{b^2 c^2 + c^2 d^2 + d^2 b^2} \vec{b} + \frac{d^2 b^2}{b^2 c^2 + c^2 d^2 + d^2 b^2} \vec{c} + \frac{b^2 c^2}{b^2 c^2 + c^2 d^2 + d^2 b^2} \vec{d} \end{aligned}$$

Lại có $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ lần lượt là các vec tơ vuông góc với các mặt phẳng $(ACD), (ABD), (ACB)$. Từ đó ta có:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{b} \cdot \overrightarrow{AH}|}{|\vec{b}| |\overrightarrow{AH}|} = \frac{\frac{b^2 c^2 d^2}{b^2 c^2 + c^2 d^2 + d^2 b^2}}{b \sqrt{\frac{b^2 c^2 + c^2 d^2 + d^2 b^2}{b^2 c^2 d^2}}} = \frac{cd}{\sqrt{b^2 c^2 + c^2 d^2 + d^2 b^2}}$$

$$\text{Tương tự : } \cos \beta = \frac{|\vec{c} \cdot \overrightarrow{AH}|}{|\vec{c}| |\overrightarrow{AH}|} = \frac{bd}{\sqrt{b^2 c^2 + c^2 d^2 + d^2 b^2}}, \cos \gamma = \frac{|\vec{d} \cdot \overrightarrow{AH}|}{|\vec{d}| |\overrightarrow{AH}|} = \frac{bc}{\sqrt{b^2 c^2 + c^2 d^2 + d^2 b^2}}$$

Suy ra $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

b) Sử dụng công thức hình chiếu

Gọi H là hình chiếu của A trên (BCD) .

Trước tiên ta chứng minh tam giác BCD nhọn. Không giảm tổng quát, giả sử B lớn nhất.

Ta có $CD^2 = AC^2 + AD^2 = c^2 + d^2$

Tương tự $CB^2 = b^2 + c^2, DB^2 = b^2 + d^2$

Áp dụng định lí cosin cho $\triangle BCD$ ta có

$$\cos B = \frac{BC^2 + BD^2 - CD^2}{2BC \cdot BD}$$

$$= \frac{(b^2 + c^2) + (b^2 + d^2) - (c^2 + d^2)}{2\sqrt{(b^2 + c^2)(b^2 + d^2)}}$$

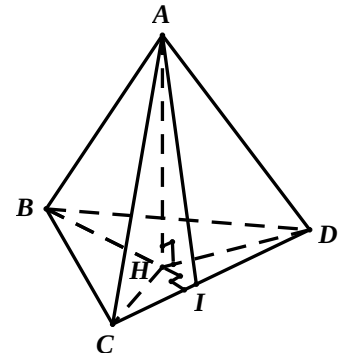
$$= \frac{2b^2}{2\sqrt{(b^2 + c^2)(b^2 + d^2)}} > 0 \text{ do đó } B \text{ nhọn, hay tam giác } BCD \text{ nhọn.}$$

Ta có $\begin{cases} AH \perp CD \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow BH \perp CD$, tương tự ta có $CH \perp BD$ từ đó suy ra H là trực tâm của $\triangle BCD$, mà

$\triangle BCD$ nhọn nên H thuộc miền trong tam giác BCD. Do đó

$$S_{BCD} = S_{HBC} + S_{HBD} + S_{HCD} = S_{ABC} \cos \gamma + S_{ABD} \cos \beta + S_{ACD} \cos \alpha$$

$$= \frac{1}{2} bc \cos 60^\circ + \frac{1}{2} bd \cos 45^\circ + \frac{1}{2} cd \cos 30^\circ = \frac{bc + \sqrt{2}bd + \sqrt{3}cd}{4}.$$



Câu 5

a.(2đ) Cho tứ diện $D.ABC$. Gọi $A'B'C'$ theo thứ tự là các điểm trên DA, DB, DC sao cho $DA'.DA = DB'.DB = DC'.DC$, H là trực tâm của tam giác $A'B'C'$ và I là giao điểm của DH với mặt phẳng (ABC) . Một điểm M di động trong tam giác ABC , đường thẳng Δ đi qua M cùng phương (song song hoặc trùng) với ID lần lượt cắt các mặt phẳng $(DAB), (DBC), (DCA)$ tại MN, Q . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2} + \frac{1}{MQ^2}$.

Giải

I là trọng tâm của tam giác ABC .

Gọi T là giao điểm của $A'H$ với $B'C'$, E, F lần lượt là các giao điểm của AB và BC ; CI và AB . Dễ thấy D, T, E thẳng hàng (thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (IAD) và (DBC)). Do H là trực tâm của tam giác $A'B'C'$ nên $A'T \perp B'C'$, mặt khác theo giả thiết $DA \perp DB$ và $DA \perp DC$ nên $DA \perp (DBC) \Rightarrow DA \perp B'C'$; do đó $B'C' \perp (DA'T) \Rightarrow B'C' \perp DT$.

Ta có $C'DT + B'DT = 90^\circ$ và $DB'T + B'DT = 90^\circ \Rightarrow C'DT = DB'T$ (1)

Mặt khác tứ giác $BCC'D'$ là tứ giác nội tiếp nên $DB'T = C'CB$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra tam giác EDC cân tại $E \Rightarrow ED = EC$, mà tam giác DBC vuông tại D suy ra $ED = EC = EB$, thế thì AE là trung tuyến của tam giác ABC .

Tương tự ta cũng chứng minh được CF là trung tuyến của tam giác ABC , vì vậy I là trọng tâm của tam giác ABC .

Chứng minh $MN + MP + MQ = 3DI$

Rõ ràng ID cắt các mặt $(DAB), (DBC), (DAC)$ tại D nên đường thẳng qua M cùng phương với ID chắc chắn cắt các mặt $(DAB), (DBC), (DCA)$.

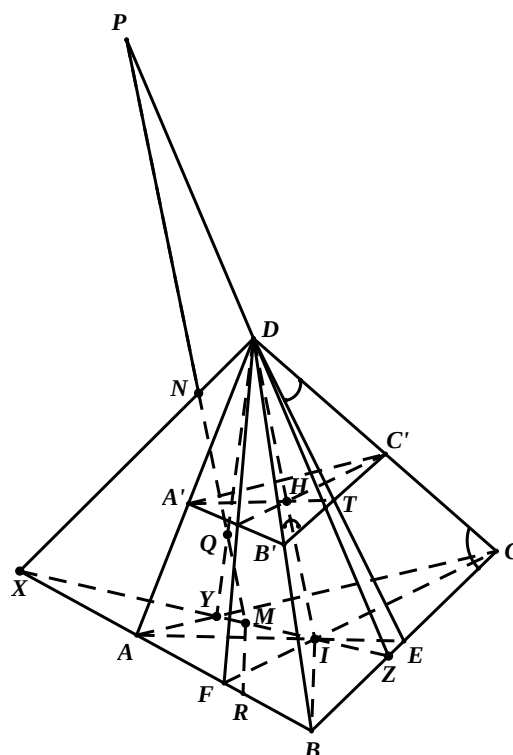
Gọi X, Y, Z lần lượt là các giao điểm của IM với các cạnh AB, AC, BC (Lưu ý là nếu IM song song với một cạnh nào đó của tam giác ABC thì ta vẫn dễ dàng dựng được các giao điểm của đường thẳng Δ với các mặt các mặt phẳng $(DAB), (DBC), (DCA)$)

Ta có N, P, Q theo thứ tự là các giao điểm của DX, DZ, DY với Δ .

Kẻ $MR \parallel IB$, thì $\frac{MN}{ID} = \frac{XM}{XI} = \frac{MR}{IB} = \frac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta IBC}} = \frac{3S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta ABC}}$ (do

I là trọng tâm của tam giác ABC nên $S_{\Delta IBC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$).

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{MP}{ID} = \frac{3S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}}, \frac{MQ}{ID} = \frac{3S_{\Delta MCA}}{S_{\Delta ABC}}$.



$$\begin{aligned} \text{Do đó } \frac{MN}{ID} + \frac{MP}{ID} + \frac{MQ}{ID} &\Leftrightarrow MN + MP + MQ = 3DI \\ &= \frac{3S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{3S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{3S_{\Delta MCA}}{S_{\Delta ABC}} = 3 \end{aligned}$$

$$\text{Theo BĐT Cau chy ta có } T = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2} + \frac{1}{MQ^2}$$

$$\geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{MN} + \frac{1}{MP} + \frac{1}{MQ} \right)^2$$

$$\geq \frac{1}{3} \cdot \frac{81}{(MN + MP + MQ)^2} = \frac{27}{(3DI)^2} = \frac{3}{DI^2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv I$ (khi đó $N, P, Q \equiv D$)

Vậy $\min T = \frac{3}{DI^2}$ khi M trùng với trọng tâm của tam giác.

b.(2đ) Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $9x^3 + (2 - y\sqrt{3xy - 5})x + \sqrt{3xy - 5} = 0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2 + 1)(x + y - 2)$

Lời giải

$$\text{Ta có } 9x^3 + (2 - y\sqrt{3xy - 5})x + \sqrt{3xy - 5} = 0$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 + 6x = (3xy - 5)\sqrt{3xy - 5} + 2\sqrt{3xy - 5}.$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = t^3 + 2t \text{ với } t \in (0; +\infty)$$

có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0 \forall t \in (0; +\infty)$ nên hàm số liên tục và đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Khi đó ta có } 3x = \sqrt{3xy - 5} \Rightarrow x \geq 0 \text{ và } 9x^2 = 3xy - 5.$$

$$\text{Với } x = 0 \text{ thì } 0 = -5(l).$$

$$\text{với } x > 0 \text{ thì } P = x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2 + 1)(x + y - 2)$$

$$= x^3 + y^3 + 6xy + (9x^2 + 3)(x + y - 2)$$

$$= x^3 + y^3 + 6xy + (3xy - 2)(x + y - 2)$$

$$= x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 2(x + y) + 4$$

$$= (x + y)^3 - 2(x + y) + 4$$

$$\text{Mà } x + y = x + \frac{9x^2 + 5}{3x} = 4x + \frac{5}{3x} \geq 2\sqrt{4x \cdot \frac{5}{3x}} = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}. \text{ Đặt } t = x + y \text{ thì } t \geq \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Xét } f(t) = t^3 - 2t + 4 \text{ với } t \geq \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}. \text{ Khi đó } f'(t) = 3t^2 - 2 > 0 \text{ với } \forall t \geq \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Do đó } f(t) \geq f\left(\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}$$

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}. \text{ Vậy GTNN của } P \text{ là } \frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}.$$