

ĐỀ KIỂM TRA HỌC SINH GIỎI

Năm học 2015-2016

Bài 1. (6 điểm) Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{2x-3}{4x^2-12x+5} + \frac{2x-8}{13x-2x^2-20} - \frac{3}{2x-1} \right) : \frac{21+2x-8x^2}{4x^2+4x-3} + 1$$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P khi $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên

d) Tìm x để $P > 0$

Bài 2. (3 điểm) Giải phương trình:

a) $\frac{15x}{x^2+3x-4} - 1 = 12 \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3} \right)$

b) $\frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$

c) $||x-2|+3|=5$

Bài 3. (2 điểm) Giải bài toán bằng cách lập phương trình:

Một người đi xe gắn máy từ A đến B dự định mất 3 giờ 20 phút. Nếu người ấy tăng vận tốc thêm 5 km/h thì sẽ đến B sớm hơn 20 phút. Tính khoảng cách AB và vận tốc dự định đi của người đó.

Bài 4. (7 điểm)

Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên đường chéo BD lấy điểm P , gọi M là điểm đối xứng của C qua P .

a) Tứ giác $AMDB$ là hình gì ?

b) Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB , AD . Chứng minh $EF \parallel AC$ và ba điểm E, F, P thẳng hàng

c) Chứng minh rằng tỉ số các cạnh của hình chữ nhật $MEAF$ không phụ thuộc vào vị trí điểm P

d) Giả sử $CP \perp BD$ và $CP = 2,4 \text{ cm}, \frac{PD}{PB} = \frac{9}{16}$. Tính các cạnh của hình chữ nhật $ABCD$.

Bài 5. (2 điểm) a) Chứng minh rằng: $2009^{2008} + 2011^{2010}$ chia hết cho 2010

b) Cho x, y, z là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

ĐKXĐ: $x \neq \frac{1}{2}; x \neq \frac{5}{2}; x \neq \frac{-3}{2}; x \neq \frac{7}{4}; x \neq 4$

a) Rút gọn $P = \frac{2x-3}{2x-5}$

$$|x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

b)

$$+) x = \frac{1}{2} \Rightarrow \dots P = \frac{1}{2} \quad ; +) x = \frac{-1}{2} \Rightarrow \dots P = \frac{2}{3}$$

c) $P = \frac{2x-3}{2x-5} = 1 + \frac{2}{x-5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-5 \in U(2) = \{-2; -1; 1; 2\}$

$$x-5 = -2 \Rightarrow x = 3(tm)$$

$$x-5 = -1 \Rightarrow x = 4(ktm)$$

$$x-5 = 1 \Rightarrow x = 6(tm)$$

$$x-5 = 2 \Rightarrow x = 7(tm)$$

Kết luận: $x \in \{3; 6; 7\}$ thì P nhận giá trị nguyên

d) $P = \frac{2x-3}{2x-5} = 1 + \frac{2}{x-5}$

Ta có: $1 > 0$

$$\text{Để } P > 0 \text{ thì } \frac{2}{x-5} > 0 \Rightarrow x-5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$$

Với $x > 5$ thì $P > 0$

Bài 2.

a)

$$\frac{15x}{x^2 + 3x - 4} - 1 = 12 \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{15x}{(x+4)(x-1)} - 1 = 12 \cdot \left[\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3(x-1)} \right] \quad DK : x \neq -4; x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow 3.15x - 3(x+4)(x-1) = 3.12(x-1) + 12(x+4)$$

.....

$$\Leftrightarrow 3x(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ x+4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (TM)} \\ x = -4 \text{ (KTM)} \end{cases}$$

$$S = \{0\}$$

b)

$$\frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{148-x}{25} - 1 \right) + \left(\frac{169-x}{23} - 2 \right) + \left(\frac{186-x}{21} - 3 \right) + \left(\frac{199-x}{19} - 4 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (123-x) \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} + \frac{1}{19} \right) = 0 \Leftrightarrow 123-x = 0 \Leftrightarrow x = 123$$

$$S = \{123\}$$

c) $|x-2|+3=5$

Ta có: $|x-2| \geq 0 \forall x \Rightarrow |x-2|+3 > 0$ nên $||x-2|+3| = |x-2|+3$

Phương trình được viết dưới dạng:

$$|x-2|+3=5 \Leftrightarrow |x-2|=5-3 \Leftrightarrow |x-2|=2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=2 \\ x-2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=0 \end{cases}$$

Vậy $S = \{0; 4\}$

Bài 3.

Gọi khoảng cách giữa A và B là $x(km)$ ($x > 0$)

$$\frac{x}{3\frac{1}{3}} = \frac{3x}{10} (km/h) \quad 3h20' = 3\frac{1}{3}(h)$$

Vận tốc dự định của người đi xe gắn máy là:

Vận tốc của người đi xe gắn máy khi tăng lên $5km/h$ là: $\frac{3x}{10} + 5(km/h)$

Theo đề bài ta có phương trình:
 Vậy khoảng cách giữa A và B là $150km$

Vận tốc dự định là: $\frac{3.150}{10} = 45 (km / h)$

- b) Do $AM \parallel BD$ nên $\angle BAE = \angle MAE$ (đồng vị)

Gọi I là giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật AEMF thì $\triangle AIE$ cân ở I nên $\widehat{FAE} = \widehat{FEA}$

Mặt khác IP là đường trung bình của ΔMAC nên $IP // AC$ (2)

c) $\Delta MAF \sim \Delta DBA(g.g) \Rightarrow \frac{MF}{FA} = \frac{AD}{AB}$ Không đổi

d) Nếu $\frac{PD}{PB} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{PD}{9} = \frac{PB}{16} = k \Rightarrow PD = 9k, PB = 16k$

Nếu $CP \perp BD$ thì $\Delta CBD \sim \Delta DCP(g.g) \Rightarrow \frac{CP}{PD} = \frac{PB}{CP}$

Do đó: $CP^2 = PB.PD$ hay $(2,4)^2 = 9.16k^2 \Rightarrow k = 0,2$

$$PD = 9k = 1,8(cm); \quad PB = 16k = 3,2(cm) \quad BD = 5(cm)$$

Chứng minh $BC^2 = BP.BD = 16$, do đó: $BC = 4cm$, $CD = 3cm$.

Bài 5.

a) Ta có: $2009^{2008} + 2011^{2010} = (2009^{2008} + 1) + (2011^{2010} - 1)$

Vì $2009^{2008} + 1 = (2009 + 1)(2009^{2007} - \dots) = 2010.(.....)$ chia hết cho 2010 (1)

Vì $2011^{2010} - 1 = (2011 - 1)(2011^{2009} + \dots) = 2010.(.....)$ chia hết cho 2010 (2)

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

b) $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$ (1)

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+xy} \right) + \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+xy} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2.(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \geq 0 \quad (2)$$

Vì $x \geq 1; y \geq 1 \Rightarrow xy \geq 1 \Rightarrow xy - 1 \geq 0$

$\Rightarrow$ BĐT (2) đúng nên BĐT (1) đúng. Dấu “=” xảy ra khi $x = y$