

ĐS6.CHUYÊN ĐỀ 5-SỐ NGUYÊN TỐ,HỢP SỐ

CHỦ ĐỀ 1:ĐỊNH NGHĨA,TÍNH CHẤT,SỐ NGUYÊN TỐ,HỢP SỐ

PHẦN I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1.SỐ NGUYÊN TỐ

- Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có 2 ước là 1 và chính nó.
- Số nguyên tố nhỏ nhất vừa là số nguyên tố chẵn duy nhất là số 2.
- Không thể giới hạn số nguyên tố cũng như tập hợp số nguyên tố.Hay nói cách khác,số nguyên tố là vô hạn.
- Khi 2 số nguyên tố nhân với nhau thì tích của chúng không bao giờ là một số chính phương.
- Ước tự nhiên nhỏ nhất khác 1 của một số tự nhiên được coi là số nguyên tố.
- Để kết luận số tự nhiên a là một số nguyên tố ($a > 1$), chỉ cần chứng minh a không chia hết cho mọi số nguyên tố mà bình phương không vượt quá a .

-Nếu tích $ab:p \Rightarrow \begin{cases} a:p \\ b:p \end{cases}$ (p là số nguyên tố)

-Đặc biệt nếu $a^n:p \Rightarrow a:p$ (p là số nguyên tố)

-Mọi số nguyên tố vượt quá 2 đều có dạng: $4n \pm 1 (n \in \mathbb{N}^*)$

-Mọi số nguyên tố vượt quá 3 đều có dạng: $6n \pm 1 (n \in \mathbb{N}^*)$

-Hai số nguyên tố sinh đôi là hai số nguyên tố hơn kém nhau 2 đơn vị.

2.HỢP SỐ

- Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1 và có nhiều hơn 2 ước nguyên dương.
- Để chứng tỏ một số tự nhiên a ($a > 1$) là hợp số, chỉ cần chỉ ra một ước khác 1 và a .
- Ước số nhỏ nhất khác 1 của một hợp số là một số nguyên tố và bình phương lên không vượt quá nó.
- Một hợp số bằng tổng các ước của nó (không kể chính nó) được gọi là: Số hoàn chỉnh.
- Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều phân tích được ra thừa số nguyên tố một cách duy nhất (không kể thứ tự các thừa số)

3.HAI SỐ NGUYÊN TỐ CÙNG NHAU

- Hai số tự nhiên được gọi là nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi chúng có ước chung lớn nhất bằng 1.

a, b nguyên tố với nhau $\Leftrightarrow (a, b) = 1; (a, b \in \mathbb{N}^*)$

- Hai số tự nhiên liên tiếp luôn nguyên tố cùng nhau
- Hai số nguyên tố khác nhau luôn nguyên tố cùng nhau
- Các số nguyên tố khác nhau luôn nguyên tố cùng nhau
- Các số a, b, c nguyên tố cùng nhau $(a, b, c) = 1$
- a, b, c nguyên tố đôi khi chúng đôi một nguyên tố cùng nhau a, b, c nguyên tố đôi
 $\Leftrightarrow (a, b) = (b, c) = (c, a) = 1$

4. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ ĐẶC BIỆT

- Định lý Dirichlet: Tồn tại vô số số nguyên tố p có dạng: $p = ax + b; x \in \mathbb{N}^*, (a, b) = 1$
- Định lý Tchebycheff: Trong khoảng từ số tự nhiên n đến số tự nhiên $2n$ có ít nhất một số nguyên tố ($n > 2$)
- Định lý Vinogradov: Mọi số lẻ lớn hơn 3^3 là tổng của 3 số nguyên tố.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Tính chất đặc trưng của số nguyên tố và cách nhận biết số nguyên tố, hợp số.

I. Phương pháp giải

- Dựa vào các dấu hiệu chia hết và các tính chất về số nguyên tố, hợp số, để giải các bài toán về chứng minh hoặc giải thích.
- Thông qua việc phân tích và xét hết khả năng có thể xảy ra, đối chiếu với giả thiết và các định lý, hệ quả đã học để loại bỏ các trường hợp mâu thuẫn và nhận biết được đâu là số nguyên tố, hợp số.

II. Bài toán

Bài 1: Chứng minh rằng:

a, Mọi số nguyên tố vượt quá 2 đều có dạng: $4n + 1 (n \in \mathbb{N}^*)$

b, Mọi số nguyên tố vượt quá 3 đều có dạng: $6n + 1 (n \in \mathbb{N}^*)$

Lời giải:

a, Gọi A là một số tự nhiên lớn hơn 2. Khi đó A sẽ có dạng $4n, 4n + 1, 4n + 2, 4n + 3 (n \in \mathbb{N}^*)$

- Nếu $A = 4n$ hay $A = 4n + 2$ thì $A : 2$ và A là hợp số

Suy ra nếu A là số nguyên tố thì A sẽ có dạng $4n + 1, 4n + 3$

Vì $4n+3=4n+4-1=4(k+1)-1$ nên suy ra mọi số nguyên tố vượt quá 2 đều có dạng: $4n \pm 1 (n \in \mathbb{N}^*)$ (đpcm)

b, Gọi A là một số tự nhiên lớn hơn 3. Khi đó A sẽ có dạng $6n, 6n+1, 6n+2, 6n+3 (n \in \mathbb{N}^*)$

-Nếu $A=6n$ hay $A=6n+3$ thì $A:3$ và A là hợp số.

-Nếu $A=6n+2$ thì $A:2$ và A là hợp số.

Suy ra nếu A là số nguyên tố thì A sẽ có dạng $6n+1, 6n+5$

Vì $6n+5=6n+6-1=6(k+1)-1$ nên suy ra mọi số nguyên tố vượt quá 3 đều có dạng: $6n \pm 1 (n \in \mathbb{N}^*)$ (đpcm)

Bài 2: Ta biết rằng có 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100. Tổng của 25 số này là số chẵn hay số lẻ?

Lời giải:

Trong 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100 có chứa một số nguyên tố chẵn là 2, còn 24 số nguyên tố còn lại là số nguyên tố lẻ. Do đó tổng 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100 là số chẵn.

Bài 3: Tổng 2 số nguyên tố có thể bằng 2003 được không ?

Lời giải:

Ta thấy 2003 là một số lẻ nên nếu 2003 là tổng của hai số nguyên tố thì một trong hai số phải là số chẵn và bằng 2. Vậy số còn lại là 2001 nhưng 2001 lại không là số nguyên tố vì $2001=69.29$

Vậy tổng của hai số nguyên tố không thể bằng 2003.

Bài 4: Cho p và $p+2$ là hai số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng tổng của chúng chia hết cho 12.

Lời giải:

Ta thấy p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $6n \pm 1, (n \in \mathbb{N}^*)$

TH1: $p=6n+1, (n \in \mathbb{N}^*)$ thì $p+2=6n+3=3(2n+1):3$

Mà $p+2$ là số lớn hơn 3 nên $p+2$ là hợp số (Trái với GT, loại)

TH2: $p=6n-1 (n \in \mathbb{N}^*)$ thì $p+2=6n+1$

Khi đó $p+p+2=6n-1+6n+1=12n:12$

$\Rightarrow$ ĐPCM

Bài 5: Cho p là số nguyên tố và một trong hai $8p+1, 8p-1$ là số nguyên tố. Hỏi số còn lại là số nguyên tố hay hợp số.

Lời giải:

-Nếu $p=2$ thì $8p-1=8.2-1=15$ là hợp số

-Nếu $p=3$ thì $8p+1=8.3+1=25$ là hợp số

-Nếu $p>3$ thì $8p$ không chia hết cho 3

Vậy 1 trong 2 số $8p-1, 8p+1$ sẽ chia hết cho 3 và là hợp số.

Vậy số còn lại là hợp số.

Bài 6: Hai số $2^n+1, 2^n-1 (n \in \mathbb{N}, n > 2)$ có thể cùng là số nguyên tố hay không? Vì sao?

Lời giải:

Vì $2^n+1, 2^n, 2^n-1$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên có 1 số chia hết cho 3. Mà $(2, 3)=1$ và 3 là số nguyên tố nên 2^n không chia hết cho 3. (1)

Mà $n > 2$ nên $2^n+1 > 3, 2^n-1 > 3$ (2)

Từ (1), (2) suy ra 1 trong 2 số $2^n+1, 2^n-1$ phải chia hết cho 3.

$\Rightarrow$ Hai số $2^n+1, 2^n-1 (n \in \mathbb{N}, n > 2)$ không thể cùng là số nguyên tố.

Bài 7: Cho 3 số nguyên tố lớn hơn 3, trong đó số sau lớn hơn số trước là d đơn vị. Chứng minh rằng $d \vdots 6$.

Lời giải:

Các số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2 (k \in \mathbb{N}^*)$

Có 3 số mà chỉ có 2 dạng nên tồn tại hai số thuộc cùng một dạng, hiệu của chúng (là d hoặc $2d$) chia hết cho 3 (theo nguyên lý Dirichlet). Mặt khác d chia hết cho 2 vì d là hiệu của hai số lẻ. Vậy d chia hết cho 6.

Bài 8: Hai số nguyên tố gọi là sinh đôi nếu chúng là hai số nguyên tố lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng một số tự nhiên lớn hơn 3 nằm giữa hai số nguyên tố sinh đôi thì chia hết cho 6.

Lời giải:

Gọi p là số nguyên tố lớn hơn 3 và p lẻ nên $p+1 \vdots 2$ (1)

Mà p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $3k+1, 3k+2 (k \in \mathbb{N}, k > 1)$.

Dạng $p=3k+1$ không xảy ra vì nếu $p=3k+1$ thì $p+2=3k+3 \vdots 3$ là hợp số (Loại)

$$\Rightarrow p = 3k + 2 \Rightarrow p + 1 = 3k + 3 : 3 \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow p + 1 : 6 \Rightarrow \text{ĐPCM}$

Bài 9: Cho p và $p + 8$ là hai số nguyên tố lớn hơn 3. Hỏi $p + 100$ là số nguyên tố hay là hợp số ?

Lời giải:

Ta thấy p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $6n \pm 1, (n \in \mathbb{N}^*)$

TH1: $p = 6n + 1, (n \in \mathbb{N}^*)$ thì $p + 8 = 6n + 9 = 3(2n + 3) : 3$

Mà $p + 8$ là số lớn hơn 3 nên $p + 8$ là hợp số (Trái với GT, loại)

TH2: $p = 6n - 1 (n \in \mathbb{N}^*)$ thì $p + 8 = 6n + 7$

Khi đó $p + 100 = 6n - 1 + 100 = 6n + 99 = 3(2n + 33) : 3$

Mà $p + 100$ là số lớn hơn 3 nên $p + 100$ là hợp số.

Bài 10: Cho p và $2p + 1$ là hai số nguyên tố lớn hơn 3. Hỏi $4p + 1$ là số nguyên tố hay hợp số ?

Lời giải:

Ta thấy p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $6n \pm 1, (n \in \mathbb{N}^*)$

TH1: $p = 6n + 1, (n \in \mathbb{N}^*)$ thì $2p + 1 = 2(6n + 1) + 1 = 12n + 3 = 3(4n + 1) : 3$

Mà $2p + 1$ là số lớn hơn 3 nên $2p + 1$ là hợp số (Trái với GT, loại)

TH2: $p = 6n - 1 (n \in \mathbb{N}^*)$ thì $2p + 1 = 2(6n - 1) + 1 = 12n - 1$

Khi đó $4p + 1 = 4(6n - 1) + 1 = 24n - 3 = 3(8n - 1)$

Mà $4p + 1$ là số lớn hơn 3 nên $4p + 1$ là hợp số.

Bài 11: Chứng minh rằng số dư trong phép chia một số nguyên tố cho 30 chỉ có thể là 1 hoặc là số nguyên tố.

Lời giải:

Giả sử p là số nguyên tố và p có dạng $p = 30k + r = 2.3.5k + r (k \in \mathbb{N}^*, r \in \mathbb{N}^*, 0 < r < 30)$

Nếu r là hợp số thì r có ước nguyên tố q sao cho $q^2 < 30 \Rightarrow q \in \{2, 3, 5\}$

Nhưng với $q \in \{2, 3, 5\}$ thì p lần lượt chia hết cho $2, 3, 5$ (Vô lý)

Vậy $r = 1$ hoặc r là số nguyên tố.

Bài 12: Một số nguyên tố chia cho 30 có số dư là r . Tìm r biết rằng r không là số nguyên tố.

Lời giải:

Gọi số nguyên tố là p ($p \in \mathbb{N}^*$)

Ta có: $p = 30k + r = 2.3.5k + r$ ($k \in \mathbb{N}^*, r \in \mathbb{N}^*, 0 < r < 30$)

Vì p là số nguyên tố nên r không chia hết cho $2, 3, 5$.

Số nguyên dương không là số nguyên tố nhỏ hơn 30 và không chia hết cho $2, 3, 5$ chỉ có số 1.

Vậy $r = 1$.

Bài 13: Một số nguyên tố chia cho 42 có số dư là r . Tìm r biết rằng r là hợp số.

Lời giải:

Gọi số nguyên tố là p ($p \in \mathbb{N}^*$)

Ta có: $p = 42k + r = 2.3.7.k + r$ ($k \in \mathbb{N}^*, r \in \mathbb{N}^*, 0 < r < 42$)

Vì p là số nguyên tố nên r không chia hết cho $2, 3, 7$.

Số nguyên dương là hợp số nhỏ hơn 42 và không chia hết cho $2, 3, 7$ chỉ có số 25.

Vậy $r = 25$.

Bài 14: Trong dãy số tự nhiên có thể tìm được 1997 số liên tiếp nhau mà không có số nguyên tố nào hay không ?

Lời giải:

Chọn dãy số:

$$a_1 = 1998! + 2$$

$$a_1 : 2$$

$$a_2 = 1998! + 3$$

$$a_2 : 3$$

$$a_3 = 1998! + 4$$

$$a_3 : 4$$

.....

.....

$$a_{1997} = 1998! + 1998$$

$$a_{1997} : 1998$$

Như vậy: Dãy số $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{1997}$ gồm có 1997 số tự nhiên liên tiếp không có số nào là số nguyên tố.

Bài 15: Trong dãy số tự nhiên có thể tìm được n số liên tiếp nhau ($n > 1$) mà không có số nguyên tố nào hay không ?

Lời giải:

Chọn dãy số:

$$a_1 = (n+1)! + 2 \qquad a_1 : 2, a_1 > 2 \text{ nên } a_1 \text{ là hợp số}$$

$$a_2 = (n+1)! + 3 \qquad a_2 : 3, a_2 > 3 \text{ nên } a_2 \text{ là hợp số}$$

$$a_3 = (n+1)! + 4 \qquad a_3 : 4, a_3 > 4 \text{ nên } a_3 \text{ là hợp số}$$

.....

.....

$$a_n = (n+1)! + (n+1) \qquad a_n : (n+1), a_n > n+1 \text{ nên } a_n \text{ là hợp số}$$

Như vậy: Dãy số $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n$ gồm có n số tự nhiên liên tiếp không có số nào là số nguyên tố.

Bài 16: Ta biết rằng có 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100. Tổng của 25 số này là số chẵn hay số lẻ?

Lời giải:

Trong 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100 có chứa một số nguyên tố chẵn là 2, còn 24 số nguyên tố còn lại là số nguyên tố lẻ. Do đó tổng 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100 là số chẵn.

Bài 17: Chứng minh rằng nếu tổng của n lũy thừa bậc 4 của các số nguyên tố lớn hơn 5 là một số nguyên tố thì $(n, 30) = 1$

Lời giải:

Số nguyên tố p khi chia cho 30 chỉ có thể dư là: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

Với $r = 1$ thì $p^2 \equiv 1 \pmod{30}$ tương tự với $r = 11, r = 9, r = 19$

Với $r = 7$ thì $p^2 \equiv 19 \pmod{30}$ tương tự với $r = 13, r = 17, r = 23$

Suy ra $p^2 \equiv 1 \pmod{30}$

Giả sử $p_1, p_2, \dots, p_n$ là các số nguyên tố lớn hơn 5

Khi đó $q = p_1^4 + p_2^4 + \dots + p_n^4 \equiv n \pmod{30}$

$\Rightarrow p = 30k + n (k \in \mathbb{N}^*)$ là số nguyên tố nên $(n, 30) = 1$.

Dạng 2: Tìm số nguyên tố p để thỏa mãn điều kiện.

I. Phương pháp giải

- Trong n số tự nhiên liên tiếp chỉ có một và chỉ một số chia hết cho n .
- Nhớ chắc các tính chất đặc trưng của số nguyên tố để giải bài toán.

II. Bài toán

Bài 1: Tìm số nguyên tố p sao cho các số sau cũng là số nguyên tố:

a, $p+10, p+14$

b, $p+2, p+6, p+8, p+12, p+14$

Lời giải:

a, Vì $p+10, p+14$ là số nguyên tố và 10; 14 là hợp số $\Rightarrow p > 2$

$\Rightarrow p$ có dạng $3k, 3k+1, 3k+2 (k \in \mathbb{N}^*)$.

-Nếu $p=3k+1 \Rightarrow p+14=3k+15=3(k+5):3$ là hợp số (Loại)

-Nếu $p=3k+2 \Rightarrow p+10=3k+12=3(k+4):3$ là hợp số (Loại)

-Nếu $p=3k \Rightarrow p=3$ (vì p là số nguyên tố) $\Rightarrow \begin{cases} p+10=3+10=13 \\ p+14=3+14=17 \end{cases}$ (đều là số nguyên tố, thỏa mãn)

Vậy $p=3$ thì $p+10, p+14$ là số nguyên tố.

b, Vì $p+2, p+6, p+8, p+12, p+14$ là số nguyên tố $\Rightarrow p > 3$.

$\Rightarrow p$ có dạng $5k, 5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4 (k \in \mathbb{N})$

-Nếu $p=5k+1 \Rightarrow p+14=5k+15:5$ là hợp số (loại)

-Nếu $p=5k+2 \Rightarrow p+8=5k+10:5$ là hợp số (loại)

-Nếu $p=5k+3 \Rightarrow p+12=5k+15:5$ là hợp số (loại)

-Nếu $p=5k+4 \Rightarrow p+6=5k+10:5$ là hợp số (loại)

-Nếu $p=5k$ mà p là số nguyên tố nên $p=5 \Rightarrow p+2=7; p+6=11; p+8=13; p+12=17; p+14=19$ đều là số nguyên tố (thỏa mãn, lấy)

Vậy $p=5$ thì $p+2, p+6, p+8, p+12, p+14$ là số nguyên tố.

Bài 2: Tìm 3 số lẻ liên tiếp đều là các số nguyên tố.

Lời giải:

Gọi 3 số lẻ liên tiếp là: $2k+1, 2k+3, 2k+5 (k \in \mathbb{N}^*)$

Trong 3 số lẻ liên tiếp luôn có 1 số chia hết cho 3

-Nếu $2k+3 \vdots 3 \Rightarrow 2k+3=3$ (vì $2k+3$ là số nguyên tố) $\Rightarrow k=0 \Rightarrow 2k+1=1$ (Loại vì 1 không là số nguyên tố)

-Nếu $2k+5 \vdots 3 \Rightarrow 2k+5=3$ (vì $2k+5$ là số nguyên tố) $\Rightarrow k=-1$ (Loại vì -1 không phải là số tự nhiên)

-Nếu $2k+1 \vdots 3 \Rightarrow 2k+1=3$ (vì $2k+1$ là số nguyên tố) $\Rightarrow k=1 \Rightarrow 2k+3=5; 2k+5=7$ (Thỏa mãn vì đều là số nguyên tố)

Vậy 3 số tự nhiên lẻ cần tìm là 3,5,7.

Bài 3: Tìm các số nguyên tố P sao cho P vừa là tổng vừa là hiệu của hai số nguyên tố.

Lời giải:

Giả sử P là số nguyên tố cần tìm thì ta có $P = p_1 + p_2 = p_3 - p_4$ (p_1, p_2, p_3, p_4 đều là các số nguyên tố và $p_3 > p_4$)

Để P là số nguyên tố thì p_1, p_2 có một trong hai số là số chẵn và p_3, p_4 cũng có một trong hai số là số chẵn.

Giả sử $p_1 > p_2$ thì $p_2 = p_4 = 2$

Ta có: $P = p_1 + 2 = p_3 - 2 \Rightarrow p_3 = p_1 + 4$

Ta thấy $p_1, p_1 + 2, p_1 + 4$ là 3 số nguyên tố lẻ liên tiếp.

Theo câu a $\Rightarrow p_1 = 3 \Rightarrow P = p_1 + 2 = 5$

Thử lại: $P = 5 \Rightarrow 5 = 2 + 3 = 7 - 2$.

Vậy số cần tìm là 5.

Bài 4: Tìm $k \in \mathbb{N}$ để dãy số $k+1, k+2, \dots, k+10$ chứa nhiều số nguyên tố nhất.

Lời giải:

-Nếu $k=0 \Rightarrow$ Ta có dãy số $1; 2; 3; \dots; 10$ có các số nguyên tố là $2; 3; 5; 7 \Rightarrow$ Có 4 số nguyên tố.

-Nếu $k=1 \Rightarrow$ Ta có dãy số $2; 3; 4; \dots; 11$ có các số nguyên tố là $2; 3; 5; 7; 11 \Rightarrow$ Có 5 số nguyên tố.

-Nếu $k=2 \Rightarrow$ Ta có dãy số $3; 4; 5; \dots; 12$ có các số nguyên tố là $3; 5; 7; 11 \Rightarrow$ Có 4 số nguyên tố.

-Nếu $k \geq 3 \Rightarrow$ Dãy số $k+1, k+2, \dots, k+10$ đều gồm các số lớn hơn 3 và bao gồm 5 số lẻ liên tiếp và 5 số chẵn liên tiếp.

Vì các số trong dãy đều lớn hơn 3 nên suy ra 5 số chẵn liên tiếp đều là hợp số và trong 5 số lẻ liên tiếp tồn tại ít nhất một số chia hết cho 3 và số này cũng là hợp số.

Vậy $k=1$ là giá trị cần tìm.

Bài 5: Ta gọi p, q là 2 số nguyên tố liên tiếp nếu giữa p và q không có số nguyên tố nào khác. Tìm 3 số nguyên tố liên tiếp p, q, r sao cho $p^2 + q^2 + r^2$ cũng là số nguyên tố.

Lời giải:

+Nếu p, q, r đều khác 3 mà p, q, r là các số nguyên tố.

$\Rightarrow p, q, r$ chia 3 dư 1 hoặc dư 2 (hay dư -1).

$\Rightarrow p^2, q^2, r^2$ chia 3 dư 1.

$\Rightarrow p^2 + q^2 + r^2$ chia hết cho 3.

$\Rightarrow$ Vậy tồn tại 1 số bằng 3.

TH1: Ba số nguyên tố đó là 2, 3, 5 Khi đó $2^2 + 3^2 + 5^2 = 38$ là hợp số (Loại)

TH2: Ba số nguyên tố đó là 3, 5, 7 Khi đó $3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$ là số nguyên tố (Thỏa mãn)

Vậy 3 số nguyên tố liên tiếp cần tìm là: 3, 5, 7.

Bài 6: Tìm 3 số nguyên tố p, q, r sao cho: $p^q + q^p = r$.

Lời giải:

Vì $p^q + q^p > 2 \Rightarrow r > 2 \Rightarrow r$ là số lẻ (r là số nguyên tố).

$\Rightarrow p^q, q^p$ có 1 số lẻ và 1 số chẵn.

Giả sử p^q là số chẵn $\Rightarrow p$ chẵn $\Rightarrow p=2$ (vì p là số nguyên tố) $\Rightarrow 2^q + q^2 = r$

+Nếu $q > 3 \Rightarrow q \equiv \pm 1 \pmod{3} \Rightarrow q^2 \equiv 1 \pmod{3}$

Mặt khác q là số lẻ $\Rightarrow 2^q \equiv (-1)^p \equiv -1 \pmod{3}$

$\Rightarrow 2^q + q^2 \equiv 0 \pmod{3}$

$\Rightarrow 2^q + q^2 \vdots 3 \Rightarrow r \vdots 3 \Rightarrow r=3$ (Vì r là số nguyên tố)

$\Rightarrow 2^q + q^2 = 3$ (Loại vì q là số nguyên tố nên $q^2 > 3 \Rightarrow r > 3$)

+Nếu $q=3$ thì $\Rightarrow r=3^2 + 2^3 = 17$ là số nguyên tố (Thỏa mãn)

Vậy $(p, q, r) \in [(2, 3, 17); (3, 2, 17)]$.

Bài 7: Đề thi học sinh giỏi 2020-2021, huyện Yên Mô:

Cho a, b, c là 3 số nguyên tố khác nhau đôi một. Tìm 3 số a, b, c để giá trị của biểu thức:

$$A = \frac{1}{BCNN(a, b)} + \frac{1}{BCNN(a, c)} + \frac{1}{BCNN(b, c)} \text{ đạt GTLN.}$$

Lời giải:

Ta có: a, b, c là 3 số nguyên tố khác nhau nên $BCNN(a, b) = ab$; $BCNN(a, c) = ac$; $BCNN(b, c) = bc$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{BCNN(a, b)} + \frac{1}{BCNN(a, c)} + \frac{1}{BCNN(b, c)} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}$$

Vì vai trò a, b, c như nhau nên để không mất tính tổng quát ta giả sử: $a \leq b \leq c$

Mà a, b, c là 3 số nguyên tố nên $a \geq 2; b \geq 3; c \geq 5$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \leq \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{Max} A = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = 2, b = 3, c = 5$$

Vậy A đạt GTLN khi $a = 2, b = 3, c = 5$ và các hoán vị của nó.

Bài 8: Tìm 2 số nguyên tố có tổng bằng 2005.

Lời giải:

Ta thấy tổng số nguyên tố hai số cần tìm là số lẻ nên một trong hai số cần tìm phải là số nguyên tố chẵn và bằng 2. Khi đó số còn lại là 2003 (là số nguyên tố, thỏa mãn)

Vậy hai số cần tìm là 2 và 2003.

Bài 9: Tìm 2 số nguyên tố có tổng bằng 309.

Lời giải:

Ta thấy tổng số nguyên tố hai số cần tìm là số lẻ nên một trong hai số cần tìm phải là số nguyên tố chẵn và bằng 2. Khi đó số còn lại là 307 (là số nguyên tố, thỏa mãn)

Vậy hai số cần tìm là 2 và 307.

Bài 10: Tổng của 3 số nguyên tố bằng 1012. Tìm số nhỏ nhất trong 3 số.

Lời giải:

Trong ba số nguyên tố có tổng bằng 1012, phải có một số chẵn, là số 2. Đó là số nhỏ nhất trong ba số.

Bài 11: Tìm tất cả các số nguyên tố p để $4p+11$ là số nguyên tố nhỏ hơn 30.

Lời giải:

Vì p là số nguyên tố nên $p \geq 2 \Rightarrow 4p+11 \geq 19$

Mà $4p+11$ là số nguyên tố nhỏ hơn 30 nên $4p+11 \in \{19; 23; 29\}$

+ Nếu $4p+11=19$ thì $p=2$ là số nguyên tố (Thỏa mãn, lấy)

+ Nếu $4p+11=23$ thì $p=3$ là số nguyên tố (Thỏa mãn, lấy)

+ Nếu $4p+11=29$ thì $p=\frac{9}{2}$ không là số nguyên tố (Trái với GT, loại)

Vậy số nguyên tố cần tìm là 2 và 3.

Bài 12: Tìm các số nguyên tố x, y thỏa mãn $x^2 - 2y^2 - 1 = 0$

Lời giải:

$$x^2 - 2y^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 2y^2$$

Do y là số nguyên tố và $x+1 > x-1$ nên chỉ xảy ra các trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} x+1=2y \\ x-1=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x+1=2y^2 \\ x-1=1 \end{cases} \text{ vô nghiệm nguyên tố}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} x+1=y^2 \\ x-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy cặp nguyên tố duy nhất thỏa mãn đề bài là $x=3; y=2$.

Bài 13: Tìm các số nguyên tố x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^3 = z^4$.

Lời giải:

Ta có:

$$x^2 + y^3 = z^4 \Leftrightarrow y^3 = (z^2 + x)(z^2 - x)$$

Mà $(z^2 + x) > (z^2 - x)$; y là số nguyên tố nên

$$\begin{cases} z^2 + x = y^3 \\ z^2 - x = 1 \end{cases} \quad (1)$$

hoặc $\begin{cases} z^2 + x = y^2 \\ z^2 - x = y \end{cases} \quad (2)$

không có x, y, z thỏa mãn (1) và (2) Vậy không tồn tại x, y, z nguyên tố để $x^2 + y^3 = z^4$

Bài 14: Tìm tất cả các bộ ba số a, b, c sao cho $abc < ab + bc + ac$

Lời giải:

Vì a, b, c có vai trò như nhau nên giả sử $a \leq b \leq c$ khi đó

$$ab + bc + ac \leq 3bc$$

$$\Rightarrow abc < 3bc$$

$$\Rightarrow a < 3 \Rightarrow a = 2 \text{ vì } a \text{ là số nguyên tố.}$$

Với $a = 2$ thì ta có $2bc < 2b + 2c + bc \Rightarrow bc < 2(b + c) \leq 4c$

$$b \leq 4 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = 3 \end{cases} \quad (\text{vì } b \text{ là số nguyên tố})$$

+ Nếu $b = 2$ thì $4c < 4 + 4c$ thỏa mãn với c là số nguyên tố bất kì

+ Nếu $b = 3$ thì $6c < 6 + 5c \Rightarrow c < 6 \Rightarrow c \in \{3, 5\}$

Vậy các cặp số (a, b, c) cần tìm là $(2, 2, p); (2, 3, 3); (2, 3, 5)$ và các hoán vị của chúng, với p là số nguyên tố.

Dạng 3: Các bài toán chứng minh số nguyên tố, hợp số

I. Phương pháp giải

-Dựa vào các tính chất đặc trưng của số nguyên tố và hợp số để giải các bài toán về chứng minh số nguyên tố, hợp số.

II. Bài toán

Bài 1: Cho p và $p + 4$ là các số nguyên tố ($p > 3$). Chứng minh rằng $p + 8$ là hợp số.

Lời giải:

Ta có: p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $3k + 1, 3k + 2 (k \in \mathbb{N}^*)$

+Nếu $p = 3k + 2$ thì $p + 4 = 3k + 6 = 3(k + 2)$ là hợp số (Trái với GT, loại)

Vậy p có dạng $3k+1$, khi đó $p+8=3k+9=3(k+3):3$ là hợp số

$\Rightarrow$ ĐPCM

Bài 2: Cho p và $8p-1$ là các số nguyên tố. Chứng minh rằng $8p+1$ là hợp số.

Lời giải:

Ta xét các trường hợp: $p=3k; p=3k+1; p=3k+2 (k \in \mathbb{N}^*)$

TH1: $p=3k+2$ thì $8p-1=8(3k+2)-1=24k+15=3(8k+5):3$ là các hợp số (Trái với giả thiết, loại)

TH2: $p=3k \Rightarrow p=3$ (vì p là số nguyên tố) $\Rightarrow 8p-1=23$ là số nguyên tố

Và khi đó $8p+1=25$ là hợp số (1)

TH3: $p=3k+1$ thì $8p-1=24k+7$

Và khi đó $8p+1=24k+9=3(8k+3):3$ là hợp số (2)

Từ (1), (2) ta suy ra $8p+1$ là hợp số $\Rightarrow$ ĐPCM

Bài 3: Chứng minh rằng $(p-1)!$ chia hết cho p nếu p là hợp số, không chia hết cho p nếu p là số nguyên tố.

Lời giải:

+TH1: p là hợp số:

Nếu p là hợp số thì p là tích các thừa số nguyên tố nhỏ hơn p và số mũ các lũy thừa này không thể lớn hơn số mũ của chính các lũy thừa ấy trong $(p-1)!$.

Vậy: $(p-1)! : p$ (ĐPCM)

+TH2: p là số nguyên tố:

Vì p là số nguyên tố nên p nguyên tố cùng nhau với mọi thừa số của $(p-1)!$

Kết hợp với $p > p-1 \Rightarrow (p-1)!$ không chia hết cho p (ĐPCM)

Bài 4: Cho $2^m - 1$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng m cũng là số nguyên tố.

Lời giải:

Giả sử m là hợp số $\Rightarrow m=p.q (p, q \in \mathbb{N}; p, q > 1)$

Khi đó: $2^m - 1 = 2^{p.q} - 1 = (2^p)^q - 1 = (2^p - 1)(2^{p(q-1)} + 2^{p(q-2)} + \dots + 1)$

Vì $p > 1$ (Giả sử) nên $\Rightarrow 2^p - 1 > 1$ và $(2^{p(q-1)} + 2^{p(q-2)} + \dots + 1) > 1$ nên $2^m - 1$ là hợp số (Trái với giả thiết) $\Rightarrow$ Giả sử là sai $\Rightarrow m$ không thể là hợp số $\Rightarrow m$ là số nguyên tố (ĐPCM)

Bài 5: Chứng minh rằng: mọi số nguyên tố của $1994! - 1$ đều lớn hơn 1994.

Lời giải:

Gọi p là ước số nguyên tố của $1994! - 1$

Giả sử $p \leq 1994 \Rightarrow 1994.1993 \dots 3.2.1$ chia hết cho $p \Leftrightarrow 1994!$ chia hết cho p

Mà $(1994! - 1) : p$ nên $1 : p$ (vô lý)

Vậy $p > 1994$ (ĐPCM)

Bài 6: Chứng minh rằng: $n > 2$ thì giữa n và $n!$ có ít nhất 1 số nguyên tố (từ đó suy ra có vô số số nguyên tố).

Lời giải:

Vì $n > 2$ nên $k = n! - 1 > 1$, do đó k có ít nhất một ước nguyên tố p .

Ta chứng minh $p > n$. Thấy vậy: nếu $p \leq n$ thì $n! : p$

Mà $k : p \Rightarrow (n! - 1) : p$. Do đó $1 : p$ (vô lý)

Vậy $p < n < n! - 1 < n!$ (ĐPCM)

Bài 7: Hãy chứng minh các số sau là hợp số:

a) $A = 11111 \dots 1$ (2001 chữ số 1);

b) $B = 1010101$

c) $C = 1! + 2! + 3! + \dots + 100!$

d) $D = 311141111$

Lời giải:

a) Tổng các chữ số của A là: $1 + 1 + 1 \dots + 1 = 2001 : 3 \Rightarrow A : 3$

mà $A > 3$ nên A là hợp số (ĐPCM)

b) $B = 1010101 = 101.10001$ là hợp số (đpcm)

c) Vì $1! + 2! = 3 : 3$ và $3! + 4! + \dots + 100!$ luôn chia hết cho 3 nên $C : 3$

Mà $C > 3$ nên C là hợp số (ĐPCM)

d) $D = 311141111 = 311110000 + 31111 = 31111(10000 + 1) : 31111$

$\Rightarrow D$ là hợp số (ĐPCM)

Bài 8: Chứng minh rằng số $N = \frac{5^{125} - 1}{5^{25} - 1}$ là hợp số.

Lời giải:

Đặt $5^{25} = a$, khi đó

$$\begin{aligned} N &= \frac{a^5 - 1}{a - 1} = a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 \\ &= (a^4 + 9a^2 + 1 + 6a^3 + 6a + 2a^2) - (5a^3 + 10a^2 + 1) \\ &= (a^2 + 3a + 1)^2 + 5a(a^2 + 2a + 1) \\ &= (a^2 + 3a + 1)^2 - 5 \cdot 5^{25}(a + 1)^2 \\ &= (a^2 + 3a + 1)^2 - [5^{13} \cdot (a + 1)]^2 \\ &= [a^2 + 3a + 1 + 5^{13}(a + 1)][a^2 + 3a + 1 - 5^{13}(a + 1)]. \end{aligned}$$

N là tích của hai số nguyên lớn hơn 1 nên N là hợp số (ĐPCM)

Bài 9: Chứng minh với mọi số tự nhiên lớn hơn 0 thì $2^{2^{2n+1}} + 3$ là hợp số.

Lời giải:

Với $2^2 = 4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2^{2n} \equiv 1 \pmod{3}, (n \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow 2^{2n} - 1 : 3$ nên $2^{2^{2n+1}} - 2 = 2(2^{2n} - 1) : 6$

Hay $2^{2^{2n+1}} = 6k + 2 (k \in \mathbb{N})$

$$\Rightarrow 2^{2^{2n+1}} + 3 = (2^6)^k \cdot 2^2 + 3 \equiv 2^2 + 3 \equiv 0 \pmod{7}$$

Tức là $2^{2^{2n+1}} + 3 : 7 (n \in \mathbb{N}^*)$

Mà $2^{2^{2n+1}} + 3 > 7 (n \in \mathbb{N}^*)$ nên $2^{2^{2n+1}} + 3$ là hợp số. (ĐPCM)

Bài 10: Chứng minh với mọi số tự nhiên lớn hơn 0 thì $19 \cdot 8^n + 17$ là hợp số.

Lời giải:

+ Nếu $n = 2k (k \in \mathbb{N}^*)$ thì $19 \cdot 8^{2k} + 17 = 18 \cdot 8^{2k} + (63 + 1)^k + (18 - 1) \equiv 0 \pmod{3}$

$$\begin{aligned}
 + \text{ Nếu } n = 4k + 1 (k \in \mathbb{N}^*) \text{ thì } 19.8^n + 17 &= 13.8^{4k+1} + 6.8.64^{2k} + 17 \\
 &= 13.8^{4k+1} + 39.64^{2k} + 9(1-65)^{2k} + (13+4) \equiv 0 \pmod{13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \text{ Nếu } n = 4k + 3 (k \in \mathbb{N}^*) \text{ thì} \\
 19.8^n + 17 &= 15.8^{4k+3} + 4.8^3.64^{2k} + 17 \\
 15.8^{4k+3} + 4.5.10.64^{2k} + 4 - 2(1-65)^{2k} &+ (25-8) \equiv 0 \pmod{5}
 \end{aligned}$$

Như vậy với mọi giá trị $n \in \mathbb{N}^*$ thì số $19.8^n + 17$ là hợp số.

Bài 11: Cho $a, n \in \mathbb{N}^*$, biết $a^n : 5$. Chứng minh rằng: $a^2 + 150 : 25$

Lời giải:

Ta có $a^n : 5$, mà 5 là số nguyên tố nên suy ra $a : 5 \Rightarrow a^2 : 25$.

Mà $150 : 25$ nên $a^2 + 150 : 25 \Rightarrow$ đpcm

Bài 12: Cho $A = n! + 1, B = n + 1 (n \in \mathbb{N}^*)$. Chứng minh rằng nếu A chia hết cho B thì B là số nguyên tố.

Lời giải:

Giả sử B không là số nguyên tố.

Do đó B có ước nguyên tố $p, q < B$

Do đó $p \leq n! \Rightarrow n! : p$.

Mặt khác $A : B$, nên $A : p$

$\Rightarrow A - n! : p \Rightarrow 1 : p$ (Vô lí)

Mà n nguyên dương nên $B \neq 0, B \neq 1$.

Vậy B là số nguyên tố (đpcm)

Bài 13: Cho các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $a^n : 5$. Chứng minh rằng $A = a^n + b^n + c^n + d^n$ là hợp số.

Lời giải:

Giả sử $(a, c) = t (t \in \mathbb{N}^*)$

Đặt $a = a_1 t, c = c_1 t; (a_1, c_1) = 1$

$$ab = cd \Rightarrow a_1 b t = c_1 d t \Rightarrow a_1 b = c_1 d$$

$$(a_1, c_1) = 1 \Rightarrow b : c_1$$

Mà

$$\text{Đặt } b = c_1 k \Rightarrow d = a_1 k, (k \in \mathbb{N}^*),$$

Ta có

$$A = a^n + b^n + c^n + d^n = a_1^n t^n + c_1^n k^n + c_1^n t^n + a_1^n k^n = (a_1^n + c_1^n)(k^n + t^n)$$

Vì a_1, c_1, t, k là số nguyên dương nên A là hợp số.

Bài 14: Chứng minh rằng có vô số nguyên tố có dạng: $3x - 1 (x \in \mathbb{N}^*, x > 1)$

Lời giải:

Mọi số tự nhiên không nhỏ hơn 2 có 1 trong 3 dạng: $3x; 3x + 1; 3x - 1 (x \in \mathbb{N}^*)$

+ Những số có dạng $3x$ mà $x > 1$ nên là hợp số.

+ Xét 2 số có dạng $3x + 1$: đó là số $(3n + 1)$ và $(3m + 1)$

Xét tích $(3m + 1)(3n + 1) = 9mn + 3m + 3n + 1 = 3x + 1$

Tích trên có dạng $3x + 1$

+ Lấy một số nguyên tố P có dạng $3x - 1$ (với P là số nguyên tố bất kỳ) ta lập tích của P với tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn P rồi trừ đi 1 ta có:

$$M = 2.3.5.7.....9 - 1 = 3(2.3.5.7.....p) - 1$$

M có dạng: $3x - 1$

Có 2 khả năng xảy ra:

*Khả năng 1: M là số nguyên tố có dạng $3x - 1 > P$, bài toán được chứng minh.

*Khả năng 2: M là hợp số: Ta chia M cho $2, 3, 5, \dots, P$ đều tồn tại một số dư khác 0 nên các ước số nguyên tố của M đều lớn hơn P , trong các ước này không có số nào có dạng $3x + 1$ (đã chứng minh trên). Do đó ít nhất một trong các ước nguyên tố của M phải có dạng $3x$ (hợp số) hoặc $3x - 1$.

Vậy có vô số nguyên tố có dạng: $3x - 1 (x \in \mathbb{N}, x > 1)$

Bài 15: Chứng minh có vô số số nguyên tố có dạng $4x + 3 (x \in \mathbb{N})$

Lời giải:

Các số nguyên tố lẻ không thể có dạng $4x$ và $4x + 2$.

Vậy chúng chỉ có thể tồn tại dưới dạng $4x + 1$ hoặc $4x + 3$

+ Xét tích 2 số có dạng $4x + 1$ là: $4m + 1$ và $4n + 1$

Ta có: $(4m + 1)(4n + 1) = 16mn + 4m + 4n + 1 = 4(4mn + m + n) + 1 = 4x + 1$

Vậy tích của 2 số có dạng $4x + 1$ là một số cũng có dạng $4x + 1$

+ Lấy một số nguyên tố p bất kỳ có dạng $4x - 1$, ta lập tích của $4x + 1$ với tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn p rồi trừ đi 1 khi ta có:

$$M = 2.3.5.7....p - 1 = 4(2.3.5.7....p) - 1$$

Có 2 khả năng xảy ra:

*Khả năng 1: M là số nguyên tố có dạng $4x - 1 > p$, bài toán được chứng minh.

*Khả năng 2: M là hợp số: Ta chia M cho $2, 3, 5, ..., p$ đều tồn tại một số dư khác 0 nên các ước số nguyên tố của M đều lớn hơn p , trong các ước này không có số nào có dạng $4x + 1$ (đã chứng minh trên). Do đó ít nhất một trong các ước nguyên tố của M phải có dạng $4x$ (hợp số) hoặc $4x - 1$. mà ước này hiển nhiên lớn hơn p .

Dạng 5: Áp dụng định lý Fermat

I. Phương pháp giải

- Định lý Fermat nhỏ: $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ với p là số nguyên tố.

- Bằng cách sử dụng định lý Fermat để giải các bài toán về số nguyên tố.

II. Bài toán

Bài 1: Chứng minh định lý Fermat nhỏ. Nếu p là số nguyên tố và $(a, p) = 1$ thì $a^{p-1} - 1 \vdots p$ với mọi số nguyên dương a .

Lời giải:

Vì a không chia hết cho p nên các số $2a, 3a, ..., (p-1)a$ cũng không chia hết cho p . Giả sử khi các số $a, 2a, 3a, ..., (p-1)a$ chia cho p được các số dư là $r_1, r_2, ..., r_{p-1}$.

$r_1, r_2, ..., r_{p-1}$ đôi một khác nhau.

Thật vậy nếu có $r_i = r_j (1 \leq i < j \leq p-1)$ thì $ia \equiv ja \pmod{p} \Leftrightarrow a(i-j) \equiv 0 \pmod{p} \quad (*)$

Mà a không chia hết cho p và $i-j$ không chia hết cho p nên $(*)$ không xảy ra.

do đó $r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_{p-1} = (p-1)!$

$$2a \cdot 3a \cdot \dots \cdot (p-1)a \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_{p-1} \pmod{p}$$

$$(p-1)! \cdot a^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod{p}$$

$$\text{Vì } ((p-1)!; p) = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Bài 2: Chứng minh rằng tổng $1^{100} - 2^{100} + 3^{100} - \dots + 1981^{100} - 1982^{100} \vdots 200283$

Lời giải:

Vì $200283 = 1983 \cdot 101$ mà $(1983; 101) = 1$ nên chỉ cần chứng minh $S \vdots 1983$ và $S \vdots 101$

* Chứng minh chia hết cho 1983

$$\begin{aligned} S &= (1^{100} - 1982^{100}) - (2^{100} - 1981^{100}) + (3^{100} - 1980^{100}) - (4^{100} - 1979^{100}) + \dots + (991^{100} - 992^{100}) + 1983 \\ &= (-1)^{k+1} \sum_{k=1}^{991} [k^{100} - (1983 - k)^{100}] + 1983 \end{aligned}$$

Ta có :

$$k^{100} - (1983 - k)^{100} = k^{100} - (k^{100} + 1983m) \quad (m \text{ nguyên})$$

Vậy hiệu này chia hết cho 1983. Từ đó suy ra S chia hết cho 1983. (1)

* Chứng minh chia hết cho 101

Trừ các số chia hết cho 101 là $101^{100}; 202^{100}; \dots; 1919^{100}$ trong tổng S còn lại các số có dạng $\pm a^{100}$ với $(a, 101) = 1$. Mà 101 là số nguyên tố nên theo định lý Fermat nhỏ, thì các số này chia 101 dư 1. Số các số hạng mang dấu cộng bằng số số hạng mang dấu trừ. Từ đó suy ra S chia hết cho 101 (2)

Từ (1) (2) suy ra S chia hết cho 200283.

Bài 3: Nhà toán học Pháp Fermat đã đưa ra công thức $2^{2^n} - 1$

để tìm các số nguyên tố với mọi số tự nhiên n.

1. Hãy tính giá trị của công thức này khi $x = 4$.
2. Với giá trị này hãy chứng tỏ ba tính chất sau:
 - a) Tổng hai chữ số đầu và cuối bằng tổng các chữ số còn lại.
 - b) Tổng bình phương các chữ số là số chính phương.

c) Hiệu giữa tổng các bình phương của hai chữ số đầu và cuối với tổng các bình phương của các chữ số còn lại bằng tổng các chữ số của số đó.

Lời giải:

1. Ta thay $x = 4$ vào công thức Fermat và được:

$$2^{2^4} - 1 = 65537 \text{ là số nguyên tố.}$$

2. Số nguyên tố 65537 có ba tính chất sau:

a) Tổng hai chữ số đầu và cuối $6 + 7 = 13$ đúng bằng tổng ba chữ số còn lại $5 + 5 + 3 = 13$.

b) Tổng bình phương các chữ số $6^2 + 5^2 + 5^2 + 3^2 + 7^2 = 36 + 25 + 25 + 9 + 49 = 144 = 12^2$ là số chính phương.

c) Tổng bình phương của hai chữ số đầu và cuối là $6^2 + 7^2 = 36 + 49 = 85$.

Tổng các bình phương của ba chữ số còn lại là: $5^2 + 5^2 + 3^2 = 25 + 25 + 9 = 59$.

Tổng các chữ số đó là: $6 + 5 + 5 + 3 + 7 = 26$.

Ta nhận thấy rằng: $85 - 59 = 26$

Hiệu này đúng bằng tổng các chữ số của số nguyên tố

Bài 4: Cho $n \in \mathbb{N}^*$, chứng minh rằng: $2^{10n+1} + 19$ là hợp số.

Lời giải:

Ta chứng minh $(2^{10n+1} + 19) : 23$ với mọi $n \geq 1$

Ta có: $2^{10} \equiv 1 \pmod{22} \Rightarrow 2^{10n+1} \equiv 2 \pmod{22} \Rightarrow 2^{10n+1} = 22k + 2 (k \in \mathbb{N})$.

Theo định lý Fermat:

$$2^{22} \equiv 1 \pmod{23} \Rightarrow 2^{10n+1} \equiv 2^{22k+2} \equiv 4 \pmod{23}$$

$$\Rightarrow (2^{10n+1} + 19) : 23$$

Mà $2^{10n+1} + 19 > 23$ nên $2^{10n+1} + 19$ là hợp số (ĐPCM)

Bài 5: Cho $n \in \mathbb{N}^*$, chứng minh rằng: $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 5$ là hợp số.

Lời giải:

Theo định lý Fermat nhỏ ta có $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}, 2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$.

Ta tìm số dư trong phép chia 2^{4n+1} và 3^{4n+1} cho 10, tức là tìm chữ số tận cùng chúng.

$$2^{4n+1} = 2 \cdot 16^n \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n+1} = 10k + 2, (k \in \mathbb{N})$$

$$3^{4n+1} = 3 \cdot 81^n \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow 3^{4n+1} = 10l + 3, (l \in \mathbb{N})$$

Mà $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ và $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ nên

$$2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 5 \equiv 3^{10k+2} + 2^{10l+3} + 5 \equiv 3^2 + 2^3 + 5 \equiv 0 \pmod{11}$$

Mà $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 5 > 11$ với mọi số tự nhiên n khác 0

Vậy $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 5$ là hợp số với mọi số tự nhiên n khác 0.

Bài 6: Tìm số nguyên tố p để $(2^p + 1) : p$

Lời giải:

Vì p là số nguyên tố mà $(2^p + 1) : p \Rightarrow p \neq 2$.

Ta thấy p không chia hết cho 2 vì $p \neq 2$.

Theo định lý Fermat nhỏ ta có $2^{p-1} - 1 : p$ mà $(2^p + 1) : p$ (Giả thiết)

$$\Rightarrow 2 \cdot 2^{p-1} - 2 + 3 : p \Rightarrow 2(2^{p-1} - 1) + 3 : p \Rightarrow 3 : p \quad (\text{vì } 2^{p-1} - 1 : p)$$

$$\Rightarrow p = 3 \quad (\text{vì } p \text{ là số nguyên tố})$$

Vậy số nguyên tố cần tìm là 3.

Bài 7: Cho p là số nguyên tố p lớn hơn 2. Chứng minh rằng có vô số số tự nhiên n thỏa mãn $(n \cdot 2^n - 1) : p$

Lời giải:

Ta có: $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, ta tìm $n = (p-1)$ sao cho $n \cdot 2^n \equiv 1 \pmod{p}$.

$$\text{Ta có: } n \cdot 2^n \equiv m \cdot (p-1) \cdot 2^{m(p-1)} \pmod{p} \Rightarrow n \cdot 2^n \equiv -m \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow m = kp - 1, (k \in \mathbb{N}^*)$$

Vậy, với $n = (kp - 1)(p - 1), (k \in \mathbb{N}^*)$ thì $(n \cdot 2^n - 1) : p$.

Bài 8: Cho p là số nguyên tố, chứng minh rằng số $2^p - 1$ chỉ có ước nguyên tố có dạng là $2pk + 1$.

Lời giải:

Gọi q là ước nguyên tố của $2^p - 1$ thì q lẻ, nên theo định lý Fermat:

$2^{q-1} - 1 : q \Rightarrow (2^p - 1, 2^{q-1} - 1) = 2^{(p \cdot q - 1)} - 1 : q \Rightarrow q - 1 : p$, vì nếu $(q - 1, p) = 1$ thì $1 : q$, vô lý.

Mặt khác $q - 1$ chẵn $\Rightarrow q - 1 : 2p \Rightarrow q = 2pk + 1$.

Bài 9: Chứng minh rằng dãy số $2003 + 23k$ với $k = 1, 2, 3, \dots$ chứa vô hạn số là lũy thừa của cùng một số nguyên tố.

Lời giải:

Giả sử tồn tại số nguyên tố sao cho:

$$2003 + 23k = p^n \quad (1)$$

Trong đó k, n là các số nguyên dương nào đó.

Từ ⁽¹⁾ dễ thấy p không chia hết cho 23 nên $(23, p) = 1$.

Theo định lý Fermat thì $p^{22} - 1 : 23 \Rightarrow p^{22t} = 1 + 23s$ với mọi số nguyên dương t, s .

Từ đó $p^{22t+n} = (1 + 23s)p^n = p^n + 23 \cdot p^n = 2003 + 23k + 23s \cdot p^n$ hay $p^{22t+n} = 2003 + 23(k + sp^n)$ với mọi $t = 1, 2, 3, \dots$

Bài toán được giải đầy đủ khi ta chỉ ra sự tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn ⁽¹⁾. Chẳng hạn:

Với $p = 2$ thì $2003 + 23 \cdot 2 = 2^{12}$

Với $p = 3$ thì $2003 + 23 \cdot 8 = 3^7$

Với $p = 2003$ thì tồn tại k theo định lý Fermat thỏa mãn $2003 + 23k = 2003^{23}$.

Bài 10: Giả sử p là số nguyên tố lẻ đặt $m = \frac{9^p - 1}{8}$. Chứng minh rằng m là một hợp số lẻ không chia hết cho 3 và $3^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$.

Lời giải:

Ta có
$$m = \left(\frac{3^p - 1}{2} \right) \left(\frac{3^p + 1}{4} \right) = ab$$

dễ thấy a, b đều là số nguyên dương lớn hơn 1 nên m là hợp số mà $m = 9^{p-1} + 9^{p-2} + \dots + 1$ suy ra m lẻ và chia 3 dư 1.

Theo định lý Fermat nhỏ: $9^p - 9 : p$ vì $(p, 8) = 1$

Vì $m - 1$ chẵn nên cũng có $m - 1 : 2p$

Do đó $3^{m-1} - 1 \vdots 3^{2^p} - 1 \vdots \frac{9^p - 1}{8} = m \Rightarrow 3^{m-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow \text{ĐPCM}$

Bài 11: Cho số nguyên tố p , các số dương $a \equiv 1 \pmod{p^n}$. Tìm số dư khi chia a cho p^{n-1} .

Lời giải:

Xét các trường hợp sau:

1) $p=2$. Ta có $a^2 \equiv 1 \pmod{2^n}$

$$\Rightarrow a \text{ lẻ. Đặt } a = 2x + 1 (x \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow 2(x+1)x \vdots 2^n \Rightarrow x(x+1) \vdots 2^{n-2}$$

Dễ suy ra $a \equiv \pm 1 \pmod{2^{n-1}}$.

2) $p \geq 3$ ta có $a^p \equiv a \pmod{p}$ (định lý Fermat nhỏ)

$$\Rightarrow d = (a - 1; a^{p-1} + a^{p-2} + \dots + a + a) \vdots p$$

$$\Rightarrow d = p \text{ vì } d \text{ không chia hết cho } p$$

$$(a - 1)(a^{p-1} + a^{p-2} + \dots + a + 1) \vdots p^n$$

mà $a^{p-1} + a^{p-2} + \dots + a + 1 \equiv p \pmod{p^2}$

$$\Rightarrow a - 1 \vdots p^{n-1} \Rightarrow a \equiv 1 \pmod{p^{n-1}}.$$

Bài 12: Chứng minh rằng $A = 3^p - 2^p - 1 \vdots 42p$ (với p là số nguyên tố lớn hơn 7)

Lời giải:

Ta có: $3^p - 1 \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow A \vdots 2$

$$2^p + 1 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow A \vdots 3$$

vì p là số nguyên tố lớn hơn 7 nên p chỉ có thể có dạng $6n \pm 1 (n \in \mathbb{N}^*)$

Nếu $p = 6n + 1$

$$A = 3^{6n+1} - 2^{6n+1} - 1 = 3(3^{6n} - 1) - 2(2^{6n} - 1).$$

$$\begin{cases} 3^6 \equiv 1 \pmod{7} \\ 2^6 \equiv 1 \pmod{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^6 - 1 \vdots 7 \\ 2^6 - 1 \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow A \vdots 7.$$

Vì

Nếu $p = 6n + 5 \Rightarrow A = 3^5(3^{6n} - 1) - 2^5(2^{6n} - 1) + 3^5 - 2^5 - 1$

Ta cũng có: $3^5 - 2^5 - 1 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow A \vdots 7$

Vậy A chia hết cho 7

Mặt khác theo định lý Fermat nhỏ ta có:

$$3^p \equiv 3 \pmod{p} \text{ và } 2^p \equiv 2 \pmod{p} \text{ nên } A \equiv 0 \pmod{p}$$

$$2, 3, 7, p \text{ đôi một nguyên tố cùng nhau nên } A \vdots (2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot p) \Rightarrow A \vdots 42p \text{ (đpcm)}$$

Bài 13: Cho p, q là hai số nguyên tố phân biệt. Chứng minh rằng: $p^{q-1} + q^{p-1} - 1 \vdots pq$ chia hết cho

Lời giải:

Áp dụng định lý Fermat nhỏ ta có: $(p^q - p) \vdots q \Rightarrow p(p^{q-1} - 1) \vdots q$ do p, q là số nguyên tố). (1)

Vì p, q là các số nguyên tố nên $(p, q) = 1$

Từ (1) suy ra $(p^{q-1} - 1) \vdots q$ (2)

Từ (2) suy ra $(p^{q-1} + q^{p-1} - 1) \vdots q$ (3)

Vì p và q có vai trò như nhau nên $(p^{q-1} + q^{p-1} - 1) \vdots p$ (4)

Lại vì $(p, q) = 1$ nên từ (3) và (4) ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 14: Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $7 \vdots 2^n - 1$.

Lời giải:

Ta có 2 không chia hết cho 7; 7 là số nguyên tố nên theo định lý Fermat ta có $2^6 \equiv 1 \pmod{7}$

Ta có $2^3 \equiv 8 \equiv 1 \pmod{7}$

Do đó tất cả các số chia hết cho 3 đều thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 15: Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $5^{p^2} \equiv 1 \pmod{p^2}$.

Lời giải:

Giả sử số nguyên tố p thỏa mãn điều kiện đã cho.

Khi đó $5^{2p^2} \equiv 1 \pmod{p}$.

Vì $(p^2 - 1) : p - 1$ nên theo định lý Fermat nhỏ ta có : $5^{2(p^2-1)} \equiv 1 \pmod{p}$.

Từ đó suy ra $5^2 \equiv 1 \pmod{p}$ nên $p \in \{2; 3\}$

Thử lại ta thấy $p = 3$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Dạng 6: Các bài toán về hai số nguyên tố cùng nhau

I. Phương pháp giải

- Sử dụng lý thuyết và tính chất của 2 số nguyên tố cùng nhau để giải các bài toán về hai số nguyên tố cùng nhau.

II. Bài toán

Bài 1: Chứng minh rằng: 5 và 7 là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

Ta có $5 = 5.1$; $7 = 7.1$

$$UCLN(5; 7) = 1$$

Vậy hai số 5 và 7 là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 2: Chứng minh rằng: Hai số tự nhiên liên tiếp khác 0 là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

Gọi 2 số tự nhiên liên tiếp là: $n, n+1 (n \in \mathbb{N}^*)$

Đặt $d = (n, n+1), (d \in \mathbb{N}^*)$

$$\Rightarrow \begin{cases} n : d \\ n+1 : d \end{cases} \Rightarrow n+1 - n : d \Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1.$$

Vậy n và $n+1$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 3: Chứng minh rằng: Hai số lẻ liên tiếp là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

Gọi 2 số lẻ liên tiếp là: $2k+1, 2k+3 (k \in \mathbb{N})$.

Đặt $(2k+1; 2k+3) = d (d \in \mathbb{N}^*)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2k+1;d \\ 2k+3;d \end{cases} \Rightarrow 2k+3 - 2k - 1 = 2;d$$

$$\Rightarrow d \in \{1;2\}$$

Mà d là ước số lẻ nên $d = 1$. Vậy hai số lẻ liên tiếp là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 4: Chứng minh rằng : $2n+1$ và $3n+1$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

$$(2n+1, 3n+1) = d (n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+1;d \\ 3n+1;d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(2n+1);d \\ 2(3n+1);d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n+3;d \\ 6n+2;d \end{cases} \Rightarrow 6n+3 - 6n - 2 = 1;d \Rightarrow d = 1$$

Vậy $2n+1$ và $3n+1$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 5 : Cho a và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng hai số sau là hai số nguyên tố cùng nhau: a và $a+b$.

Lời giải:

$$\text{Đặt } (a, a+b) = d (d \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a;d \\ a+b;d \end{cases} \Rightarrow b;d$$

Mà a và b là 2 số nguyên tố cùng nhau nên $d = 1$

Vậy a và $a+b$ là hai số nguyên tố cùng nhau. (ĐPCM)

Bài 6: Cho a và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng hai số sau là hai số nguyên tố cùng nhau: a^2 và $a+b$

Lời giải:

$$\text{Đặt } (a^2, a+b) = d (d \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2;d \\ a+b;d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a;d \\ a+b;d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a;d \\ b;d \end{cases}$$

Mà a và b là 2 số nguyên tố cùng nhau nên $d = 1$

Vậy a^2 và $a+b$ là hai số nguyên tố cùng nhau. (ĐPCM)

Bài 7: Cho a và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng hai số sau là hai số nguyên tố cùng nhau: ab và $a + b$.

Lời giải:

Đặt $(ab, a + b) = d (d \in \mathbb{N}^*)$

$$\Rightarrow \begin{cases} ab : d \\ a + b : d \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} a : d \\ b : d \\ a + b : d \end{array} \right.$$

+ TH1: $a : d \Rightarrow b : d$

Mà a và b là 2 số nguyên tố cùng nhau nên $\Rightarrow d = 1$

Vậy ab và $a + b$ là hai số nguyên tố cùng nhau. (ĐPCM)

+ TH2: $b : d \Rightarrow a : d$

Mà a và b là 2 số nguyên tố cùng nhau nên $\Rightarrow d = 1$

Vậy ab và $a + b$ là hai số nguyên tố cùng nhau. (ĐPCM)

Bài 8 : Cho a và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng hai số sau là hai số nguyên tố cùng nhau: b và $a - b (a > b)$.

Lời giải:

Đặt $(b, a - b) = d (d \in \mathbb{N}^*)$

$$\Rightarrow \begin{cases} ab : d \\ c : d \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} a : d \\ b : d \\ c : d \end{array} \right.$$

Mà a và b là 2 số nguyên tố cùng nhau nên $\Rightarrow d = 1$

Vậy b và $a - b$ là hai số nguyên tố cùng nhau. (ĐPCM)

Bài 9: Chứng minh rằng nếu c nguyên tố cùng với a và b thì c nguyên tố cùng nhau với tích ab

Lời giải:

Gọi P là ước chung nguyên tố của c và ab .

$$\Rightarrow \begin{cases} c : d \\ ab : d \end{cases}$$

+ TH1: $a \vdots d$

Mà a và c là 2 số nguyên tố cùng nhau nên $\Rightarrow d = 1$

Vậy ab và c là hai số nguyên tố cùng nhau. (ĐPCM)

+ TH2: $b \vdots d$

Mà c và b là 2 số nguyên tố cùng nhau nên $\Rightarrow d = 1$

Vậy ab và c là hai số nguyên tố cùng nhau. (ĐPCM)

Bài 10: Tìm số tự nhiên n để các số $9n + 24$ và $3n + 4$ là các số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

Giả sử $9n + 24$ và $3n + 4$ cùng chia hết cho số nguyên tố d thì

$$9n + 24 - 3(3n + 4) : d \Rightarrow 12 : d \Rightarrow d \in \{ 2, 3 \}.$$

Điều kiện để $(9n + 24; 3n + 4) = 1$ là $d \neq 2; d \neq 3$. Hiển nhiên $d \neq 3$ vì $3n + 4$ không chia hết cho 3. Muốn $d \neq 2$ phải có ít nhất một trong 2 số $9n + 24$ và $3n + 4$ không chia hết cho 2. Ta thấy:

+ Nếu $9n + 24$ là số lẻ $\Leftrightarrow 9n$ lẻ $\Leftrightarrow n$ lẻ,

+ Nếu $3n + 4$ là số lẻ $\Leftrightarrow 3n$ lẻ $\Leftrightarrow n$ lẻ.

Vậy điều kiện để hai số $9n + 24$ và $3n + 4$ là các số nguyên tố cùng nhau là n lẻ.

Bài 11: Tìm số tự nhiên n để các số $18n + 3$ và $21n + 7$ là các số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

Giả sử $18n + 3$ và $21n + 7$ cùng chia hết cho số nguyên tố d thì

$$6(21n + 7) - 7(18n + 3) : d \Rightarrow 21 : d \Rightarrow d \in \{ 1; 3; 7; 21 \}.$$

Điều kiện để $(18n + 3; 21n + 7) = 1$ là $d \neq 3; d \neq 7; d \neq 21$. Hiển nhiên $d \neq 3; d \neq 21$ vì $21n + 7$ không chia hết cho 3. Muốn $d \neq 7$ thì số $18n + 3$ không chia hết cho 7 (vì $21n + 7$ luôn chia hết cho 7)

$$18n + 3 : 7 \Leftrightarrow 18n + 3 - 21 : 7 \Leftrightarrow 18(n - 1) : 7 \Leftrightarrow n - 1 : 7.$$

Vậy điều kiện để hai số $18n + 3$ và $21n + 7$ là các số nguyên tố cùng nhau là $n \neq 7k + 1, (k \in \mathbb{N}^*)$.

Bài 12: Chứng minh rằng hai số $2n + 5$ và $4n + 12$ là các số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên n .

Lời giải:

Gọi $d = (2n+5; 4n+12)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+5;d \\ 4n+12;d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(2n+5);d \\ 4n+12;d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4n+10;d \\ 4n+12;d \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4n+12 - 4n - 10; d$$

$$\Rightarrow 2; d$$

Mà $2n+5$ là số lẻ nên $d=1$

Vậy hai số $2n+5$ và $4n+12$ là các số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên n .

Bài 13: Chứng minh rằng hai số $12n+1$ và $30n+2$ là các số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên n .

Lời giải:

Gọi $d = (12n+1; 30n+2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12n+1;d \\ 30n+2;d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5(12n+1);d \\ 2(30n+2);d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 60n+5;d \\ 60n+4;d \end{cases}$$

$$\Rightarrow 60n+5 - 60n - 4; d$$

$$\Rightarrow 1; d$$

$$\Rightarrow d=1$$

Vậy hai số $12n+1$ và $30n+2$ là các số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên n .

Bài 14: Chứng minh rằng hai số $2n+3$ và $4n+8$ là các số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên n .

Lời giải:

Gọi $d = (2n+3; 4n+8)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+3:d \\ 4n+8:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(2n+3):d \\ 4n+8:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4n+6:d \\ 4n+8:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4n+8 - 4n - 6 :d$$

$$\Rightarrow 2:d$$

$$\Rightarrow d=1$$

Vì $2n+3$ là số lẻ.

Vậy hai số $2n+3$ và $4n+8$ là các số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên n .

Bài 15: Chứng minh rằng hai số $3n+2$ và $5n+3$ là các số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên n .

Lời giải:

Gọi $d = (3n+2; 5n+3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n+2:d \\ 5n+3:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5(3n+2):d \\ 3(5n+3):d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 15n+10:d \\ 15n+9:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow 15n+10 - 15n - 9 :d$$

$$\Rightarrow 1:d$$

$$\Rightarrow d=1$$

Vậy hai số $3n+2$ và $5n+3$ là các số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên n .

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

Bài 1: Tìm số tự nhiên n để $A = n^{2018} + n^{2002} + 1$ là số nguyên tố.

(HSG Tỉnh Quảng Ngãi 2015 – 2016).

Lời giải:

Xét $n=0$ thì $A=1$ không phải là số nguyên tố

Xét $n=1$ thì $A=3$ là số nguyên tố.

Xét $n>1$: $A=n^{2018}-n^2+n^{2002}-n+n^2+n+1$

$$=n^2\left((n^3)^{672}-1\right)+n\left((n^3)^{667}-1\right)+(n^2+n+1)$$

Mà $(n^3)^{672}-1$ chia hết cho n^3-1 , suy ra $(n^3)^{672}-1$ chia hết cho n^2+n+1 .

Tương tự: $(n^3)^{667}-1$ chia hết cho n^2+n+1 .

Vậy A chia hết cho $n^2+n+1>1$ nên A là hợp số. Số tự nhiên cần tìm $n=1$.

Bài 2 : Tìm các số nguyên tố p để p^2+2^p cũng là số nguyên tố.
(HSG Thành phố Hà Nội 2016 – 2017).

Lời giải:

Nếu $p=2$ thì $p^2+2^p=4+4=8$ (không thỏa mãn).

Nếu $p=3$ thì $p^2+2^p=9+8=17$ (thỏa mãn).

Nếu $p\geq 3$ thì $p^2+2^p=(p^2-1)+(2^p+1):3$.

Kết luận $p=3$ là giá trị cần tìm.

Bài 3: Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p; q)$ thỏa mãn $p^2-5q^2=4$.
(Chuyên Vũng Tàu 2016 – 2017).

Lời giải:

$$p^2-5q^2=4 \Leftrightarrow p^2-4=5q^2 \Leftrightarrow (p-2)(p+2)=5q^2$$

Do $0 < p-2 < p+2$ và q nguyên tố nên $p-2$ chỉ có thể nhận các giá trị $1; 5; q; q^2$.

Ta có bảng giá trị tương ứng:

$p-2$	$p+2$	p	q
1	$5q^2$	3	1
5	q^2	7	3
q	$5q$	3	1
q^2	5	3	1

Do p, q là các số nguyên tố nên chỉ có cặp $(p; q) = (7; 3)$ thỏa mãn.

Bài 4: Tìm tất cả các số tự nhiên N (theo hệ thập phân) thỏa mãn các điều kiện sau: $N = \overline{aabb}$, trong đó $\overline{abb}$ và $\overline{aab}$ là số nguyên tố.

Lời giải:

Do $\overline{aab}$ là số nguyên tố, tức là $110a+b$ là số nguyên tố ta có $b=1, 3, 7$ hoặc 9.

Từ điều kiện thứ nhất ta có: $N = 11(100a + b)$.

Theo bảng số nguyên tố ta tìm được các cặp số nguyên tố $\overline{abb}$ và $\overline{aab}$ thỏa mãn điều kiện thứ nhất sau đây: $(223; 233)$, $(227; 277)$, $(331; 311)$, $(443; 433)$, $(449; 499)$, $(557; 577)$, $(773; 733)$, $(881; 811)$, $(887; 877)$, $(991; 911)$, $(997; 977)$.

Tương ứng với $100a + b$ là các số sau: $203 = 2.29$; $207 = 9.23$; $301 = 7.43$; $403 = 13.31$; 409 là số nguyên tố; $507 = 3.13^2$; $703 = 19.37$; $801 = 3^2.89$; $807 = 2.269$; $901 = 17.53$; 907 là số nguyên tố.

Vậy $N = 8877 = 3.11.269$

Bài 5: Tìm số tự nhiên p sao cho p và $p+3$ đều là số nguyên tố.

Lời giải:

Một số tự nhiên bất kì có 1 trong hai dạng: $2n; 2n+1$ với $n \in \mathbb{N}$. Nếu $p = 2n+1$ thì $p+3 = 2n+4$ chia hết cho 2.

Ta có $p+3 > 3$ và $p+3$ chia hết cho 2. Nên $p+3$ là hợp số trái đề bài.

Do đó: $p = 2n$. Nhưng p nguyên tố nên $p = 2$ và $p+3 = 5$ nguyên tố.

Vậy $p = 2$.

Bài 6: Tìm số nguyên tố p sao cho $p+4$ và $p+8$ đều là số nguyên tố.

Lời giải:

Bất kì số tự nhiên nào cũng có một trong ba dạng: $3n; 3n+1; 3n+2; n \in \mathbb{N}$. Nếu $p = 3n$ thì $p+8 = 3n+8$, vô lí.

Nếu $p = 3n+2$ thì $p+4 = 3n+6$, vô lí. Do đó $p = 3n+1$.

Nhưng p nguyên tố nên $p = 3$; $p+4 = 7$; $p+8 = 11$ nguyên tố. Vậy $p = 3$.

Bài 7: Tìm các số nguyên tố x, y, Z thỏa mãn $x^y + 1 = Z$

Lời giải:

Vì x, y là các số nguyên tố

$\Rightarrow x \geq 2, y \geq 2$

$\Rightarrow Z \geq 5 \Rightarrow Z$ là số nguyên tố lẻ

$\Rightarrow x^y$ là số chẵn $\Rightarrow x$ chẵn

$\Rightarrow x = 2$ thay vào ta có

$Z = 2^y + 1$

Nếu y lẻ $\Rightarrow 2^y + 1 \equiv 3 \pmod{3}$ ($2^y + 1 \equiv 3 \pmod{3}$ là số chia hết cho 3)

$\Rightarrow Z \equiv 3 \pmod{3}$ vô lí

Do đó y là số chẵn $\Rightarrow y = 2$

Thay $x = 2, y = 2 \Rightarrow Z = 5$

Vậy $x=2, y=2 \Rightarrow Z=5$

Bài 8: Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ để $n^4 + 4$ là số nguyên tố

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{a) } n^4 + 4 &= n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 \\ &= (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 \\ &= (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) \end{aligned}$$

Để $n^4 + 4$ là số nguyên tố thì $2n^2 - 2n + 2 = 1 \Rightarrow n = 1$

Thử lại với $n = 1$ thì $n^4 + 4 = 5$ là số nguyên tố.

Vậy với $n = 1$ thì $n^4 + 4$ là số nguyên tố.

Bài 9: Tìm số nguyên tố p sao cho $p + 2$ và $p + 4$ là các số nguyên tố (trích đề thi HSG Quảng Trạch)

Lời giải:

Với $p = 3$ thì $p + 2 = 5$ và $p + 4 = 7$ là các số nguyên tố

Với $p > 3$ thì $p = 3k \pm 1$

Nếu $p = 3k + 1$ thì $p + 2 = 3k + 3 \vdots 3$

Nếu $p = 3k - 1$ thì $p + 4 = 3k + 3 \vdots 3$

Vậy $p = 3$ thì $p + 2$ và $p + 4$ là các số nguyên tố.

Bài 10: Tìm các số tự nhiên n để $n^2 + 12n$ là số nguyên tố. (trích đề thi HSG Thanh Oai)

Lời giải:

Ta có $n^2 + 12n = n(n + 12)$

Vì $n + 12 > 1$ nên để $n^2 + 12n$ là số nguyên tố thì $n = 1$

Thử lại $n^2 + 12n = 1^2 + 12 \cdot 1 = 13$ là số nguyên tố

Vậy với $n = 1$ thì $n^2 + 12n$ là số nguyên tố

Bài 11: Chứng minh rằng nếu p và $p^2 + 2$ là các số nguyên tố thì $p^3 + 2$ cũng là số nguyên tố. (trích đề thi HSG Nga Sơn)

Lời giải:

Với mọi số nguyên tố lớn hơn 3 thì chia hết cho 3 đều có dạng $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2 (k \in \mathbb{N}^*)$

Với $p = 3k + 1$ thì $p^2 + 2 = 9k^2 + 6k + 3$ chia hết cho 3

Với $p = 3k + 2$ thì $p^2 + 2 = 9k^2 + 12k + 6$ chia hết cho 3

Vì p là số nguyên tố nên $p \geq 2$ khi đó trong cả hai trường hợp trên thì $p^2 + 2$ đều lớn hơn 3 và chia hết cho 3, tức là $p^2 + 2$ là hợp số

$\Rightarrow p^2 + 2$ chỉ là hợp số khi $p = 3$ khi đó $p^2 + 2 = 11$ là số nguyên tố

$\Rightarrow p^3 + 2 = 3^3 + 2 = 29$ là số nguyên tố

Vậy nếu p và $p^2 + 2$ là các số nguyên tố thì $p^3 + 2$ cũng là số nguyên tố.

Bài 12: Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$ là số nguyên tố hay hợp số? vì sao? (trích đề thi HSG Nam Trực)

Lời giải:

$$A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100} = (3 + 3^2) + (3^3 + 3^4) + \dots + (3^{99} + 3^{100})$$

$$= 3(1 + 3) + 3^3(1 + 3) + \dots + 3^{99}(1 + 3)$$

$$= 3.4 + 3^3.4 + \dots + 3^{99}.4 = 4(3 + 3^3 + \dots + 3^{99}) : 4$$

Mà $A > 4$

Nên $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$ là hợp số

Bài 13: Cho n là số nguyên tố. Hỏi $n^{10} - 1$ là số nguyên tố hay hợp số? (trích đề thi HSG Bá Thước)

Lời giải:

Ta có n là số nguyên tố suy ra n chia 2 dư 1

$\Rightarrow n^{10}$ chia 2 dư 1

$\Rightarrow n^{10} - 1$ chia hết cho 2

Vậy $n^{10} - 1$ là hợp số

Bài 14: Tìm số tự nhiên n sao cho $p = (n - 2)(n^2 + n - 5)$ là số nguyên tố. (Trích đề thi HSG Hiệp Hòa)

Lời giải:

Vì $p = (n - 2)(n^2 + n - 5)$ nên $n - 2$ và $n^2 + n - 5 \in U(p)$

Vì p là số nguyên tố nên $n - 2 = 1$ hoặc $n^2 + n - 5 = 1$

+ Nếu $n - 2 = 1 \Rightarrow n = 3$ thì $p = (3 - 2)(3^2 + 3 - 5) = 1 \cdot 7 = 7$ (thỏa)

+ Nếu $n^2 + n - 5 = 1 \Rightarrow n^2 + n = 6 \Rightarrow n(n + 1) = 6 = 2 \cdot 3 \Rightarrow n = 2$

thì $p = (2 - 2)(2^2 + 2 - 5) = 0$ không phải là số nguyên tố, loại

Vậy $n = 3$ thì $p = (n - 2)(n^2 + n - 5)$ là số nguyên tố.

Bài 15: Tìm các số tự nhiên n để $3^n + 6$ là số nguyên tố. (trích đề thi HSG Hưng Hà).

Lời giải:

Với $n = 0$ ta có $3^n + 6 = 3^0 + 6 = 7$ là số nguyên tố.

Với $n \neq 0$ ta có $3^n \vdots 3, 6 \vdots 3$ nên $3^n + 6 \vdots 3$ mà $3^n + 6 > 3$ do đó $3^n + 6$ là hợp số

Vậy $n = 0$ thì $3^n + 6$ là số nguyên tố.

! HẾT !

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>