

Bài 3. DẤU TAM THỨC BẬC HAI

| Fanpage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Dấu của tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0), \Delta = b^2 - 4ac$.

+ Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$.

+ Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$. Khi đó:

$f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi x thuộc các khoảng $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$; $f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi x thuộc khoảng $(x_1; x_2)$.

Nhận xét: Trong định lí, có thể thay biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ bằng biệt thức thu gọn $\Delta' = (b')^2 - ac$ với $b = 2b'$.

II. Ví dụ

Ví dụ 1. Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau:

1 Xét dấu của mỗi tam thức

a) $f(x) = 3x^2 - x + 1$

b) $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$

Giải

a) Tam thức bậc hai $f(x) = 3x^2 - x + 1$ có $\Delta = -11 < 0$, hệ số $a = 3 > 0$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Tam thức bậc hai $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$ có $\Delta = 0$, nghiệm kép $x_0 = -\frac{1}{2}$ và hệ số $a = 4 > 0$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.

Ví dụ 2. Lập bảng xét dấu của $f(x) = x^2 - 3x + 2$ tam thức bậc hai:

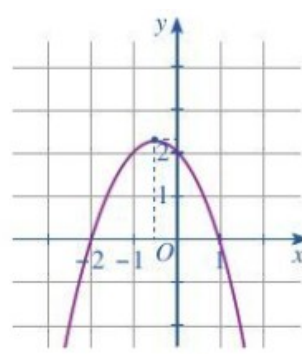
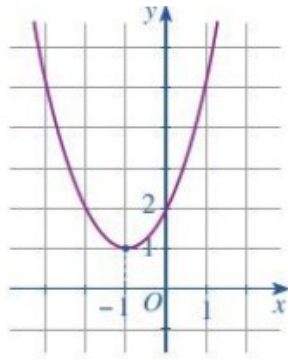
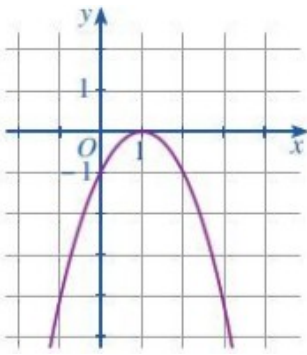
Giải

Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 3x + 2$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1, x_2 = 2$ và hệ số $a = 1 > 0$.

Ta có bảng xét dấu $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

Ví dụ 3. Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)$ ứng với đồ thị hàm số $y = f(x)$ được cho ở mỗi a), b), c).



a)

b)

c)

Giải

a) Từ đồ thị Hình a) ta có nghiệm của tam thức bậc hai $f(x)$ là $x=1$. Bảng xét dấu tam thức $f(x)$ là:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

b) Từ đồ thị Hình b) ta có tam thức bậc hai $f(x)$ vô nghiệm. Bảng xét dấu tam thức $f(x)$ là:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	+	

c) Từ đồ thị Hình c) ta có tam thức bậc hai $f(x)$ có hai nghiệm là $x_1 = -2, x_2 = 1$. Bảng xét dấu tam thức $f(x)$ là

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Ví dụ 4. Để xây dựng phương án kinh doanh cho một loại sản phẩm, doanh nghiệp tính toán lợi nhuận y (đồng) theo công thức sau: $y = -200x^2 + 92000x - 8400000$, trong đó x là số sản phẩm được bán ra. Dựa theo số sản phẩm bán ra, cho biết doanh nghiệp có lãi khi nào, bị lỗ khi nào.

Giải

Xét tam thức bậc hai $f(x) = -200x^2 + 92000x - 8400000$.

Nhận thấy $f(x)$ có hai nghiệm là $x_1 = \frac{-460 + \sqrt{43600}}{-2} \approx 125,6; x_2 = \frac{-460 - \sqrt{43600}}{-2} \approx 334,4$ và hệ số $a = -200 < 0$. Ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

Vì x là số nguyên dương nên:

+) Doanh nghiệp có lãi khi và chỉ khi $f(x) > 0$, tức là $126 \leq x \leq 334$.

+) Doanh nghiệp bị lỗ khi và chỉ khi $f(x) < 0$, tức là $x \leq 125$ hoặc $x \geq 335$.

Vậy doanh nghiệp có lãi khi bán từ 126 đến 334 sản phẩm, doanh nghiệp bị lỗ khi bán tối đa 125 sản phẩm hoặc bán tối thiểu 335 sản phẩm.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng. Dấu của tam thức bậc hai

Phương pháp: Dựa vào định lý về dấu của tam thức bậc hai để xét dấu của biểu thức chứa nó.

-Đối với đa thức bậc cao $P(x)$ ta làm như sau:

1) Phân tích đa thức $P(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất).

2) Lập bảng xét dấu của $P(x)$. Từ đó suy ra dấu của nó.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$

-Đối với phân thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (trong đó $P(x), Q(x)$ là các đa thức) ta làm như sau

1) Phân tích đa thức $P(x), Q(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất).

2) Lập bảng xét dấu của $P(x)$ và $Q(x)$. Từ đó suy ra dấu của $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Câu 1. Xét dấu của các tam thức sau

a) $3x^2 - 2x + 1$.

b) $-x^2 + 4x + 5$.

Lời giải.

a) Ta có $\Delta' = -2 < 0$ và $a = 3 > 0$. Suy ra $3x^2 - 2x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Ta có $-x^2 + 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$	
$-x^2 + 4x + 5$	$-$	0	$+$	0	$-$

Suy ra $-x^2 + 4x + 5 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 5)$ và $-x^2 + 4x + 5 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

Câu 2. Xét dấu của các biểu thức sau

a) $x^3 - 5x + 2$.

b) $x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4}$.

Lời giải.

a) Ta có $x^3 - 5x + 2 = (x - 2)(x^2 + 2x - 1)$.

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{2}$	$-1 + \sqrt{2}$	2	$+\infty$
$x - 2$	$-$	$ $	$-$	$ $	$+$
$x^2 + 2x - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$
$x^3 - 5x + 2$	$-$	0	$+$	0	$+$

Suy ra $x^3 - 5x + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}) \cup (2; +\infty)$;

$x^3 - 5x + 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}; 2)$.

b) Ta có $x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4} = \frac{-x^3 + 2x^2 + 5x + 6}{-x^2 + 3x + 4} = \frac{(x - 1)(-x^2 + x + 6)}{-x^2 + 3x + 4}$.

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $-x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$; $-x^2 + 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	-1	1	3	4	$+\infty$				
$x-1$	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
$-x^2+x+6$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$-$
$-x^2+3x+4$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	0	$-$
$x-\frac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$

Suy ra $x - \frac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4} < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (3; 4)$

$x - \frac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4} > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; -1) \cup (1; 3) \cup (4; +\infty)$

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng. Dấu của tam thức bậc hai

Phương pháp: Dựa vào định lý về dấu của tam thức bậc hai để xét dấu của biểu thức chứa nó.

-Đối với đa thức bậc cao $P(x)$ ta làm như sau:

1) Phân tích đa thức $P(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất).

2) Lập bảng xét dấu của $P(x)$. Từ đó suy ra dấu của nó.

-Đối với phân thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (trong đó $P(x), Q(x)$ là các đa thức) ta làm như sau

1) Phân tích đa thức $P(x), Q(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất).

2) Lập bảng xét dấu của $P(x)$ và $Q(x)$. Từ đó suy ra dấu của $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Câu 1. Cho tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), $\Delta = b^2 - 4ac$. Ta có $f(x) \leq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

- A. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a \leq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai ta có: $f(x) \leq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

Câu 2. Cho tam thức bậc hai $f(x) = -2x^2 + 8x - 8$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $f(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. B. $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
C. $f(x) \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. D. $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = -2(x^2 - 4x + 4) = -2(x - 2)^2 \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy: $f(x) \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 3. Tam thức nào dưới đây luôn dương với mọi giá trị của x ?

- A. $x^2 - 10x + 2$. B. $x^2 - 2x - 10$. C. $x^2 - 2x + 10$. D. $-x^2 + 2x + 10$.

Lời giải

Chọn C.

Tam thức luôn dương với mọi giá trị của x phải có $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ nên Chọn C.

Câu 4. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A. $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ là tam thức bậc hai. B. $f(x) = 2x - 4$ là tam thức bậc hai.
C. $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ là tam thức bậc hai. D. $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ là tam thức bậc hai.

Lời giải

Chọn A.

* Theo định nghĩa tam thức bậc hai thì $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ là tam thức bậc hai.

Câu 5. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) và $\Delta = b^2 - 4ac$. Cho biết dấu của Δ khi $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

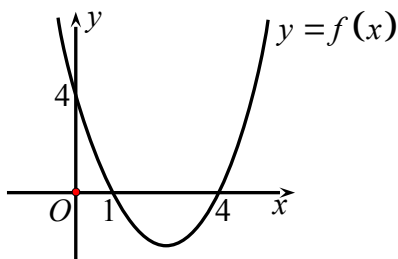
- A. $\Delta < 0$. B. $\Delta = 0$. C. $\Delta > 0$. D. $\Delta \geq 0$.

Lời giải

Chọn A.

* Theo định lý về dấu của tam thức bậc hai thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi $\Delta < 0$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$, tìm dấu của a và Δ .



- A. $a > 0$, $\Delta > 0$. B. $a < 0$, $\Delta > 0$. C. $a > 0$, $\Delta = 0$. D. $a < 0$, $\Delta = 0$.

Lời giải

Chọn A.

* Đồ thị hàm số là một Parabol quay lên nên $a > 0$ và đồ thị hàm số cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt nên $\Delta > 0$.

Câu 7. Cho tam thức $f(x) = x^2 - 8x + 16$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm. B. $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
C. $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. D. $f(x) < 0$ khi $x < 4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$. Suy ra $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 8. Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; +\infty)$

B. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

C. $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1)$

D. $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 1)$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) = x^2 + 1 \geq 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 9. Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a , với mọi $x \in \mathbb{R}$.

B. Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ luôn trái dấu với hệ số a , với mọi $x \in \mathbb{R}$.

C. Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a , với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$.

D. Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số b , với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C