

## CHUẨN HÓA BA BỘ SBT TOÁN 10

|                                                     |     |
|-----------------------------------------------------|-----|
| 001 -3 0D1 - MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP - CDIEU               | 2   |
| 002 -4 0D1 - MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP - CTST                | 26  |
| 003 -3 0D1 - MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP - KNTT                | 49  |
| 004 -3 0D2 - BPT, HỆ BPT BẬC NHẤT HAI ẨN - CDIEU    | 69  |
| 005 -3 0D2 - BPT, HỆ BPT BẬC NHẤT HAI ẨN - CTST     | 90  |
| 006 -3 0D2 - BPT, HỆ BPT BẬC NHẤT HAI ẨN - KNTT     | 111 |
| 007 -6 0D3,4 - HÀM SỐ BẬC HAI - BPT BẬC HAI - CDIEU | 132 |
| 008 -5 0D3,4 - HÀM SỐ BẬC HAI - BPT BẬC HAI - KNTT  | 179 |
| 009 -3 0D3 - HÀM SỐ BẬC HAI - CTST                  | 226 |
| 010 -4 0D4 - BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI - CTST        | 250 |
| 011 -5 0D4 - THỐNG KÊ - CTST                        | 292 |
| 012 -6 0D5,7 - THỐNG KÊ, XÁC SUẤT - CDIEU           | 321 |
| 013 -4 0D5 - THÔNG KÊ - KNTT                        | 355 |
| 014 -5 0D6 - TỔ HỢP - CDIEU                         | 375 |
| 015 -4 0D6 - TỔ HỢP - CTST                          | 399 |
| 016 -4 0D6 - TỔ HỢP - KNTT                          | 423 |
| 017 -3 0D7 - XÁC SUẤT - CTST                        | 449 |
| 018 -3 0D7 - XÁC SUẤT - KNTT                        | 467 |
| 019 -7 0H1,2 - HỆ THỨC LƯỢNG, VECTO - CDIEU         | 488 |
| 020 -4 0H1 - HỆ THỨC LƯỢNG - CTST                   | 561 |
| 021 -3 0H1 - HỆ THỨC LƯỢNG - KNTT                   | 589 |
| 022 -5 0H2 - VECTO - CTST                           | 618 |
| 023 -6 0H2 - VECTO - KNTT                           | 649 |
| 024 -7 0H3 - PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ - CDIEU             | 709 |
| 025 -5 0H3 - PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ - CTST              | 766 |
| 026 -5 0H3 - PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ - KNTT              | 812 |

a) Mệnh đề phủ định của mệnh đề  $A$  là  $\overline{A}$ : “ $\frac{1,2}{5}$  không là một phân số”. Mệnh đề  $\overline{A}$  đúng, vì 1,2 không là số nguyên.

b) Mệnh đề phủ định của mệnh đề  $B$  là  $\overline{B}$ : “Phương trình  $x^2 + 3x + 2 = 0$  không có nghiệm”. Mệnh đề  $\overline{B}$  sai, vì phương trình  $x^2 + 3x + 2 = 0$  có hai nghiệm là  $x = -1$ ,  $x = -2$ .

c) Mệnh đề phủ định của mệnh đề  $C$  là  $\overline{C}$ : “ $2^2 + 2^3 \neq 2^{2+3}$ ”. Mệnh đề  $\overline{C}$  đúng, vì  $2^2 + 2^3 = 12$  và  $2^{2+3} = 32$ .

d) Mệnh đề phủ định của mệnh đề  $D$  là  $\overline{D}$ : “Số 2 025 không chia hết cho 15”. Mệnh đề  $\overline{D}$  sai, vì 2 025 chia hết cho 15.

**Ví dụ 2:** Cho  $n$  là số tự nhiên. Xét các mệnh đề:

$P$ : “ $n$  là một số tự nhiên chia hết cho 16”,

$Q$ : “ $n$  là một số tự nhiên chia hết cho 8”.

a) Phát biểu mệnh đề  $P \Rightarrow Q$ . Nhận xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề  $P \Rightarrow Q$ . Nhận xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Mệnh đề  $P \Rightarrow Q$ : “Nếu số tự nhiên  $n$  chia hết cho 16 thì  $n$  chia hết cho 8”. Đây là mệnh đề đúng vì 8 là ước của 16.

b) Mệnh đề đảo của mệnh đề  $P \Rightarrow Q$  là mệnh đề  $Q \Rightarrow P$ : “Nếu số tự nhiên  $n$  chia hết cho 8 thì  $n$  chia hết cho 16”. Đây là mệnh đề sai vì với  $n = 8$ ,  $n$  chia hết cho 8 nhưng không chia hết cho 16.

**Ví dụ 3:** Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định đó:

a)  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 2x - 2$ ;

b)  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2x - 1$ ;

c)  $\exists x \in \mathbb{R}, x + \frac{1}{x} \geq 2$ ;

d)  $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

### Lời giải

#### Chọn C

**Câu 3.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Xét mệnh đề “Nếu tứ giác  $ABCD$  là hình chữ nhật thì tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo bằng nhau”. Mệnh đề đảo của mệnh đề đó là:

- A. “Nếu tứ giác  $ABCD$  là hình chữ nhật thì tứ giác  $ABCD$  không có hai đường chéo bằng nhau”.
- B. “Nếu tứ giác  $ABCD$  không có hai đường chéo bằng nhau thì tứ giác  $ABCD$  không là hình chữ nhật”.
- C. “Nếu tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo bằng nhau thì tứ giác  $ABCD$  không là hình chữ nhật”.
- D. “Nếu tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo bằng nhau thì tứ giác  $ABCD$  là hình chữ nhật”.

### Lời giải

#### Chọn D

**Câu 4.** Phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$ ” là mệnh đề

- A. “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \geq 0$ ”.
- B. “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$ ”.
- C. “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$ ”.
- D. “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \geq 0$ ”.

### Lời giải

#### Chọn A

**Câu 5.** Phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in \mathbb{Q}, x = \frac{1}{x}$ ” là mệnh đề

- A. “ $\exists x \in \mathbb{Q}, x \neq \frac{1}{x}$ ”.
- B. “ $\forall x \in \mathbb{Q}, x = \frac{1}{x}$ ”.
- C. “ $\forall x \notin \mathbb{Q}, x \neq \frac{1}{x}$ ”.
- D. “ $\forall x \in \mathbb{Q}, x \neq \frac{1}{x}$ ”.

### Lời giải

#### Chọn D

**Câu 6.** Phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ ” là mệnh đề

- A. “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ ”.
- B. “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ ”.
- C. “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$ ”.
- D. “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ ”.

### Lời giải

#### Chọn D

**Câu 7.** Phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$ ” là mệnh đề

- A. “ $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < x$ ”.
- B. “ $\exists x \in \mathbb{R}, |x| \leq x$ ”.
- C. “ $\exists x \in \mathbb{R}, |x| < x$ ”.
- D. “ $\exists x \in \mathbb{R}, |x| > x$ ”.

### Lời giải

#### Chọn C

## Lời giải

### Chọn

- a)  $\overline{A}$ : "Trục đối xứng của đồ thị hàm số  $y = -x^2$  không là trục tung". Mệnh đề phủ định sai
- b)  $\overline{B}$ : "Phương trình  $3x^2 + 1 = 0$  vô nghiệm". Mệnh đề phủ định đúng.
- c)  $\overline{C}$ : "Hai đường thẳng  $y = 2x + 1$  và  $y = -2x + 1$  song song với nhau". Mệnh đề phủ định sai.
- d)  $\overline{D}$ : "Số 2024 chia hết cho 4". Mệnh đề phủ định đúng.

**Câu 12.** Cho mệnh đề kéo theo có dạng  $P \Rightarrow Q$ : "Vì 120 chia hết cho 6 nên 120 chia hết cho 9".

- a) Mệnh đề trên đúng hay sai?
- b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề trên và xét tính đúng sai của mệnh đề đảo đó

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

## Lời giải

### Chọn

- a) Mệnh đề sai.
- b) Mệnh đề đảo: "Vì 120 chia hết cho 9 nên 120 chia hết cho 6". Mệnh đề này đúng.

**Câu 13.** Cho mệnh đề kéo theo có dạng  $P \Rightarrow Q$ : "Nếu tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành thì tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường".

- a) Mệnh đề trên đúng hay sai?
- b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề trên và xét tính đúng sai của mệnh đề đảo đó.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

## Lời giải

### Chọn

- a) Mệnh đề đúng.
- b) Mệnh đề đảo: "Nếu tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường thì tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành". Mệnh đề này đúng.

**Câu 14.** Cho tam giác  $ABC$  với trung tuyến  $AM$ . Xét các mệnh đề

$P$ : "Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ "

$Q$ : "Độ dài trung tuyến  $AM$  bằng nửa độ dài cạnh  $BC$ "

- a) Phát biểu mệnh đề  $P \Rightarrow Q$ ,  $Q \Rightarrow P$  và xác định tính đúng sai của mỗi mệnh đề đó
- b) Nếu cả hai mệnh đề trong ý a) là đúng, hãy phát biểu mệnh đề tương đương.

### Chọn

- a) Mệnh đề phủ định: “ $\exists n \in \mathbb{N}, n(n+1)$  không chia hết cho 2”. Mệnh đề này sai.
- b) Mệnh đề phủ định: “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq x$ ”. Mệnh đề này đúng.
- c) Mệnh đề phủ định: “ $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq x$ ”. Mệnh đề này sai.
- d) Mệnh đề phủ định: “ $\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 - x - 1 \neq 0$ ”. Mệnh đề này đúng.

**Câu 17.** Cho phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$ .

- a) Xét mệnh đề “Nếu  $a + b + c = 0$  thì phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có một nghiệm bằng 1”.

Mệnh đề trên đúng hay sai?

- b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề trên. Mệnh đề đảo đúng hay sai?

- c) Nêu điều kiện cần và đủ để phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có một nghiệm bằng 1.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

### Lời giải

### Chọn

- a) Mệnh đề này đúng.

b) Mệnh đề đảo: “Nếu phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có một nghiệm bằng 1 thì  $a + b + c = 0$ ”. Mệnh đề đảo này đúng.

- c) Điều kiện cần và đủ để phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có một nghiệm bằng 1 là  $a + b + c = 0$

Để tìm  $A \cap B$ , ta làm như sau:

+ Biểu diễn  $A, B$  trên trục số; gạch bỏ phần không thuộc  $A, B$ .

+ Phần không bị gạch là  $A \cap B$ .

Để tìm  $A \cup B$ , ta làm như sau:

+ Biểu diễn  $A, B$  trên trục số; tô đậm phần thuộc  $A, B$ .

+ Phần tô đậm là  $A \cup B$ .

Để tìm  $A \setminus B$ , ta làm như sau:

+ Biểu diễn  $A, B$  trên trục số; tô đậm phần thuộc  $A$ , gạch bỏ phần thuộc  $B$ .

+ Phần tô đậm mà không bị gạch là  $A \setminus B$ .

## Dạng 2. Ứng dụng

### III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 1** Xác định các tập hợp sau:

a)  $[-3; 5] \cap (2; 7)$ ;

b)  $(-\infty; 0] \cup (-1; 2)$ ;

c)  $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 3)$ ;

d)  $(-3; 2) \setminus [1; 3)$ .

**A.**

**B.**

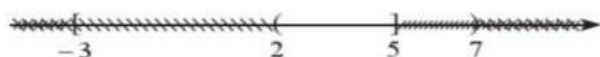
**C.**

**D.**

**Lời giải**

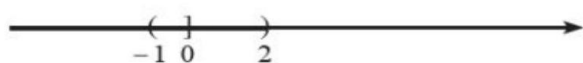
**Chọn**

a) Biểu diễn  $[-3; 5]$  và  $(2; 7)$  trên cùng một trục số bằng cách gạch bỏ phần không thuộc mỗi tập hợp đó. Phần không bị gạch là  $(2; 5]$  nên ta có:

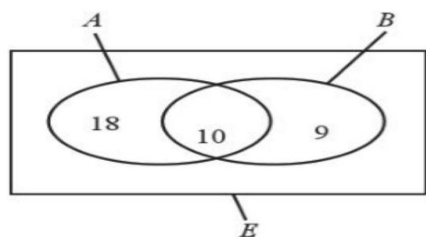


$$[-3; 5] \cap (2; 7) = (2; 5].$$

b) Biểu diễn  $(-\infty; 0]$  và  $(-1; 2)$  trên cùng một trục số bằng cách tô đậm mỗi tập hợp đó. Phần tô đậm là  $(-\infty; 2)$  nên ta có:



Khi đó,  $A \cap B$  là tập hợp học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ trên. Số phần tử của  $A$  là 28, số phần tử của  $B$  là 19, số phần tử của tập hợp  $A \cap B$  là 10.



Hình 1

a) Tập hợp các học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao và không tham gia câu lạc bộ âm nhạc là tập hợp  $A \setminus B$ . Số phần tử của  $A \setminus B$  chính là số phần tử của  $A$  trừ đi số phần tử của  $A \cap B$ . Vậy số học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao và không tham gia câu lạc bộ âm nhạc là:  $28 - 10 = 18$  (học sinh).

b) Tập hợp các học sinh tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ trên chính là tập hợp  $A \cup B$ . Do khi đếm số học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao là 28, số học sinh tham gia câu lạc bộ âm nhạc là 19 thì số học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ là 10 được tính hai lần. Vậy số học sinh tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ trên là:  $28 + 19 - 10 = 37$  (học sinh).

c) Số phần tử của  $E$  là 40. Tập hợp các học sinh không tham gia câu lạc bộ thể thao là phần bù của  $A$  trong  $E$ . Vậy số học sinh không tham gia câu lạc bộ thể thao là:  $40 - 28 = 12$  (học sinh).

Tập hợp các học sinh không tham gia cả hai câu lạc bộ là phần bù của  $A \cup B$  trong  $E$ . Vậy số học sinh không tham gia cả hai câu lạc bộ là:  $40 - 37 = 3$  (học sinh).

**Ví dụ 6:** Một nhóm có 12 học sinh chuẩn bị cho hội diễn văn nghệ. Trong danh sách đăng kí tham gia tiết mục múa và tiết mục hát của nhóm đó, có 5 học sinh tham gia tiết mục múa, 3 học sinh tham gia cả hai tiết mục. Hỏi có bao nhiêu học sinh trong nhóm tham gia tiết mục hát? Biết rằng có 4 học sinh của nhóm không tham gia tiết mục nào.

A.

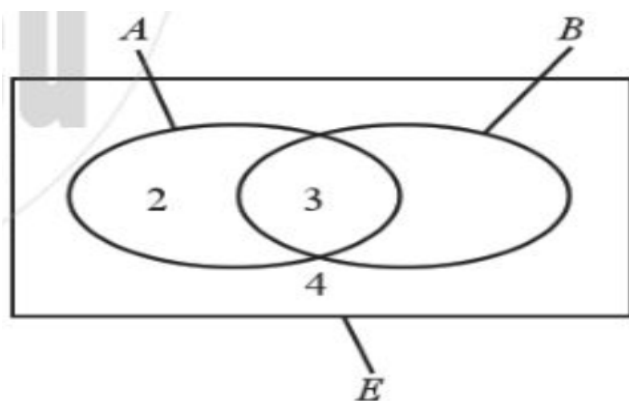
B.

C.

D.

Lời giải

Chọn



Hình 2

**Câu 23.** Cho hai tập hợp  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - x - 6 = 0\}$ . Tập hợp  $A \setminus B$  bằng

- A.  $(-2; 3)$ .                      B.  $(-2; 3) \cup (3; 5]$ .                      C.  $(3; 5]$ .                      D.  $[-2; 5] \setminus \{3\}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 24.** Cho tập hợp  $A = [-1; +\infty)$ . Tập hợp  $C_{\mathbb{R}}A$  bằng

- A.  $(-1; +\infty)$ .                      B.  $(-\infty; -1)$ .                      C.  $(-\infty; -1]$ .                      D.  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 25.** Gọi  $A$  là tập nghiệm của đa thức  $P(x)$ ,  $B$  là tập nghiệm của đa thức  $Q(x)$ ,  $C$  là tập nghiệm của đa thức  $P(x) \cdot Q(x)$ .  $C$  là tập hợp nào sau đây?

- A.  $A \cup B$ .                      B.  $A \cap B$ .                      C.  $A \setminus B$ .                      D.  $B \setminus A$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 26.** Gọi  $A$  là tập nghiệm của đa thức  $P(x)$ ,  $B$  là tập nghiệm của đa thức  $Q(x)$ ,  $D$  là tập nghiệm của đa thức  $P^2(x) + Q^2(x)$ .  $D$  là tập hợp nào sau đây?

- A.  $A \cup B$ .                      B.  $A \cap B$ .                      C.  $A \setminus B$ .                      D.  $B \setminus A$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 27.** Cho tập hợp  $X = \{a; b; c; d\}$ . Viết tắt cả các tập hợp con có ba phần tử của tập hợp  $X$ .

**Lời giải**

Các tập con có ba phần tử của  $X$  là:  $\{a; b; c\}$ ,  $\{a; b; d\}$ ,  $\{b; c; d\}$ ,  $\{c; d; a\}$ .

**Câu 28.** Cho ba tập hợp  $A$  là tập hợp các tam giác,  $B$  là tập hợp các tam giác cân,  $C$  là tập hợp các tam giác đều. Dùng kí hiệu  $\subset$  để mô tả quan hệ của hai trong các tập hợp trên.

**Lời giải**

$$C \subset B \subset A.$$

**Câu 29.** Dùng kí hiệu  $\subset$  để mô tả quan hệ của hai tập hợp khác nhau trong các tập hợp sau:  $[-1; 3]$ ,  $(-1; 3)$ ,  $[-1; 3)$ ,  $(-1; 3]$ ,  $\{-1; 3\}$ .

**Lời giải**

$$(-1; 3) \subset (-1; 3], (1; 3) \subset [-1; 3), (-1; 3) \subset [-1; 3],$$

g)  $A \setminus \emptyset$ .

**Lời giải**

a)  $A \cap A = A$ .

b)  $A \cap \emptyset = \emptyset$ .

c)  $A \cup A = A$ .

d)  $A \cup \emptyset = A$ .

e)  $A \setminus A = \emptyset$ .

g)  $A \setminus \emptyset = A$ .

**Câu 33.** Cho tập hợp  $A$ . Có nhận xét gì về tập hợp  $B$  nếu

a)  $A \cap B = A$

b)  $A \cap B = B$

c)  $A \cup B = A$

d)  $A \cup B = B$

e)  $A \setminus B = \emptyset$

g)  $A \setminus \emptyset = B$ ?

**Lời giải**

a)  $B \supset A$ .

b)  $B \subset A$ .

c)  $B \subset A$ .

d)  $B \supset A$ .

e)  $B \supset A$ .

g)  $B = A$ .

**Câu 34.** Trong đợt văn nghệ chào mừng ngày 20/11, lớp 10A đăng kí tham gia hai tiết mục, đó là hát tập ca và múa. Gọi  $A$  là tập hợp các học sinh tham gia hát tập ca,  $B$  là tập hợp các học sinh tham gia múa,  $E$  là tập hợp các học sinh của lớp. Mô tả các tập hợp sau đây:

a)  $A \cap B$

b)  $A \cup B$

c)  $A \setminus B$

d)  $E \setminus A$

g)  $E \setminus (A \cup B)$ .

c) Số học sinh của lớp 10A là:  $27+8=35$  ( học sinh).

**Câu 36.** Tìm  $D = E \cap G$ , biết  $E$  và  $G$  lần lượt là tập nghiệm của hai bất phương trình trong mỗi trường hợp sau:

a)  $5x-2 > 0$  và  $3x+7 \geq 0$

b)  $2x+3 > 0$  và  $5x-9 \leq 0$

c)  $9-3x \geq 0$  và  $12-3x < 0$ .

**Lời giải**

a)  $D = \left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$

b)  $D = \left[-\frac{3}{2}; \frac{9}{5}\right]$

c)  $D = \emptyset$

**Câu 37.** Cho các tập hợp:  $A = [-1; 7]$ ,  $B = (m-1; m+5)$  với  $m$  là một tham số thực. Tìm  $m$  để:

a)  $B \subset A$

b)  $A \cap B = \emptyset$ .

**Lời giải**

a)  $B \subset A$  nếu  $-1 \leq m-1$  và  $m+5 \leq 7$  suy ra  $0 \leq m \leq 2$ .

b)  $A \cap B = \emptyset$  nếu  $m-1 \geq 7$  hoặc  $m+5 \leq -1$ . Suy ra  $m \geq 8$  hoặc  $m \leq -6$ .

**Câu 38.** Cho  $A = [m; m+2]$  và  $B = [n; n+1]$  với  $m, n$  là các tham số thực. Tìm điều kiện của các số  $m$  và  $n$  để tập hợp  $A \cap B$  chứa đúng một phần tử.

**Lời giải**

Tập hợp  $A \cap B$  chứa đúng một phần tử nếu  $n+1 = m$  hoặc  $n = m+2$ .

**Câu 39.** Cho  $A = (-\infty; m+1)$ ,  $B = [3; +\infty)$  với  $m$  là một tham số thực. Tìm  $m$  để:

a)  $A \cup B = \mathbb{R}$

b)  $A \cap B$  chứa đúng 5 số nguyên.

**Lời giải**

a)  $A \cup B = \mathbb{R}$  nếu  $m+1 \geq 3$ . Suy ra  $m \geq 2$ .

b)  $A \cap B$  chứa đúng 5 số nguyên nếu  $7 < m+1 \leq 8$ . Suy ra  $6 < m \leq 7$ .

**Câu 40.** Biểu diễn tập hợp  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 9\}$  thành hợp các nửa khoảng.

**Lời giải**

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

**Câu 41.** Phát biểu nào sau đây **không** là một mệnh đề toán học?

- A. Số 2025 chia hết cho 5.
- B. Nếu hình thang  $ABCD$  nội tiếp đường tròn thì hình thang đó cân.
- C. Nếu bạn Minh chăm chỉ thì bạn Minh sẽ thành công.
- D. Các số nguyên tố đều là số lẻ.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 42.** Phủ định của mệnh đề: “ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n$  là số chẵn” là:

- A. “ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n$  không là số chẵn”.
- B. “ $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + n$  không là số lẻ”.
- C. “ $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + n$  là số lẻ”.
- D. “ $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + n$  là số chẵn”.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 43.** Cho tập hợp  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2\}$ .  $A$  là tập hợp nào sau đây?

- A.  $(-3; 2)$ .
- B.  $\{-3; -2; -1; 0; 1\}$ .
- C.  $\{-3; 2\}$ .
- D.  $[-3; 2)$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

**Câu 44.** Cho hai tập hợp  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 3 < 4 + 2x\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x - 3 < 4x - 1\}$ . Tất cả các số nguyên thuộc cả hai tập hợp  $A$  và  $B$  là

- A. 0 và 1.
- B.  $-1; 0; 1$  và 2.
- C. 1 và 2.
- D. 1.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 45.** Cho hai tập hợp  $E = (2; 4]$ ,  $F = (4; 5)$ .  $E \cup F$  bằng:

- A.  $(2; 5)$ .
- B.  $\emptyset$ .
- C.  $[2; 5)$ .
- D.  $\{3; 4\}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 46.** Cho hai tập hợp  $A = [-4; 3)$ ,  $B = (-2; +\infty)$ .  $A \setminus B$  bằng:

- A.  $[-4; -2)$ .
- B.  $\{-4; -3; -2\}$ .
- C.  $[3; +\infty)$ .
- D.  $[-4; -2]$ .

**Lời giải**

### Lời giải

- a)  $\overline{A}$ : “ $\exists n \in \mathbb{N}^*, n \leq \frac{1}{n}$ ”. Mệnh đề này đúng.
- b)  $\overline{B}$ : “ $\forall x \in \mathbb{Z}, 2x + 3 \neq 0$ ”. Mệnh đề này đúng.
- c)  $\overline{C}$ : “ $\forall x \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 1 \neq 0$ ”. Mệnh đề này sai.
- d)  $\overline{D}$ : “ $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$  chia hết cho 3”. Mệnh đề này sai.

**Câu 51.** Dùng kí hiệu để viết lại mỗi tập hợp sau và biểu diễn mỗi tập hợp đó trên trục số:

- a)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < -4\}$ ;
- b)  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$ ;
- c)  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ ;
- d)  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$ .

### Lời giải

- a)  $(-7; -4)$ .
- b)  $[-3; 1]$ .
- c)  $(-\infty; 0]$ .
- d)  $(-1; +\infty)$ .

**Câu 52.** Cho các tập hợp:  $A = [-1; 2)$ ,  $B = (-\infty; 1]$

Xác định  $A \cap B$ ;  $A \cup B$ ;  $A \setminus B$ ;  $B \setminus A$ ;  $\mathbb{R} \setminus B$ ;  $C_{\mathbb{R}} A$ .

### Lời giải

$$A \cap B = [-1; 1]; \quad A \cup B = (-\infty; 2); \quad A \setminus B = (1; 2); \quad B \setminus A = (-\infty; -1); \quad \mathbb{R} \setminus B = (1; +\infty);$$
$$C_{\mathbb{R}} A = (-\infty; -1) \cup [2; +\infty).$$

**Câu 53.** Gọi  $A$  là tập nghiệm của đa thức  $P(x)$ ,  $B$  là tập nghiệm của đa thức  $Q(x)$ ,  $C$  là tập nghiệm của phân thức  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ . So sánh tập hợp  $A \setminus B$  và tập hợp  $C$ .

### Lời giải

$$A \setminus B = C.$$



Chú ý: Hai mệnh đề  $P$  và  $Q$  tương đương khi chúng cùng đúng hoặc cùng sai.

### 5. Mệnh đề chứa kí hiệu $\forall, \exists$ .

□ Mệnh đề " $\forall x \in M, P(x)$ " đúng nếu với mọi  $x_0 \in M, P(x_0)$  là mệnh đề đúng.

□ Mệnh đề " $\exists x \in M, P(x)$ " đúng nếu có  $x_0 \in M$  sao cho  $P(x_0)$  là mệnh đề đúng.

## III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 1:** Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

a)  $2 + 2 = 5$ ;

b)  $10^9 = 9^{10}$ ;

c) Hãy chứng tỏ  $\sqrt{2}$  là số vô tỉ;

d)  $2^{64}$  là số rất lớn.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Là khẳng định sai. Nó là một mệnh đề.

b) Là câu khẳng định, chắc chắn chỉ có thể hoặc đúng hoặc sai. Nó là một mệnh đề.

c) Là câu mệnh lệnh, không phải là câu khẳng định. Nó không là mệnh đề.

d) Là câu khẳng định, nhưng không có tính chất hoặc đúng hoặc sai, do không rõ tiêu chí thế nào là số lớn. Nó không phải là mệnh đề.

**Ví dụ 2:** Trong mỗi cặp mệnh đề  $P$  và  $Q$  sau đây, hãy phát biểu mệnh đề  $P \Rightarrow Q$  và xét tính đúng sai của nó.  $P$  có phải là điều kiện đủ để có  $Q$  không?

a)  $P$ : " $a$  và  $b$  là hai số chẵn",  $Q$ : " $a + b$  là số chẵn" ( $a, b$  là hai số tự nhiên);

b)  $P$ : "Tứ giác  $ABCD$  có bốn cạnh bằng nhau",  $Q$ : "Tứ giác  $ABCD$  là một hình vuông".

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $P \Rightarrow Q$ : "Nếu  $a$  và  $b$  là hai số chẵn thì  $a + b$  là số chẵn".

Ta biết rằng, tổng của hai số chẵn là một số chẵn, nên  $P$  đúng thì  $Q$  đúng.

Vậy, mệnh đề  $P \Rightarrow Q$  đúng.

b)  $P \Rightarrow Q$ : "Nếu tứ giác  $ABCD$  có bốn cạnh bằng nhau thì nó là hình vuông".

Có những tứ giác có bốn cạnh bằng nhau nhưng nó không phải là hình vuông (chẳng hạn như hình thoi có một góc khác  $90^\circ$ ). Khi tứ giác  $ABCD$  như vậy thì  $P$  đúng,  $Q$  sai.

Do đó, mệnh đề  $P \Rightarrow Q$  sai.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

a) và c) là mệnh đề; d) là mệnh đề chứa biến.

**Bài 2.** Hãy viết ba câu là mệnh đề, ba câu không phải là mệnh đề.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

**Bài 3.** Phát biểu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau đây và xét tính đúng sai của các mệnh đề phủ định đó.

a)  $P$ : “Năm 2020 là năm nhuận”;

b)  $Q$ : “ $\sqrt{2}$  không phải là số vô tỉ”;

c)  $R$ : “Phương trình  $x^2 + 1 = 0$  có nghiệm”.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

a)  $\bar{P}$ : “Năm 2020 không phải là năm nhuận”, là mệnh đề sai.

b)  $\bar{Q}$ : “ $\sqrt{2}$  là số vô tỉ”, là mệnh đề đúng.

c)  $\bar{R}$ : “Phương trình  $x^2 + 1 = 0$  vô nghiệm”, là mệnh đề đúng.

**Bài 4.** Với mỗi cặp mệnh đề  $P$  và  $Q$  sau đây, hãy phát biểu mệnh đề  $P \Rightarrow Q$  và xét tính đúng sai của nó.

a)  $P$ : “Hai tam giác  $ABC$  và  $DEF$  bằng nhau”;

$Q$ : “Hai tam giác  $ABC$  và  $DEF$  đồng dạng”.

b)  $P$ : “ $b^2 \geq 4ac$ ”;

$Q$ : “Phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  vô nghiệm” ( $a, b, c$  là ba số thực nào đó,  $a \neq 0$ ).

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

a)  $P \Rightarrow Q$ : “Nếu hai tam giác  $ABC$  và  $DEF$  bằng nhau thì chúng đồng dạng”. Mệnh đề này đúng.

b)  $P \Rightarrow Q$ : “Nếu  $b^2 \geq 4ac$  thì phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  vô nghiệm”. Mệnh đề này sai.

**Bài 5.** Ta có thể phát biểu lại mệnh đề:

“Mỗi hình thoi là một hình bình hành”

thành mệnh đề kéo theo:

”Nếu một tứ giác là hình thoi thì nó là một hình bình hành”

Phát biểu: “Tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo bằng nhau là điều kiện cần để nó là hình thang cân” (hoặc “Tứ giác  $ABCD$  là hình thang cân là điều kiện đủ để nó có hai đường chéo bằng nhau”).

c)  $P$  và  $Q$  là hai mệnh đề tương đương.

Phát biểu: “Đề tam giác vuông cân, điều kiện cần và đủ là nó có hai góc bằng  $45^\circ$ ”.

**Bài 8.** Dùng kí hiệu  $\forall$  hoặc  $\exists$  để viết các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của chúng.

a) Mọi số thực khác 0 nhân với nghịch đảo của nó bằng 1.

b) Có số tự nhiên mà bình phương của nó bằng 20.

c) Bình phương của mọi số thực đều dương.

d) Có ba số tự nhiên khác 0 sao cho tổng bình phương của hai số bằng bình phương của số còn lại.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, x \cdot \frac{1}{x} = 1$ . Mệnh đề đúng.

b)  $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 = 20$ . Mệnh đề sai.

c)  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ . Mệnh đề sai.

d)  $\exists x, y, z \in \mathbb{N}^*, x^2 + y^2 = z^2$ . Mệnh đề đúng.

**Bài 9.** Xét tính đúng sai và viết mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

a)  $\exists x \in \mathbb{N}, 2x^2 + x = 1$ ;

b)  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 5 > 4x$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Xét phương trình  $2x^2 + x = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$ .

Phương trình bậc hai này có hai nghiệm  $x = -1$  và  $x = \frac{1}{2}$ . Nhưng hai nghiệm đều không phải số tự nhiên. Do đó, mệnh đề sai.

Mệnh đề phủ định là:  $\forall x \in \mathbb{N}, 2x^2 + x \neq 1$ .

b) Với mọi số thực  $x$ , ta có  $x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1 > 0$ .

Do đó,  $x^2 + 5 > 4x$ . Suy ra mệnh đề  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 5 > 4x$  đúng.

Mệnh đề phủ định:  $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 5 \leq 4x$

Trong các ký hiệu trên, ký hiệu  $-\infty$  đọc là *âm vô cực* ( *âm vô cùng*), ký hiệu  $+\infty$  đọc là *dương vô cực* ( *dương vô cùng*).

### III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 5:** Viết các tập hợp sau đây dưới dạng liệt kê các phần tử:

- a)  $A = \{x \mid x = 2k - 3, k \in \mathbb{N}, k \leq 3\}$ ;
- b)  $B = \left\{ \frac{m}{m+5} \mid m \in \mathbb{Z}, |m| \leq 3 \right\}$ ;
- c)  $C = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 7 - x, x \in \mathbb{N}\}$ ;
- d)  $D = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x + y \leq 3\}$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $A = \{-3; -1; 1; 3\}$ .

b) Các giá trị của  $m$  thỏa mãn  $m \in \mathbb{Z}, |m| \leq 3$  là  $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$ . Thay lần lượt các giá trị này vào biểu thức  $\frac{m}{m+5}$  ta được  $B = \left\{ -\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{4}; 0; \frac{1}{6}; \frac{2}{7}; \frac{3}{8} \right\}$ .

c) Vì  $y = 7 - x \in \mathbb{N}$  nên  $7 - x \geq 0$  hay  $x \leq 7$ . Mà  $x \in \mathbb{N}$  nên  $x$  chỉ nhận các giá trị  $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$ . Từ đó,  $y$  nhận các giá trị tương ứng  $7; 6; 5; 4; 3; 2; 1; 0$ . Vậy  $C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ .

d) Vì  $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x + y \leq 3$  nên  $x \leq 3$ . Ứng với mỗi giá trị  $x \in \{0; 1; 2; 3\}$ , ta tìm các giá trị  $y \in \mathbb{N}$  thỏa mãn  $x + y \leq 3$ , ta được bảng sau:

|     |            |         |      |   |
|-----|------------|---------|------|---|
| $x$ | 0          | 1       | 2    | 3 |
| $y$ | 0; 1; 2; 3 | 0; 1; 2 | 0; 1 | 0 |

Từ đó,  $D = \{(0; 0); (0; 1); (0; 2); (0; 3); (1; 0); (1; 1); (1; 2); (2; 0); (2; 1); (3; 0)\}$ .

**Ví dụ 6:** Viết các tập hợp sau đây bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử:

- a)  $A = \{1; 2; 4; 7; 14; 28\}$ ;
- b)  $B = \{0; 3; 6; 9; 12; \dots\}$ ;
- c)  $C = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots \right\}$ ;

d)  $D$  là tập hợp các số tự nhiên lẻ.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước của } 28\}$ .

$D$  là tập hợp các học sinh khối 11 ;

$E$  là tập hợp các học sinh nữ của trường.

Ta có các quan hệ bao hàm:  $C \subset B \subset A; D \subset A; E \subset A$ .

**Ví dụ 9:** Cho hai tập hợp  $A = \{1; a; 5\}, B = \{a + 2; 3; b\}$  với  $a, b$  là các số thực. Biết rằng  $A = B$ , hãy xác định  $a$  và  $b$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Vì  $3 \in B$  và  $A = B$  nên ta có  $3 \in A = \{1; a; 5\}$ , do đó,  $a = 3$ . Khi đó,  $B = \{5; 3; b\}$ .

Vì  $1 \in A$  và  $A = B$  nên ta có  $1 \in B = \{5; 3; b\}$ . Suy ra, ta có  $b = 1$ .

Khi đó,  $A = B = \{1; 3; 5\}$ .

Vậy các giá trị cần tìm là  $a = 3, b = 1$ .

#### IV. BÀI TẬP

**Bài 10.** Viết các tập hợp sau đây dưới dạng liệt kê các phần tử:

a)  $A = \{x \mid x^2 - 2x - 15 = 0\}$  b)  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 2\}$

c)  $C = \left\{ \frac{n}{n^2 - 1} \mid n \in \mathbb{N}, 1 < n \leq 4 \right\}$  d)  $D = \{(x; y) \mid x \leq 2, y < 2, x, y \in \mathbb{N}\}$

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $A = \{-3; 5\}$  ; b)  $B = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ .

c)  $C = \left\{ \frac{2}{3}; \frac{3}{8}; \frac{4}{15} \right\}$  d)  $D = \{(0; 0); (0; 1); (1; 0); (1; 1); (2; 0); (2; 1)\}$ .

**Bài 11.** Viết các tập hợp sau bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử:

a)  $A = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$  b)  $B = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$

c)  $C = \left\{ 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5} \right\}$  d) Tập hợp  $D$  các số thực lớn hơn hoặc bằng 3 và bé hơn 8.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \leq x \leq 4\}$  hoặc  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$  hoặc  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 5\}$ .

b)  $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ chẵn}, x \leq 10\}$  hoặc  $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2k, k = 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ .

### Lời giải

#### Chọn

$$\{a;b\}, \{a;b;c\}, \{a;b;d\}, \{a;b;c;d\}.$$

**Bài 16.** Cho các tập hợp  $A = \{1;2;3;4;5\}$  và  $B = \{1;3;5;7;9\}$ . Hãy tìm tập hợp  $M$  có nhiều phần tử nhất thỏa mãn  $M \subset A$  và  $M \subset B$ .

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

$$M = \{1;3;5\}$$

**Bài 17.** Viết các tập hợp sau đây dưới dạng liệt kê các phần tử:

$$\text{a) } A = \left\{ y \in \mathbb{N} \mid y = 10 - x^2, x \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{b) } B = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{6}{6-x} \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\text{c) } C = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid 2x - 3 \geq 0 \text{ và } 7 - x \geq 2 \right\} \quad \text{d) } D = \left\{ (x; y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x + 2y = 8 \right\}$$

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

$$8. \text{ a) } A = \{1;6;9;10\} \quad \text{b) } B = \{0;3;4;5\}$$

$$\text{c) } C = \{2;3;4;5\} \quad \text{d) } D = \{(8;0), (6;1), (4;2), (2;3), (0;4), \}.$$

**Bài 18.** Cho hai tập hợp  $A = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$  và  $B = \{6l + 3 \mid l \in \mathbb{Z}\}$ . Chứng minh rằng  $B \subset A$ .

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

Lấy phần tử  $x$  tùy ý của  $B$ , ta có  $x = 6l + 3, l \in \mathbb{Z}$ .

Ta viết  $x = 2 \cdot 3l + 2 + 1 = 2(3l + 1) + 1 = 2k + 1, k = 3l + 1, l \in \mathbb{Z}$ . Suy ra  $x \in A$ .

Vậy, với mọi  $x \in B$  ta đều có  $x \in A$ . Do đó  $B \subset A$ .

**Bài 19.** Cho hai tập hợp  $A = \{1;2;a\}$  và  $B = \{1;a^2\}$ . Tìm tất cả các giá trị của  $a$  sao cho  $B \subset A$ .

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

Ta có  $B \subset A$  nếu  $a^2 = 1$  hoặc  $a^2 = 2$  hoặc  $a^2 = a$ .

Từ đó tìm được các giá trị của  $a$  là:  $-\sqrt{2}; 1; 0; 1; \sqrt{2}$ .

A.

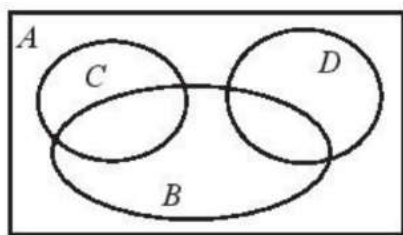
B.

C.

D.

Lời giải

Chọn



Hình 5

- a) Biểu diễn các tập hợp  $A, B, C, D$  như Hình 5.  
 b)  $M$  là tập hợp các học sinh nữ khối 10 của trường.  
 $N$  là tập hợp các học sinh khối 10 và khối 11 của trường.  
 $P$  là tập hợp các học sinh khối 11 và 12 của trường.  
 $R$  là tập hợp các học sinh nam của trường.  
 $S$  là tập hợp các học sinh nam khối 10 của trường.  
 $T$  là tập hợp các học sinh khối 12 của trường.

**Ví dụ 11:** Trong các số tự nhiên từ 1 đến 30, có bao nhiêu số là bội của 4 hoặc 5?

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Kí hiệu  $A, B$  lần lượt là tập hợp các số là bội của 4, bội của 5 trong các số tự nhiên từ 1 đến 30. Ta có:

$$A = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28\}; B = \{5; 10; 15; 20; 25; 30\}.$$

Tập hợp các số là bội của 4 hoặc 5 (trong các số từ 1 đến 30) là

$$A \cup B = \{4; 5; 8; 10; 12; 15; 16; 20; 24; 25; 28; 30\}.$$

Ta thấy  $A \cup B$  có 12 phần tử. Vậy, trong các số tự nhiên từ 1 đến 30, có 12 số là bội của 4 hoặc 5.

**Nhận xét:** Ta có thể giải theo cách khác như sau:

$$\text{Ta có: } A \cap B = \{20\}, n(A) = 7, n(B) = 6, n(A \cap B) = 1.$$

$$\text{Từ đó: } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 7 + 6 - 1 = 12.$$

**Ví dụ 12:** Trong một cuộc khảo sát người tiêu dùng, trong 100 người uống cà phê được khảo sát, có 55 người thêm sữa và 30 người thêm cả đường và sữa. Trong số 100 người đó,

- a) Có bao nhiêu người thêm ít nhất đường hoặc sữa?  
 b) Có bao nhiêu người không thêm đường hoặc sữa?

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

### Chọn

a)  $A \cap B = \{a; c\}$ ,  $A \cup B = \{a; b; c; d; e\}$ ,  $A \setminus B = \{b; d\}$ ,  $B \setminus A = \{e\}$

b)  $A = \{-1; 6\}$ ,  $B = \{-1; 1\}$ ,  $A \cap B = \{-1\}$ ,  $A \cup B = \{-1; 1; 6\}$ ,  $A \setminus B = \{6\}$ ,  $B \setminus A = \{1\}$

c)  $A = \{1; 3; 5; 7\}$ ,  $B = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$ ,  $A \cap B = \{1; 3\}$

$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 12\}$ ,  $A \setminus B = \{5; 7\}$ ,  $B \setminus A = \{2; 4; 6; 12\}$ .

**Bài 21.** Cho hai tập hợp  $A = \{(x; y) | 3x - 2y = 11\}$ ,  $B = \{(x; y) | 2x + 3y = 3\}$ . Hãy xác định tập hợp  $A \cap B$ .

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

### Chọn

Ta thấy  $x; y \in A \cap B$  khi  $(x; y)$  là nghiệm của hệ phương trình

$$(I) \begin{cases} 3x - 2y = 11(1) \\ 3x + 2y = 3(2) \end{cases}$$

Nhân hai vế của (1) với 3, nhân hai vế của (2) với 2 ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 9x - 6y = 33 \\ 4x + 6y = 6 \end{cases}$$

Cộng vế với vế hai phương trình của hệ này, ta được  $13x = 39$  hay  $x = 3$ .

Thay  $x = 3$  vào (1) ta được  $9 - 2y = 11$  Từ đây tìm được  $y = -1$

Vậy hệ phương trình (I) có một nghiệm là  $(3; -1)$ . Từ đó  $A \cap B = \{(3; -1)\}$

**Bài 22.** Cho các tập hợp  $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ ,  $B = \{1; 2; 3; 4\}$ ,  $C = \{3; 4; 5; 6\}$ . Hãy xác định các tập hợp

a)  $(A \cup B) \cap C$ ;

b)  $A \cap (B \cap C)$ ;

c)  $A \setminus (B \cap C)$ ;

d)  $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ .

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

### Chọn

a)  $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 9\}$ ,  $(A \cup B) \cap C = \{3; 4; 5\}$ .

b)  $B \cap C = \{3; 4\}$ ;  $A \cap (B \cap C) = \{3\}$

c)  $A \setminus (B \cap C) = \{1; 5; 7; 9\}$

d)  $A \setminus B = \{5; 7; 9\}$ ,  $A \setminus C = \{1; 7; 9\}$ ,  $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \{1; 5; 7; 9\}$ ,

**Bài 26.** Cho các tập con  $A = [-1; 3]$  và  $B = [0; 5)$  của tập số thực  $\mathbb{R}$ . Hãy xác định  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

$$A \cap B = [0; 3]; A \cup B = [-1; 5); A \setminus B = [-1; 0); B \setminus A = (3; 5).$$

**Bài 27.** Lớp 10E có 18 bạn chơi cầu lông, 15 bạn chơi cờ vua, 10 bạn chơi cả hai môn và 12 bạn không chơi môn nào trong hai môn thể thao này.

a) Lớp 10E có bao nhiêu bạn chơi ít nhất một môn thể thao trên?

b) Lớp 10E có bao nhiêu học sinh?

A.

B.

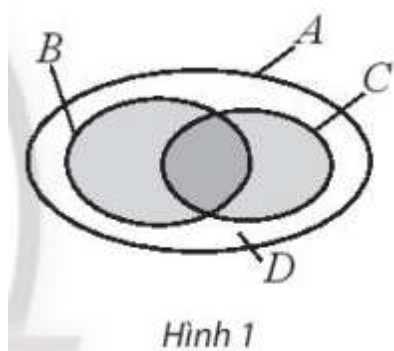
C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

8. Ký hiệu A là tập hợp các học sinh của lớp 10 E,



$$B = \{x \in A \mid x \text{ chơi cầu lông}\};$$

$$C = \{x \in A \mid x \text{ chơi cờ vua}\}$$

$$D = \{x \in A \mid x \text{ không chơi cầu lông cũng không chơi cờ vua}\}$$

$$\text{Theo giả thiết } n(B) = 18; n(C) = 15; n(B \cap C) = 10; n(D) = 12$$

a) Số học sinh lớp 10E chơi ít nhất một môn thể thao là:

$$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C) = 18 + 15 - 10 = 23$$

b) Số học sinh của lớp  $n(A) = n(B \cup C) + n(D) = 23 + 12 = 35$

**Bài 28.** Biết rằng tập hợp  $M$  thoả mãn  $M \cap \{1; 3\} = \{1\}$ ,  $M \cap \{5; 7\} = \{5\}$ ,  $M \cap \{9; 11\} = \{9\}$  và  $M \subset \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$ . Hãy tìm  $M$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

$$M = \{1; 5; 9\}$$

**Bài 29.** Cho tập hợp  $A = \{1; 2; 3\}$ ,

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

### A. TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $0 = \{0\}$ ;                      B.  $0 \in \{0\}$ ;                      C.  $0 \subset \{0\}$ ;                      D.  $0 = \emptyset$ ;

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 2.** Biết rằng  $P \Rightarrow Q$  là mệnh đề đúng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $P$  là điều kiện cần để có  $Q$ .                      B.  $P$  là điều kiện đủ để có  $Q$ .

- C.  $Q$  là điều kiện cần và đủ để có  $P$ ;                      D.  $Q$  là điều kiện đủ để có  $P$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 3.** Cho số thực  $x$ . Mệnh đề nào sau đây là điều kiện đủ của " $x > 1$ "?

- A.  $x > 0$ ;                      B.  $x \geq 1$ ;                      C.  $x < 1$ ;                      D.  $x \geq 2$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn D

**Câu 4.** Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- (1)  $\emptyset \in \{0\}$ ; (2)  $\{1\} \subset \{0; 1; 2\}$ ;

- (3)  $\{0\} = \emptyset$ ; (4)  $\{0\} \subset \{x \mid x^2 = x\}$ .

- A. (1) và (3);                      B. (1) và (4);                      C. (2) và (4);                      D. (2) và (3).

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn A

**Câu 5.** Cho tập hợp  $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 5 - m, m \in \mathbb{N}\}$ . Số phần tử của  $M$  bằng

- A. 4;                      B. 5;                      C. 6;                      D. 10.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

## Chọn B

## B. TỰ LUẬN

**Bài 31.** Cho ba tập hợp  $A, B, C$  thỏa mãn  $A \subset C, B \subset C$  và  $A \cap B = \emptyset$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) Nếu  $x \in A$  thì  $x \in C$ .
- b)  $x \in A$  là điều kiện cần để  $x \in C$ .
- c)  $x \in B$  là điều kiện đủ để  $x \in C$ .
- d) Nếu  $x \in A$  thì  $x \notin B$ .
- e)  $x \in B$  là điều kiện đủ để  $x \notin A$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

## Chọn

- a) Đúng;
- b) Sai;
- c) Đúng;
- d) Đúng;
- e) Đúng.

**Bài 32.** Cho tập hợp  $A = \{1; 2\}$ . Tìm tất cả các tập hợp  $B$  thỏa mãn  $A \cup B = \{1; 2; 3\}$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

## Chọn

Cần tìm các tập hợp  $B$  sao cho  $3 \in B$  và  $B \subset \{1; 2; 3\}$ . Các tập hợp  $B$  thỏa mãn là:  $\{3\}, \{1; 3\}, \{2; 3\}, \{1; 2; 3\}$ .

**Bài 33.** Cho hai tập hợp  $A = \{1; 2; 3; 4\}, B = \{3; 4; 5\}$ . Tìm tất cả các tập hợp  $M$  thỏa mãn  $M \subset A$  và  $M \cap B = \emptyset$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

## Chọn

$M = \emptyset, M = \{1\}, M = \{2\}, M = \{1; 2\}$ .

**Bài 34.** Một lớp học có 36 học sinh, trong đó có 20 người thích bóng rổ, 14 người thích bóng bàn và 10 người không thích môn nào trong hai môn thể thao này.

- a) Có bao nhiêu học sinh của lớp thích cả hai môn trên?
- b) Có bao nhiêu học sinh của lớp thích bóng rổ nhưng không thích bóng bàn?

## CHƯƠNG I: MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP

### BÀI 1: MỆNH ĐỀ

#### I. LÝ THUYẾT

• Mệnh đề là một câu nhận giá trị đúng hoặc sai, nhưng không phải cả hai. Định lí là một mệnh đề đúng và thường có dạng  $P \Rightarrow Q$ , trong đó  $P$  là mệnh đề đúng.

• Mệnh đề “Nếu  $P$  thì  $Q$ ” là mệnh đề kéo theo, kí hiệu là  $P \Rightarrow Q$ .

Trong định lí có dạng  $P \Rightarrow Q$ , ta gọi  $P$  là giả thiết,  $Q$  là kết luận của định lí. Khi mệnh đề kéo theo đúng, thì người ta gọi  $P$  là điều kiện đủ để có  $Q$ ;  $Q$  là điều kiện cần để có  $P$ .

Mệnh đề  $Q \Rightarrow P$  được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề  $P \Rightarrow Q$ .

• Mệnh đề “ $P$  nếu và chỉ nếu  $Q$ ” được gọi là một mệnh đề tương đương và kí hiệu là  $P \Leftrightarrow Q$ .

Nếu cả hai mệnh đề  $P \Rightarrow Q$  và  $Q \Rightarrow P$  đều đúng thì mệnh đề  $P \Leftrightarrow Q$  là một mệnh đề đúng.

• Phát biểu “ $\forall x \in X, P(x)$ ” là một mệnh đề đúng nếu với bất kì  $x_0 \in X, P(x_0)$  đúng và sai nếu có một  $x_0 \in X, P(x_0)$  sai.

Phát biểu “ $\exists x \in X, P(x)$ ” là một mệnh đề đúng nếu có ít nhất một  $x_0 \in X$  để  $P(x_0)$  đúng và sai nếu với  $x_0 \in X$  bất kì,  $P(x_0)$  sai.

• Phủ định của mệnh đề  $P$  là một mệnh đề, kí hiệu là  $\bar{P}$ , đúng khi  $P$  sai và sai khi  $P$  đúng.

Phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\exists x \in X, \bar{P}(x)$ ”.

Phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\forall x \in X, \bar{P}(x)$ ”.

#### II. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 1:** Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề? Câu nào không là mệnh đề? Xác định tính đúng sai của các mệnh đề.

a) Hình vuông có hai đường chéo vuông góc với nhau.

b) Sông Hương chảy ngang qua thành phố Huế.

c) Năm 2022 không phải là năm nhuận.

d) Hôm nay trời đẹp quá!

e)  $3x + 2 = 5$ .

g)  $4 > 6.5$ .

A.

B.

C.

D.

- a) Sai.
- b) Sai.
- c) Đúng.

**Câu 2.** Phát biểu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

- a) 106 là hợp số;
- b) Tổng số đo ba góc trong một tam giác bằng  $180^\circ$ .

**A.** **B.** **C.** **D.**

**Lời giải**

**Chọn**

- a) 106 không phải là hợp số.
- b) Tổng số đo ba góc trong một tam giác không bằng  $180^\circ$ .

**Câu 3.** Cho hai mệnh đề sau:

$P$ : “Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành”.

$Q$ : “Tứ giác  $ABCD$  có  $AB \parallel CD$  và  $AB = CD$ ”.

Hãy phát biểu mệnh đề  $P \Rightarrow Q$  và mệnh đề đảo của mệnh đề đó.

**A.** **B.** **C.** **D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Mệnh đề  $P \Rightarrow Q$ : “Nếu tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành thì tứ giác  $ABCD$  có  $AB \parallel CD$  và  $AB = CD$ ”.

Mệnh đề đảo  $Q \Rightarrow P$ : “Nếu tứ giác  $ABCD$  có  $AB \parallel CD$  và  $AB = CD$  thì tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành”

**Câu 4.** Phát biểu dưới dạng “điều kiện cần” đối với các mệnh đề sau:

- a) Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.
- b) Số tự nhiên có tổng các chữ số của nó chia hết cho 3 thì chia hết cho 3.

**A.** **B.** **C.** **D.**

**Lời giải**

**Chọn**

- a) Hai góc bằng nhau là điều kiện cần để hai góc đó đối đỉnh.
- b) Số tự nhiên chia hết cho 3 là điều kiện cần để tổng các chữ số của nó chia hết cho 3.

**Câu 5.** Xác định tính đúng sai của mệnh đề đảo của các mệnh đề sau:

**Câu 8.** Phát biểu mệnh đề phủ định của mệnh đề: “Mọi số tự nhiên có chữ số tận cùng bằng 0 đều chia hết cho 10”.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Mệnh đề phủ định của mệnh đề  $P$  là:

“Có một số tự nhiên có chữ số tận cùng bằng 0 không chia hết cho 10”.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$$

□ Hợp của hai tập hợp  $A$  và  $B$ , kí hiệu là  $A \cup B$ , là một tập hợp chứa các phần tử hoặc thuộc tập hợp  $A$  hoặc thuộc tập hợp  $B$ .

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$$

□ Tập hợp gồm các phần tử thuộc  $A$  nhưng không thuộc  $B$  gọi là hiệu của hai tập hợp  $A$  và  $B$ . Kí hiệu là  $A \setminus B$ .

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$$

□ Khi  $B \subset A$  thì  $A \setminus B$  gọi là phần bù của  $B$  trong  $A$ , kí hiệu là  $C_A B$ .

## II. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 4:** Xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a)  $6 \in \mathbb{Z}$
- b)  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
- c)  $0,368 \in \mathbb{R}$
- d)  $\{3\} \in \mathbb{N}$

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $6 \in \mathbb{Z}$  là mệnh đề đúng.

b)  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$  là mệnh đề sai.

c)  $0,368 \in \mathbb{R}$  là mệnh đề đúng

d)  $\{3\} \in \mathbb{N}$  là mệnh đề sai, vì kí hiệu  $\{3\}$  là tập hợp chứa phần tử là 3, đây là tập con của  $\mathbb{N}$ , chứ không phải là một phần tử của  $\mathbb{N}$  (cách viết đúng là  $\{3\} \subset \mathbb{N}$ ).

**Ví dụ 5:** Cho  $G$  là tập hợp các số nguyên dương nhỏ hơn 10 là bội của 3 và  $H$  là tập hợp các nghiệm của phương trình  $x^2 - 7x + 10 = 0$

a) Hãy liệt kê các phần tử của hai tập hợp  $G$  và  $H$ .

b) Tìm  $n(H)$

c) Biểu diễn hai tập  $G$  và  $H$  bằng biểu đồ Ven.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

d)  $C = \mathbb{R} \setminus [-1; +\infty)$

A.

B.

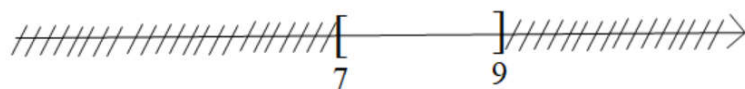
C.

D.

Lời giải

Chọn

a)  $A = [3; 9] \setminus [-2; 7] = [7; 9]$ .



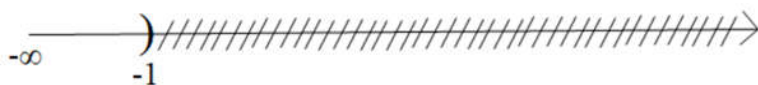
b)  $B = [-1; +\infty) \cap (-4; 9] = [-1; 9]$ .



c)  $C = [1; 5] \cup [4; +\infty) = [1; +\infty)$ .



d)  $C = \mathbb{R} \setminus [-1; +\infty) = (-\infty; -1)$ .



### III. BÀI TẬP

**Câu 9.** Điền Đ vào ô trống nếu mệnh đề đúng, điền S vào ô trống nếu mệnh đề sai.

a)  $\emptyset \subset \mathbb{N}$  ☐;

b)  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$  ☐;

c)  $\emptyset = \{0\}$  ☐;

d)  $\{\emptyset\} \subset \mathbb{R}$  ☐.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

a) Đ

b) Đ

c) S

### Chọn

$$B = \emptyset.$$

**Câu 13.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng? Mệnh đề nào sai? Giải thích kết luận đưa ra.

a) Tập rỗng là tập con của mọi tập hợp;

b) Nếu  $X = \{a; b\}$  thì  $a \subset X$ ;

c) Nếu  $X = \{a; b\}$  thì  $\{a; b\} \subset X$ .

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

### Chọn

a) Đúng;

b) Sai;

c) Đúng.

**Câu 14.** Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số.

a)  $(4; 7) \cap (-1; 3)$ ;

b)  $(-2; 1] \cap (-\infty; 1)$ ;

c)  $(-2; 6) \setminus (3; 10)$ ;

d)  $(-3; 5] \setminus [2; 8)$ .

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

### Chọn

a)  $\emptyset$

b)  $(-2; 1)$  

c)  $(-2; 3]$  

d)  $(-3; 2)$  

**Câu 15.** Trong một cuộc phỏng vấn 56 người về những việc họ thường làm vào ngày nghỉ cuối tuần, có 24 người thích tập thể thao, 15 người thích đi câu cá và 20 người không thích cả hai hoạt động trên.

a) Có bao nhiêu người thích chơi thể thao hoặc thích câu cá?

b) Có bao nhiêu người thích cả câu cá và chơi thể thao?

c) Có bao nhiêu người chỉ thích câu cá, không thích chơi thể thao?

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

### I - Trắc nghiệm

**Câu 16.** Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

- A.  $6 + x = 4x^2$ .
- B.  $a < 2$ .
- C. 123 là số nguyên tố phải không?
- D. Bắc Giang là tỉnh thuộc miền Nam Việt Nam.

A. B. C. D.

Lời giải

Chọn

Chọn D

**Câu 17.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A.  $\emptyset = \{0\}$ .
- B.  $\emptyset \subset \{0\}$ .
- C.  $\{0\} \subset \emptyset$ .
- D.  $0 \subset \emptyset$ .

A. B. C. D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 18.** Phủ định của mệnh đề: “ $5 + 8 = 13$ ” là mệnh đề

- A.  $5 + 8 < 13$ .
- B.  $5 + 8 \geq 13$ .
- C.  $5 + 8 > 13$ .
- D.  $5 + 8 \neq 13$ .

A. B. C. D.

Lời giải

Chọn

Chọn D

**Câu 19.** Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Nếu  $a$  là số tự nhiên thì  $a$  là số hữu tỉ không âm.
- B. Nếu  $a$  là số hữu tỉ không âm thì  $a$  là số tự nhiên.
- C. Nếu  $a$  là số hữu tỉ dương thì  $a$  là số tự nhiên.
- D. Nếu  $a$  không là số tự nhiên thì  $a$  không phải là số hữu tỉ không âm.

A. B. C. D.

Lời giải

C.  $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 15 = 0\}.$

D.  $Q = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 + 3x - 4 = 0\}.$

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 24.** Lớp 10A có 10 học sinh giỏi môn Toán, 15 học sinh giỏi môn Vật lí, 8 học sinh giỏi cả môn Toán và Vật lí. Số học sinh giỏi ít nhất một môn (Toán hoặc Vật lí) của lớp 10A là

A. 17.

B. 25.

C. 18.

D. 23.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn A

**Câu 25.** Cho tập hợp  $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 3x - 4 = 0\}$  và  $N = \{a; -1\}$ . Với giá trị nào của  $a$  thì  $M = N$ ?

A.  $a = 2.$

B.  $a = 4.$

C.  $a = 3.$

D.  $a = -1$  hoặc  $a = 4.$

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 26.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A.  $\mathbb{N} \subset [0; +\infty).$

B.  $\{-2; 3\} \subset [-2; 3].$

C.  $[3; 7] = \{3; 4; 5; 6; 7\}.$

D.  $\emptyset \subset \mathbb{Q}.$

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn C

**Câu 27.** Cho tập hợp  $A = (-\infty; -1]$  và  $B = (-2; 4]$ . Tìm mệnh đề sai.

A.  $A \cap B = (-2; -1].$

B.  $A \setminus B = (-\infty; -2).$

C.  $A \cup B = (-\infty; 4].$

D.  $B \setminus A = (-1; 4].$

A.

B.

C.

D.

Lời giải

A. Với mọi số thực  $x$ , nếu  $x < -2$  thì  $x^2 > 4$ .

B. Với mọi số thực  $x$ , nếu  $x^2 < 4$  thì  $x < -2$ .

C. Với mọi số thực  $x$ , nếu  $x < -2$  thì  $x^2 < 4$ .

D. Với mọi số thực  $x$ , nếu  $x^2 > 4$  thì  $x > -2$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn A**

**Câu 32.** Mệnh đề phủ định của mệnh đề “ $x^2 + 3x + 1 > 0$ , với mọi  $x \in \mathbb{R}$ ” là

A. Tồn tại  $x \in \mathbb{R}$  sao cho  $x^2 + 3x + 1 > 0$ .

B. Tồn tại  $x \in \mathbb{R}$  sao cho  $x^2 + 3x + 1 \leq 0$ .

C. Tồn tại  $x \in \mathbb{R}$  sao cho  $x^2 + 3x + 1 = 0$ .

D. Tồn tại  $x \in \mathbb{R}$  sao cho  $x^2 + 3x + 1 < 0$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn B**

**II - Tự luận**

**Câu 33.** Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Mọi số tự nhiên có tận cùng bằng 0 đều chia hết cho 10;

b) Bình phương của mọi số thực đều lớn hơn 0;

c) Tập rỗng là tập con của mọi tập hợp.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) Có thể viết mệnh đề dưới dạng: “ $\forall n \in \mathbb{N}$ , nếu  $n$  có tận cùng là 0 thì  $n$  chia hết cho 10”. Mệnh đề này là mệnh đề đúng vì với bất cứ số tự nhiên nào có tận cùng bằng 0, số đó đều chia hết cho 10.

b) Có thể viết mệnh đề dưới dạng: “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ ”. Mệnh đề này sai vì với  $x = 0$  thì  $x^2 = 0$ .

c) Mệnh đề đúng.

$$A = \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1 \right\}.$$

$$B = \{2; 3\}$$

**Câu 37.** Cho hai tập hợp sau:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 4\}; \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 8\}.$$

a) Viết hai tập hợp trên dưới dạng khoảng, đoạn.

b) Xác định các tập hợp sau:  $A \cap B; A \setminus B; B \setminus A$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $A = [-4; 4]; \quad B = (-3; 8];$

b)  $A \cap B = (-3; 4]; \quad A \setminus B = [-4; -3]; \quad B \setminus A = (4; 8]$

**Câu 38.** Cho hai tập hợp  $A = [a; 5]$  và  $B = [-2; 3]$ , với  $a < 5$ . Số  $a$  cần thỏa mãn điều kiện gì để  $A \cap B = \emptyset$ ?

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

$$3 < a < 5.$$

**Câu 39.** Cho các tập hợp sau:

$$A = \{x \mid x \text{ là số nguyên tố và } 20 \leq x \leq 30\};$$

$$B = \{x \mid x \text{ là bội của } 18 \text{ và } 20 \leq x \leq 30\};$$

$C$  là tập hợp các nghiệm nguyên dương của phương trình  $x^3 - 52x^2 + 667x = 0$ . Hãy điền Đ vào ô trống nếu mệnh đề đúng, điền S vào ô trống nếu mệnh đề sai.

a)  $25 \in A$  ☐;

b)  $A \subset B$  ☐;

c)  $A = C$  ☐;

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

## CHƯƠNG II: BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

### BÀI 1: BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

#### I. LÝ THUYẾT

- Bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  là bất phương trình có một trong các dạng sau:

$$ax + by < c, ax + by > c, ax + by \leq c, ax + by \geq c,$$

trong đó  $a, b, c$  là những số thực cho trước với  $a, b$  không đồng thời bằng 0;  $x, y$  là các ẩn.

- Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , đường thẳng  $d: ax + by = c$  chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Một trong hai nửa mặt phẳng (không kể  $d$ ) là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by < c$ , nửa mặt phẳng còn lại (không kể  $d$ ) là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by > c$ .

- Các bước biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by < c$  trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$

*Bước 1:* Vẽ đường thẳng  $d: ax + by = c$ . Đường thẳng  $d$  chia mặt phẳng tọa độ thành hai nửa mặt phẳng.

*Bước 2:* Lấy một điểm  $M(x_0; y_0)$  không nằm trên  $d$  (ta thường lấy gốc tọa độ  $O$  nếu  $c \neq 0$ ). Tính  $ax_0 + by_0$  và so sánh với  $c$ .

*Bước 3:* Kết luận

- Nếu  $ax_0 + by_0 < c$  thì nửa mặt phẳng (không kể  $d$ ) chứa điểm  $M$  là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by < c$ .

- Nếu  $ax_0 + by_0 > c$  thì nửa mặt phẳng (không kể  $d$ ) không chứa điểm  $M$  là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by < c$ .

#### II. CÁC DẠNG TOÁN

**Vấn đề 1.** Biểu diễn miền nghiệm của một bất phương trình bậc nhất hai ẩn

**Vấn đề 2.** Xác định bất phương trình bậc nhất hai ẩn tương ứng miền nghiệm cho trước

Phương pháp

*Bước 1:* Xác định phương trình đường thẳng chia mặt phẳng thành hai phần có dạng  $ax + by = c$ .

*Bước 2:* Lấy một điểm  $M(x_0; y_0)$  thuộc miền nghiệm của bất phương trình, thay tọa độ của điểm  $M$  vào  $ax + by$  rồi so sánh với  $c$  để xác định bất phương trình cần tìm.

**Vấn đề 3.** Ứng dụng

#### III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 1:** Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình:  $x + 2y < 3$ .

**Ví dụ 3:** Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng  $60m^2$ . Diện tích để kê một chiếc ghế là  $0,5m^2$ , một chiếc bàn là  $1,2m^2$ . Gọi  $x$  là số chiếc ghế,  $y$  là số chiếc bàn được kê.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  cho phân mặt sàn để kê bàn và ghế, biết diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là  $12m^2$ .

b) Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình trên.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Diện tích để kê  $x$  chiếc ghế,  $y$  chiếc bàn là:  $0,5x + 1,2y$  ( $m^2$ )

Diện tích tối đa để kê bàn và ghế là  $60 - 12 = 48$  ( $m^2$ )

Ta có bất phương trình:  $0,5x + 1,2y \leq 48$

b) Ba nghiệm có thể chỉ ra được của bất phương trình trên là  $(20; 30)$ ,  $(30; 20)$ ,  $(50; 15)$ .

#### **IV. BÀI TẬP**

**Câu 1.** Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình  $-3x + 5y \leq 6$ ?

**A.**  $(2; 8)$ .

**B.**  $(-10; -3)$ .

**C.**  $(3; 3)$ .

**D.**  $(0; 2)$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn C**

**Câu 2.** Miền nghiệm của bất phương trình  $2x - 3y > 5$  là nửa mặt phẳng (không kể đường thẳng  $d: 2x - 3y = 5$ ) không chứa điểm có tọa độ nào sau đây?

**A.**  $(0; 0)$ .

**B.**  $(3; 0)$ .

**C.**  $(1; -2)$ .

**D.**  $(-3; -4)$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

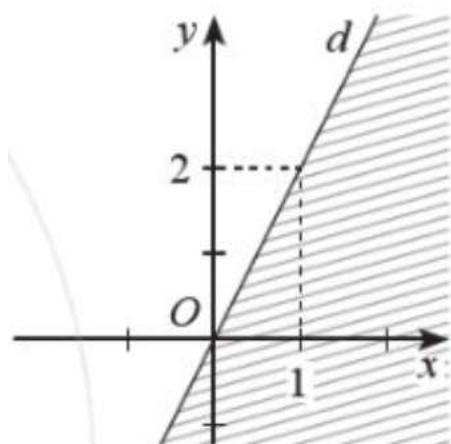
**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn A**

**Câu 3.** Miền nghiệm của bất phương trình  $x - 2y < 4$  được xác định bởi miền nào (nửa mặt phẳng không bị gạch và không kể  $d$ ) sau đây?

**Câu 5.** Nửa mặt phẳng không bị gạch (không kể d) ở hình 4 là miền nghiệm của bất phương trình nào sau đây?



Hình 4

- A.  $2x - y \leq 0$       B.  $2x - y \geq 0$ .      C.  $x - 2y \geq 0$ .      D.  $x - 2y \leq 0$ .

- A.      B.      C.      D.

Lời giải

Chọn

Chọn A

**Câu 6.** Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình  $-5x + 2y > 10$  ?

- a)  $(-2; 1)$  ;  
b)  $(1; 5)$  ;  
c)  $(0; 5)$  .

- A.      B.      C.      D.

Lời giải

Chọn

- b)  $(-2; 1)$  .

**Câu 7.** Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau:

- a)  $3x + 5y < 15$   
b)  $x - 2y \geq 6$   
c)  $y > -x + 3$  ;  
d)  $y \leq 4 - 2x$  .

- A.      B.      C.      D.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  để thể hiện số tiền các bạn có đủ khả năng chi trả cho phần trên châu đen, trắng.

b) Chỉ ra một nghiệm nguyên của bất phương trình đó.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

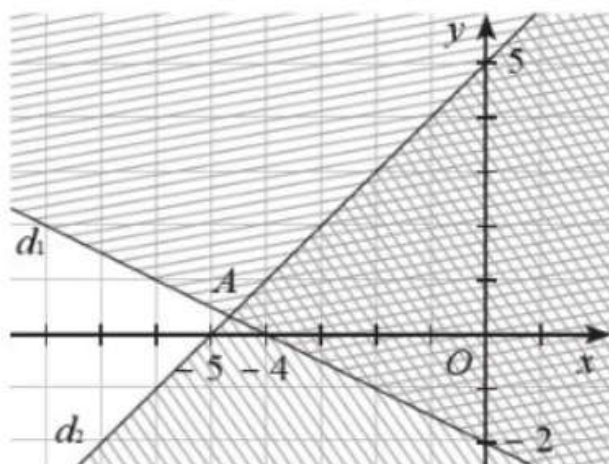
a)  $5x + 10y \leq 45$  hay  $x + 2y \leq 9$ .

b)  $(4; 2)$ .

$$d_2 : x - y = -5$$

Gạch đi các phần không thuộc miền nghiệm của mỗi bất phương trình.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần không bị gạch kể cả tia  $Ad_2$  với  $A\left(-\frac{14}{3}; \frac{1}{3}\right)$  (Hình 6)



Hình 6

**Ví dụ 5:** a) Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình 
$$\begin{cases} x + 2y \leq 10 \\ -2x + y \leq 0 \\ -2x + y \geq -12 \\ y \geq -2 \end{cases} \quad (I)$$

b) Tìm  $x, y$  là nghiệm của hệ bất phương trình (I) sao cho  $F = 2x + 3y$  đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Vẽ các đường thẳng:

$$d_1 : x + 2y = 10; \quad d_2 : -2x + y = 0,$$

$$d_3 : -2x + y = -12; \quad d_4 : y = -2$$

Gạch đi phần không thuộc miền nghiệm của mỗi bất phương trình.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tứ giác  $ABCD$  với  $A(2; 4)$ ,  $B\left(\frac{34}{5}; \frac{8}{5}\right)$ ,  $C(5; -2)$ ,

$D(-1; -2)$  (Hình 7)

Theo giả thiết  $x$  và  $y$  phải thỏa mãn các điều kiện  $0 \leq x \leq 200$ ,  $0 \leq y \leq 240$ ;  $\frac{2x+y}{60} \leq 8$  hay  $2x+y \leq 480$ .

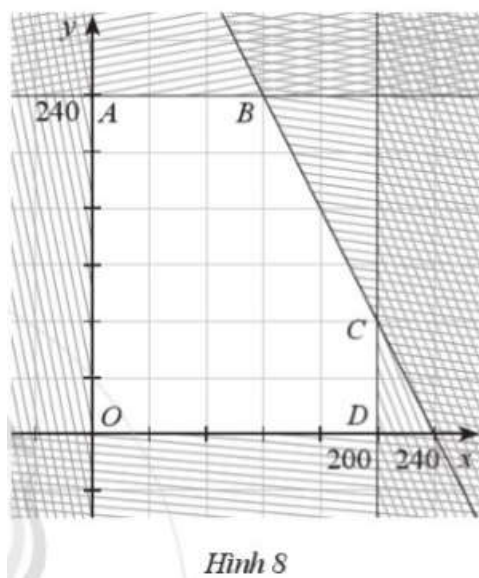
Tổng số tiền lãi thu được khi bán  $x$  chiếc mũ kiểu thứ nhất và  $y$  chiếc mũ kiểu thứ hai là:  $T = 24x + 15y$  (nghìn đồng).

Bài toán đưa về: Tìm các số nguyên  $x, y$  là nghiệm của hệ bất phương trình: 
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 200 \\ 0 \leq y \leq 240 \\ 2x + y \leq 480 \end{cases} \quad (II) \text{ sao}$$

cho  $T = 24x + 15y$  đạt giá trị lớn nhất.

Trước hết, ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (II).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (II) là miền ngũ giác  $OABCD$  với  $O(0;0)$ ,  $A(0;240)$ ,  $B(120;240)$ ,  $C(200;80)$ ,  $D(200;0)$  (Hình 8).



Ta có biểu thức  $T = 24x + 15y$  có giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của ngũ giác  $OABCD$ .

Tính giá trị của biểu thức  $T = 24x + 15y$  tại cặp số  $(x; y)$  là tọa độ các đỉnh ngũ giác  $OABCD$  rồi so sánh các giá trị đó. Ta được  $T$  đạt giá trị lớn nhất bằng 6480 khi  $x = 120$ ,  $y = 240$  ứng với tọa độ đỉnh  $B$ .

Vậy để thu được tiền lãi cao nhất thì trong một ngày, phân xưởng cần sản xuất 120 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu thứ 2. Khi đó tiền lãi thu được là 6480 nghìn đồng hay 6480000 đồng.

#### IV. BÀI TẬP

**Câu 10.** Cặp số nào sau đây là nghiệm của hệ bất phương trình 
$$\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \\ -x + y < 3 \end{cases} ?$$

A.  $\begin{cases} x+y \leq 4 \\ x+y \geq -1 \\ x-y \leq 2 \\ x-y \geq -2 \end{cases}$

B.  $\begin{cases} x-y \leq 4 \\ x-y \geq -1 \\ x+y \leq 2 \\ x+y \geq -2 \end{cases}$

C.  $\begin{cases} x+y \leq 1 \\ x+y \geq -4 \\ x-y \leq 2 \\ x-y \geq -2 \end{cases}$

D.  $\begin{cases} x-y \leq 1 \\ x-y \geq -4 \\ x+y \leq 2 \\ x+y \geq -2 \end{cases}$

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn A**

**Câu 14.** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $F = -x + y$  trên miền nghiệm của hệ bất phương trình  $\begin{cases} -2x + y \leq 2 \\ -x + 2y \geq 4 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$  là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn B**

**Câu 15.** Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

a)  $\begin{cases} x-2y \leq 3 \\ x+y \geq -3 \end{cases}$ ; b)  $\begin{cases} x+y \leq 5 \\ x-2y \leq 2 \\ x \geq -1 \end{cases}$ ; c)  $\begin{cases} -3x+2y < 6 \\ x-2y \geq -2 \\ 2x+y < 4 \end{cases}$

A.

B.

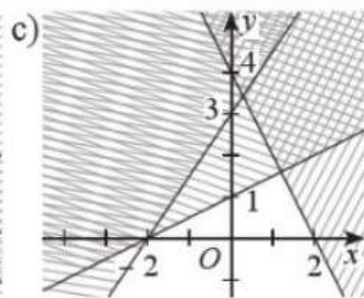
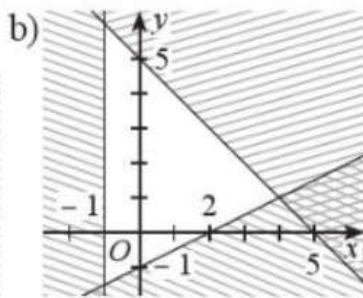
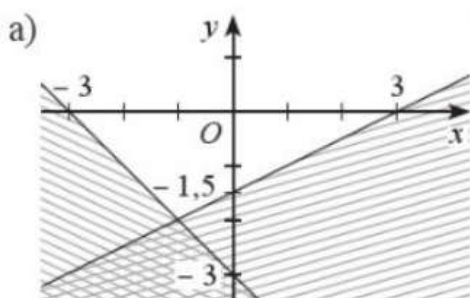
C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Ở mỗi ý, miền nghiệm là phần không bị gạch.



**Câu 16.** Viết hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn có miền nghiệm là miền đa giác không bị gạch ở mỗi Hình 10a, 10b.

b)  $F$  đạt giá trị lớn nhất bằng 31 tại  $x = 1, y = 4$ .  $F$  đạt giá trị nhỏ nhất bằng 3 tại  $x = 1, y = 0$ .

**Câu 18.** Anh Trung có kế hoạch đầu tư 400 triệu đồng vào hai khoản X và Y đạt được lợi nhuận thì khoản X phải đầu tư ít nhất 100 triệu đồng và số tiền đầu tư cho khoản Y không nhỏ hơn số tiền cho khoản X. Viết hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn để mô tả hai khoản đầu tư đó và biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình vừa tìm được.

A.

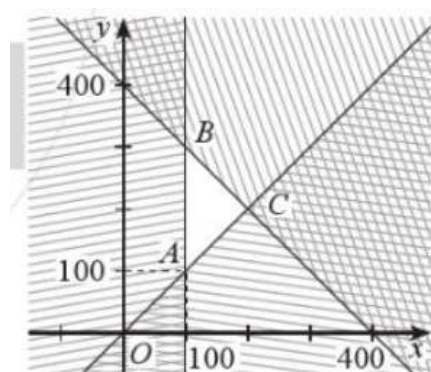
B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**



Hình 15

Gọi  $x, y$  lần lượt là số tiền anh Trung đầu tư cho hai khoản X và Y (đơn vị: triệu đồng).

Ta có hệ bất phương trình: 
$$\begin{cases} x + y \leq 400 \\ x \geq 100 \\ y \geq x. \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ là miền tam giác  $ABC$  với  $A(100; 100), B(100; 300), C(200; 200)$  (Hình 15).

**Câu 19.** Một phân xưởng may áo vest và quần âu để chuẩn bị cho dịp cuối năm. Biết may 1 áo vest hết 2m vải và cần 20 giờ, 1 quần âu hết 1,5m vải và cần 5 giờ. Xí nghiệp được giao sử dụng không quá 900m vải và số giờ công không vượt quá 6000 giờ. Theo khảo sát thị trường, số lượng quần áo bán ra không nhỏ hơn số số lượng áo và không vượt quá 2 lần số lượng áo. Khi xuất ra thị trường, 1 chiếc áo lãi 350 nghìn đồng, 1 chiếc quần lãi 100 nghìn đồng. Phân xưởng cần may bao nhiêu áo vest và quần âu để thu được tiền lãi cao nhất (biết thị trường tiêu thụ luôn đón nhận sản phẩm của xí nghiệp).

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Gọi  $x, y$  lần lượt là số áo vest và quần âu phân xưởng cần may ( $x \geq 0, y \geq 0, x, y \in \mathbb{Z}$ ). Tiền lãi thu được  $T = 350x + 100y$  (nghìn đồng).

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

**Câu 20.** Cặp số nào sau đây **không** là nghiệm của bất phương trình  $x - 2y \geq 5$ ?

- A.  $(3; -1)$ .                      B.  $(-1; 4)$ .                      C.  $(2; -3)$ .                      D.  $(1; -2)$ .

- A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 21.** Cặp số nào sau đây **không** là nghiệm của hệ bất phương trình  $\begin{cases} x - 2y > 4 \\ 2x + y > 6 \end{cases}$ ?

- A.  $(2; -1)$ .                      B.  $(7; 1)$ .                      C.  $(5; -1)$ .                      D.  $(6; -2)$ .

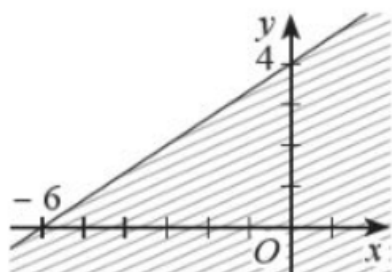
- A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn A

**Câu 22.** Phần không bị gạch (kể cả  $d$ ) ở Hình 11 là miền nghiệm của bất phương trình



Hình 11

- A.  $2x - 3y \leq -12$ .                      B.  $2x - 3y \geq -12$ .                      C.  $3x - 2y \leq -12$ .                      D.  $3x - 2y \geq 12$ .

- A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn A

**Câu 23.** Phần không bị gạch (Kể cả tia AB, AC) ở hình 12 là miền nghiệm của hệ bất phương trình

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Học sinh tự làm.

**Câu 27.** a) Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình sau: 
$$\begin{cases} 3x - y \leq 9 \\ 3x + 6y \leq 30 \\ x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases} \quad (I)$$

b) Tìm  $x, y$  là nghiệm của hệ phương trình trên sao cho biểu thức  $F = 3x + 4y$  đạt giá trị lớn nhất.

A.

B.

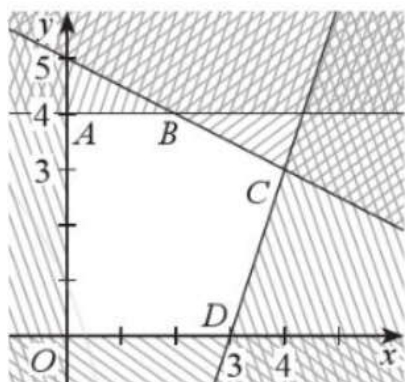
C.

D.

Lời giải

Chọn

a) Miền nghiệm là ngũ giác  $OABCD$  (Hình 17).



Hình 17

b)  $F$  đạt giá trị lớn nhất bằng 24 tại  $x = 4, y = 3$

**Câu 28.** Một trận bóng đá được tổ chức tại một sân vận động có sức chứa 40000 người, ban tổ chức phát hành hai loại vé là 400000 đồng và 200000 đồng. Do điều kiện sân đấu nên số lượng vé 400000 không lớn hơn số lượng vé 200000 đồng. Để an toàn phòng dịch, liên đoàn bóng đá yêu cầu số lượng vé phát hành không được quá 30% sức chứa của sân. Để tổ chức được trận đấu thì số tiền thu được qua bán vé không được ít hơn 3 tỉ đồng. Gọi  $x, y$  lần lượt là số vé 400000 đồng và 200000 đồng được bán ra.

a) Viết hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn  $x, y$  để biểu diễn số vé mỗi loại được bán ra đảm bảo mục đích của ban tổ chức.

b) Chỉ ra hai nghiệm của hệ bất phương trình đó.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

**Câu 30.** Hình 13 mô tả sơ đồ một sân khấu gắn với hệ trục tọa độ  $Oxy$  (đơn vị trên các trục là 1 mét). Phần thính phòng giới hạn bởi hai đường thẳng  $d_1, d_2$  là vị trí ngồi của khán giả có thể nhìn thấy dàn hợp xướng. Gọi  $(x; y)$  là tọa độ ngồi của khán giả ở thính phòng. Viết hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  mà khán giả có thể nhìn thấy dàn hợp xướng.



A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

$$\begin{cases} 2x - y < 24 \\ 2x + y > -24 \\ 10 \leq y \leq 22 \end{cases}$$

b) Vì bạn Hoa chỉ có tất cả là 420 nghìn đồng, nên tổng số tiền bạn Hoa đã ủng hộ không thể vượt quá 420 nghìn đồng. Vậy ta có  $10x + 20y \leq 420$ .

**Ví dụ 2:** Tìm bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong các bất phương trình sau:

a)  $9x - 7y - 5 \leq 0$  b)  $y \geq 9x + 9$ ;

c)  $y + 2022 > 0$ ; d)  $x - y^2 + 1 > 0$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Các bất phương trình a), b), c) là các bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bất phương trình d) không là bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì có chứa  $y^2$ .

**Ví dụ 3:** Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình  $10x + 20y \leq 420$  ?

a) (9;5); b) (2;400).

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Ta có:  $10.9 + 20.5 = 190 < 420$ .

Vậy (9;5) là nghiệm của bất phương trình  $10x + 20y \leq 420$ .

b) Ta có:  $10.2 + 20.400 = 8020 > 420$ .

Vậy (2;400) không phải là nghiệm của bất phương trình  $10x + 20y \leq 420$ .

**Ví dụ 4:** Cho biết 226g thịt bò chứa khoảng 59g protein. Một quả trứng nặng 46g có chứa khoảng 6g protein (nguồn: Bộ Nông nghiệp Hoa Kỳ). Giả sử có một người mỗi ngày cần không quá 60g protein. Gọi số gam thịt bò và số gam trứng mà người đó ăn trong một ngày lần lượt là  $x, y$ .

a) Lập bất phương trình theo  $x, y$  diễn tả giới hạn về lượng protein mà người đó cần mỗi ngày.

b) Dùng bất phương trình ở câu a) để trả lời hai câu hỏi sau:

- Nếu người đó ăn 150g thịt bò và 2 quả trứng, mỗi quả 46g, trong một ngày thì có phù hợp không?

- Nếu người đó ăn 200g thịt bò và 2 quả trứng, mỗi quả 46g, trong một ngày thì có phù hợp không?

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

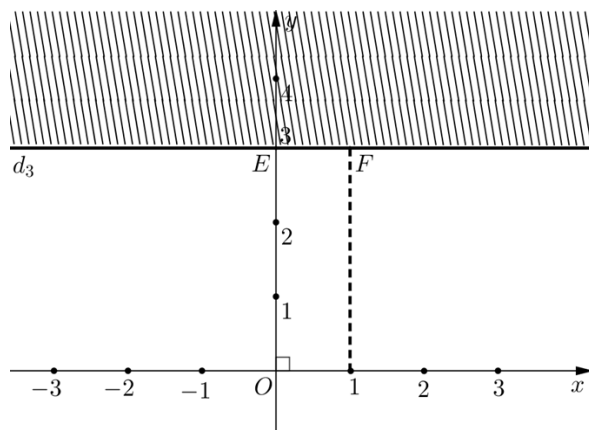
**Chọn**

a) Bất phương trình theo  $x, y$  diễn tả giới hạn về lượng protein mà người đó cần mỗi ngày là:

$$\frac{59}{226}x + \frac{6}{46}y = \frac{59}{226}x + \frac{3}{23}y \leq 60.$$

b) Ta có:

$$\frac{59}{226}.150 + \frac{3}{23}.2.46 \approx 51,16 < 60;$$



Xét gốc tọa độ  $O(0;0)$ .

Ta thấy  $O \notin d_3$  và  $0 - 3 < 0$ . Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng kể cả bờ  $d_3$ , chứa gốc tọa độ  $O$  (miền không gạch chéo trên Hình 3)

### III. BÀI TẬP

**Câu 1.** Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn:  $2x - 5y + 10 > 0$ .

a) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình trên mặt phẳng  $Oxy$ .

b)  $(1;3)$  có phải là nghiệm của bất phương trình trên hay không?

c) Chỉ ra 2 cặp số  $(x; y)$  thỏa mãn bất phương trình trên.

A.

B.

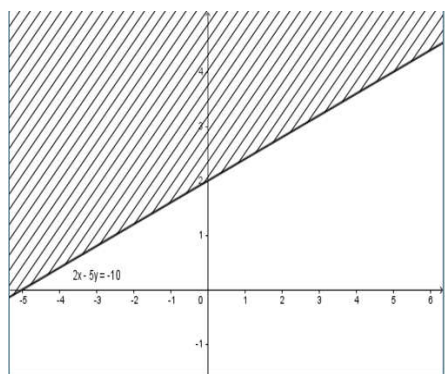
C.

D.

Lời giải

Chọn

a)



b)  $(1,3)$  không phải là nghiệm của bất phương trình đã cho..

c)  $(1,1)$  và  $(2,2)$ .

**Câu 2.** Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ :

a)  $x + y - 1 > 0$ ;

b)  $x - 1 \geq 0$ ;

c)  $-y + 2 \leq 0$ .

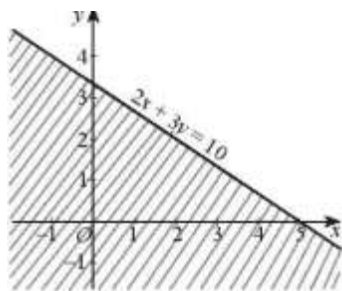
A.

B.

C.

D.

b)  $2(x-1)+3(y-2)>0 \Leftrightarrow 2x+3y>10$



**Câu 4.** Bạn Nga muốn pha hai loại nước rửa xe. Để pha một lít loại *I* cần 600ml dung dịch chất tẩy rửa, còn loại *II* chỉ cần 400ml. Gọi  $x$  và  $y$  lần lượt là số lít nước rửa xe loại *I* và *II* pha chế được và biết rằng Nga chỉ còn 2400ml chất tẩy rửa, hãy lập các bất phương trình mô tả số lít nước rửa xe loại *I* và *II* mà bạn Nga có thể pha chế được và biểu diễn miền nghiệm của từng bất phương trình đó trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

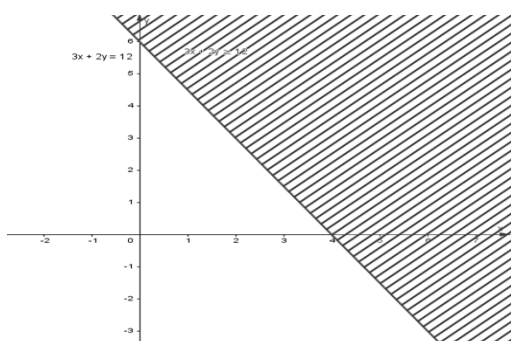
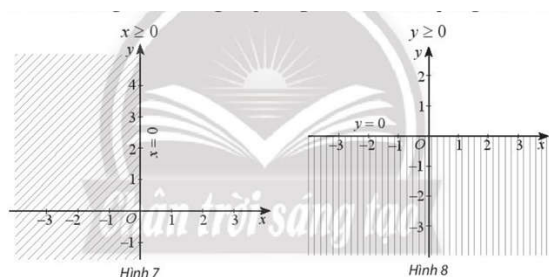
**Lời giải**

**Chọn**

Các bất phương trình mô tả số lít nước rửa xe loại *I* và loại *II* mà bạn Nga có thể pha chế được:  
 $x \geq 0; y \geq 0$ ;

$$600x + 400y \leq 2400 \Leftrightarrow 3x + 2y \leq 12.$$

Biểu diễn miền nghiệm của từng bất phương trình đó trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$



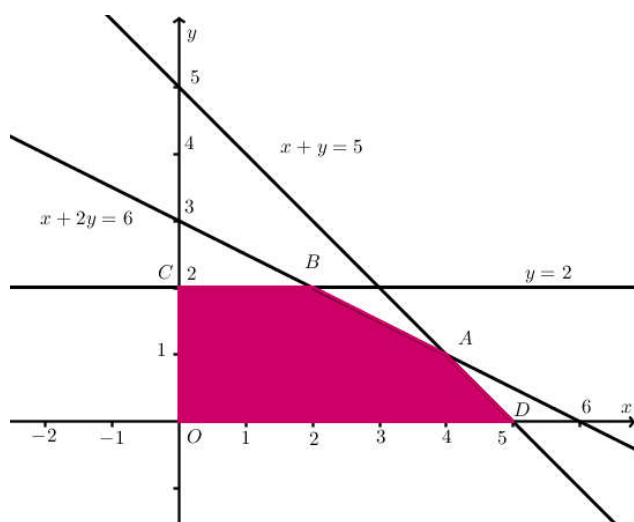
$$\begin{cases} 2x+2y \leq 10 \\ 2y \leq 4 \\ 2x+4y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \leq 5 \\ y \leq 2 \\ x+2y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

**Bước 3:** Xây dựng hàm mục tiêu cho giá trị mà ta muốn đạt giá trị tối ưu.

$F = 3x + 5y$  (Tiền lãi của phương án sản xuất mà ta muốn đạt lớn nhất).

**Bước 4:** Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình (1) trên hệ trục tọa độ  $Oxy$  ta được một đa giác. Tìm tọa độ các đỉnh của đa giác.

Miền nghiệm là ngũ giác  $OCBAD$ , trong đó  $O(0;0); C(0;2); B(2;2); A(4;1); D(5;0)$ .



Hình 1

**Bước 5.** Do người ta đã chứng minh được  $F$  đạt GTLN hoặc GTNN tại một trong các đỉnh của đa giác nên ta chỉ cần tính các giá trị của hàm mục tiêu  $F$  tại các đỉnh của đa giác. Tìm ra đỉnh tại đó  $F$  đạt GTLN hoặc GTNN. Tọa độ của đỉnh này là phương án tối ưu cần tìm.

Tính giá trị của  $F$  tại các đỉnh

Tại  $O(0;0): F = 3.0 + 5.0 = 0$  Tại  $C(0;2): F = 3.0 + 5.2 = 10$

Tại  $B(2;2): F = 3.2 + 5.2 = 16$  Tại  $A(4;1): F = 3.4 + 5.1 = 17$

Tại  $D(5;0): F = 3.5 + 5.0 = 15$

Tại đỉnh  $A(4;1)$ ,  $F$  đạt giá trị lớn nhất là 17

**Bước 6.** Nêu kết luận dựa trên ngôn ngữ thực tế của bài toán.

Vậy phương án sản xuất tối ưu là làm ra 4 kg sản phẩm P và 1 kg sản phẩm Q. Khi đó sẽ có lãi cao nhất là 17 triệu đồng.

## II. VÍ DỤ MẪU

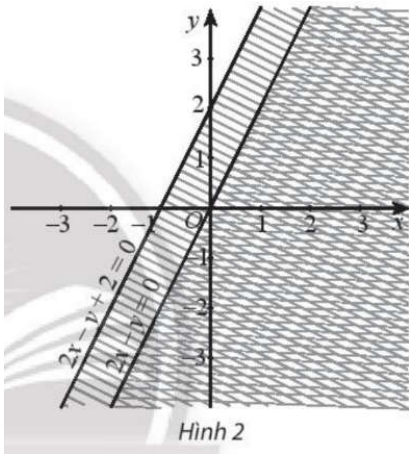
**Ví dụ 6:** Cho các bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $2x + 3y - 5 \leq 0$  và  $x + 5y + 1 \geq 0$ . Cặp số nào sau đây thỏa mãn đồng thời cả hai bất phương trình đã cho?

## Lời giải

### Chọn

Hệ đã cho được viết lại thành 
$$\begin{cases} 2x - y + 2 \leq 0 \\ 2x - y \leq 0 \end{cases}$$

Biểu diễn từng miền nghiệm của mỗi bất phương trình trên mặt phẳng  $Oxy$ , ta được như hình 2.



Hình 2

Miền không gạch chéo (kể cả bờ) là phần giao của hai miền nghiệm của hai bất phương trình và cũng là phần biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

**Ví dụ 9:** Biểu diễn miền nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 5y \leq 10 \\ x + y \leq 3 \end{cases}$$

A.

B.

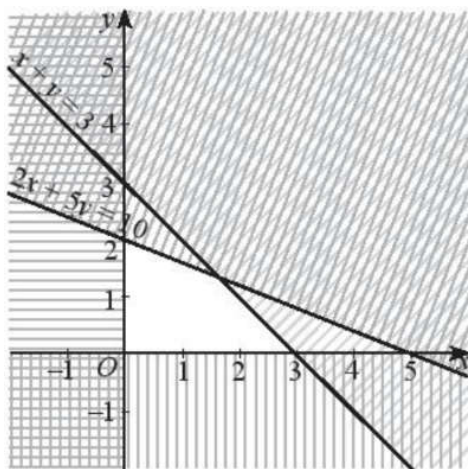
C.

D.

## Lời giải

### Chọn

Miền không gạch chéo (kể cả bờ) trong hình 3 là phần biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.



Hình 3

**Ví dụ 10:** Bác Năm dự định trồng khoai lang và khoai mì trên mảnh đất có diện tích 8 ha. Nếu trồng 1 ha khoai lang thì cần 10 ngày công và thu được 20 triệu đồng. Nếu trồng 1 ha khoai mì thì cần 15 ngày công và thu được 25 triệu đồng. Bác Năm cần trồng bao nhiêu hecta cho mỗi loại cây để thu được nhiều tiền

A.

B.

C.

D.

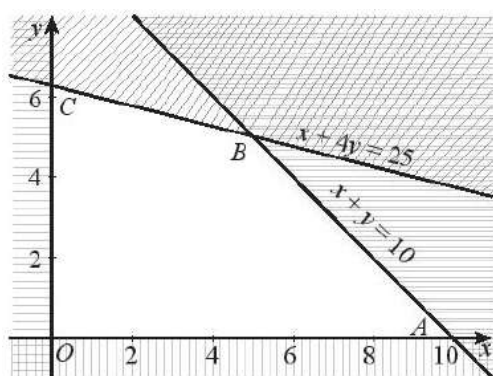
## Lời giải

## Chọn

Gọi  $x$  và  $y$  lần lượt là số lít nước nho loại A và B người đó có thể pha chế. Ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x + 4y \leq 25 \\ x + y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tứ giác  $OABC$ , trong đó  $O(0;0)$ ;  $A(10;0)$ ;  $B(5;5)$ ;  $C(0;6,25)$ .



Hình 5

Gọi  $F$  là số tiền lãi (đơn vị: nghìn đồng) thu được, ta có:  $F = 30x + 40y$ .

Ta có: Tại  $O(0;0)$ :  $F = 30.0 + 40.0 = 0$ ;

Tại  $A(10;0)$ :  $F = 30.10 + 40.0 = 300$ ;

Tại  $B(5;5)$ :  $F = 30.5 + 40.5 = 350$ ;

Tại  $C(0;6,25)$ :  $F = 30.0 + 40.6,25 = 250$ .

Ta thấy  $F$  đạt GTLN bằng 350 tại  $B(5;5)$ .

Vậy người đó nên pha chế 5l nước nho mỗi loại để có lợi nhuận cao nhất.

## III. BÀI TẬP

**Câu 5.** Biểu diễn miền nghiệm của mỗi hệ bất phương trình sau đây:

a) 
$$\begin{cases} x + y - 4 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x + 2y - 5 < 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

A.

B.

C.

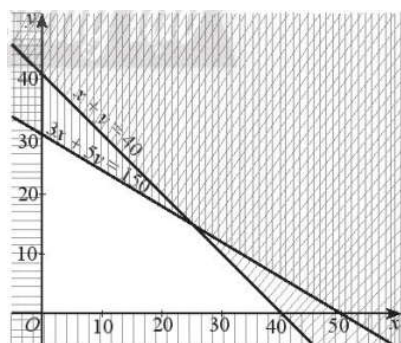
D.

## Lời giải

### Chọn

Gọi  $x$  là số xe du lịch và  $y$  là số xe tải mà chủ bãi xe nên cho đậu một đêm. Ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x + y \leq 40 \\ 3x + 5y \leq 150 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Hình 4

Miền không gạch chéo bao gồm cả các cạnh trong Hình 4 là phần giao của các miền nghiệm và cũng là phần biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên.

Số tiền chủ bãi xe thu được  $F = 40x + 50y$  đạt GTLN bằng 1750 nghìn đồng tại  $(25; 15)$ . Vậy để có doanh thu cao nhất, chủ bãi xe có thể cho đăng kí 25 chiếc xe du lịch và 15 chiếc xe tải.

**Câu 8.** Cho biết mỗi kilôgam thịt bò giá 250 nghìn đồng, trong đó có chứa khoảng 800 đơn vị protein và 100 đơn vị lipid, mỗi kilôgam thịt heo có giá 200 nghìn đồng, trong đó có chứa khoảng 600 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid. Một gia đình cần ít nhất 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid trong khẩu phần thức ăn mỗi ngày và họ chỉ có thể mua một ngày không quá 1kg thịt bò và 1,5kg thịt heo. Hỏi gia đình này phải mua bao nhiêu kilôgam thịt mỗi loại để chi phí là ít nhất?

A.

B.

C.

D.

## Lời giải

### Chọn

Gọi  $x$  và  $y$  lần lượt là số kilôgam thịt bò và thịt heo có thể mua. Ta có hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 4x + 3y \geq 4 \\ x + 2y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ x \leq 1 \\ y \geq 0 \\ y \leq 1,5 \end{cases}$$

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

### I. TRẮC NGHIỆM

**Câu 9.** Bạn Danh để dành được 900 nghìn đồng. Trong một đợt ủng hộ trẻ em mồ côi, Danh đã lấy ra  $x$  tờ tiền loại 50 nghìn đồng,  $y$  tờ tiền loại 100 nghìn đồng để trao tặng. Một bất phương trình mô tả điều kiện ràng buộc đối với  $x, y$  là:

- A.  $50x + 100y \leq 900$ ;      B.  $50x + 100y \geq 900$ ;      C.  $100x + 50y \leq 900$ ;      D.  $x + y = 900$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn A

**Câu 10.** Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào không phải là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- A.  $2x - 3y - 2022 \leq 0$ ;      B.  $5x + y \geq 2x + 11$ ;      C.  $x + 2025 > 0$ ;      D.  $\frac{x}{y} + 1 > 0$ .

A.

B.

C.

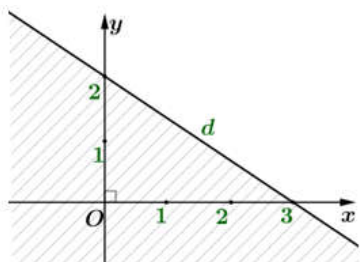
D.

Lời giải

Chọn

Chọn D

**Câu 11.** Miền không gạch chéo (không kể bờ  $d$ ) trong Hình 1 là miền nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình dưới đây?



Hình 1

- A.  $2x + 3y < 6$ ;      B.  $2x + 3y > 6$       C.  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} > 0$ ;      D.  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} < 1$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

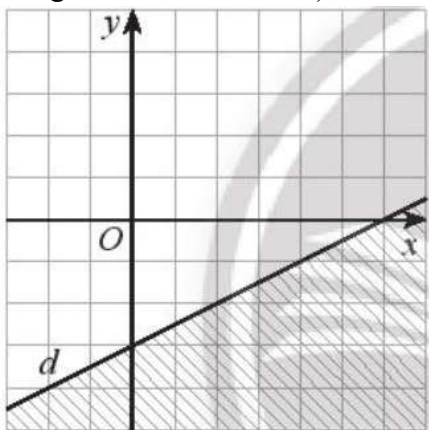
Chọn

Chọn B

**Câu 12.** Miền tam giác không gạch chéo trong Hình 2 là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào trong các hệ bất phương trình dưới đây?

## II. TỰ LUẬN

**Câu 15.** Tìm bất phương trình có miền nghiệm là miền không gạch chéo (kể cả bờ  $d$ ), trong Hình 4 (mỗi ô vuông có cạnh là 1 đơn vị).



Hình 4 Hình 5

A.

B.

C.

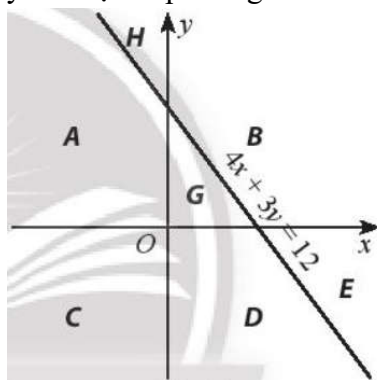
D.

Lời giải

Chọn

$$x - 2y - 6 \leq 0$$

**Câu 16.** Đường thẳng  $4x + 3y = 12$  và hai trục toạ độ chia mặt phẳng  $Oxy$  thành các miền như Hình 5. Hãy tìm hệ bất phương trình có miền nghiệm là miền B (kể cả bờ).



A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

$$\begin{cases} 4x + 3y - 12 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

**Câu 17.** Tìm giá trị của  $F$  và  $G$  tương ứng với các giá trị  $x, y$  được cho trong bảng dưới đây

|               |   |   |   |   |   |   |   |
|---------------|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$           | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 |
| $y$           | 2 | 4 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $F = 4x + 5y$ |   |   |   |   |   |   |   |
| $G = 5x - 3y$ |   |   |   |   |   |   |   |

Trong các giá trị tìm được

a) Tìm GTLN của  $F$ .

b) Tìm GTNN của  $G$ .

## Lời giải

### Chọn

$$\begin{cases} 7x + 30y \leq 340 \\ x \geq 10 \\ y \geq 10 \end{cases}$$

**Câu 22.** Một học sinh dự định làm các bình hoa bằng giấy để bán trong một hội chợ gây quỹ từ thiện. Cần 1 giờ để làm một bình hoa loại nhỏ và sẽ bán với giá 100 nghìn đồng, 90 phút để làm một bình hoa loại lớn và sẽ bán với giá 200 nghìn đồng. Học sinh này chỉ thu xếp được 15 giờ nghỉ để làm và ban tổ chức yêu cầu phải làm ít nhất là 12 bình hoa. Hãy cho biết bạn ấy cần làm bao nhiêu bình hoa mỗi loại để gây quỹ được nhiều tiền nhất.

A.

B.

C.

D.

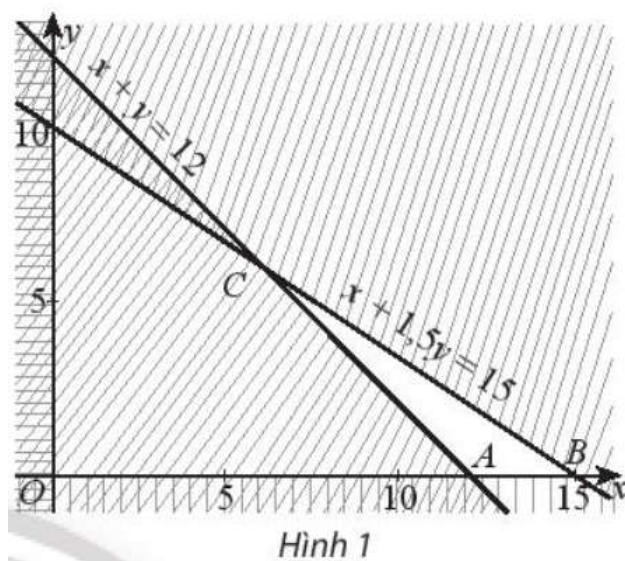
## Lời giải

### Chọn

Gọi  $x$  và  $y$  lần lượt là số bình hoa loại nhỏ và loại lớn mà bạn học sinh có thể làm được.

Ta có hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} x + y \geq 12 \\ x + 1,5y \leq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$



Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình ta được miền tam giác  $ABC$  có tọa độ các đỉnh là:  $A(12;0), B(15;0), C(6;6)$  (Hình 1).

Số tiền gây quỹ  $F = 100x + 200y$  đạt GTLN là 1800 nghìn đồng tại đỉnh  $C(6;6)$ .

Vậy bạn đó cần làm 6 cái bình hoa mỗi loại để gây quỹ được nhiều tiền nhất.

**Câu 23.** Một xưởng sản xuất có 12 tấn nguyên liệu A và 8 tấn nguyên liệu B để sản xuất hai loại sản phẩm X, Y. Để sản xuất một tấn sản phẩm X cần dùng 6 tấn nguyên liệu A và 2 tấn nguyên liệu B, khi bán lãi được 10 triệu đồng. Để sản xuất một tấn sản phẩm Y cần dùng 2 tấn nguyên liệu A và 2 tấn nguyên liệu B, khi bán lãi được 8 triệu đồng. Hãy lập kế hoạch sản xuất cho xưởng nói trên sao cho có tổng số tiền lãi cao nhất.

A.

B.

C.

D.

## Lời giải

### Chọn

## CHƯƠNG II: BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

### BÀI 3: BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

#### I. LÝ THUYẾT

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  có dạng tổng quát là:

$$ax + by \leq c \quad (ax + by \geq c; ax + by < c; ax + by > c),$$

trong đó  $a, b, c$  là những số thực đã cho,  $a$  và  $b$  không đồng thời bằng 0,  $x$  và  $y$  là các ẩn số.

2. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $ax + by \leq c$  như sau:

- Vẽ đường thẳng  $d: ax + by = c$  trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ .

- Lấy một điểm  $M_0(x_0; y_0)$  không thuộc  $d$ .

- Tính  $ax_0 + by_0$  và so sánh với  $c$ .

- Nếu  $ax_0 + by_0 < c$  thì nửa mặt phẳng bờ  $d$  chứa  $M_0$  là miền nghiệm của bất phương trình. Ngược lại nếu  $ax_0 + by_0 > c$  thì nửa mặt phẳng bờ  $d$  không chứa  $M_0$  là miền nghiệm của bất phương trình.

**Chú ý.** Trong quy tắc trên, khi  $c \neq 0$  người ta thường chọn  $M_0$  là gốc tọa độ. Khi  $c = 0$ , ta chọn  $M_0$  khác gốc tọa độ (chẳng hạn điểm  $(1;0)$  hoặc  $(0;1)$ ).

#### II. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 1:** Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x + 2y \leq 3$ .

a) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình đã cho trên mặt phẳng tọa độ.

b) Từ đó xác định miền nghiệm của bất phương trình  $x + 2y < 3$  và miền nghiệm của bất phương trình  $x + 2y > 3$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

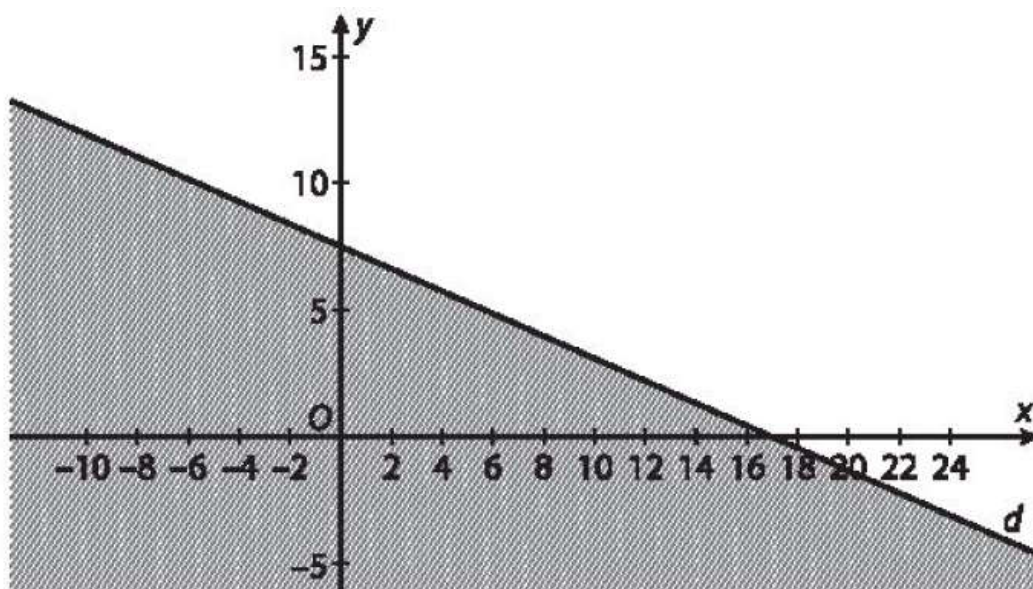
**Chọn**

a) Ta biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình đã cho như sau:

**Bước 1.** Vẽ đường thẳng  $d: x + 2y = 3$  trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ .

**Bước 2:** Trong bất phương trình này, ta thấy  $c = 3 \neq 0$ . Ta chọn  $O(0;0)$  là điểm không thuộc  $d$  và thay vào biểu thức  $x + 2y$ , ta có:  $0 + 2.0 = 0 < 3$ .

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình đã cho là nửa mặt phẳng bờ  $d$  chứa gốc tọa độ (miền không bị gạch).



Hình 2.2

Vậy nếu anh An bán được số máy giặt là  $x (x \in \mathbb{N})$  và số tủ lạnh là  $y (y \in \mathbb{N})$  sao cho điểm  $(x; y)$  nằm trong nửa mặt phẳng bờ  $d$  không chứa gốc tọa độ thì anh An nhận được từ 10 triệu đồng trở lên tiền hoa hồng.

### III. BÀI TẬP

**Câu 1.** Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $-3x + y < 4$ .

- Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình đã cho trên mặt phẳng tọa độ.
- Từ đó suy ra miền nghiệm của bất phương trình  $-3x + y \leq 4$  và miền nghiệm của bất phương trình  $-3x + y \geq 4$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

- Miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ đ.  $d: -3x + y = 4$  chứa gốc tọa độ và bỏ đi đường thẳng  $d$ .
  - Miền nghiệm của bất phương trình  $-3x + y \leq 4$  là nửa mặt phẳng bờ  $d: -3x + y = 4$  chứa gốc tọa độ.
- Miền nghiệm của bất phương trình  $-3x + y \geq 4$  là nửa mặt phẳng bờ  $d: -3x + y = 4$  không chứa gốc tọa độ.

**Câu 2.** Cho bất phương trình  $2x + 3y + 3 \leq 5x + 2y + 3$ .

Bằng cách chuyển vế, hãy đưa bất phương trình trên về dạng tổng quát của bất phương trình bậc nhất hai ẩn. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn đó trên mặt phẳng tọa độ.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Câu 5.** Một cửa hàng bán lẻ bán hai loại hạt cà phê. Loại thứ nhất giá 140 nghìn đồng/kg và loại thứ hai giá 180 nghìn đồng/kg. Cửa hàng trộn  $x$  kg loại thứ nhất và  $y$  kg loại thứ hai sao cho hạt cà phê đã trộn có giá không quá 170 nghìn đồng/kg.

- a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  thoả mãn điều kiện đề bài.  
b) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình tìm được ở câu a trên mặt phẳng tọa độ.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

### Lời giải

#### Chọn

- a) Theo đề bài, ta có:

$$140x + 180y \leq 170(x + y).$$

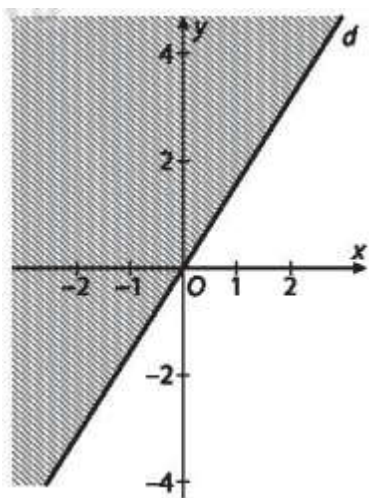
Bằng cách chuyển vế ta được bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $30x - 10y \geq 0$  hay  $3x - y \geq 0$ .

- b) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $3x - y \geq 0$ .

Bước 1. Vẽ đường thẳng  $d: 3x - y = 0$  trên mặt phẳng tọa độ.

Bước 2. Lấy điểm  $M(1; 0)$  không thuộc  $d$  và điểm  $M$  thoả mãn  $3.1 - 0 = 3 > 0$ .

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ  $d$  chứa điểm  $M(1; 0)$ .



- Vẽ đường thẳng  $d : x + y = 2$  trên mặt phẳng tọa độ.

- Tọa độ của điểm  $O(0;0)$  thỏa mãn  $0 + 0 = 0 < 2$  nên miền nghiệm  $D_1$  của bất phương trình  $x + y \leq 2$  là nửa mặt phẳng bờ  $d$  chứa gốc tọa độ (miền không bị gạch).

*Bước 2.* Xác định miền nghiệm  $D_2$  của bất phương trình  $y - x \leq 2$  và gạch bỏ phần còn lại.

- Vẽ đường thẳng  $d' : y - x = 2$  trên mặt phẳng tọa độ.

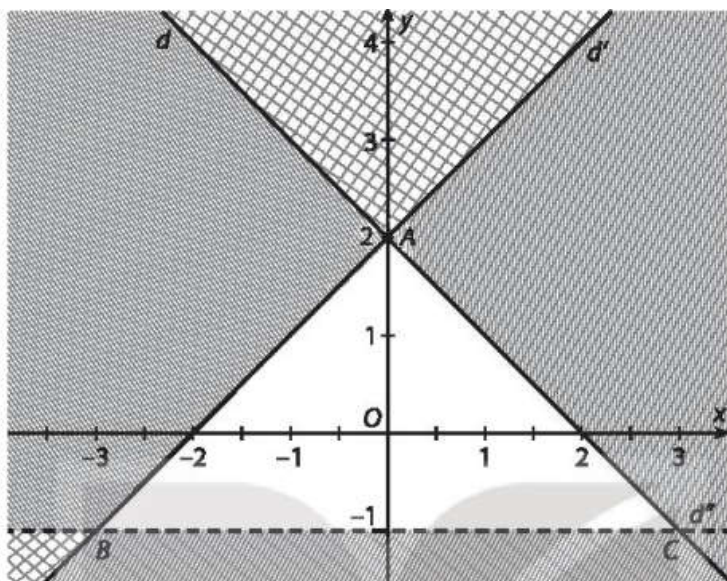
- Tọa độ điểm  $O(0;0)$  thỏa mãn  $0 - 0 = 0 < 2$ . Do đó, miền nghiệm  $D_2$  của bất phương trình  $y - x \leq 2$  là nửa mặt phẳng bờ  $d'$  chứa gốc tọa độ (miền không bị gạch).

*Bước 3.* Xác định miền nghiệm  $D_3$  của bất phương trình  $y > -1$  và gạch bỏ phần còn lại.

- Vẽ đường thẳng  $d'' : y = -1$  trên mặt phẳng tọa độ.

- Tọa độ điểm  $O(0;0)$  thỏa mãn  $0 > -1$ . Do đó, miền nghiệm  $D_3$  của bất phương trình  $y > -1$  là nửa mặt phẳng bờ  $d''$  chứa gốc tọa độ và không kể đường thẳng  $d''$  (miền không bị gạch).

Khi đó, miền nghiệm của hệ là miền không bị gạch hay miền tam giác  $ABC$  bỏ đi cạnh  $BC$ .



**Ví dụ 4:** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $F(x; y) = x + 2y$  với  $(x; y)$  thuộc miền

ng nghiệm của hệ bất phương trình 
$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$

A.

B.

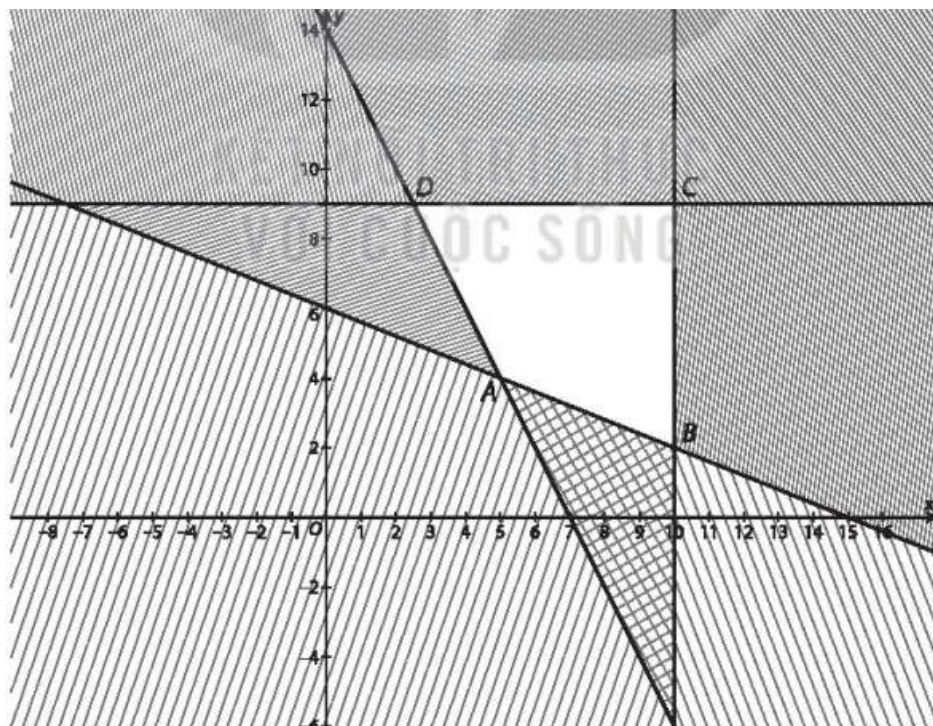
C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Bước 1. Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên. Miền nghiệm là miền tứ giác  $ABCD$  với  $A(5;4)$ ,  $B(10;2)$ ,  $C(10;9)$ ,  $D(2,5;9)$  (H.2.6).



Hình 2.6

**Bước 2.** Tính giá trị của  $F$  tại các đỉnh của tứ giác  $ABCD$ .

Ta có:  $F(5;4) = 32$ ,  $F(10;2) = 46$ ,  $F(10;9) = 67$ ,  $F(2,5;9) = 37$ .

So sánh các giá trị này ta thấy  $F(5;4)$  là nhỏ nhất. Do đó, giá trị nhỏ nhất của  $F(x;y)$  với  $(x;y)$  thỏa mãn hệ bất phương trình trên là  $F(5;4) = 32$ .

Vậy người ta cần mua 5 tấn nguyên liệu loại  $I$  và 4 tấn nguyên liệu loại  $II$  để chi phí là nhỏ nhất.

### III. BÀI TẬP

**Câu 6.** Biểu diễn miền nghiệm của các hệ bất phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ:

a) 
$$\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 4 \end{cases}.$$

b) 
$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x - y - 4 < 0 \end{cases}.$$

c) 
$$\begin{cases} y \leq 3 \\ x \leq 3 \\ x \geq -1 \\ y \geq -2 \end{cases}.$$

A.

B.

C.

D.

A.

B.

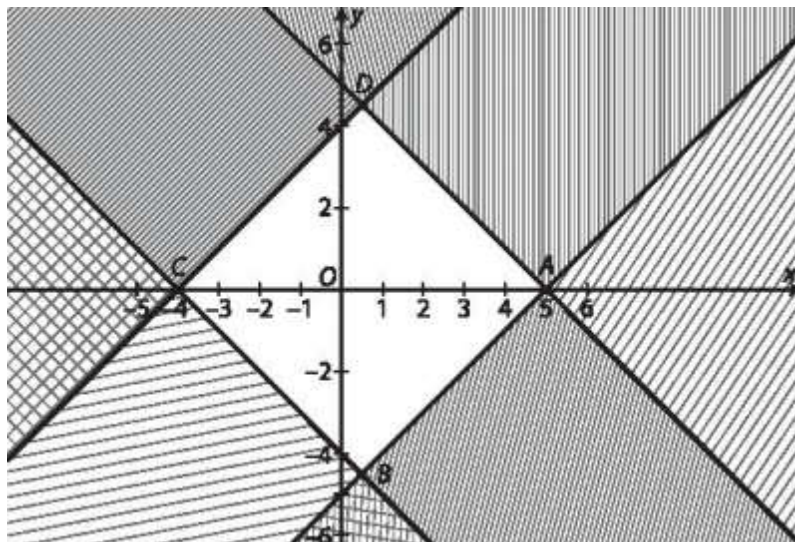
C.

D.

## Lời giải

## Chọn

Miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là hình vuông  $ABCD$  với  $A(5;0)$ ,  $B(0,5;-4,5)$  và  $C(-4;0)$  và  $D(0,5;4,5)$ .



Tính giá trị của  $F$  tại các đỉnh của tứ giác  $F(5;0) = 20$ ,  $F(0,5;-4,5) = \frac{31}{2}$ ,  $F(-4;0) = -16$  và  $F(0,5;4,5) = \frac{-23}{2}$ . So sánh các giá trị đó ta được giá trị lớn nhất cần tìm là  $F(5;0) = 20$  và giá trị nhỏ nhất cần tìm là  $F(-4;0) = -16$ .

**Câu 9.** Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 12 g hương liệu, 9 lít nước và 315 g đường để pha chế hai loại nước  $A$  và  $B$ . Để pha chế 1 lít nước  $A$  cần 45 g đường, 1 lít nước và 0,5 g hương liệu; để pha chế 1 lít nước  $B$  cần 15 g đường, 1 lít nước và 2 g hương liệu. Mỗi lít nước  $A$  nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước  $B$  nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước mỗi loại để đội chơi được số điểm thưởng là lớn nhất?

A.

B.

C.

D.

## Lời giải

## Chọn

Gọi  $x$  và  $y$  lần lượt là số lít nước loại  $A$  và  $B$  cần pha chế. Khi đó, theo đề bài ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 9 \\ 45x + 15y \leq 315 \\ 0,5x + 2y \leq 12 \end{cases}$$

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

### I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 10.** Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- A.  $2x^2 + 3y > 4$ .      B.  $xy + x < 5$ .      C.  $3^2x + 4^3y \geq 6$ .      D.  $x + y^3 \leq 3$ .

- A.      B.      C.      D.

Lời giải

Chọn

Chọn C

**Câu 11.** Trong các hệ bất phương trình sau, hệ bất phương trình nào là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- A.  $\begin{cases} 2x + 3y > 4 \\ 2^3x + 3y^2 < 1 \end{cases}$       B.  $\begin{cases} x + y > 4 \\ 2^3x + 3^2y < 1 \end{cases}$       C.  $\begin{cases} x > 3 \\ y < 2 \\ x + y \geq y^2 \end{cases}$       D.  $\begin{cases} x - y \leq 3 \\ y < 1 \\ x + y \geq x + xy \end{cases}$

- A.      B.      C.      D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 12.** Điểm nào dưới đây thuộc miền nghiệm của bất phương trình  $2x + 5y \leq 10$ ?

- A.  $(5; 2)$ .      B.  $(-1; 4)$ .      C.  $(2; 1)$ .      D.  $(-5; 6)$ .

- A.      B.      C.      D.

Lời giải

Chọn

Chọn C

**Câu 13.** Điểm nào dưới đây **không** thuộc miền nghiệm của bất phương trình  $2x - 3y > 13$ ?

- A.  $(1; -5)$ .      B.  $(2; -4)$ .      C.  $(3; -3)$ .      D.  $(8; 1)$ .

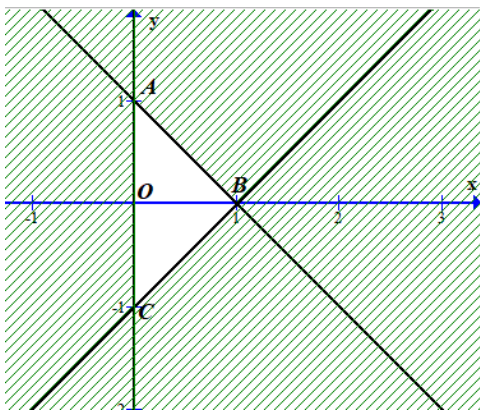
- A.      B.      C.      D.

Lời giải

Chọn

Chọn D

**Câu 14.** Cho bất phương trình  $x + 2y \leq 3$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?



**A.**  $\begin{cases} x - y \geq 1 \\ x + y \geq -1. \\ x \geq 0 \end{cases}$

**B.**  $\begin{cases} x + y \leq 1 \\ x - y \leq 1. \\ x \geq 0 \end{cases}$

**C.**  $\begin{cases} x - y \geq -1 \\ x + y \geq -1. \\ x \geq 0 \end{cases}$

**D.**  $\begin{cases} x - y \geq -1 \\ x + y \geq -1. \\ y \geq 0 \end{cases}$

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn B**

**Câu 18.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình  $\begin{cases} x \geq -1 \\ x + y \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$  là

**A.** Một nửa mặt phẳng.

**B.** Miền tam giác.

**C.** Miền tứ giác.

**D.** Miền ngũ giác.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn B**

**Câu 19.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình  $\begin{cases} x + y \leq 1 \\ -3 \leq y \leq 3 \\ -3 \leq x \leq 3 \end{cases}$  là

**A.** Miền lục giác.

**B.** Miền tam giác.

**C.** Miền tứ giác.

**D.** Miền ngũ giác.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn D**

## Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 24.** Một hợp tác xã chăn nuôi dự định trộn hai loại thức ăn gia súc  $X$  và  $Y$  để tạo thành thức ăn hỗn hợp cho gia súc. Giá một bao loại  $X$  là 250 nghìn đồng, giá một bao loại  $Y$  là 200 nghìn đồng. Mỗi bao loại  $X$  chứa 2 đơn vị chất dinh dưỡng A, 2 đơn vị chất dinh dưỡng B và 2 đơn vị chất dinh dưỡng C. Mỗi bao loại  $Y$  chứa 1 đơn vị chất dinh dưỡng A, 9 đơn vị chất dinh dưỡng B và 3 đơn vị chất dinh dưỡng C. Tìm chi phí nhỏ nhất để mua hai loại thức ăn gia súc  $X$  và  $Y$  sao cho hỗn hợp thu được chứa tối thiểu 12 đơn vị chất dinh dưỡng A, 36 đơn vị chất dinh dưỡng B và 24 đơn vị chất dinh dưỡng C.

A. 1,95 triệu đồng.      B. 4,5 triệu đồng.      C. 1,85 triệu đồng.      D. 1,7 triệu đồng.

A.      B.      C.      D.

## Lời giải

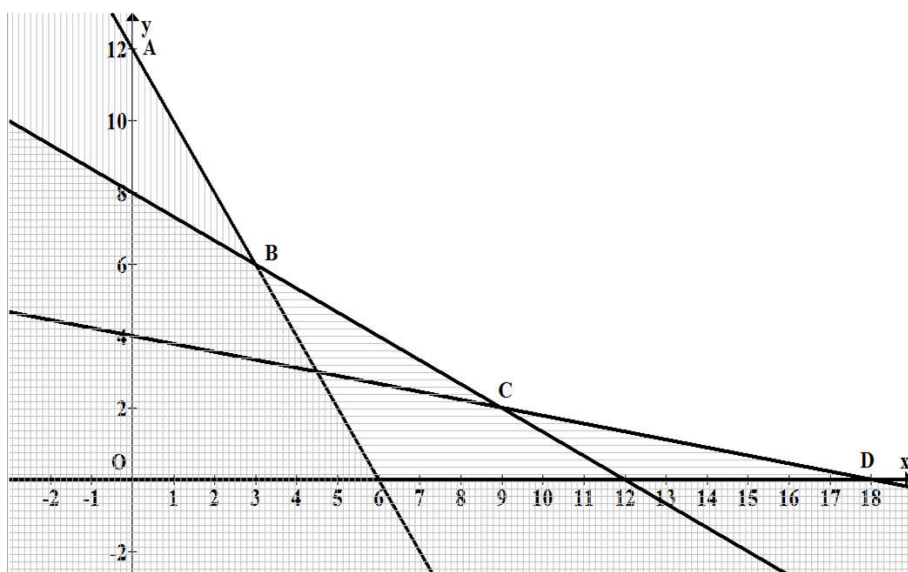
Chọn

Chọn A

Gọi  $x$  và  $y$  tương ứng là số bao loại  $X$  và loại  $Y$ . Khi đó, theo đề bài ta có hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \geq 12 \\ 2x + 9y \geq 36 \\ 2x + 3y \geq 24 \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ là miền có các đỉnh  $A(0;12), B(3;6), C(9;2), D(18; 0)$  (miền không bị gạch).



Chi phí để mua hai loại thức ăn là  $F(x; y) = 250x + 200y$  (nghìn đồng).

Thay giá trị tại các đỉnh ta có  $F(0;12) = 2400, F(3;6) = 1950, F(9;2) = 2650, F(18; 0) = 4500$ . Do đó, giá trị nhỏ nhất là  $F(3;6) = 1950$ . Vậy chi phí nhỏ nhất để mua hai loại thức ăn là 1,95 triệu đồng.

$$F(-5; -1) = -13, F(5; -1) = 7, F(3; 1) = 9, F(-3; 1) = -3$$

Vậy giá trị lớn nhất là  $F(3; 1) = 9$  và giá trị nhỏ nhất là  $F(-5; -1) = -13$ .

**Câu 28.** Một phân xưởng có hai máy chuyên dụng  $M_1$  và  $M_2$  để sản xuất hai loại sản phẩm  $A$  và  $B$  theo đơn đặt hàng. Nếu sản xuất được một tấn sản phẩm loại  $A$  thì phân xưởng nhận được số tiền lãi là 2 triệu đồng. Nếu sản xuất được một tấn sản phẩm loại  $B$  thì phân xưởng nhận được số tiền lãi là 1,6 triệu đồng. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại  $A$ , người ta phải dùng máy  $M_1$  trong 3 giờ và máy  $M_2$  trong 1 giờ. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại  $B$ , người ta phải dùng máy  $M_1$  trong 1 giờ và máy  $M_2$  trong 1 giờ. Một máy không thể dùng để sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm. Máy  $M_1$  làm việc không quá 6 giờ một ngày và máy  $M_2$  làm việc không quá 4 giờ một ngày. Hỏi số tiền lãi lớn nhất mà phân xưởng này có thể thu được trong một ngày là bao nhiêu?

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

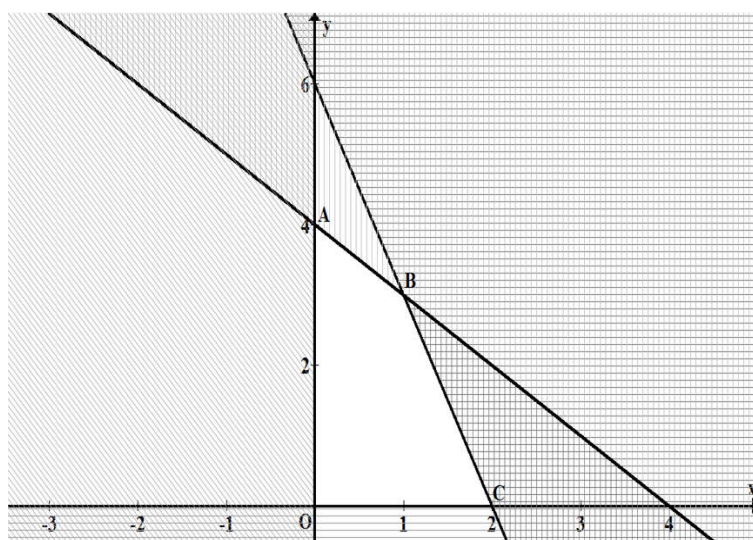
**Chọn**

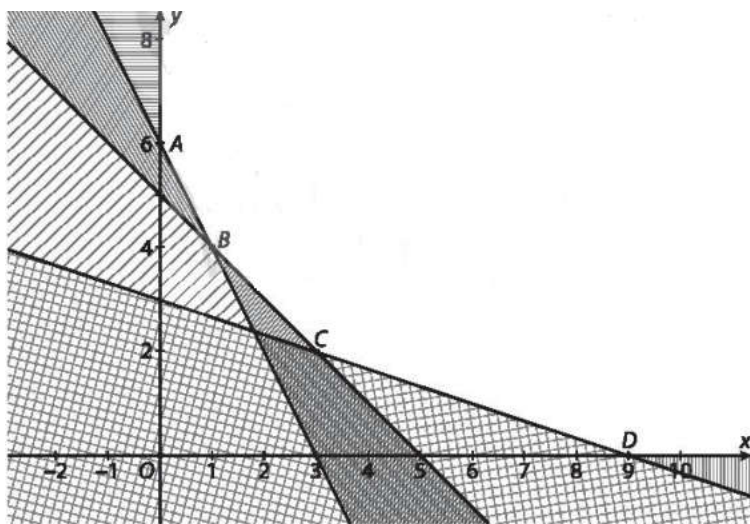
Gọi  $x$  và  $y$  lần lượt là số tấn sản phẩm loại  $A$  và loại  $B$  mà phân xưởng sản xuất được. Khi đó, theo

$$\text{đề bài ta có hệ bất phương trình } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4. \end{cases}$$

Số tiền lãi phân xưởng thu được là  $F(x; y) = 2x + 1,6y$  (triệu đồng). Ta cần tìm giá trị lớn nhất của  $F(x; y)$  với  $(x; y)$  thỏa mãn hệ trên.

Miền nghiệm là miền tứ giác  $OABC$  với  $O(0; 0)$ ,  $A(0; 4)$ ,  $B(1; 3)$  và  $C(2; 0)$ .





b) Chi phí cho hai loại đồ uống là  $F(x; y) = 12x + 15y$  (nghìn đồng).

c) Ta tính giá trị của  $F$  tại các đỉnh:  $F(0; 6) = 90, F(1; 4) = 72, F(3; 2) = 66, F(9; 0) = 108$ . Do đó  $F$  nhỏ nhất tại  $(x; y) = (3; 2)$ .

Vậy người đó cần uống 3 cốc đồ uống  $I$  và 2 cốc đồ uống  $II$  để đạt được các mục tiêu đề ra.

$\frac{f(x)}{g(x)}$  xác định khi  $g(x) \neq 0$ ;

$\sqrt{f(x)}$  xác định khi  $f(x) \geq 0$ ;

$\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}, \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)}$  xác định khi  $f(x) \geq 0$  và  $g(x) \geq 0$ ;

$\sqrt[n]{\frac{f(x)}{g(x)}}$  xác định khi  $g(x) \neq 0$  và  $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ .

### Vấn đề 3. Đồ thị của hàm số

*Phương pháp:* Vận dụng: Điểm  $M(a; b)$  thuộc đồ thị hàm số  $y = f(x)$  khi và chỉ khi  $b = f(a)$ .

### Vấn đề 4. Sự biến thiên hàm số

*Phương pháp:* Sử dụng khái niệm và bảng biến thiên mô tả sự đồng biến và nghịch biến của hàm số.

### Vấn đề 5. Ứng dụng

## III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 1:** Theo Quyết định số 648/QĐ-BCT ngày 20/3/2019 của Bộ Công Thương, giá bán lẻ điện sinh hoạt từ ngày 20/3/2019 sẽ dao động trong khoảng từ 1678 đồng đến 2927 đồng mỗi kWh tùy bậc thang. Dưới đây là bảng giá bán lẻ điện sinh hoạt (chưa bao gồm thuế VAT):

| Mức sử dụng điện trong tháng (kWh) | Đơn giá (đồng/kWh) |
|------------------------------------|--------------------|
| - Bậc 1: Cho kWh từ 0 – 50         | 1678               |
| - Bậc 2: Cho kWh từ 51 – 100       | 1734               |
| - Bậc 3: Cho kWh từ 101 – 200      | 2014               |
| - Bậc 4: Cho kWh từ 201 – 300      | 2536               |
| - Bậc 5: Cho kWh từ 301 – 400      | 2834               |
| - Bậc 6: Cho kWh từ 401 – 500      | 2927               |

**a)** Số tiền phải trả  $y$  (đồng) (chưa bao gồm thuế VAT) có phải là hàm số của số điện tiêu thụ  $x$  không?

Giải thích. Nếu đúng, hãy xác định những công thức tính hàm số  $y$  theo biến.

**b)** Mức sử dụng điện trong tháng có phải là hàm số của đơn giá tiền điện (chưa bao gồm thuế VAT) không? Giải thích.

**c)** Tính số tiền mà gia đình bạn Dương phải trả khi tiêu thụ hết 350kWh trong một tháng. Biết thuế VAT là 10% .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

**Chú ý:** Hàm số  $H(x)$  (hàm Heaviside, còn gọi là hàm bước đơn vị, do Oliver Heaviside phát triển và sử dụng hàm số này như một công cụ trong việc phân tích các thông tin liên lạc điện báo, kí hiệu hàm này là **1**) là hàm số được ứng dụng trong tin học.

**Ví dụ 3:** Tìm tập xác định  $D$  của các hàm số sau đây:

a)  $y = \frac{3x+1}{2x-5}$

b)  $y = \sqrt{-1-2x}$ ;

c)  $y = \sqrt{6-2x} + \sqrt{3x-2}$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) Hàm số  $y = \frac{3x+1}{2x-5}$  xác định khi  $2x-5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{5}{2}$ . Vậy  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5}{2} \right\}$ .

b) Hàm số  $y = \sqrt{-1-2x}$  xác định khi  $-1-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}$ . Vậy  $D = \left( -\infty; -\frac{1}{2} \right]$ .

c) Hàm số  $y = \sqrt{6-2x} + \sqrt{3x-2}$  xác định khi  $\begin{cases} 6-2x \geq 0 \\ 3x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases}$ .

Vậy  $D = \left[ \frac{2}{3}; 3 \right]$ .

**Ví dụ 4:** Quan sát đồ thị hàm số  $y = f(x)$  ở Hình 1.



Hình 1

a) Chỉ ra tọa độ giao điểm của đồ thị với trục hoành và trục tung.

b) Điểm có tọa độ  $(-1; 4)$  và  $(2; 3)$  có thuộc đồ thị hàm số hay không?

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

$$A(0;0); B(-1;0); C(2021;0); D(2022;1).$$

b) Chỉ ra hai điểm thuộc đồ thị hàm số trên có tung độ bằng 1.

c) Chỉ ra điểm thuộc đồ thị có hoành độ bằng  $-2022$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Các điểm  $B(-1;0); D(2022;1)$  thuộc đồ thị hàm số.

b) Với  $y=1$  thì ta chọn  $x=2 > 0$  và  $x=3 > 0$ .

Khi đó ta có hai điểm có tọa độ là  $(2;1)$  và  $(3;1)$  thuộc đồ thị hàm số.

c) Với  $x=-2022 < 0$  thì  $y=0$ . Khi đó ta có điểm có tọa độ  $(-2022;0)$  thuộc đồ thị hàm số.

**Ví dụ 7:** Cho bảng biến thiên của hàm số  $y=f(x)$  như sau:

|     |           |     |     |           |
|-----|-----------|-----|-----|-----------|
| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |
| $y$ | $+\infty$ | $1$ | $5$ | $-\infty$ |

a) Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số  $y=f(x)$ .

b) So sánh  $f(-2021)$  và  $f(-1)$ ;  $f(1)$  và  $f(\sqrt{3})$ .

**Giải**

a) Hàm số  $y=f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(0;2)$ .

Hàm số  $y=f(x)$  nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty;0)$  và  $(2;+\infty)$ .

b) Vì hàm số  $y=f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty;0)$  nên với  $-2021 < -1$  ta có:

$$f(-2021) > f(-1)$$

Vì hàm số  $y=f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(0;2)$ , nên với  $1 < \sqrt{3}$  ta có:  $f(1) < f(\sqrt{3})$ .

**Ví dụ 8:** Quan sát đồ thị hàm số  $y=f(x)$  ở Hình 2.

b) Số chỉ quãng đường  $x$  không phải là hàm số của số tiền phải trả  $y$  vì có 2 giá trị của số chỉ quãng đường là 0,3 km và 0,4 km đều tương ứng với số tiền 10500 đồng.

c) Với  $x = 15$  thì  $y = 14800.15 + 140 = 222140$ . Số tiền phải trả khi đi taxi với quãng đường 15 km là 222140 đồng.

Với  $x = 40$  thì  $y = 12200.40 + 78140 = 566140$ . Số tiền phải trả khi đi taxi với quãng đường 40 km là 566140 đồng.

#### IV. BÀI TẬP

**Câu 1.** Trong các công thức sau, công thức nào **không** biểu diễn số  $y$  là hàm số của  $x$ ?

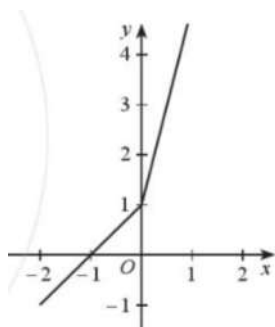
- A.  $x + 2y = 3$       B.  $y = \sqrt{x^2 - 2x}$       C.  $y = \frac{1}{x}$       D.  $x^2 + y^2 = 4$ .
- A.      B.      C.      D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn D**

**Câu 2.** Cho đồ thị hàm số  $y = f(x)$  ở Hình 4. Phát biểu nào sau đây là đúng?



Hình 4

- A. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.
- B. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có hoành độ bằng -1.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1; +\infty)$ , nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ .
- D. Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

- A.      B.      C.      D.

**Lời giải**

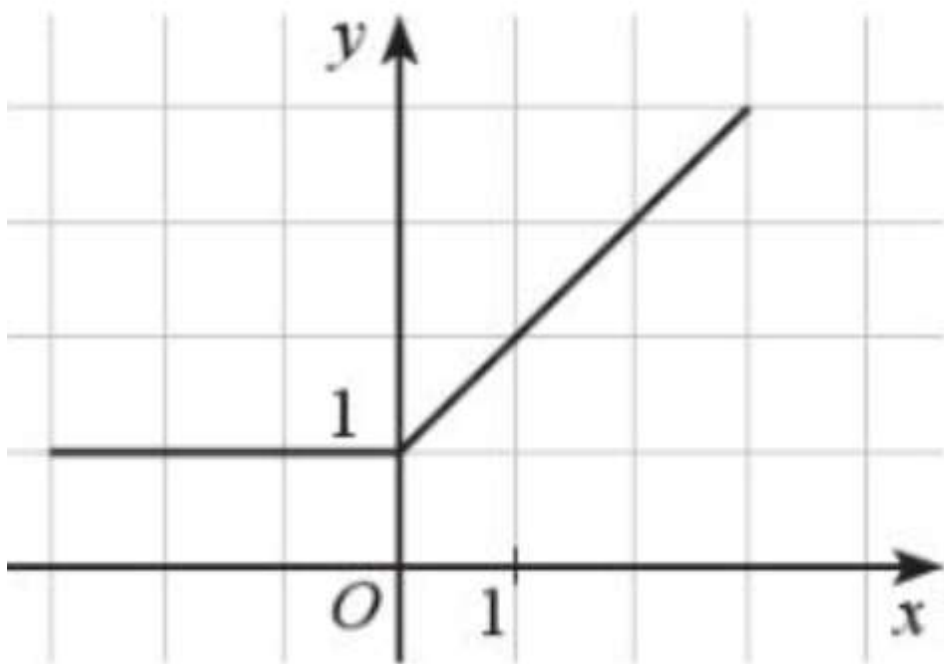
**Chọn**

**Chọn D**

**Câu 3.** Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a)  $y = -x^3 + 4x - 1$

**Câu 5.** Quan sát đồ thị hàm số  $y = f(x)$  ở Hình vẽ .



a) Trong các điểm có tọa độ  $(1;2), (0;0), (2;3)$  , điểm nào thuộc đồ thị hàm số, điểm nào không thuộc đồ thị hàm số?

b) Xác định  $f(0); f(3)$  .

c) Tìm điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ bằng 1 .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Học sinh tự làm.

b)  $f(0) = 1, f(3) = 4$  .

c) Điểm có tọa độ  $(a;1)$  với  $a \in [-3;0]$  .

**Câu 6.** Cho bảng biến thiên hàm số  $y = f(x)$  như sau

|     |           |   |   |           |
|-----|-----------|---|---|-----------|
| $x$ | $-\infty$ | 1 | 3 | $+\infty$ |
| $y$ | $+\infty$ | 2 | 6 | $-\infty$ |

a) Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số  $y = f(x)$  .

b) So sánh  $f(-2021)$  và  $f(-1)$ ;  $f(\sqrt{3})$  và  $f(2)$

$$g): y = \begin{cases} 5 & \text{khi } 0 \leq x \leq 10 \\ 5 + 0,05x & \text{khi } 10 < x < 20 \\ 5,5 + 0,05x & \text{khi } x \geq 20. \end{cases}$$

b) Nếu  $x = 30 > 20$  thì  $y = 5,5 + 0,05 \cdot 30 = 7$ . Vậy nhân viên đó sẽ được nhận 7 triệu đồng.

### III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 10:** Một công ty sản xuất một sản phẩm bán cho các đại lí bán lẻ trên toàn quốc. Bộ phận tài chính của công ty đưa ra hàm giá bán  $p(x) = 948 - 40x$  (trong đó  $p(x)$  (triệu đồng) là giá bán lẻ mỗi sản phẩm mà tại giá bán này  $x$  sản phẩm được bán).

A. B. C. D.

**Lời giải**

**Chọn**

Hàm doanh thu  $R(x) = xp(x) = -40x^2 + 948x$ .

**Ví dụ 11:** Xác định Parabol có đỉnh  $I(1;2)$  và đi qua điểm  $M(0;3)$ .

A. B. C. D.

**Lời giải**

**Chọn**

Gọi hàm số bậc hai có parabol thỏa mãn đề bài là:  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ )

Parabol có đỉnh  $I(1;2)$  nên ta có : 
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ a + b + 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

Vậy parabol cần tìm là  $y = x^2 - 2x + 3$

*Chú ý:* Giả thuyết parabol có đỉnh  $I(1;2)$  trong bài tập có thể thay bằng một số cách phát biểu sau đây:

- + Parabol có trục đối xứng  $x = 1$  và đi qua điểm  $I(1;2)$
- + Parabol có trục đối xứng  $x = 1$  và tung độ của điểm thấp nhất bằng 2.
- + Parabol đi qua điểm  $I(1;2)$  và có tung độ của điểm thấp nhất bằng 2.
- + Parabol có trục đối xứng  $x = 1$  và có tung độ đỉnh là 2.

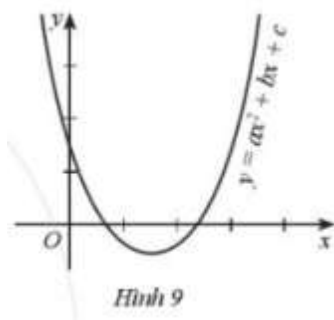
**Ví dụ 12:** Cho hàm số  $y = f(x) = 2x^2 + 4x - 2$ .

- a) Lập bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$ .
- b) Xác định khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến của hàm số trên.

A. B. C. D.

**Lời giải**

**Chọn**



Parabol hướng bề lõm lên trên nên  $a > 0$ .

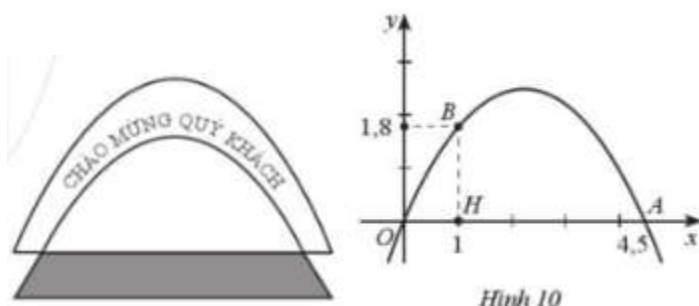
Parabol cắt trục tung tại điểm  $(0; c)$  nằm phía trên trục hoành nên  $c > 0$ .

Đỉnh nằm bên phải trục tung nên hoành độ đỉnh dương hay  $\frac{-b}{2a} > 0$ . Do  $a > 0$  nên  $b < 0$ .

Vậy  $a > 0, b < 0$  và  $c > 0$ .

**Ví dụ 15:** Tại một buổi khai trương, người ta làm một cổng chào có đường viền trong của mặt cắt là đường parabol. Người ta đo khoảng cách giữa hai chân cổng là 4,5 m. Từ một điểm trên thân cổng người ta đo được khoảng cách tới mặt đất (điểm  $H$ ) là 1,8 m và khoảng cách từ điểm  $H$  tới chân cổng gần nhất là 1 m. Hãy tính chiều cao của cổng chào đó (tính theo đường viền trong)

g) theo đơn vị mét và làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Chọn hệ trục tọa độ sao cho gốc tọa độ  $O$  trùng một chân của cổng, trục hoành nằm trên đường nối hai chân cổng (đơn vị trên các trục tính theo mét) (Hình 10).

Gọi hàm số bậc hai có đồ thị chứa đường viền trong của cổng chào trên là  $y = ax^2 + bx + c$ .

Từ giả thiết bài toán ta có đồ thị hàm số đi qua các điểm  $O(0; 0)$ ,  $A(4,5; 0)$ ,  $B(1; 1,8)$ .

Thay tọa độ các điểm trên vào hàm số, ta được  $c = 0$  và hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4,5^2 a + 4,5b = 0 \\ 1^2 a + 1b = 1,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-18}{35} \\ b = \frac{81}{35} \end{cases}$$

b)  $a = 1, b = 0, c = -7$ .

c)  $a = -2, b = 8, c = 0$ .

**Câu 12.** Bố bạn Lan gửi 10 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất  $x\%$  / tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập với vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Tính số tiền cả vốn và lãi mà bố bạn Lan có được sau khi gửi tiết kiệm 2 tháng?

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Số tiền cả vốn và lãi sau 2 tháng mà bố bạn Lan có được là:

$$(10 + 10x\%)x\% + 10 + 10x\% = 0,001x^2 + 0,2x + 10 \text{ (triệu đồng)}$$

g).

**Câu 13.** Xác định parabol  $y = ax^2 - bx + 1$  trong mỗi trường hợp sau:

a) Đi qua hai điểm  $M(1; -2)$  và  $N(-2; 19)$ .

b) Có đỉnh là  $I(-2; 37)$ .

c) Có trục đối xứng là  $x = -1$  và tung độ của đỉnh bằng 5.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $y = 2x^2 - 5x + 1$ .

b)  $y = -9x^2 - 36x + 1$ .

c)  $y = -4x^2 - 8x + 1$ .

**Câu 14.** Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau:

a)  $y = 3x^2 - 4x + 2$

b)  $y = -2x^2 - 2x - 1$ .

A.

B.

C.

D.

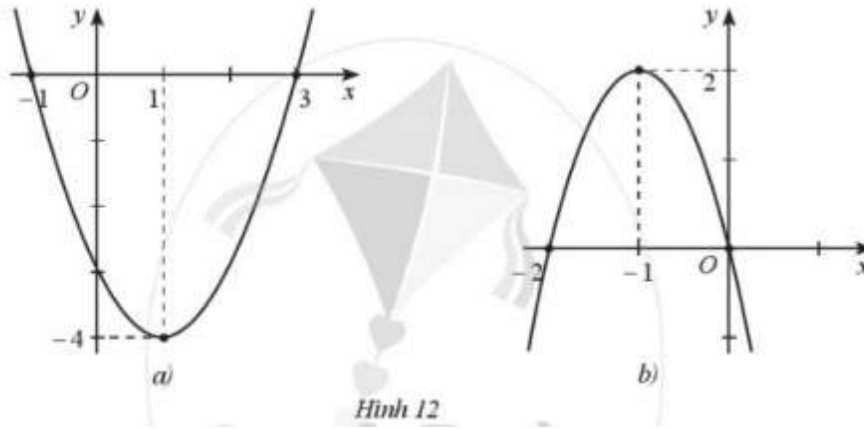
**Lời giải**

**Chọn**

Học sinh tự làm.

**Câu 15.** Cho hàm số  $y = ax^2 + bx + c$  có đồ thị ở Hình 11. Xác định dấu  $a, b, c$ .

**Câu 18.** Xác định hàm số bậc hai biết đồ thị tương ứng trong mỗi Hình 12 a, 12 b :



A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $y = x^2 - 2x - 3$ .

b)  $y = -2x^2 - 4x$ .

**Câu 19.** Trong một công trình, người ta xây dựng một cổng ra vào hình parabol (minh hoạ ở Hình 13) sao cho khoảng cách giữa hai chân cổng  $BC$  là 9 m. Từ một điểm  $M$  trên thân cổng người ta đo được khoảng cách tới mặt đất là  $MK = 1,6$  m và khoảng cách từ  $K$  tới chân cổng gần nhất là  $BK = 0,5$  m. Tính chiều cao của cổng theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 13

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Lấy hệ trục tọa độ  $Oxy$  sao cho vị trí  $B$  trùng với gốc  $O$ , trục  $Ox$  nằm trên đường nối chân hai cổng,  $C$  nằm trên tia  $Ox$  (đơn vị trên các trục tính theo mét).

Khi đó cổng ra vào là một phần của đồ thị hàm số  $y = \frac{-32}{85}x^2 + \frac{288}{85}x$ .

Đỉnh của đồ thị hàm số trên có tung độ là khoảng 7,6.

Vậy chiều cao của cổng là khoảng 7,6 m.

## BÀI 3. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

### I. LÝ THUYẾT

**Định lý về dấu của tam thức bậc hai:**

Cho tam thức bậc hai  $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0), \Delta = b^2 - 4ac$ .

+) Nếu  $\Delta < 0$  thì  $f(x)$  cùng dấu với hệ số  $a$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

+) Nếu  $\Delta = 0$  thì  $f(x)$  cùng dấu với hệ số  $a$  với mọi  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$ .

+) Nếu  $\Delta > 0$  thì  $f(x)$  có hai nghiệm  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ . Khi đó:

☞  $f(x)$  cùng dấu với hệ số  $a$  với mọi  $x$  thuộc các khoảng  $(-\infty; x_1)$  và  $(x_2; +\infty)$ .

☞  $f(x)$  trái dấu với hệ số  $a$  với mọi  $x$  thuộc khoảng  $(x_1; x_2)$ .

► **Nhận xét:** Trong định lý, có thể thay biệt số  $\Delta = b^2 - 4ac$  bằng biệt thức thu gọn  $\Delta' = (b')^2 - ac$  với  $b = 2b'$

### II. CÁC DẠNG TOÁN

**Vấn đề 1. Xét dấu tam thức bậc hai**

**Phương pháp:** Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai

**Vấn đề 2. Ứng dụng**

### III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 16:** Lập bảng xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau:

a)  $f(x) = x^2 - x - 2$ ;

b)  $f(x) = -3x^2 + x - 4$ ;

c)  $f(x) = 4x^2 + 12x + 9$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $f(x) = x^2 - x - 2$  có hai nghiệm  $x_1 = -1; x_2 = 2$  và có hệ số  $a = 1 > 0$ .

Ta có bảng xét dấu của  $f(x)$  như sau:

|        |           |   |      |   |     |   |           |
|--------|-----------|---|------|---|-----|---|-----------|
| $x$    | $-\infty$ |   | $-1$ |   | $2$ |   | $+\infty$ |
| $f(x)$ |           | + | $0$  | - | $0$ | + |           |

Bảng xét dấu  $f(x)$  là:

|        |           |   |   |   |   |   |           |
|--------|-----------|---|---|---|---|---|-----------|
| $x$    | $-\infty$ |   | 1 |   | 3 |   | $+\infty$ |
| $f(x)$ |           | + | 0 | - | 0 | + |           |

**Ví dụ 18:** Tìm  $m$  để tam thức bậc hai  $f(x) = x^2 - 2x + m - 12$  nhận giá trị dương với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Xét tam thức bậc hai  $f(x) = x^2 - 2x + m - 12$  có hệ số  $a = 1 > 0$ .

$f(x) > 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  khi  $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 1 - (m - 12) < 0 \Leftrightarrow m > 13$ .

Vậy với  $m > 13$  thì tam thức  $f(x)$  nhận giá trị dương với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

**Ví dụ 19:** Với giá trị nào của tham số  $m$  thì hàm số  $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3m - 2}$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$ ?

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Xét tam thức  $f(x) = x^2 - 4x + 3m - 2$  có hệ số  $a = 1 > 0$ .

Hàm số  $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3m - 2}$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$  khi tam thức  $f(x)$  nhận giá trị không âm với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

Ta có:  $f(x) \geq 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  khi  $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 4 - (3m - 2) \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$

Vậy với  $m \geq 2$  thì hàm số  $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3m - 2}$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$

**Ví dụ 20:** Một công ty du lịch thông báo giá tiền cho chuyến đi tham quan của một nhóm khách du lịch như sau:

20 khách đầu tiên có giá là 30 USD/người. Nếu có nhiều hơn 20 người đăng kí thì cứ có thêm 1 người, giá vé sẽ giảm 1 USD/người cho toàn bộ hành khách.

a) Gọi  $x$  là số lượng khách từ người thứ 21 trở lên của nhóm. Biểu thị doanh thu theo  $x$ .

b) Số người từ người thứ 21 trở lên của nhóm khách du lịch trong khoảng bao nhiêu thì công ty có lãi?

Biết rằng chi phí của chuyến đi là 400 USD.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

**B.**  $f(x) \leq 0$  khi và chỉ khi  $x \in (-\infty; 1] \cup (3; +\infty]$ .

**C.**  $f(x) > 0$  khi và chỉ khi  $x \in (1; 3)$ .

**D.**  $f(x) \geq 0$  khi và chỉ khi  $x \in [1; 3]$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn A**

**Câu 22.** Cho tam thức bậc hai  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ). Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng?

**A.**  $f(x) < 0$  với mọi  $x$  khi và chỉ khi  $a < 0$  và  $\Delta \leq 0$

**B.**  $f(x) < 0$  với mọi  $x$  khi và chỉ khi  $a < 0$  và  $\Delta < 0$

**C.**  $f(x) \leq 0$  với mọi  $x$  khi và chỉ khi  $a > 0$  và  $\Delta < 0$

**D.**  $f(x) \leq 0$  với mọi  $x$  khi và chỉ khi  $a > 0$  và  $\Delta \leq 0$

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn B**

**Câu 23.** Lập bảng xét dấu mỗi tam thức bậc hai sau:

a)  $f(x) = 3x^2 - 7x + 4$ ;

b)  $f(x) = 25x^2 + 10x + 1$ ;

c)  $f(x) = 3x^2 - 2x + 8$ ;

d)  $f(x) = -2x^2 + x + 3$ ;

e)  $f(x) = -3x^2 + 6x - 3$ ;

g)  $f(x) = -5x^2 + 2x - 4$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)

ĐS:  $m \leq 11$ .

**Câu 25.** Với giá trị nào của tham số  $m$  thì hàm số  $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 3m - 2}$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$ ?

A. B. C. D.

**Lời giải**

**Chọn**

ĐS:  $m \geq \frac{41}{24}$

**Câu 26.** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 6m - 1}}$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$ .

A. B. C. D.

**Lời giải**

**Chọn**

ĐS:  $m > \frac{5}{6}$ .

**Câu 27.** Bộ phận nghiên cứu thị trường của một xí nghiệp xác định tổng chi phí để sản xuất  $Q$  sản phẩm là  $Q^2 + 200Q + 180000$  (nghìn đồng)

g). Giả sử mỗi sản phẩm bán ra thị trường là 1300 nghìn đồng.

a) Xác định lợi nhuận xí nghiệp thu được sau khi bán hết  $Q$  sản phẩm đó, biết rằng lợi nhuận là hiệu của doanh thu trừ đi tổng chi phí để sản xuất.

b) Xí nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để không bị lỗ? Biết rằng các sản phẩm được sản xuất ra đều bán hết.

a) Xác định lợi nhuận xí nghiệp thu được sau khi bán hết  $Q$  sản phẩm đó, biết rằng lợi nhuận là hiệu của doanh thu trừ đi tổng chi phí để sản xuất.

b) Xí nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để không bị lỗ? Biết rằng các sản phẩm được sản xuất ra đều bán hết.

A. B. C. D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) Lợi nhuận là:

$$f(Q) = 1300Q - (Q^2 + 200Q + 180000) = -Q^2 + 1100Q - 180000 \text{ (nghìn đồng)}$$

g).

## BÀI 4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

### I. LÝ THUYẾT

#### 1. Bất phương trình bậc hai một ẩn

Bất phương trình bậc hai ẩn  $x$  là bất phương trình có một trong các dạng sau:  $ax^2 + bx + c < 0$ ;  $ax^2 + bx + c \leq 0$ ;  $ax^2 + bx + c > 0$ ;  $ax^2 + bx + c \geq 0$ , trong đó  $a, b, c$  là các số thực đã cho,  $a \neq 0$ .

#### 2. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn

Giải bất phương trình bậc hai (một ẩn) có dạng  $f(x) > 0$  ( $f(x) = ax^2 + bx + c$ ).

*Cách 1.* Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai.

*Bước 1:* Xác định dấu của hệ số  $a$  và tìm nghiệm của  $f(x)$  (nếu có).

*Bước 2:* Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai để tìm tập hợp những giá trị của  $x$  sao cho  $f(x)$  mang dấu “+”.

*Cách 2.* Sử dụng đồ thị.

Dựa vào parabol  $y = ax^2 + bx + c$ , ta tìm những giá trị của  $x$  ứng với phần parabol đó nằm phía trên trục hoành.

*Chú ý:* Các bất phương trình bậc hai có dạng  $f(x) < 0$ ;  $f(x) \geq 0$ ;  $f(x) \leq 0$  được giải tương tự.

### II. CÁC DẠNG TOÁN

#### Vấn đề 1. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn

Phương pháp: Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai hoặc đồ thị

### III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 21:** Giải các bất phương trình bậc hai sau

a)  $2x^2 - 7x + 5 > 0$ ;

b)  $-x^2 - 3x + 10 > 0$ ;

c)  $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$ ;

d)  $-x^2 + 2x - 4 < 0$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

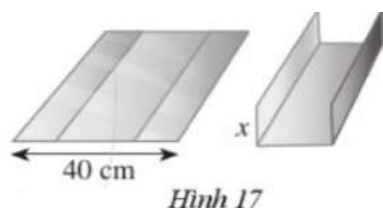
Chọn

c) Quan sát đồ thị ở Hình 16c, ta thấy không có phần đồ thị nào của parabol  $N$  nằm phía dưới trục hoành. Vậy tập nghiệm của bất phương trình  $A$  là  $C$

d) Quan sát đồ thị ở Hình 16d, ta thấy parabol  $x = \frac{AN}{AC}$  luôn nằm phía trên trục hoành với mọi  $x$  khác

3, tại  $AM \perp BN$  thì  $ABC$  Vậy tập nghiệm của bất phương trình  $G$  là  $M$

**Ví dụ 23:** Bác Nam muốn uốn tấm tôn phẳng có dạng hình chữ nhật với bề ngang 40 cm thành một rãnh dẫn nước bằng cách chia tấm tôn đó thành 3 phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông sao cho độ cao hai thành rãnh bằng nhau (hình 17). Để đảm bảo kỹ thuật, diện tích mặt cắt ngang của rãnh nước phải lớn hơn hoặc bằng  $150 \text{ cm}^2$ . Bác Nam cần làm rãnh dẫn nước có độ cao ít nhất là bao nhiêu xăng-ti-mét để đảm bảo kỹ thuật?



A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Khi chia tấm tôn đó thành 3 phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông như Hình 17 thì mặt cắt ngang là hình chữ nhật có hai kích thước  $x$  (cm) và  $40 - 2x$  (cm). Khi đó diện tích mặt cắt ngang là  $(40 - 2x)x \text{ (cm}^2\text{)}$ .

Ta thấy diện tích mặt cắt ngang của rãnh nước phải lớn hơn hoặc bằng  $150 \text{ cm}^2$  khi và chỉ khi  $(40 - 2x)x \geq 150 \Leftrightarrow -2x^2 + 40x - 150 \geq 0$ .

Tam thức  $f(x) = -2x^2 + 40x - 150$  có hai nghiệm  $x_1 = 5, x_2 = 15$  và hệ số  $a = -2 < 0$ . Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của  $x$  sao cho tam thức mang dấu “+” là khoảng  $(5; 15)$ . Do đó tập nghiệm của bất phương trình  $-2x^2 + 40x - 150 \geq 0$  là đoạn  $[5; 15]$ .

Vậy rãnh dẫn nước phải có độ cao ít nhất là 5 cm.

**Ví dụ 24:** Tổng chi phí  $T$  (đơn vị tính: nghìn đồng

g) để sản xuất  $Q$  sản phẩm được cho bởi biểu thức  $T = Q^2 + 20Q + 4000$ ; giá bán của một sản phẩm là 150 nghìn đồng. Số sản phẩm cần được sản xuất trong khoảng nào để đảm bảo không bị lỗ (giả thiết các sản phẩm được bán hết)?

A.

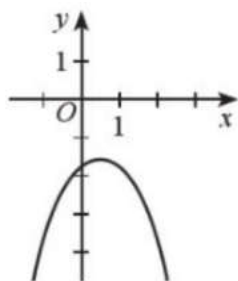
B.

C.

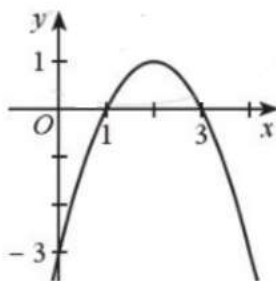
D.

**Lời giải**

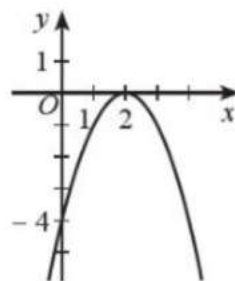
**Chọn**



a)



b)



c)

Hình 18

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Xét Hình 18a: dựa vào đồ thị  $y = f(x)$  ta có:

- Bất phương trình  $f(x) > 0$  có tập nghiệm là  $\emptyset$ .
- Bất phương trình  $f(x) < 0$  có tập nghiệm là  $\mathbb{R}$ .
- Bất phương trình  $f(x) \geq 0$  có tập nghiệm là  $\emptyset$ .
- Bất phương trình  $f(x) \leq 0$  có tập nghiệm là  $\mathbb{R}$ .

Xét Hình 18b, 18c tương tự, học sinh tự làm.

**Câu 31.** Giải các bất phương trình bậc hai sau:

- a)  $3x^2 - 8x + 5 > 0$ ;
- b)  $-2x^2 - x + 3 \leq 0$ ;
- c)  $25x^2 - 10x + 1 < 0$ ;
- d)  $-4x^2 + 5x + 9 \geq 0$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

- a)  $(-\infty; 1) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$ .
- b)  $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [1; +\infty)$
- c)  $\emptyset$
- d)  $\left[-1; \frac{9}{4}\right]$

Vậy trong khoảng thời gian từ 0,454 s đến 0,753 s và từ 1,835 s đến 2,133 s thì quả bóng ở độ cao lớn hơn 5 m và nhỏ hơn 7 m.

**Câu 35.** Một tình huống trong huấn luyện pháo binh được mô tả như sau: Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  (đơn vị trên hai trục tính theo mét), một viên đạn được bắn từ vị trí  $O(0;0)$  theo quỹ đạo là đường parabol

$y = -\frac{9}{1000000}x^2 + \frac{3}{100}x$ . Tìm khoảng cách theo trục hoành của viên đạn so với vị trí bắn khi viên đạn đang ở độ cao lớn hơn 15 m (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị mét).

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

$$\begin{aligned} \text{Độ cao viên đạn lớn hơn 15 m nên } -\frac{9}{1000000}x^2 + \frac{3}{100}x > 15 &\Leftrightarrow -3x^2 + 10000x - 5000000 > 0 \\ \Leftrightarrow \frac{5000 - 1000\sqrt{10}}{3} < x < \frac{5000 + 1000\sqrt{10}}{3}. \end{aligned}$$

Vậy khoảng cách theo trục hoành của viên đạn so với vị trí bắn khi viên đạn đang ở độ cao lớn hơn 15 m là nằm trong khoảng  $\left(\frac{5000 - 1000\sqrt{10}}{3}; \frac{5000 + 1000\sqrt{10}}{3}\right)$ .

### Chọn

Bình phương hai vế của (1) ta được  $x^2 + x - 1 = 3x^2 - 2x$  (2).

Ta có: (2)  $\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$ .

Do đó, phương trình (2) có hai nghiệm là  $x = 1$  và  $x = \frac{1}{2}$ .

Thay lần lượt hai giá trị trên vào bất phương trình  $3x^2 - 2x \geq 0$ , ta thấy chỉ có  $x = 1$  thỏa mãn bất phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình (1) là  $x = 1$ .

**Ví dụ 26:** Giải phương trình  $\sqrt{3x^2 - 2x + 16} = 2x - 1$  (3).

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

### Chọn

Trước hết ta giải bất phương trình  $2x - 1 \geq 0$  (4). Ta có: (4)  $\Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$ . Bình phương hai vế của (3) ta được  $3x^2 - 2x + 16 = (2x - 1)^2$  (5).

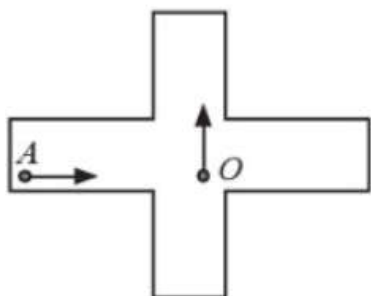
Ta có: (5)  $\Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 16 = 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$ .

Do đó, phương trình (5) có hai nghiệm là  $x = -3$  và  $x = 5$ .

Trong hai giá trị trên, chỉ có giá trị  $x = 5$  là thỏa mãn  $x \geq \frac{1}{2}$ .

Vậy phương trình (3) có nghiệm là  $x = 5$ .

**Ví dụ 27:** Hai ô tô xuất phát tại cùng một thời điểm từ hai vị trí  $A$  và  $O$  với vận tốc trung bình lần lượt là  $50 \text{ km/h}$  và  $40 \text{ km/h}$  trên hai con đường vuông góc với nhau và giao tại  $O$ . Hướng đi của hai xe thể hiện ở hình 19. Biết  $AO = 8 \text{ km}$ . Gọi  $x$  (giờ) là thời gian hai xe bắt đầu chạy cho tới khi cách nhau  $5 \text{ km}$  (tính theo đường chim bay) trước khi ô tô đi từ  $A$  đến vị trí  $O$ . Tìm  $x$ .



Hình 19

A.

B.

C.

D.

**D.** Tập nghiệm của phương trình  $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$  là tập hợp các nghiệm của phương trình  $f(x) = g(x)$  thỏa mãn bất phương trình  $f(x) \geq 0$  (hoặc  $g(x) \geq 0$ ).

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn D**

**Câu 37.** Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng?

**A.** Tập nghiệm của phương trình  $\sqrt{f(x)} = g(x)$  là tập nghiệm của phương trình  $f(x) = [g(x)]^2$ .

**B.** Tập nghiệm của phương trình  $\sqrt{f(x)} = g(x)$  là tập hợp các nghiệm của phương trình  $f(x) = [g(x)]^2$  thỏa mãn bất phương trình  $g(x) \geq 0$ .

**C.** Mọi nghiệm của phương trình  $f(x) = [g(x)]^2$  đều là nghiệm của phương trình  $\sqrt{f(x)} = g(x)$ .

**D.** Tập nghiệm của phương trình  $\sqrt{f(x)} = g(x)$  là tập hợp các nghiệm của phương trình  $f(x) = [g(x)]^2$  thỏa mãn bất phương trình  $f(x) \geq 0$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn B**

**Câu 38.** Giải thích vì sao chỉ cần kiểm tra nghiệm của phương trình  $f(x) = g(x)$  thỏa mãn một trong hai bất phương trình  $f(x) \geq 0$  hoặc  $g(x) \geq 0$  mà không cần kiểm tra thỏa mãn đồng thời hai bất phương trình đó để kết luận nghiệm của bất phương trình  $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Học sinh tự làm.

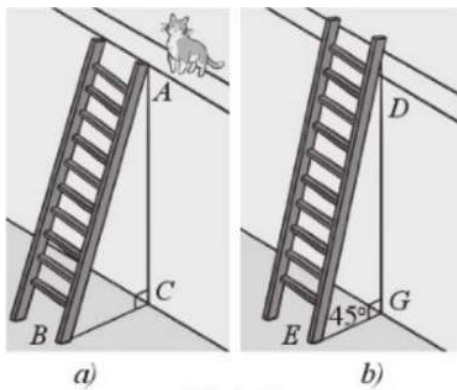
**Câu 39.** Giải thích vì sao chỉ cần kiểm tra nghiệm của phương trình  $f(x) = [g(x)]^2$  thỏa mãn bất phương trình  $g(x) \geq 0$  mà không cần kiểm tra thỏa mãn bất phương trình  $f(x) \geq 0$  để kết luận nghiệm của phương trình  $\sqrt{f(x)} = g(x)$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**



Hình 21

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Gọi chiều cao bức tường là  $x$  (m) ( $x > 0$ ). Khi đặt chiếc thang mà đầu trên của chiếc thang chạm đúng vào mép trên của bức tường thì khoảng cách chân thang đến chân tường là  $\sqrt{(x+2)^2 - x^2}$  (m).

Khi thang tạo với mặt đất một góc  $45^\circ$  thì khoảng cách từ chân thang đến chân tường là  $x$  (m).

Theo đề bài ta có phương trình:  $\sqrt{(x+2)^2 - x^2} = x+1$ .

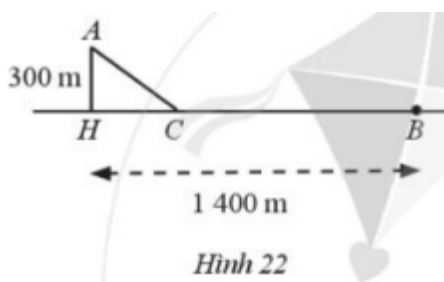
Giải phương trình trên ta có:  $x = 3$  (m) với  $x > 0$ . Vậy chiều cao bức tường là 3 m.

**Câu 43.** Một người đi bộ xuất phát từ  $B$  trên một bờ sông (coi là đường thẳng

g) với vận tốc  $6\text{ km/h}$  để gặp một người chèo thuyền xuất phát cùng lúc từ vị trí  $A$  với vận tốc  $3\text{ km/h}$ . Nếu người chèo thuyền di chuyển theo đường vuông góc với bờ thì phải đi một khoảng cách  $AH = 300\text{ m}$  và gặp người đi bộ tại địa điểm cách  $B$  một khoảng  $BH = 1400\text{ m}$ . Tuy nhiên, nếu di chuyển theo cách đó thì hai người không tới cùng lúc. Để hai người đến cùng lúc thì mỗi người cùng di chuyển về vị trí  $C$  (Hình 22).

a) Tính khoảng cách  $CB$ .

b) Tính thời gian từ khi hai người xuất phát cho đến khi gặp nhau cùng lúc.



Hình 22

Hình 23

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

**Câu 45.** Trong các hàm số sau, hàm số nào không là hàm số bậc hai?

**A.**  $y = -5x^2 + 6x$

**B.**  $y = 3 - 2x^2$

**C.**  $y = -x(5x - 7)$

**D.**  $y = 0x^2 + 6x - 5$

Lời giải

**Chọn D**

**Câu 46.** Tập nghiệm của bất phương trình  $-5x^2 + 6x + 11 \leq 0$  là:

**A.**  $\left[-1; \frac{11}{5}\right]$

**B.**  $\left(-1; \frac{11}{5}\right)$

**C.**  $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{11}{5}; +\infty\right)$

**D.**  $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{11}{5}; +\infty\right)$

Lời giải

**Chọn D**

**Câu 47.** Cho hàm số  $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{neu } x < 0 \\ 2 & \text{neu } x \geq 0. \end{cases}$

**a)** Điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số trên:  $A(0;0)$ ,  $B(-1;1)$ ,  $C(2021;1)$ ,  $D(2022;2)$  ?

**b)** Chỉ ra hai điểm thuộc đồ thị của hàm số trên có tung độ bằng 2 .

**c)** Chỉ ra điểm thuộc đồ thị của hàm số trên có hoành độ bằng -2022 .

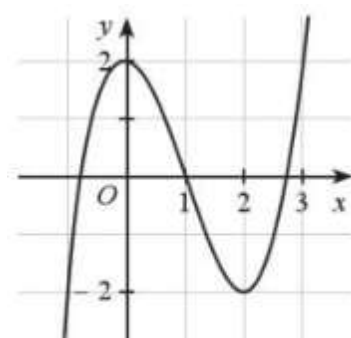
Lời giải

a)  $B, D$ .

b)  $E(1;2), G(2;2)$ .

c)  $K(-2022;1)$ .

**Câu 48.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị ở Hình 24 .



Hình 24

**a)** Chỉ ra khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến của hàm số  $y = f(x)$ .

**b)** Nêu tung độ giao điểm của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  với trục  $Oy$ .

b) Quãng đường  $x$  (km) có phải là hàm số của số tiền phải trả  $y$  (đồng) không? Giải thích.

c) Tính số tiền bạn Quân phải trả khi đi taxi hằng trên với quãng đường 20 km .

Lời giải

Học sinh tự làm.

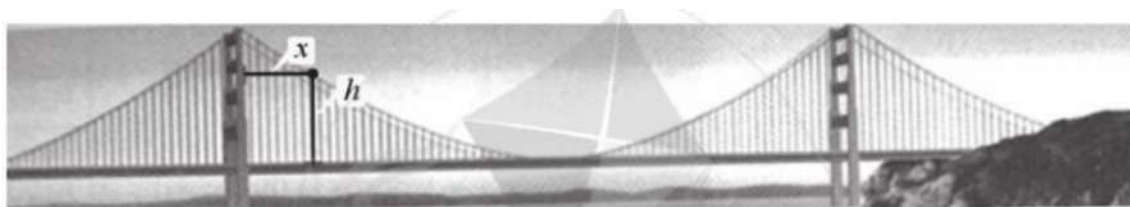
**Câu 54.** Quan sát chiếc cầu Cổng Vàng (Golden Gate bridge) ở Hình 26. Độ cao  $h$  (feet) tính từ mặt cầu đến các điểm trên dây treo ở phần giữa hai trụ cầu được xác định bởi công thức

$$h(x) = \frac{1}{9000}x^2 - \frac{7}{15}x + 500, \text{ trong đó } x \text{ (feet) là khoảng cách từ trụ cầu bên trái đến điểm tương ứng}$$

trên dây treo.

a) Xác định độ cao của trụ cầu so với mặt cầu theo đơn vị feet.

b) Xác định khoảng cách giữa hai trụ cầu theo đơn vị feet, biết rằng hai trụ cầu này có độ cao bằng nhau.



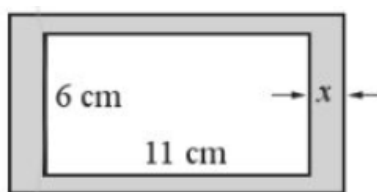
**Hình 26**

Lời giải

a) 500 feet.

b) 4200 feet.

**Câu 55.** Bác Nam dự định làm một khung ảnh hình chữ nhật sao cho phần trong của khung là hình chữ nhật có kích thước  $6 \text{ cm} \times 11 \text{ cm}$ , độ rộng viền xung quanh là  $x \text{ cm}$  (Hình 27). Diện tích của viền khung ảnh không vượt quá  $38 \text{ cm}^2$ .



**Hình 27**

Hỏi độ rộng viền khung ảnh lớn nhất là bao nhiêu xăng-ti-mét?

Lời giải

Đặt độ rộng viền khung ảnh là  $x$  (cm) ( $x > 0$ ). Ta có diện tích viền khung ảnh là:

$$(11 + 2x)(6 + 2x) - 66 = 4x^2 + 34x \text{ (cm}^2\text{)}$$

Theo đề bài ta có:  $4x^2 + 34x \leq 38$ .

## CHƯƠNG VI. HÀM SỐ, ĐỒ THỊ VÀ ỨNG DỤNG

### BÀI 15. HÀM SỐ

#### I. LÝ THUYẾT

1. Nếu với mỗi giá trị của  $x$  thuộc tập hợp số  $D$  có một và chỉ một giá trị tương ứng của  $y$  thuộc tập số thực  $\mathbb{R}$  thì ta có một hàm số.

Ta gọi  $x$  là biến số và  $y$  là hàm số của  $x$ . Tập hợp  $D$  là tập xác định của hàm số. Tập tất cả các giá trị  $y$  nhận được là *tập giá trị* của hàm số.

2. Đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  xác định trên tập  $D$  là tập hợp tất cả các điểm  $M(x; f(x))$  trên mặt phẳng tọa độ với mọi  $x$  thuộc  $D$ .

3. Hàm số  $y = f(x)$  gọi là *đồng biến* (tăng

g) trên khoảng  $(a; b)$  nếu

$$\forall x_1; x_2 \in (a; b); x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Hàm số  $y = f(x)$  gọi là *nghịch biến* (giảm) trên khoảng  $(a; b)$  nếu

$$\forall x_1; x_2 \in (a; b); x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

*Chú ý*

+ Đồ thị của hàm số đồng biến trên khoảng  $(a; b)$  là đường “đi lên” từ trái sang phải.

+ Đồ thị của hàm số nghịch biến trên khoảng  $(a; b)$  là đường “đi xuống” từ trái sang phải.

#### III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 1:** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a)  $f(x) = \sqrt{x-5}$ ;

b)  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 5x - 6}$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

a) Hàm số xác định khi  $x - 5 \geq 0$ , hay  $x \geq 5$ .

Vậy tập xác định của hàm số là  $D = [5; +\infty)$ .

b) Hàm số xác định khi  $x^2 + 5x - 6 \neq 0$ , hay  $x \neq 1, x \neq 6$ .

Vậy tập xác định của hàm số là  $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 6\}$ .

**Ví dụ 2:** Trong các hình: Hình 6.1, Hình 6.2, Hình 6.3, hình nào là đồ thị của hàm số? Nếu là đồ thị hàm số hãy nêu tập xác định và tập giá trị của hàm số đó?

Với  $x \geq 0$ , đồ thị hàm số  $y = x$  là phần

đường thẳng đi qua điểm  $O(0;0)$  và điểm  $(1;1)$

và nằm bên phải trục tung.

Với  $x < 0$ , đồ thị hàm số  $y = -x$  là đường thẳng đi qua điểm  $(-1;1)$  và điểm  $(-2;2)$  và nằm bên trái trục tung (H.6.4).

Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; \infty)$ , nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .

Tập giá trị của hàm số là  $[0; +\infty)$ .

**Ví dụ 4:** Tìm hiệu chuyên cho thuê xe máy niêm yết giá như sau: Giá thuê xe là 110 nghìn đồng một ngày cho thuê ba ngày đầu tiên và 80 nghìn đồng cho mỗi ngày tiếp theo.

a) Tính tổng số tiền phải trả  $T$  (nghìn đồng)

g) theo số ngày  $x$  mà khách thuê xe. Công thức  $T = T(x)$  thu được có phải là hàm số của  $x$  hay không?

Nếu có, hãy vẽ đồ thị của hàm số  $T(x)$ .

b) Tính  $T(2), T(4), T(10)$  và cho biết ý nghĩa của mỗi giá trị này.

c) Với số tiền là 2 triệu đồng thì khách có thể thuê xe trong tối đa bao nhiêu ngày liên tiếp?

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

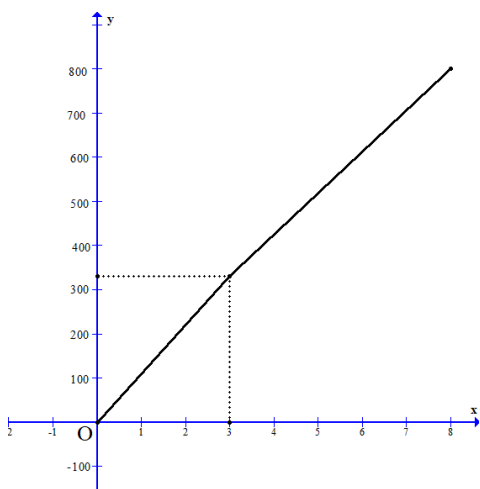
**Lời giải**

**Chọn**

$$a) T = \begin{cases} 110x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 3 \\ 330 - 80(x - 3) & \text{nếu } x > 3 \end{cases} = \begin{cases} 110x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 3 \\ 80x + 90 & \text{nếu } x > 3. \end{cases}$$

Công thức  $T = T(x)$  là hàm số của  $x$

Đồ thị của hàm số  $T(x)$  (H.6.5):



Với  $x$  thuộc đoạn  $[0; 3]$ , đồ thị của hàm số  $T(x)$  trùng với đồ thị của hàm số  $y = 110x$ .

Với  $x$  thuộc khoảng  $(3; +\infty)$ , đồ thị của hàm số  $T(x)$  trùng với đồ thị của hàm số  $y = 330 + 80(x - 3)$ .

b)  $T(2) = 220$ : khách sẽ phải trả 220 nghìn đồng nếu thuê xe trong 2 ngày;

**Câu 3.** Cho bảng các giá trị tương ứng của hai đại lượng  $x$  và  $y$ . Đại lượng  $y$  có là hàm số của đại lượng  $x$  không? Nếu có, hãy tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số đó.

a)

|     |    |    |    |   |   |   |   |    |    |
|-----|----|----|----|---|---|---|---|----|----|
| $x$ | -5 | -3 | -1 | 0 | 1 | 2 | 5 | 8  | 9  |
| $y$ | -6 | -8 | -4 | 1 | 3 | 2 | 3 | 12 | 15 |

b)

|     |     |     |    |   |   |    |    |    |    |
|-----|-----|-----|----|---|---|----|----|----|----|
| $x$ | -10 | -8  | -4 | 2 | 3 | 6  | 7  | 6  | 13 |
| $y$ | -16 | -14 | -2 | 4 | 5 | 20 | 18 | 24 | 25 |

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) Có. Tập xác định của hàm số là  $D = \{-5; -3; -1; 0; 1; 2; 5; 8; 9\}$ .

Tập giá trị của hàm số là  $\{-6; -8; -4; 1; 3; 2; 3; 12; 15\}$ .

b) Không. Vì tại  $x = 6$  ta xác định được hai giá trị của  $y$  là 20 và 24.

**Câu 4.** Trong các hình: Hình 6.6, Hình 6.7, Hình 6.8, hình nào là đồ thị của hàm số? Nếu là đồ thị hàm số thì hãy nêu tập xác định và tập giá trị của hàm số đó.

A.

B.

C.

D.

## Lời giải

## Chọn

a) Đường biểu diễn quãng đường chạy được của mỗi học sinh có là đồ thị hàm số.

b) Từ đồ thị ta thấy, học sinh A về đích đầu tiên vì thời gian chạy là ít nhất. Cả ba học sinh đều chạy hết quãng đường 100 m theo quy định.

**Câu 6.** Vẽ đồ thị của các hàm số sau và chỉ ra tập giá trị, các khoảng đồng biến, nghịch biến của chúng.

a)  $y = -\frac{1}{2}x + 5$ ;

b)  $y = 3x^2$ ;

c)  $y = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x-1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ .

A.

B.

C.

D.

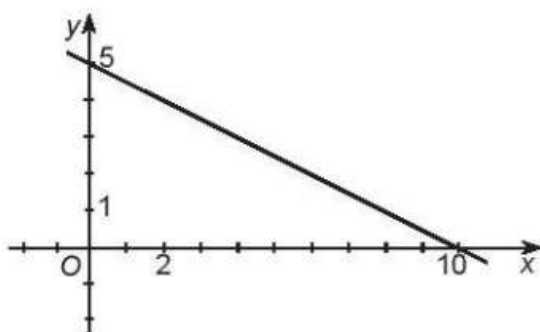
## Lời giải

## Chọn

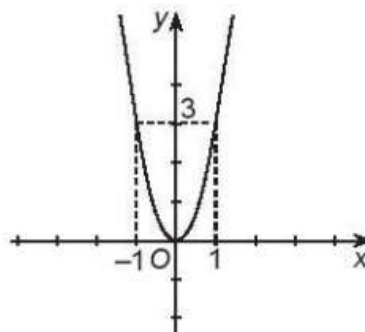
a) (H.6.17) Đồ thị của hàm số  $y = -\frac{1}{2}x + 5$ :

Tập giá trị của hàm số là  $\mathbb{R}$ .

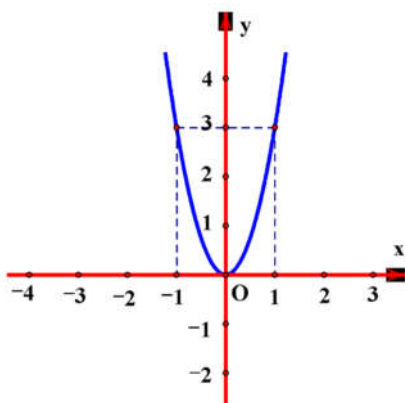
Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .



Hình 6.17



Hình 6.18

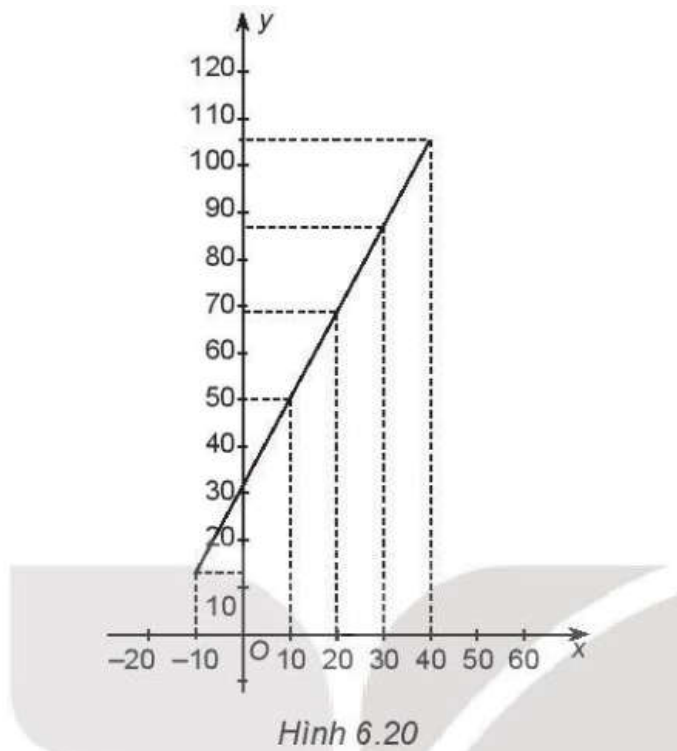


Hình 6.18

b) (H.6.18) Đồ thị của hàm số  $y = 3x^2$ :

|               |     |    |    |    |    |     |
|---------------|-----|----|----|----|----|-----|
| C (Celsius)   | -10 | 0  | 10 | 20 | 30 | 40  |
| F(Fahrenheit) | 14  | 32 | 50 | 68 | 86 | 104 |

c) Đồ thị của hàm số  $F = F(C) = \frac{9}{5}C + 32$  trên đoạn  $[-10; 40]$  (H.6.20):



**Câu 8.** Giá phòng của một khách sạn là 750 nghìn đồng một ngày cho hai ngày đầu tiên và 500 nghìn đồng cho mỗi ngày tiếp theo. Tổng số tiền  $T$  phải trả là một hàm số của số ngày  $x$  mà khách ở tại khách sạn.

- a) Viết công thức của hàm số  $T = T(x)$ .
- b) Tính  $T(2), T(5), T(7)$  và cho biết ý nghĩa của mỗi giá trị này.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

$$T = T(x) = \begin{cases} 750x & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 1500 + 500(x - 2) & \text{khi } x > 2 \end{cases}$$

a)

b)  $T(2) = 1500$ : khách sẽ phải trả 1,5 triệu đồng nếu thuê phòng khách sạn 2 ngày;

$T(3) = 3000$ : khách sẽ phải trả 3 triệu đồng nếu thuê phòng khách sạn 5 ngày;

$T(7) = 4000$ : khách sẽ phải trả 4 triệu đồng nếu thuê phòng khách sạn 5 ngày.

**Câu 9.** Bảng sau đây cho biết giá nước sinh hoạt (chưa tính thuế VAT) của hộ dân cư theo mức sử dụng.

của xe máy và ô tô là thẳng đều. Chọn  $A$  làm mốc, chọn thời điểm 6 giờ làm mốc thời gian và chọn chiều từ  $A$  đến  $B$  làm chiều dương. Khi đó tọa độ của xe máy và ô tô sẽ là những hàm số của biến thời gian.

- Viết phương trình chuyển động của xe máy và ô tô (tức là công thức của hàm tọa độ theo thời gian).
- Vẽ đồ thị hàm tọa độ của xe máy và ô tô trên cùng một hệ trục tọa độ.
- Căn cứ vào đồ thị vẽ được, hãy xác định vị trí và thời điểm ô tô đuổi kịp xe máy.
- Kiểm tra lại kết quả tìm được ở câu c) bằng cách giải các phương trình chuyển động của xe máy và ô tô.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

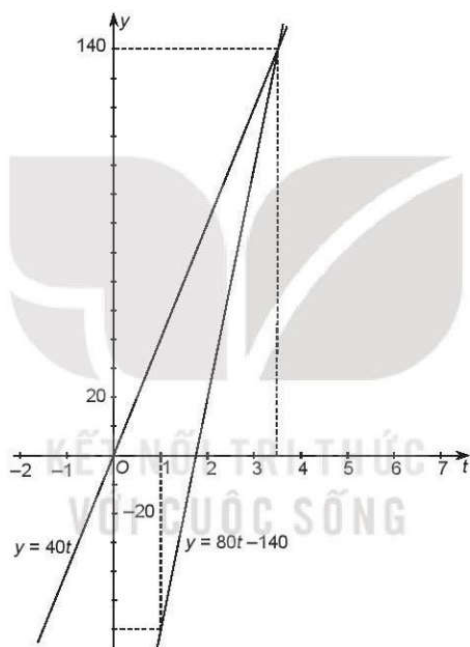
### Lời giải

#### Chọn

a) Phương trình chuyển động của xe máy là:  $y = 40t$ .

Phương trình chuyển động của ô tô là:  $y = 20 + 80(t - 2) = 80t - 140$ .

b) Hình 6.21



Hình 6.21

c) Hai đồ thị cắt nhau tại điểm  $(3,5; 140)$ , suy ra ô tô đuổi kịp xe máy khi  $t = 3,5$ , tức là đuổi kịp lúc 9 giờ 30 phút tại vị trí cách địa điểm  $A$  là 140 km.

d) Xét phương trình  $40t = 80t - 140 \Leftrightarrow 40t = 140 \Leftrightarrow t = 3,5$ . Khi  $t = 3,5$  thì  $y = 40 \cdot 3,5 = 140$

Vậy ô tô đuổi kịp xe máy lúc 9 giờ 30 phút tại vị trí cách địa điểm  $A$  là 140 km.

- c) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số.  
d) Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

- a) Tọa độ đỉnh của đồ thị hàm số là  $I(2;1)$   
b) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 2)$  và nghịch biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .  
c) Hàm số có giá trị lớn nhất là 1, đạt được khi  $x = 2$ .  
d) Tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R}$ . Tập giá trị của hàm số là  $(-\infty; 1]$ .

**Ví dụ 6:** Vẽ các đường parabol sau:

- a)  $y = 2x^2 + 4x - 6$ ;  
b)  $y = -x^2 - 2$ .

A.

B.

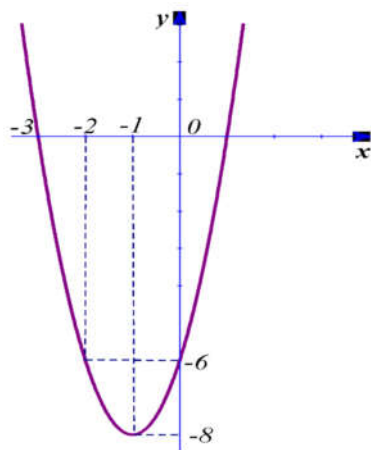
C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

- a) (H.6.11)



Hình 6.11

- Ta có  $a = 2 > 0$  nên parabol quay bề lõm lên trên.
- Đỉnh  $I(-1; -8)$ .
- Trục đối xứng  $x = -1$ .
- Giao điểm với  $Oy$  là  $(0; -6)$ .
- Điểm đối xứng với điểm  $(0; -6)$  qua trục đối xứng  $x = -1$  là  $(-2; -6)$ .
- Giao điểm với  $Ox$  là  $(-3; 0)$  và  $(1; 0)$ .

Do đó ta có  $\begin{cases} b = 2a \\ 3a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$ .

Vậy parabol cần tìm là  $y = 2x^2 + 4x + 3$ .

c) Parabol có đỉnh  $I(-2;19)$  nên ta có

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -2 \\ 4a - 2b + 3 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a \\ 2a - b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -16 \end{cases}.$$

Vậy parabol cần tìm là  $y = -4x^2 - 16x + 3$ .

**Ví dụ 8:** Một cây cầu treo có trọng lượng phân bố đều dọc theo chiều dài của nó. Cây cầu có trụ tháp đôi cao  $75m$  so với mặt của cây cầu và cách nhau  $400m$ . Các dây cáp có hình dạng đường parabol và được treo trên các đỉnh tháp. Các dây cáp chạm mặt cầu ở tâm của cây cầu. Tìm chiều cao của dây cáp tại điểm cách tâm của cây cầu  $100m$  (giả sử mặt của cây cầu là bằng phẳng).

A.

B.

C.

D.

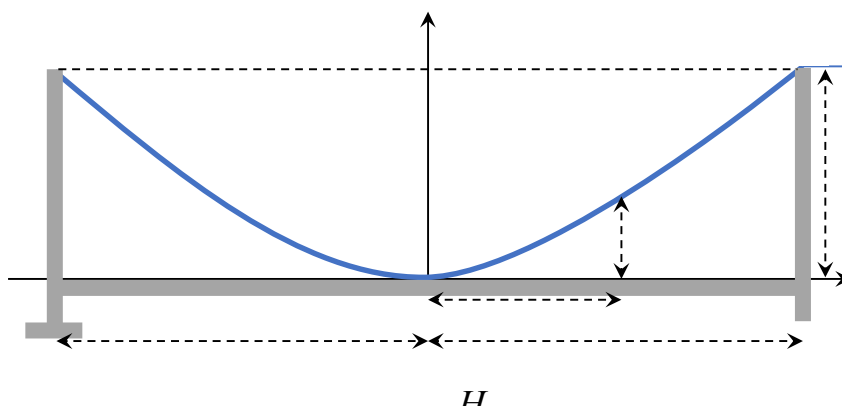
**Lời giải**

**Chọn**

Chọn hệ trục tọa độ  $Oxy$  như Hình 6.13:

- Trục  $Ox$  dọc theo mặt của cây cầu.
- Trục  $Oy$  vuông góc với trục  $Ox$  tại tâm của cây cầu.

Khi đó các dây cáp có hình dạng đường parabol có bề lõm hướng lên trên và đỉnh của parabol là gốc  $O(0;0)$ . Vì thế ta sử dụng công thức của parabol  $y = ax^2, a > 0$ .



Theo giả thiết, cây cầu có trụ tháp đôi cao  $75m$  so với mặt của cây cầu và cách nhau  $400m$  nên ta có các điểm  $A(-200;75)$  và  $B(200;75)$  thuộc parabol. Khi đó ta có

$$75 = a \cdot 200^2 \Leftrightarrow a = \frac{3}{1600}.$$

$$y = f(x) = -x^2 - x + 1; y = g(x) = x^2 - 8x + 8;$$

Hãy thực hiện các yêu cầu sau:

- Viết lại hàm số bậc hai dưới dạng  $y = a(x-h)^2 + k$ ;
- Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số;
- Vẽ đồ thị của hàm số.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

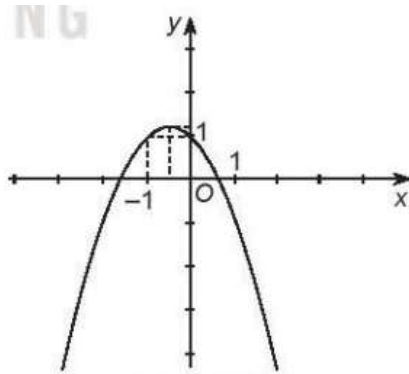
$$a) y = f(x) = -x^2 - x + 1 = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}.$$

$$y = g(x) = x^2 - 8x + 8 = (x - 4)^2 - 8$$

$$b) \text{Giá trị lớn nhất của hàm số } y = f(x) = -x^2 - x + 1 \text{ là } \frac{5}{4}.$$

$$\text{Giá trị nhỏ nhất của hàm số } y = g(x) = x^2 - 8x + 8 \text{ là } -8.$$

c) (H.6.22) Đồ thị hàm số



Hình 6.22

$$y = f(x) = -x^2 - x + 1$$

Ta có  $a = -1 < 0$  nên parabol quay bề lõm xuống dưới. Đỉnh  $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$ .

Trục đối xứng  $x = -\frac{1}{2}$ .

Giao điểm với  $Oy$  là  $(0; 1)$ .

Điểm đối xứng với điểm  $(0; 1)$  qua trục đối xứng  $x = -\frac{1}{2}$  là  $(-1; 1)$

Giao điểm với  $Ox$  là  $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; 0\right)$  và  $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$ .

(H.6.23) Đồ thị hàm số  $y = g(x) = x^2 - 8x + 8$ .

A.

B.

C.

D.

## Lời giải

## Chọn

Giả sử parabol có phương trình  $y = a(x-h)^2 + k$

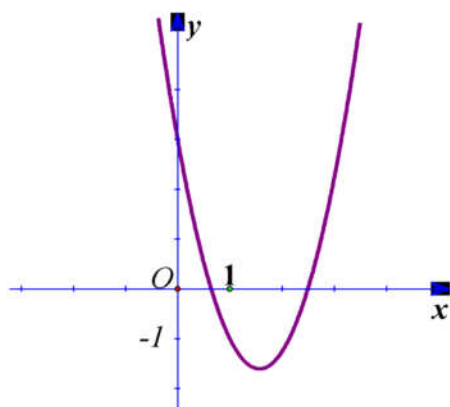
Parabol có đỉnh  $I(-1;2)$  nên ta có  $h = -1, k = 2$ .

Do đó  $y = a(x+1)^2 + 2$ .

Vì parabol đi qua điểm  $A(1;6)$  nên  $6 = a(1+1)^2 + 2$ , do đó  $a = 1$ .

Vậy parabol cần tìm là  $y = (x+1)^2 + 2 = x^2 + 2x + 3$ .

**Câu 16.** Xác định dấu của các hệ số  $a, b, c$  và dấu của biệt thức  $\Delta = b^2 - 4ac$  của hàm số bậc hai  $y = ax^2 + bx + c$ , biết đồ thị của nó có dạng như Hình 6.16.



Hình 6.16

A.

B.

C.

D.

## Lời giải

## Chọn

+) Đồ thị quay bề lõm lên trên nên  $a > 0$ .

+) Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên  $c > 0$ .

+) Hoành độ đỉnh  $x = -\frac{b}{2a}$  có giá trị dương nên  $a$  và  $b$  trái dấu. Vì  $a > 0$  nên  $b < 0$ .

Mặt khác, vì đồ thị cắt trục  $Ox$  tại hai điểm phân biệt tức là phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có hai nghiệm phân biệt nên  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ .

Vậy  $a > 0, b < 0, c > 0$ .

**Câu 17.** Bác Hùng dùng  $200m$  hàng rào dây thép gai để rào miếng đất đủ rộng thành một mảnh vườn hình chữ nhật.

a) Tìm công thức tính diện tích  $S(x)$  của mảnh vườn hình chữ nhật rào được theo chiều rộng  $x(m)$  của mảnh vườn đó.

c) Sau bao lâu kể từ khi ném, hòn đá rơi xuống mặt đất (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)?

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

a) Theo giả thiết điểm ném ở độ cao 1,5 m so với mặt đất nên  $n = 1,5$ .

Hòn đá đạt độ cao lớn nhất khi  $t = -\frac{m}{2 \cdot (-4,9)} = \frac{m}{9,8}$ .

Theo đề ra ta có  $\frac{m}{9,8} = 1,2 \Leftrightarrow m = 11,76$ .

Vậy phương trình chuyển động của hòn đá là:  $y = -4,9t^2 + 11,76t + 1,5$ .

b) Khi  $t = 2$  ta có  $y = -4,9 \cdot 2^2 + 11,76 \cdot 2 + 1,5 = 5,42$ .

Vậy sau 2 giây, hòn đá có độ cao là 5,42 m.

c) Hòn đá rơi xuống mặt đất tức. Xét phương trình

$$-4,9t^2 + 11,76t + 1,5 = 0 \Leftrightarrow t \approx 2,52 \text{ hoặc } t \approx -0,12 \text{ (loại)}$$

Vậy sau 2,52 giây kể từ khi ném thì hòn đá rơi xuống đất.

**Câu 20.** Một rạp chiếu phim có sức chứa 1 000 người. Với giá vé là 40 000 đồng, trung bình sẽ có khoảng 300 người đến rạp xem phim mỗi ngày. Để tăng số lượng vé bán ra, rạp chiếu phim đã khảo sát thị trường và thấy rằng nếu giá vé cứ giảm 10000 đồng thì sẽ có thêm 100 người đến rạp mỗi ngày.

a) Tìm công thức của hàm số  $R(x)$  mô tả doanh thu từ tiền bán vé mỗi ngày của rạp chiếu phim khi giá vé là  $x$  nghìn đồng.

b) Tìm mức giá vé để doanh thu từ tiền bán vé mỗi ngày của rạp là lớn nhất.

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

a) Khi giá vé là  $x$  (nghìn đồng) thì số tiền giảm giá mỗi vé so với mức giá cũ là  $40 - x$  (nghìn đồng).

Số người tăng lên sau khi giảm giá vé là:  $\frac{100(40 - x)}{10} = 10(40 - x)$ .

Số người đến rạp chiếu phim mỗi ngày sau giảm giá là:  $300 + 10(40 - x) = 700 - 10x$ .

Công thức của hàm số  $R(x)$  mô tả doanh thu từ tiền bán vé mỗi ngày khi giá vé là  $x$  (nghìn đồng) là:  
 $R(x) = x(700 - 10x) = -10x^2 + 700x$ .

b) Hàm số  $R(x) = -10x^2 + 700x$  đạt giá trị lớn nhất tại  $x = 35$ . Khi đó  $R(35) = 12250$ .

Vậy doanh thu lớn nhất mà rạp chiếu phim có thể thu được mỗi ngày là 12 250 000 đồng khi giá bán mỗi vé là 35 000 đồng

## BÀI 17. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

### I. LÝ THUYẾT

1. Tam thức bậc hai (đối với  $x$ ) là biểu thức có dạng  $ax^2 + bx + c$ , trong đó  $a, b, c$  là những số thực cho trước (với  $a \neq 0$ ) và được gọi là các hệ số của tam thức bậc hai.

2. Cho tam thức bậc hai  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ).

- Nếu  $\Delta < 0$  thì  $f(x)$  cùng dấu với hệ số  $a$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

- Nếu  $\Delta = 0$  thì  $f(x)$  cùng dấu với hệ số  $a$  với mọi  $x \neq -\frac{b}{2a}$  và  $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$ .

- Nếu  $\Delta > 0$  thì tam thức  $f(x)$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2$  ( $x_1 < x_2$ ). Khi đó:

$f(x)$  cùng dấu với hệ số  $a$  với mọi  $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ ;

$f(x)$  trái dấu với hệ số  $a$  với mọi  $x \in (x_1; x_2)$ .

Dấu của  $f(x)$  được thể hiện trong bảng dưới đây:

3. Cho tam thức bậc hai  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ), "a có các kết quả sau:

Phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có nghiệm khi và chỉ khi  $\Delta \geq 0$ .

Phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi  $ac < 0$ .

### III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 9:** Giải các bất phương trình sau:

a)  $-2x^2 + 5x - 2 \geq 0$ ;

b)  $\frac{1}{x^2 - x + 1} < 1$

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Tam thức bậc hai  $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$  có hệ số  $a = -2 < 0$  và có hai nghiệm  $x_1 = \frac{1}{2}$  và  $x_2 = 2$  nên ta có bảng xét dấu

|        |           |               |     |           |     |
|--------|-----------|---------------|-----|-----------|-----|
| $x$    | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $2$ | $+\infty$ |     |
| $f(x)$ | $-$       | $0$           | $+$ | $0$       | $-$ |

Từ bảng xét dấu, ta được tập nghiệm của bất phương trình là  $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ .

a)  $f(x)$  hệ có hệ số  $a = -1 < 0$  và có hai nghiệm  $x_1 = -1, x_2 = 7$  nên  $f(x) < 0$  với mọi  $x \in (-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$  và  $f(x) > 0$  với mọi  $x \in (-1; 7)$ .

b)  $g(x)$  có hệ số  $a = 3 > 0$  và biệt thức thu gọn  $\Delta' = -5 < 0$  nên  $g(x) > 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

c)  $h(x)$  có hệ số  $a = -16 < 0$  và biệt thức thu gọn  $\Delta' = 0$  nên  $h(x) < 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{4}\right\}$  và  $h\left(\frac{3}{4}\right) = 0$  (hay  $h(x) = -(4x-3)^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ).

d)  $k(x)$  hệ có hệ số  $a = 2 > 0$  và có hai nghiệm  $x_1 = \frac{3-\sqrt{7}}{2}, x_2 = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$  nên  $k(x) > 0$  với mọi  $x \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{7}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}; +\infty\right)$  và  $f(x) > 0$  với mọi  $x \in \left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}; \frac{3+\sqrt{7}}{2}\right)$ .

**Câu 22.** Giải các bất phương trình sau:

a)  $3x^2 - 36x + 108 > 0$ ;

b)  $-x^2 + 2x - 2 \geq 0$ ;

c)  $x^4 - 3x^2 + 2 \leq 0$ ;

d)  $\frac{1}{x^2 - x + 1} \leq \frac{1}{2x^2 + x + 2}$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Tam thức  $3x^2 - 36x + 108$  có hệ số  $a = 3 > 0$  và biệt thức thu gọn  $\Delta' = 0$  nên  $3x^2 - 36x + 108 > 0$  với mọi  $x \neq 6$  và bằng 0 tại  $x = 6$ . Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là  $\mathbb{R} \setminus \{6\}$ .

b) Tam thức  $-x^2 + 2x - 2$  có hệ số  $a = -1 < 0$  và biệt thức thu gọn  $\Delta' = -1 < 0$  nên  $-x^2 + 2x - 2 < 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Suy ra bất phương trình vô nghiệm.

c) Đây là bất phương trình trùng phương nên nếu đặt  $t = x^2$  thì ta được  $t^2 - 3t + 2 < 0$ . Từ đó suy ra  $1 \leq t \leq 2$ .

Giải bất phương trình  $1 \leq x^2$  ta được  $x \leq -1$  hoặc  $x \geq 1$ .

Giải bất phương trình  $x^2 \leq 2$  ta được  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ .

Kết hợp nghiệm ta được tập nghiệm của bất phương trình là  $[-\sqrt{2}; -1] \cup [1; \sqrt{2}]$ .

d) Dễ thấy  $x^2 - x + 1 > 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  (vì  $a = 1 > 0$  và biệt thức  $\Delta$  âm);  $2x^2 + x + 2 > 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  (vì  $a = 2 > 0$  và biệt thức  $\Delta$  âm). Do đó ta có thể nhân chéo để được bất phương trình  $2x^2 + x + 2 \leq x^2 - x + 1$  hay  $x^2 + 2x + 1 \leq 0$ . Tam thức  $x^2 + 2x + 1$  có hệ số  $a = 1 > 0$  và biệt thức  $\Delta = 0$  nên

$$\text{Vậy } m \in \left( \frac{-\sqrt{7}}{2}; \frac{\sqrt{7}}{2} \right)$$

**Câu 25.** Một công ty đồ gia dụng sản xuất bình đựng nước thấy rằng khi đơn giá của bình đựng nước là  $x$  nghìn đồng thì doanh thu  $R$  (tính theo đơn vị nghìn đồng) sẽ là  $R(x) = -560x^2 + 50000x$ .

a) Theo mô hình doanh thu này, thì đơn giá nào là quá cao dẫn đến doanh thu từ việc bán bình đựng nước bằng 0 (tức là sẽ không có người mua)?

b) Với khoảng đơn giá nào của bình đựng nước thì doanh thu từ việc bán bình đựng nước vượt mức 1 tỉ đồng?

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Doanh thu từ việc bán bình đựng nước bằng 0 tức là

$$R(x) = 0 \Leftrightarrow -560x^2 + 50000x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \approx 89 \end{cases}$$

Vậy theo mô hình đã cho, với đơn giá 89 nghìn đồng thì công ty sẽ không có doanh thu (đơn giá cao quá dẫn đến không có ai mua hàng).

b) Doanh thu vượt mức 1 tỉ đồng tức là

$$R(x) > 1000000 \Leftrightarrow -560x^2 + 50000x > 1000000$$

$$\Leftrightarrow 560x^2 - 50000x + 1000000 < 0$$

$$\Leftrightarrow 30,25 < x < 59,04$$

Vậy đơn giá của bình đựng nước từ khoảng 31 nghìn đồng đến 59 nghìn đồng thì doanh thu từ việc bán bình đựng nước vượt mức 1 tỉ đồng.

**Câu 26.** Một viên đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu  $500 \text{ m/s}$ , hợp với phương ngang một góc bằng  $45^\circ$ . Biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí, quỹ đạo chuyển động của một vật ném xiên sẽ tuân theo phương trình:

$$y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha,$$

trong đó  $x$  là khoảng cách (tính bằng mét) vật bay được theo phương ngang, vận tốc ban đầu  $v_0$  của vật hợp với phương ngang một góc  $\alpha$  và  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  là gia tốc trọng trường.

a) Viết phương trình chuyển động của viên đạn.

b) Để viên đạn bay qua một ngọn núi cao 4000 mét thì khẩu pháo phải đặt cách chân núi một khoảng cách bao xa?

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

## BÀI 18. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

### I. LÝ THUYẾT

1. Để giải phương trình  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f}$ , bình phương hai vế sau đó thu gọn ta được phương trình

$$(a-d)x^2 + (b-e)x + (c-f) = 0 \quad (1)$$

Giải phương trình (1) được các nghiệm, sau đó thay vào phương trình ban đầu để thử lại xem nghiệm nào thoả mãn và kết luận.

Chú ý rằng nếu  $x_0$  là một nghiệm của phương trình (1) thì khi thử lại ta chỉ cần kiểm tra xem, nếu  $ax^2 + bx + c \geq 0$  thì  $x_0$  sẽ là nghiệm của phương trình đã cho.

2. Để giải phương trình  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$  bình phương hai vế sau đó thu gọn ta được phương trình  $(a-d^2)x^2 + (b-2de)x + (c-e^2) = 0$  (2)

Giải phương trình (2) được các nghiệm, sau đó thay vào phương trình ban đầu để thử lại xem nghiệm nào thoả mãn và kết luận. Chú ý rằng nếu  $x_0$  là một nghiệm của phương trình (2) thì khi thử lại ta chỉ cần kiểm tra xem, nếu  $dx_0 + e \geq 0$  thì  $x_0$  sẽ là nghiệm của phương trình đã cho.

### III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 11:** Giải các phương trình sau:

a)  $\sqrt{2x^2 + 7x + 1} = \sqrt{3x^2 + 4x - 9}$  (3)

b)  $\sqrt{5x^2 - 5x} = 2x - 1$  (4)

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Bình phương hai vế của (3) và thu gọn ta được  $x^2 - 3x - 10 = 0$ . Từ đó  $x = -2$  và  $x = 5$ .

- Thay  $x = -2$  vào phương trình đã cho:  $\sqrt{2(-2)^2 + 7(-2) + 1} = \sqrt{3(-2)^2 + 4(-2) - 9}$  hay  $\sqrt{-5} = \sqrt{-5}$  vô lí.

- Thay  $x = 5$  vào phương trình đã cho  $\sqrt{2(5)^2 + 7(5) + 1} = \sqrt{3(5)^2 + 4(5) - 9}$  hay  $86 = 86$ , thoả mãn.

Vậy phương trình (3) có nghiệm duy nhất  $x = 5$ .

b) Bình phương hai vế của (4) và thu gọn ta được  $x^2 - x - 1 = 0$  Từ đó  $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  và  $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

- Thay  $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  vào vế phải của phương trình (4) ta được:

$$2 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1 = -\sqrt{5} < 0$$

- Thay  $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  vào vế phải của phương trình (4) ta được:  $2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \sqrt{5} > 0$

a) Tập nghiệm  $S = \{-4; 5\}$ .

b) Tập nghiệm  $S = \{10\}$ .

c) Phương trình đã cho vô nghiệm.

**Câu 30.** Giải các phương trình sau:

a)  $\sqrt{2x-3} = x-3$ ;

b)  $(x-3)\sqrt{x^2+4} = x^2-9$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Tập nghiệm  $S = \{6\}$ .

b) Viết lại phương trình đã cho dưới dạng  $(x-3)\left[\sqrt{x^2+4}-(x+3)\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \sqrt{x^2+4}=x+3 \end{cases}$

Giải phương trình  $\sqrt{x^2+4}=x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x^2+4=(x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x = -\frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{6}$ .

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm  $x=3$  và  $x=-\frac{5}{6}$ .

**Câu 31.** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{2x^2+x+1} = \sqrt{x^2+mx+m-1}.$$

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Bình phương hai vế phương trình đã cho và thu gọn ta được  $x^2 + (1-m)x + 2 - m = 0$  (\*). Do  $2x^2 + x + 1 > 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  (vì  $a=2 > 0$  và  $\Delta = -7 < 0$ ) nên nếu  $x_0$  là một nghiệm của phương trình (\*) thì khi thử lại ta được  $2x_0^2 + x_0 + 1 > 0$ , tức là  $x_0$  thỏa mãn phương trình đã cho. Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (\*) có nghiệm. Điều này tương đương với

$$\begin{aligned} \Delta \geq 0 &\Leftrightarrow (1-m)^2 - 4(2-m) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 + 2m - 7 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 + 2\sqrt{2} \\ m \leq -1 - 2\sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

**Câu 32.** Mặt cắt đứng của cột cây số trên quốc lộ có dạng nửa hình tròn ở phía trên và phía dưới có dạng hình chữ nhật (xem hình bên). Biết rằng đường kính của nửa hình tròn cũng là cạnh phía trên của hình chữ nhật và đường chéo của hình chữ nhật có độ dài  $66 \text{ cm}$ . Tìm kích thước của hình chữ nhật, biết rằng

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

### A- Trắc nghiệm

**Câu 33.** Thu nhập bình quân theo đầu người (GDP) của Việt Nam (tính theo USD) trong vòng 10 năm, từ năm 2009 đến năm 2018 được cho bởi bảng sau (dựa theo số liệu của Tổng cục Thống kê):

| Năm | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| GDP | 1055 | 1273 | 1517 | 1749 | 1908 | 2052 | 2199 | 2215 | 2385 | 2587 |

Bảng này xác định một hàm số chỉ sự phụ thuộc của GDP (kí hiệu là  $y$ ) vào thời gian  $x$  (tính bằng năm). Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

- A. Giá trị của hàm số tại  $x = 2018$  là 2587.
- B. Tập xác định của hàm số có 10 phần tử.
- C. Tập giá trị của hàm số có 10 phần tử.
- D. Giá trị của hàm số tại  $x = 2587$  là 2018.

A.

B.

C.

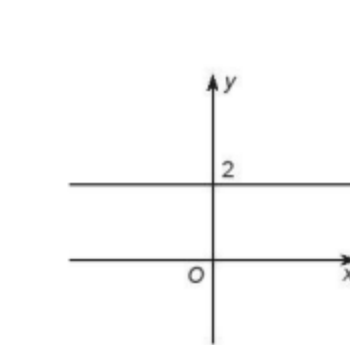
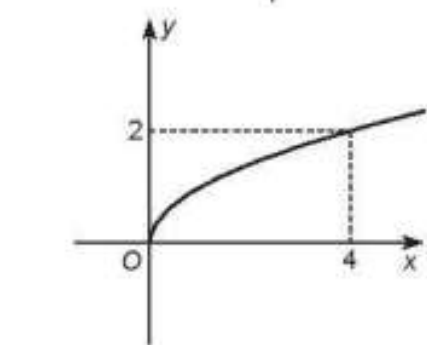
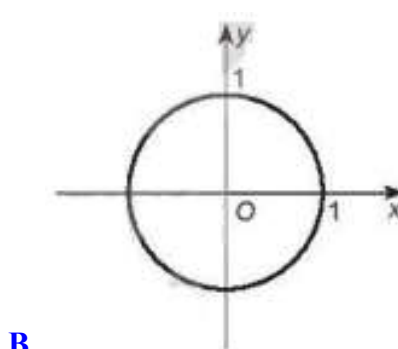
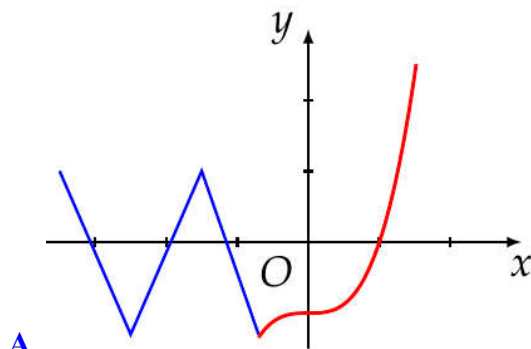
D.

Lời giải

Chọn

Chọn D

**Câu 34.** Các đường dưới đây, đường nào **không** là đồ thị của hàm số?



C.

D.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 35.** Tập xác định của hàm số  $y = \sqrt{x}$  là

A.  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

B.  $\mathbb{R}$ .

C.  $[0; +\infty)$ .

D.  $(0; +\infty)$ .

**Câu 39.** Trục đối xứng của parabol  $(P): y = 2x^2 + 6x + 3$  là

- A.  $y = -3$ .                      B.  $y = -\frac{3}{2}$ .                      C.  $x = -3$ .                      D.  $x = -\frac{3}{2}$ .
- A.                      B.                      C.                      D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn D**

**Câu 40.** Parabol  $y = -4x - 2x^2$  có đỉnh là

- A.  $I(-1; 1)$ .                      B.  $I(-1; 2)$ .                      C.  $I(1; 1)$ .                      D.  $I(2; 0)$ .
- A.                      B.                      C.                      D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn B**

**Câu 41.** Cho hàm số  $y = x^2 - 2x + 3$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

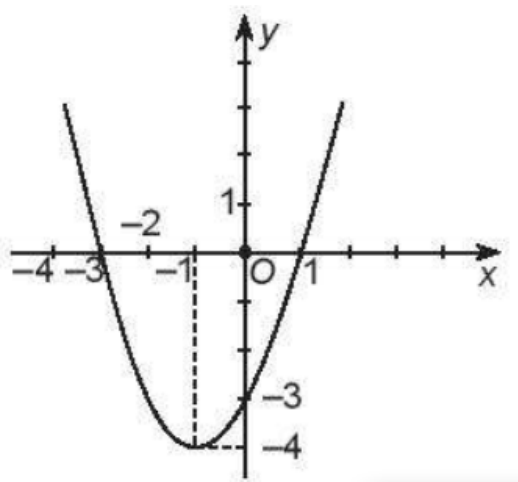
- A. Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 2)$ .                      B. Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; 2)$ .
- C. Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 1)$ .                      D. Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; 1)$ .
- A.                      B.                      C.                      D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn D**

**Câu 42.** Đường parabol trong hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



- A.  $y = x^2 + 2x - 3$ .                      B.  $y = -x^2 - 2x + 3$ .                      C.  $y = -x^2 + 2x - 3$ .                      D.  $y = x^2 - 2x - 3$ .
- A.                      B.                      C.                      D.

**Lời giải**

**Chọn**

|        |           |      |           |
|--------|-----------|------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-6$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $+$       | $0$  | $+$       |

B.

|        |           |      |           |
|--------|-----------|------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-6$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-$       | $0$  | $-$       |

C.

|        |           |      |           |
|--------|-----------|------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-6$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-$       | $0$  | $+$       |

D.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 47.** Tập nghiệm của bất phương trình  $x^2 - 4x + 3 < 0$  là

A.  $(1; 3)$ .

B.  $(-\infty; 1) \cup [3; +\infty)$ .

C.  $[1; 3]$ .

D.  $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn A

**Câu 48.** Các giá trị của tham số  $m$  làm cho biểu thức  $f(x) = x^2 + 4x + m - 5$  luôn dương là

A.  $m \geq 9$ .

B.  $m > 9$ .

C. Không có  $m$ .

D.  $m < 9$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 49.** Phương trình  $(m+2)x^2 - 3x + 2m - 3 = 0$  có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

A.  $m < -2$  hoặc  $m > \frac{3}{2}$ .

B.  $m > \frac{3}{2}$ .

C.  $-2 < m < \frac{3}{2}$ .

D.  $m < 2$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

a) Hàm số xác định khi  $-x^2 + 3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$ .Vậy tập xác định của hàm số là  $D = [1; 2]$ b) Điều kiện xác định:  $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \end{cases}$ .Vậy tập xác định của hàm số là  $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ 

$$y = \begin{cases} 2x + 3 & \text{khi } -2 \leq x < -1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{khi } -1 \leq x < 1 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} & \text{khi } 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

**Câu 55.** Cho hàm số

a) Tìm tập xác định của hàm số.

b) Vẽ đồ thị hàm số.

c) Từ đồ thị vẽ ở ý

b) hãy chỉ ra các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số.

d) Tìm tập giá trị của hàm số.

A.

B.

C.

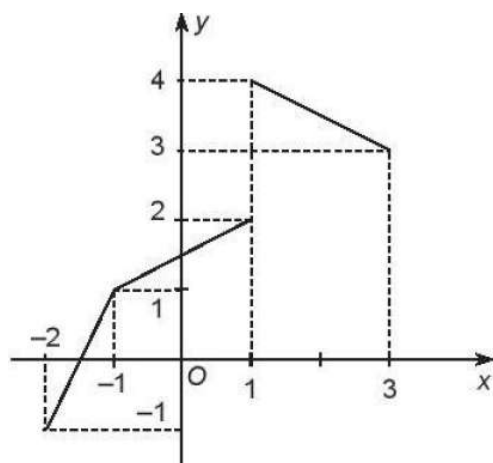
D.

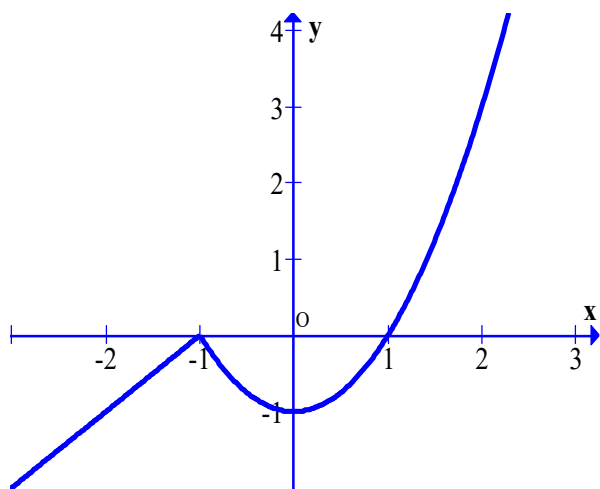
Lời giải

Chọn

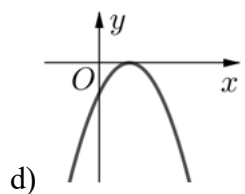
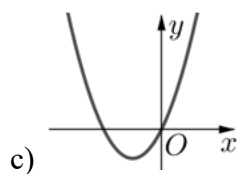
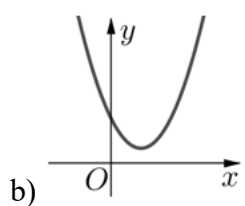
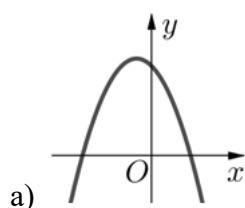
a) Tập xác định của hàm số là đoạn  $D = [-2; 3]$ .

b) Đồ thị hàm số cho bởi hình dưới đây

**Hình 6.24**c) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-2; 1)$  và nghịch biến trên khoảng  $(1; 3)$ .



**Câu 57.** Dựa vào đồ thị của hàm số  $y = ax^2 + bx + c$ , hãy xác định dấu của các hệ số  $a, b, c$  trong mỗi trường hợp dưới đây.



**A.**

**B.**

**C.**

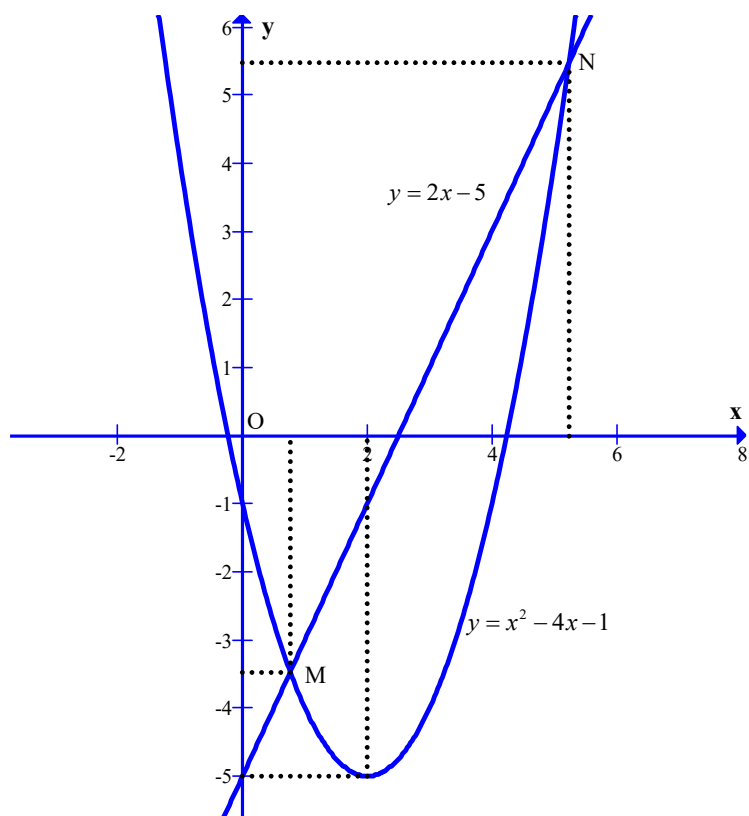
**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Parabol có bề lõm quay xuống dưới nên  $a < 0$ . Parabol cắt trục  $Oy$  tại điểm  $(0; c)$  nằm phía trên trục  $Ox$  nên  $c > 0$ . Trục đối xứng  $x = -\frac{b}{2a} < 0$  kết hợp với  $a < 0$  suy ra  $b < 0$ . Vậy  $a < 0, b < 0, c > 0$ .

b) Parabol có bề lõm quay lên trên nên  $a > 0$ . Parabol cắt trục  $Oy$  tại điểm  $(0; c)$  nằm phía trên trục  $Ox$  nên  $c > 0$ . Trục đối xứng  $x = -\frac{b}{2a} > 0$  kết hợp với  $a > 0$  suy ra  $b < 0$ . Vậy  $a > 0, b < 0, c > 0$ .



**Hình 6.28**

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

$$x^2 - 4x - 1 = 2x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{5}.$$

Với  $x = 3 - \sqrt{5}$  ta được  $y = 2(3 - \sqrt{5}) - 5 = 1 - 2\sqrt{5}$ . Vậy  $M(3 - \sqrt{5}; 1 - 2\sqrt{5})$ .

Với  $x = 3 + \sqrt{5}$  ta được  $y = 2(3 + \sqrt{5}) - 5 = 1 + 2\sqrt{5}$ . Vậy  $N(3 + \sqrt{5}; 1 + 2\sqrt{5})$ .

**Câu 59.** Vẽ đồ thị mỗi hàm số sau, từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình tương ứng

a)  $y = x^2 - 3x + 2$  và bất phương trình  $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ ;

b)  $y = x^2 - x - 6$  và bất phương trình  $x^2 - x - 6 < 0$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Đồ thị hàm số  $y = x^2 - 3x + 2$  được vẽ như Hình 6.29 dưới đây. Việc giải bất phương trình  $x^2 - 3x + 2 \geq 0$  ứng với việc tìm các khoảng mà phần đồ thị tương ứng của nó nằm phía trên trục hoành. Từ Hình 6.29 ta thấy khi  $x \leq 1$  và  $x \geq 2$  thì đồ thị hàm số  $y = x^2 - 3x + 2$  nằm phía trên trục hoành. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$ .

- Khi  $m = 0$  thì hàm số cho bởi công thức  $y = \frac{1}{\sqrt{5}}$ , lúc này hàm số có tập xác định là  $\mathbb{R}$ .

- Khi  $m \neq 0$  thì  $mx^2 - 2mx + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  nếu chỉ nếu  $a = m > 0$  và  $\Delta' = m^2 - 5m < 0$  hay  $0 < m < 5$ .

Vậy hàm số đã cho có tập xác định là  $\mathbb{R}$  nếu và chỉ nếu  $0 \leq m < 5$ .

b) Tam thức  $y = -x^2 + mx - 1$  có dấu không phụ thuộc vào  $x$  khi và chỉ khi  $\Delta = m^2 - 4 < 0$  hay  $-2 < m < 2$ .

c) Hàm số  $y = \sqrt{-2x^2 + mx - m - 6}$  có tập xác định chỉ gồm một phần tử khi và chỉ khi nó có dạng  $y = \sqrt{-2(x + \alpha)^2}$ . Điều này tương đương với  $\Delta = m^2 - 8m - 48 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = 12 \end{cases}$ .

Chẳng hạn  $m = -4$  thì  $y = \sqrt{-2x^2 - 4x - 2} = \sqrt{-2(x + 1)^2}$  có tập xác định là  $D = \{-1\}$ .

**Câu 61.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 6\text{ cm}$ ,  $AD = 13\text{ cm}$ . Tìm vị trí điểm  $M$  trên cạnh  $AD$  sao cho  $BM = 2MD$ .

A.

B.

C.

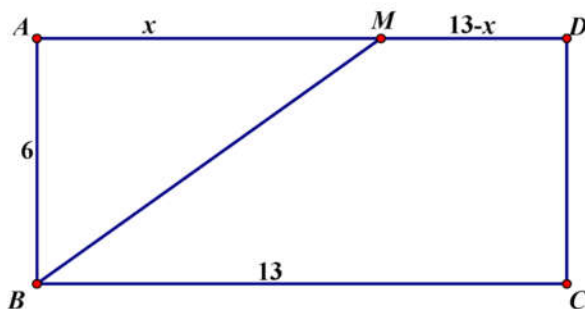
D.

**Lời giải**

**Chọn**

Đặt  $AM = x (0 < x < 13)$ . Khi đó ta có  $BM = \sqrt{36 + x^2}$  và  $MD = 13 - x$ . Theo giả thiết ta có  $BM = 2MD$ , tức là  $\sqrt{36 + x^2} = 2(13 - x)$ . Giải phương trình này và kết hợp với điều kiện ta được  $x = 8$ .

Vậy  $AM = 8\text{ cm}$ .



**Câu 62.** Trong Vật lý ta biết rằng, khi một vật được ném xiên với vận tốc ban đầu  $v_0$ , góc ném hợp với phương ngang  $Ox$  một góc  $\alpha$ , nếu ta bỏ qua sức cản của không khí và gió, vật chỉ chịu tác động của trọng lực với gia tốc trọng trường  $g \approx 9,8\text{ m/s}^2$ , thì độ cao  $y$  (so với mặt đất) của vật phụ thuộc vào khoảng cách theo phương ngang  $x$  (tính đến mặt đất tại điểm ném) theo một hàm số bậc hai cho bởi công thức

$$y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

Vậy khi quả bóng ở độ cao trên  $5m$  thì khoảng cách theo phương ngang từ vị trí quả bóng đến vị trí đá bóng nằm trong khoảng  $(5,83;34,98)$  mét.

**Câu 63.** Một công ty kinh doanh máy tính cầm tay thấy rằng khi bán máy ở mức giá  $x$  (nghìn đồng) một chiếc thì số lượng máy bán được  $n$  cho bởi phương trình  $n = 1200000 - 1200x$ .

a) Tìm công thức biểu diễn doanh thu  $R$  như là hàm số của đơn giá  $x$ . Tìm miền xác định của hàm số  $R = R(x)$ .

b) Máy tính được bán ở đơn giá nào sẽ cho doanh thu lớn nhất? Tính doanh thu lớn nhất và số máy tính bán được trong trường hợp đó.

c) Với đơn giá nào thì công ty sẽ đạt được doanh thu trên 200 tỉ đồng (làm tròn đến nghìn đồng)?

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Công thức biểu thị doanh thu  $R$  là

$$R(x) = nx = (1200000 - 1200x)x = -1200x^2 + 1200000x.$$

Điều kiện để hàm số  $R = R(x)$  xác định là  $x \geq 0$  và  $n = 1200000 - 1200x \geq 0$ ,

tức là  $0 \leq x \leq 1000$ . Tập xác định của hàm số  $R = R(x)$  là đoạn  $[0;1000]$ .

b) Hàm số  $R = R(x)$  đạt giá trị lớn nhất tại  $x = -\frac{b}{2a} = 500$  và giá trị lớn nhất của doanh thu bằng  $R(500) = 300000000$ . Như vậy với đơn giá 500 nghìn đồng một chiếc thì công ty đạt doanh thu cao nhất là 300 tỉ đồng và khi đó số máy tính bán được là  $n = 600000$  chiếc.

c) Doanh thu đạt trên 200 tỉ đồng nghĩa là

$$R(x) = -1200x^2 + 1200000x > 200000000$$

$$\Leftrightarrow 1200x^2 - 1200000x + 200000000 < 0.$$

Giải bất phương trình ta được nghiệm gần đúng  $211,32 < x < 788,68$ . Như vậy với đơn giá từ 212 nghìn đồng đến 788 nghìn đồng thì doanh thu của công ty đạt trên 200 tỉ đồng.

**Bảng 1. Nhiệt độ và trạng thái của băng phiến khi để nguội**

| Thời gian nguội (phút)          | 0    | 1  | 2  | 3  | 4           | 5  | 6  | 7  | 8   | 9  | 10 |
|---------------------------------|------|----|----|----|-------------|----|----|----|-----|----|----|
| Nhiệt độ ( $^{\circ}\text{C}$ ) | 86   | 84 | 82 | 81 | 80          | 80 | 80 | 80 | 79  | 77 | 75 |
| Trạng thái                      | lỏng |    |    |    | lỏng và rắn |    |    |    | rắn |    |    |

a) Tại sao từ bảng trên, có thể nói nhiệt độ của băng phiến là một hàm số theo thời gian (nung nóng)?  
Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số trên.

b) Sau khi để nguội 3 phút, nhiệt độ băng phiến là bao nhiêu?

c) Băng phiến chuyển hoàn toàn sang trạng thái rắn sau bao nhiêu phút?

**A. B. C. D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Bảng giá trị cho thấy nhiệt độ (kí hiệu là  $y$ ) là một hàm số theo thời gian (kí hiệu là  $x$ ) vì khi cho  $x$  một giá trị bất kỳ, ta luôn tìm được duy nhất một giá trị của  $y$ . Do vậy bảng này xác định một hàm số biểu thị nhiệt độ của băng phiến theo thời gian.

Từ bảng giá trị của hàm số, ta có tập xác định  $D = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$  và tập giá trị  $T = \{75; 77; 79; 80; 81; 82; 84; 86\}$ .

b) Sau khi để nguội 3 phút, nhiệt độ băng phiến là  $81^{\circ}\text{C}$ .

c) Băng phiến chuyển hoàn toàn sang trạng thái rắn sau 8 phút (lúc đó nhiệt độ băng phiến là  $79^{\circ}\text{C}$ ).

**Ví dụ 2:** Tìm tập xác định của các hàm số sau

a)  $f(x) = \sqrt{-3x-2}$ ;

b)  $f(x) = \frac{2-x}{2+x}$ ;

c)  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{vì } x \text{ là số hữu tỷ} \\ 0 & \text{vì } x \text{ là số vô tỷ} \end{cases}$ .

**A. B. C. D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Hàm số xác định khi và chỉ khi  $-3x-2 \geq 0 \Rightarrow x \leq -\frac{2}{3}$ . Vậy  $D = \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$ .

b) Hàm số xác định khi và chỉ khi  $2+x \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$ . Vậy  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ .

c) Khi  $x$  là số hữu tỉ, hàm số xác định và luôn lấy giá trị bằng 1; khi  $x$  là số vô tỉ, hàm số xác định và lấy giá trị bằng 0. Vậy  $D = \mathbb{R}$ .

**Ví dụ 3:** Vẽ đồ thị hàm số  $y = f(x) = |x-4|$ .

**A. B. C. D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Hàm số này còn được viết như sau

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{khi } x-4 \geq 0 \\ -(x-4) & \text{khi } x-4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-4 & \text{khi } x \geq 4 \\ -x+4 & \text{khi } x < 4 \end{cases}$$

Suy ra hàm số  $h(x)$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ . Vậy hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên  $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ .

Vậy hàm số  $f(x) = |2x - 1|$  nghịch biến trên  $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$  và đồng biến trên  $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .

### III. BÀI TẬP

**Câu 1.** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a)  $f(x) = \frac{4x-1}{\sqrt{2x-5}}$

b)  $f(x) = \frac{2-x}{(x+3)(x-7)}$

c)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3} & \text{khi } x \geq 0 \\ 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

**Lời giải**

a) Biểu thức  $f(x)$  có nghĩa khi và chỉ khi  $2x - 5 > 0$  nên  $D = \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$ .

b) Biểu thức  $f(x)$  có nghĩa khi và chỉ khi  $(x+3)(x-7) \neq 0$  nên  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 7\}$ .

c) Hàm số lấy giá trị bằng 1 khi  $x < 0$  nên hàm số xác định với mọi  $x < 0$ .

Khi  $x \geq 0$ , hàm số xác định khi và chỉ khi  $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$ .

Vậy tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ .

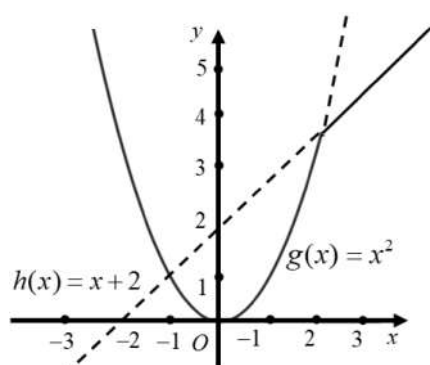
**Câu 2.** Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ x+2 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$

b)  $f(x) = |x+3| - 2$ .

**Lời giải**

a) Vẽ đồ thị hàm số  $g(x) = x^2$  và giữ lại phần đồ thị ứng với  $x \leq 2$ ; vẽ đồ thị hàm số  $h(x) = x + 2$  và giữ lại phần đồ thị ứng với  $x > 2$ . Ta được đồ thị hàm số cần vẽ (Hình 1).



Hình 1

b) Ta có:  $f(x) = \begin{cases} x+1 & ; x \geq -3 \\ -x-5 & ; x < -3. \end{cases}$

Ta được đồ thị hàm số cần vẽ (Hình 2).

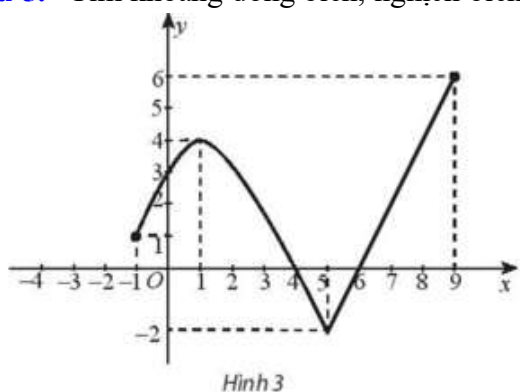
### Lời giải

a) Lấy  $x_1, x_2$  là hai số tùy ý cùng thuộc mỗi khoảng  $(-\infty; -5), (-5; +\infty)$ , sao cho  $x_1 < x_2$ , ta chứng minh được  $f(x_1) < f(x_2)$  nên hàm số luôn đồng biến trên các khoảng này.

b) Ta viết lại được: 
$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & ; x \geq \frac{1}{3} \\ -3x+1 & ; x < \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Bằng cách xét khoảng đồng biến và nghịch biến của hai hàm số  $g(x) = 3x-1$  và  $h(x) = -3x+1$ , ta đi đến kết quả: Hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$  và đồng biến trên khoảng  $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ .

**Câu 5.** Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số có đồ thị như sau:



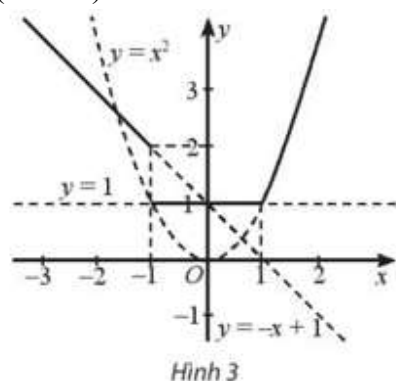
### Lời giải

- Đồ thị hàm số có dạng đi lên từ điểm có tọa độ  $(-1; 1)$  đến điểm có tọa độ  $(1; 4)$  nên hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1; 1)$ ;
- Đồ thị có dạng đi xuống từ điểm có tọa độ  $(1; 4)$  đến điểm có tọa độ  $(5; -2)$  nên hàm số nghịch biến trên khoảng  $(1; 5)$ ;
- Đồ thị có dạng đi lên từ điểm có tọa độ  $(5; -2)$  đến điểm có tọa độ  $(9; 6)$  nên hàm số đồng biến trên khoảng  $(5; 9)$ .

**Câu 6.** Vẽ đồ thị hàm số sau: 
$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & (x < -1) \\ 1 & (-1 \leq x < 1) \\ x^2 & (x \geq 1) \end{cases}$$

### Lời giải

Bằng cách vẽ đồ thị các hàm số  $g(x) = -x+1$  trên khoảng  $(-\infty; -1)$ , đồ thị hàm số  $h(x) = 1$  trên nửa khoảng  $[-1; 1)$ , đồ thị hàm số  $k(x) = x^2$  trên nửa khoảng  $[1; +\infty)$  ta có đồ thị hàm số  $f(x)$  (Hình 3).



## BÀI 2. HÀM SỐ BẬC HAI

### I. LÝ THUYẾT

#### 1. Hàm số bậc hai

Hàm số bậc hai theo biến  $x$  là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$  với  $a, b, c$  là các số thực với  $a$  khác 0

Tập xác định của hàm số bậc hai là  $\mathbb{R}$

#### 2. Đồ thị hàm số bậc hai

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , đồ thị hàm số bậc hai  $y = ax^2 + bx + c$  (với  $a \neq 0$ ) là một parabol  $(P)$ :

- Có đỉnh  $S$  với hoành độ  $x_s = -\frac{b}{2a}$ , tung độ  $y_s = -\frac{\Delta}{4a}$ ;

- Có trục đối xứng  $x = -\frac{b}{2a}$  (đường thẳng này đi qua đỉnh  $S$  và song song với trục  $Oy$  nếu  $b \neq 0$ , trùng với trục  $Oy$  nếu  $b = 0$ )

- Có bề lõm hướng lên trên nếu  $a > 0$ , quay xuống dưới khi  $a < 0$ .

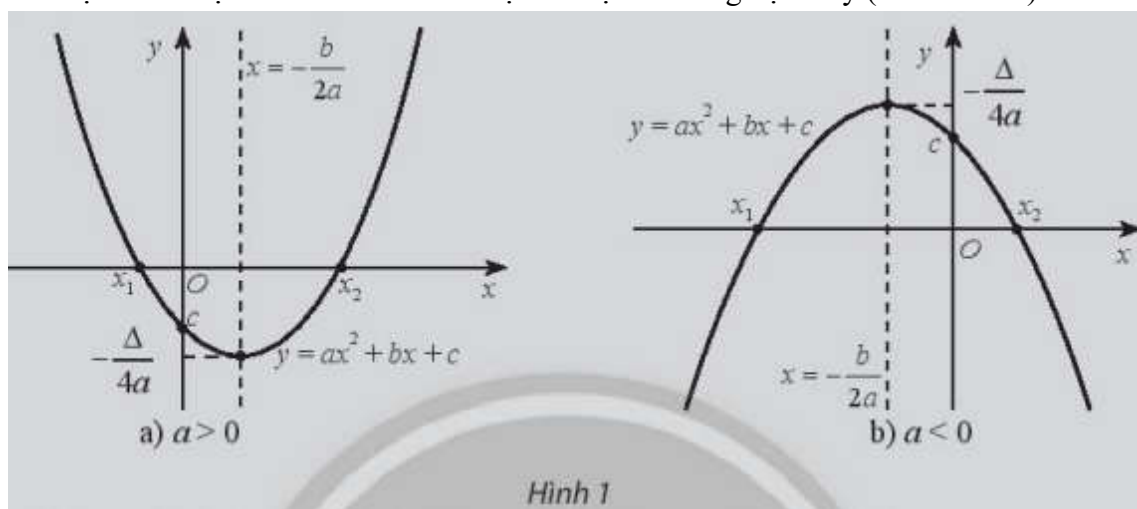
- Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng  $c$ , tức là đồ thị đi qua điểm có tọa độ  $(0; c)$

Chú ý

Nếu  $b = 2b'$  thì  $(P)$  có đỉnh  $S\left(-\frac{b'}{a}; -\frac{\Delta'}{a}\right)$  với  $\Delta' = b'^2 - ac$

Nếu phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thì đồ thị hàm số bậc hai  $y = ax^2 + bx + c$

Cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ lần lượt là hai nghiệm này (xem Hình 1)



Cách vẽ đồ thị hàm số bậc hai  $y = ax^2 + bx + c$

1) Xác định tọa độ đỉnh  $S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

2) Vẽ trục đối xứng  $d$  là đường thẳng  $x = -\frac{b}{2a}$

3) Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị với trục tung (điểm  $A(0; c)$ ) và giao điểm của đồ thị với trục hoành (nếu có)

Xác định thêm điểm đối xứng với  $A$  qua trục đối xứng  $d$  là điểm  $B\left(-\frac{b}{a}; c\right)$

4) Vẽ parabol có đỉnh  $S$ , có trục đối xứng  $d$  và đi qua các điểm tìm được

#### 3. Sự biến thiên của hàm số bậc hai

### Chọn

a) Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , đồ thị hàm số bậc hai  $y = -2x^2 - 3x + 5$  là parabol ( $P$ ):

- Có đỉnh  $S$  với  $x_S = -\frac{3}{4}; y_S = \frac{49}{8}$ .

- Có trục đối xứng là đường thẳng  $x = -\frac{3}{4}$  (đường thẳng này đi qua đỉnh  $S$  và song song với trục  $Oy$ ).

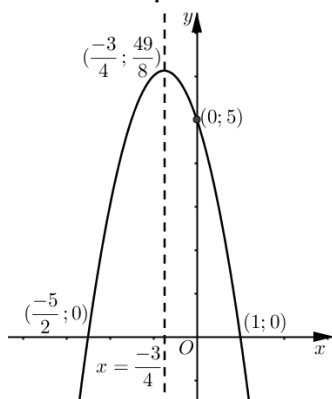
- Có bề lõm quay xuống vì  $a < 0$

- Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 5, tức là đồ thị đi qua điểm có tọa độ  $(0; 5)$ .

- Ngoài ra, phương trình  $-2x^2 - 3x + 5 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1 = 1$  và  $x_2 = -\frac{5}{2}$  nên đồ thị hàm

số cắt trục hoành tại hai điểm có tọa độ  $(1; 0)$  và  $(-\frac{5}{2}; 0)$ .

Ta vẽ đồ thị như Hình 4.



b) Ta có:

$$f(x) = (x+2)(x-3) = x^2 - x - 6$$

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , đồ thị hàm số bậc hai  $y = x^2 - x - 6$  là parabol ( $P$ ):

- Có đỉnh  $S$  với  $x_S = \frac{1}{2}; y_S = -\frac{25}{4}$ .

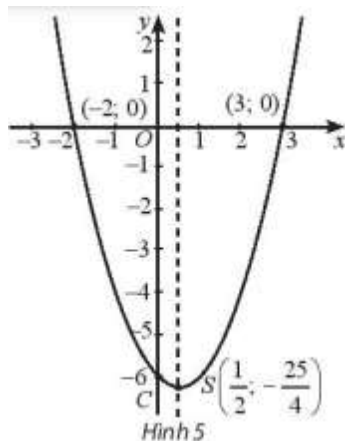
- Có trục đối xứng là đường thẳng  $x = \frac{1}{2}$  (đường thẳng này đi qua đỉnh  $S$  và song song với trục  $Oy$ ).

- Có bề lõm quay lên vì  $a > 0$ .

- Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng  $-6$ , tức là đồ thị đi qua điểm có tọa độ  $(0; -6)$ .

- Ngoài ra, phương trình  $x^2 - x - 6 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1 = 3$  và  $x_2 = -2$  nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm có tọa độ  $(3; 0)$  và  $(-2; 0)$ .

Ta vẽ đồ thị như Hình 5.



c) Ta có:  $y = f(x) = (x+3)^2 - 4 = x^2 + 6x + 5$ .

|        |           |                |           |
|--------|-----------|----------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $\frac{1}{3}$  | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $-\frac{5}{3}$ | $-\infty$ |

Vậy hàm số đồng biến trên  $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ , nghịch biến trên  $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ . Hàm số có tập giá trị  $T = \left(-\infty; -\frac{5}{3}\right]$ .

b) Hàm số  $y = f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x$  có  $a = -\frac{1}{4} < 0$ , đồ thị có đỉnh  $S(-2; 1)$ .

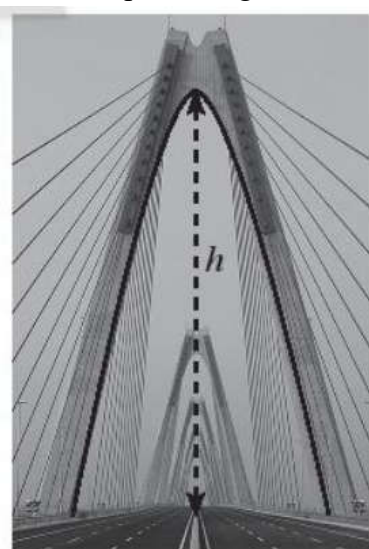
Ta có bảng biến thiên như sau:

|        |           |      |           |
|--------|-----------|------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $1$  | $-\infty$ |

Vậy hàm số đồng biến trên  $(-\infty; -2)$ , nghịch biến trên  $(-2; +\infty)$ . Hàm số có tập giá trị  $T = (-\infty; 1]$ .

**Ví dụ 8:** Cầu Nhật Tân bắc qua sông Hồng được xem là chiếc cầu dây văng dài nhất Việt Nam năm 2022. Cầu có 5 trụ tháp chính kết nối các nhịp dây văng nâng đỡ toàn bộ phần chính của cây cầu, cũng là để tượng trưng cho 5 cửa ô cổ kính của Hà Nội. Mỗi trụ tháp được kiến trúc tạo dáng mỹ thuật phía trong bằng đường cong tựa như một parabol.

a) Giả sử rằng mặt trong của trụ cầu là một parabol như Hình 7. Khi không thể đo trực tiếp khoảng cách từ đỉnh vòm phía trong của trụ cầu tới mặt đường, làm thế nào để ước tính độ cao này?



Hình 7. Cầu Nhật Tân

b) Giả sử biết độ rộng của mặt đường khoảng 43 m. Một người đã dùng dây dọi (không giãn) gắn lên thành trụ cầu ở vị trí B và điều chỉnh độ dài dây dọi để quả nặng vừa chạm đất (khi lặng gió), sau đó đo được chiều dài đoạn dây dọi sử dụng là 1,87 m và khoảng cách từ chân trụ cầu đến quả nặng là 20 cm. Nếu dùng dữ liệu tự thu thập được và tính toán theo cách ở trên thì người này sẽ ước tính được độ cao từ đỉnh vòm phía trong một trụ của cầu Nhật Tân tới mặt đường là bao nhiêu?

- Đo khoảng cách  $OA$  giữa hai chân trụ của cầu, từ đó xác định tọa độ điểm  $A, H$  (với  $H$  là trung điểm của  $OA$ ).

- Chọn một điểm  $B$  cụ thể trên thành trụ cầu, xác định hình chiếu  $B'$  trên mặt đường rồi đo  $BB'$  và  $OB'$ . Từ đây, xác định tọa độ điểm  $B$ .

- Tìm hàm số bậc hai có công thức tổng quát:  $y = ax^2 + bx + c$  biết đồ thị hàm số này qua gốc tọa độ và hai điểm  $A, B$ .

- Sau cùng tính tung độ đỉnh  $S$ .

**Bước 4.** Trả lời kết quả cho vấn đề thực tế

Ước lượng kết quả độ cao từ đỉnh vòm phía trong của trụ cầu tới mặt đường (có thể làm tròn tung độ đỉnh  $S$  đến đơn vị mét).

b) Chọn hệ trục tọa độ như Bước 2 ở câu a.

Đồ thị hàm số bậc hai  $y = ax^2 + bx + c$  đi qua gốc tọa độ  $O(0;0)$  nên  $c = 0$ . Suy ra công thức hàm số là  $ax^2 + bx$ .

Mặt khác đồ thị hàm số qua 2 điểm  $A(43;0), B(0,2;1,87)$  nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a \cdot (0,2)^2 + b \cdot 0,2 = 1,87 \\ a \cdot 43^2 + b \cdot 43 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } a = -\frac{187}{856}; b = \frac{8041}{856} \text{ nên có hàm số } y = -\frac{187}{856}x^2 + \frac{8041}{856}x.$$

Hình chiếu của đỉnh  $S$  trên trục hoành là  $H$  nên

$$y_S = f(x_S) = f(x_H) = f\left(\frac{x_A}{2}\right) = f\left(\frac{43}{2}\right) \approx 100,98.$$

Vậy độ cao từ đỉnh vòm phía trong một trụ của cầu Nhật Tân tới mặt đường là khoảng 101m.

(Lưu ý: Kết quả này là giả định theo số liệu do người này tự thu thập, không ảnh hưởng đến độ cao thật trong thực tế).

### III. BÀI TẬP

**Bài 1.** Hàm số nào trong các hàm sau đây không phải là hàm số bậc hai?

a)  $y = 3x^2 + x - \sqrt{3}$ ; b)  $y = x^2 + |x + 1|$ ;

c)  $y = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ -2x^2 - x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ ; d)  $y = 2(x^2 + 1) + 3x - 1$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

- Hàm số  $y = x^2 + |x + 1|$  không phải là hàm số bậc hai vì công thức của hàm số có chứa dấu giá trị tuyệt đối.

- Hàm số:  $y = \begin{cases} x^2 + 1 & ; x \geq 0 \\ -2x^2 - x & ; x < 0 \end{cases}$

cũng không phải là hàm số bậc hai vì hàm số này được cho bằng hai công thức.

**Bài 2.** Cho hàm số bậc hai có đồ thị là parabol có đỉnh  $S$ , đi qua các điểm  $A, B, C(0;-1)$  được cho trong hình 10.

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

Hàm số bậc hai có công thức tổng quát  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ .

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm  $A(1; -3)$  nên ta có:  $a + b + c = -3$  (1)

Đồ thị hàm số đi qua điểm  $B(0; -2)$  nên ta có:  $c = -2$  (2)

Đồ thị hàm số đi qua điểm  $C(2; -10)$  nên ta có:  $4a + 2b + c = -10$  (3)

Thay (2) vào phương trình (1) và (3) ta có  $\begin{cases} a + b = -1 \\ 4a + 2b = -8 \end{cases}$ . Suy ra  $a = -3; b = 2$ .

Vậy công thức hàm số là  $y = -3x^2 + 2x - 2$ .

b) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng  $-16$  nên  $c = -16$ . Suy ra công thức hàm số:  $f(x) = ax^2 + bx - 16$ .

Một trong hai giao điểm của đồ thị với trục hoành có hoành độ bằng  $-2$  nên  $a(-2)^2 + b(-2) - 16 = 0$ .

Đồ thị hàm số có trục đối xứng là đường thẳng  $x = 3$  nên  $-\frac{b}{2a} = 3$  hay  $-b = 6a$ .

Giải hệ phương trình  $\begin{cases} a(-2)^2 + b(-2) - 16 = 0 \\ -b = 6a \end{cases}$  ta được  $a = 1, b = -6$ .

Vậy  $y = f(x) = x^2 - 6x - 16$ .

**Bài 5.** Tìm khoảng biến thiên và tập giá trị của các hàm số sau:

a)  $y = f(x) = -2x^2 - 4x + 7$ ;

b)  $y = f(x) = x^2 - 6x + 1$ .

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

a) Hàm số  $y = f(x) = -2x^2 - 4x + 7$  có  $a = -2 < 0$  và đồ thị hàm số là parabol có tọa độ đỉnh  $S(-1; 9)$ , ta có bảng biến thiên sau:

|        |           |      |           |
|--------|-----------|------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $9$  | $-\infty$ |

Vậy hàm số đồng biến trên  $(-\infty; -1)$ , nghịch biến trên  $(-1; +\infty)$ .

Hàm số có tập giá trị  $T = (-\infty; 9]$ .

Vậy chiều dài dây dọi khoảng  $2,8\text{ m}$ .

b) Khoảng cách từ chân trụ cầu đến quả nặng là hoành độ điểm  $B$  trên parabol với  $y_B = 15$ .

$$\text{Ta có } -\frac{187}{856} \cdot x_B^2 + \frac{8041}{856} \cdot x_B = 15.$$

Suy ra  $x_1 \approx 1,6$  và  $x_2 \approx 41,3$ .

Vậy khoảng cách từ chân trụ cầu bên trái đến quả nặng là khoảng  $1,6(m)$ , khoảng cách từ chân trụ cầu bên phải đến quả nặng là khoảng  $41,3(m)$ .

Theo đề bài, ta chọn kết quả  $1,6\text{ m}$ .

Theo định nghĩa hàm số bậc hai có dạng:  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) thì đáp án B vi phạm định nghĩa.

**Câu 12.** Tập giá trị của hàm số  $y = f(x) = -2x^2 + \sqrt{2}x + 1$  là

**A.**  $T = \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$ .      **B.**  $T = \left[\frac{5}{4}; +\infty\right)$ .

**C.**  $T = \left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$ .      **D.**  $T = \left(-\infty; \frac{5}{4}\right]$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn D**

$$y = -2x^2 + \sqrt{2}x + 1 \Leftrightarrow y = -2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = -2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{8} - \frac{5}{8}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = -2\left(x - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{5}{4} \geq \frac{5}{4}$$

Vậy tập giá trị của hàm số là:  $T = \left[\frac{5}{4}; +\infty\right)$ .

**Câu 13.** Hàm số  $y = f(x) = -(x+2)(x-4)$  đồng biến trên khoảng

**A.**  $(-\infty; -1)$ .      **B.**  $(1; +\infty)$ .      **C.**  $(-\infty; 1)$ .      **D.**  $(-1; +\infty)$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn C**

Hàm số  $y = -(x+2)(x-4) \Leftrightarrow y = -x^2 + 2x + 8$  có  $a = -1 < 0$  và  $-\frac{b}{2a} = 1$  nên đồng biến trên khoảng  $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ .

Vì vậy hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 1)$ .

**Câu 14.** Hàm số  $y = f(x) = (x+2)(x-2)$  có

**A.** Giá trị nhỏ nhất là 4.      **B.** Giá trị lớn nhất là 4.  
**C.** Giá trị lớn nhất là -4.      **D.** Giá trị nhỏ nhất là -4.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

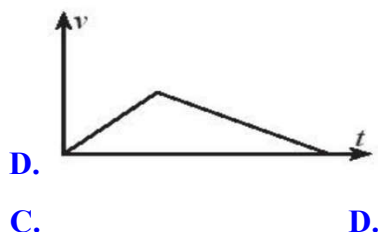
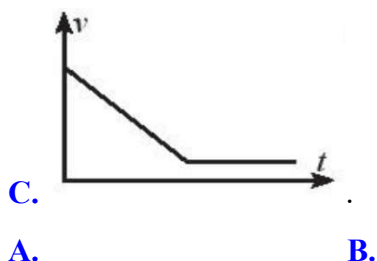
**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn D**

$$y = f(x) = (x+2)(x-2) \Leftrightarrow y = x^2 - 4 \geq -4$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là -4.



Lời giải

Chọn

Chọn C

## II. TỰ LUẬN

**Bài 8.** Ta có bảng giá trị của hàm cầu đối với sản phẩm A theo đơn giá của sản phẩm A như sau:

|                                         |     |     |     |    |    |
|-----------------------------------------|-----|-----|-----|----|----|
| Đơn giá sản phẩm A (đơn vị: nghìn đồng) | 10  | 20  | 40  | 70 | 90 |
| Lượng cầu (nhu cầu về số sản phẩm)      | 338 | 288 | 200 | 98 | 50 |

a) Giả sử hàm cầu là một hàm số bậc hai theo đơn giá  $x$ , hãy viết công thức của hàm này, biết rằng  $c = 392$ .

b) Chứng tỏ rằng hàm số có thể viết thành dạng  $y = f(x) = a(b - x)^2$ .

c) Giả sử hàm cầu này lấy mọi giá trị trên đoạn  $[0; 100]$ , hãy tính lượng cầu khi đơn giá sản phẩm A là 30; 50; 100.

d) Cùng giả thiết với câu c, nếu lượng cầu là 150 sản phẩm thì đơn giá sản phẩm A là khoảng bao nhiêu (đơn vị: nghìn đồng)?

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

a) Theo giả thiết, hàm cầu là một hàm số bậc hai nên công thức của hàm số có dạng:  $y = f(x) = ax^2 + bx + 392$ .

Ta chọn 2 cặp giá trị từ bảng đã cho lần lượt có  $x = 10, x = 20$  thì được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + 392 = 338 \\ a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + 392 = 288 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được  $a = \frac{1}{50}; b = -\frac{28}{5}$ .

Vậy  $y = f(x) = \frac{1}{50}x^2 - \frac{28}{5}x + 392$ .

b) Hàm số này còn có thể thu gọn thành dạng  $y = f(x) = \frac{(140 - x)^2}{50} = \frac{1}{50}(140 - x)^2$ .

c) Khi  $x = 30$  thì lượng cầu là:  $y = f(30) = 242$ .

Khi  $x = 50$  thì lượng cầu là:  $y = f(50) = 162$ .

Khi  $x = 100$  thì lượng cầu là:  $y = f(100) = 32$ .

Giải theo ẩn  $v_0$ , ta được  $v_0^2 = \frac{90000}{101}$ . Suy ra  $v_0 \approx 29,85 \text{ (m/s)}$ .

|        |                                                                                                                                                                    |                 |           |           |        |   |  |                                                                                                                                                                                                               |     |           |                 |           |        |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                  |     |           |       |       |           |        |   |   |   |   |   |
|--------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|-----------|-----------|--------|---|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----------|-----------------|-----------|--------|---|---|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----------|-------|-------|-----------|--------|---|---|---|---|---|
|        | <table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>f(x)</math></td><td colspan="2">—</td></tr></table> | $x$             | $-\infty$ | $+\infty$ | $f(x)$ | — |  | <table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>-\frac{b}{2a}</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>f(x)</math></td><td>—</td><td>0</td><td>—</td></tr></table> | $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$ | $f(x)$ | — | 0 | — | <table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>x_1</math></td><td><math>x_2</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>f(x)</math></td><td>—</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>—</td></tr></table> | $x$ | $-\infty$ | $x_1$ | $x_2$ | $+\infty$ | $f(x)$ | — | 0 | + | 0 | — |
| $x$    | $-\infty$                                                                                                                                                          | $+\infty$       |           |           |        |   |  |                                                                                                                                                                                                               |     |           |                 |           |        |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                  |     |           |       |       |           |        |   |   |   |   |   |
| $f(x)$ | —                                                                                                                                                                  |                 |           |           |        |   |  |                                                                                                                                                                                                               |     |           |                 |           |        |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                  |     |           |       |       |           |        |   |   |   |   |   |
| $x$    | $-\infty$                                                                                                                                                          | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$ |           |        |   |  |                                                                                                                                                                                                               |     |           |                 |           |        |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                  |     |           |       |       |           |        |   |   |   |   |   |
| $f(x)$ | —                                                                                                                                                                  | 0               | —         |           |        |   |  |                                                                                                                                                                                                               |     |           |                 |           |        |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                  |     |           |       |       |           |        |   |   |   |   |   |
| $x$    | $-\infty$                                                                                                                                                          | $x_1$           | $x_2$     | $+\infty$ |        |   |  |                                                                                                                                                                                                               |     |           |                 |           |        |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                  |     |           |       |       |           |        |   |   |   |   |   |
| $f(x)$ | —                                                                                                                                                                  | 0               | +         | 0         | —      |   |  |                                                                                                                                                                                                               |     |           |                 |           |        |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                  |     |           |       |       |           |        |   |   |   |   |   |

□ Biểu thức  $\Delta = b^2 - 4ac$  và  $\Delta' = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$  là **biệt thức** và **biệt thức thu gọn** của  $f(x)$ .

Khi thay  $x$  bằng giá trị  $x_0$  vào  $f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$ , gọi là **giá trị của tam thức bậc hai** tại  $x_0$ .

□ Nếu  $f(x_0) > 0$  thì ta nói  $f(x)$  dương tại  $x_0$ ;

□ Nếu  $f(x_0) < 0$  thì ta nói  $f(x)$  âm tại  $x_0$ ;

□ Nếu  $f(x)$  dương (âm) tại mọi điểm  $x$  thuộc một khoảng hoặc một đoạn thì ta nói  $f(x)$  dương (âm) trên khoảng hoặc đoạn đó.

## 2. Dấu của tam thức bậc hai

+  $f(x) > 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  khi và chỉ khi  $a > 0$  và  $\Delta < 0$ .

+  $f(x) \geq 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  khi và chỉ khi  $a > 0$  và  $\Delta \leq 0$ .

+  $f(x) < 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  khi và chỉ khi  $a < 0$  và  $\Delta < 0$ .

+  $f(x) \leq 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  khi và chỉ khi  $a < 0$  và  $\Delta \leq 0$ .

+  $f(x)$  không đổi dấu trên  $\mathbb{R}$  khi và chỉ khi  $\Delta < 0$ .

## II. CÁC DẠNG TOÁN.

**Dạng 1. Nghiệm của tam thức bậc hai.**

**Dạng 2. Xét dấu của tam thức bậc hai.**

**Dạng 3. Tìm điều kiện của tham số để tam thức bậc hai luôn dương hoặc luôn âm.**

## III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 1:** Cho tam thức bậc hai  $f(x) = 3x^2 + 4x - 7$ .

a) Tính biệt thức và nghiệm (nếu có) của  $f(x)$ .

b) Xác định dấu của  $f(x)$  tại  $x = 0$  và  $x = 3$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) Biệt thức của  $f(x)$  là  $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-7) = 100$ .

Xét phương trình  $f(x) = 0$  hay  $3x^2 + 4x - 7 = 0$ , ta có  $x = -\frac{7}{3}$  hoặc  $x = 1$ .

**Ví dụ 4:** Xét dấu các tam thức bậc hai sau.

a)  $f(x) = x^2 - 5x + 8$  ;

b)  $g(x) = -2x^2 + 4x - 2$  ;

c)  $h(x) = 2x^2 + 3x - 14$  ;

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $f(x) = x^2 - 5x + 8$  có  $\Delta = -7 < 0$  và  $a = 1 > 0$ . Do đó  $f(x)$  dương với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

b)  $g(x) = -2x^2 + 4x - 2$  có  $\Delta = 0$ , nghiệm kép là  $x_0 = 1$  và  $a = -2 < 0$ .

Vậy  $g(x) < 0$  với mọi  $x \neq 1$

c)  $h(x) = 2x^2 + 3x - 14$  có  $\Delta = 121 > 0$ , hai nghiệm phân biệt  $x_1 = -\frac{7}{2}, x_2 = 2$

Và  $a = 2 > 0$

Ta có bảng xét dấu  $h(x)$  như sau

|        |           |                |   |     |           |
|--------|-----------|----------------|---|-----|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-\frac{7}{2}$ |   | $2$ | $+\infty$ |
| $h(x)$ | +         | 0              | - | 0   | +         |

Vậy  $h(x)$  dương trong hai khoảng  $\left(-\infty; -\frac{7}{2}\right)$  và  $(2; +\infty)$ ; âm trong khoảng  $\left(-\frac{7}{2}; 2\right)$ .

**Ví dụ 5:** Cho biểu thức  $f(x) = (m+1)x^2 + 3x - 1$ , trong đó  $m$  là tham số. Tìm các giá trị của  $m$  để

a)  $f(x)$  là một tam thức bậc hai dương với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

b)  $f(x)$  là một tam thức bậc hai không đổi dấu với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $f(x)$  là một tam thức bậc hai dương với mọi  $x \in \mathbb{R}$  khi và chỉ khi  $m+1 > 0$  và  $\Delta < 0$ .

$m+1 > 0$  khi và chỉ khi  $m > -1$

$\Delta = 3^2 - 4(m+1) < 0$  khi và chỉ khi  $m < -\frac{13}{4}$ .

Vậy không có giá trị nào của  $m$  thỏa mãn bài toán.

c)  $f(x)$  dương tại  $x = 2$  khi và chỉ khi  $f(2) = 2m + 5 > 0$ , tức là  $m > -\frac{5}{2}$ .

**Câu 3.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để

a)  $f(x) = (m^2 + 9)x^2 + (m + 6)x + 1$  là một tam thức bậc hai có một nghiệm duy nhất;

b)  $f(x) = (m - 1)x^2 + 3x + 1$  là một tam thức bậc hai có hai nghiệm phân biệt;

c)  $f(x) = mx^2 + (m + 2)x + 1$  là một tam thức bậc hai vô nghiệm.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $f(x)$  là tam thức bậc hai khi và chỉ khi  $m^2 + 9 \neq 0$ , đúng với mọi  $m \in \mathbb{R}$ .

$f(x)$  có một nghiệm duy nhất khi và chỉ khi  $\Delta = (m + 6)^2 - 4(m^2 + 9) = 0$ , tức là  $m = 0$  hoặc  $m = 4$ .

Vậy  $m = 0$  hoặc  $m = 4$ .

b)  $f(x)$  là tam thức bậc hai khi và chỉ khi  $m - 1 \neq 0$  hay  $m \neq 1$ .

$f(x)$  có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi  $\Delta = 9 - 4(m - 1) > 0$  hay  $m < \frac{13}{4}$ .

Vậy  $m < \frac{13}{4}$  và  $m \neq 1$ .

c)  $f(x)$  là tam thức bậc hai khi và chỉ khi  $m \neq 0$ .

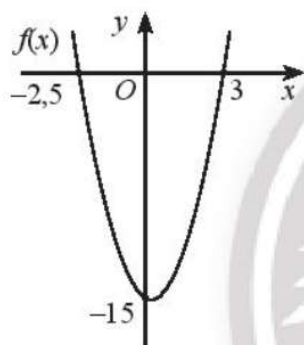
$f(x)$  vô nghiệm khi và chỉ khi  $\Delta = (m + 2)^2 - 4m < 0$ , hay  $m^2 + 4 < 0$ .

Điều này không xảy ra với bất kì giá trị  $m$  nào.

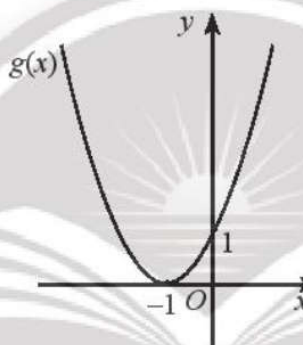
Vậy không có giá trị nào của  $m$  thỏa mãn yêu cầu.

**Câu 4.** Dựa vào đồ thị của các hàm số bậc hai được cho trong hình dưới đây, xét dấu của tam thức bậc hai tương ứng:

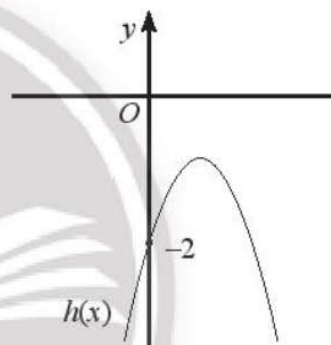
a)



b)



c)



d)  $f(x) = (m^2 + 1)x^2 - 3mx + 1$  là tam thức bậc hai âm với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

a)  $f(x)$  là tam thức bậc hai không đổi dấu trên  $\mathbb{R}$  khi và chỉ khi  $m+1 \neq 0$  và  $\Delta = 25 - 8(m+1) < 0$ . Vậy  $m > \frac{17}{8}$ .

b)  $f(x)$  là tam thức bậc hai âm với mọi  $x \in \mathbb{R}$  khi và chỉ khi  $m < 0$  và  $\Delta = 7^2 - 16m < 0$ , nghĩa là  $m < 0$  và  $m > \frac{49}{16}$ , vô lí.

Vậy không có giá trị nào của tham số  $m$  thỏa mãn yêu cầu.

c) Vì  $3 > 0$  nên  $f(x)$  là tam thức bậc hai dương với mọi  $x \in \mathbb{R}$  khi và chỉ khi  $\Delta' = 4 - 3(3m-1) < 0$ , nghĩa là  $m > \frac{7}{9}$ .

d) Vì  $m^2 + 1 > 0$  nên  $f(x)$  không thể âm với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Vậy không có giá trị nào của tham số  $m$  thỏa mãn yêu cầu.

**Câu 7.** Chứng minh rằng:

a)  $2x^2 + \sqrt{3}x + 1 > 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  ;

b)  $x^2 + x + \frac{1}{4} \geq 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  ;

c)  $-x^2 < -2x + 3$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

a) Vì tam thức bậc hai  $2x^2 + \sqrt{3}x + 1$  có  $a = 2 > 0$  và  $\Delta = -5 < 0$ , nên  $2x^2 + \sqrt{3}x + 1 > 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Vì tam thức bậc hai  $x^2 + x + \frac{1}{4}$  có  $a = 1 > 0$  và  $\Delta = 0$ , nên  $x^2 + x + \frac{1}{4} \geq 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

c) Vì tam thức bậc hai  $-x^2 + 2x - 3$  có  $a = -1 < 0$  và  $\Delta' = -2 < 0$ , nên  $-x^2 + 2x - 3 < 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

Do đó  $-x^2 < -2x + 3$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

**Câu 8.** Xác định giá trị của các hệ số  $a, b, c$  và xét dấu của tam thức bậc hai  $f(x) = ax^2 + bx + c$  trong mỗi trường hợp sau:

Vậy  $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ . Vì tam thức bậc hai  $f(x)$  có  $a = 2 > 0$  và  $\Delta' = -2 < 0$  nên  $f(x)$  dương với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

## Lời giải

### Chọn

a)  $f(x) < 0$  khi và chỉ khi  $-\frac{7}{3} < x < \frac{1}{2}$ . Tập nghiệm của bất phương trình  $\left(-\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$ .

b)  $f(x) > 0$  khi và chỉ khi  $x \neq -\frac{5}{3}$ . Tập nghiệm của bất phương trình  $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}\right\}$ .

c)  $f(x) \geq 0$  khi và chỉ khi  $x \leq \frac{5}{4}$  hoặc  $x \geq \frac{5}{2}$ .

Tập nghiệm của bất phương trình:  $\left(-\infty; \frac{5}{4}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$ .

d)  $f(x) \geq 0$  khi và chỉ khi  $x = 2$ .

Tập nghiệm của bất phương trình:  $\{2\}$ .

**Ví dụ 8:** Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a)  $3x^2 + 2x - 8 \leq 0$

b)  $2x^2 + 13x + 20 > 0$

c)  $3x^2 + x + 1 \leq 0$

d)  $-2x^2 - 3x + 1 \leq 0$

e)  $-9x^2 + 24x - 16 \geq 0$

g)  $-x^2 + 2x - 5 < 0$

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

## Lời giải

### Chọn

a) Tam thức bậc hai  $3x^2 + 2x - 8$  có  $a = 3 > 0$  và hai nghiệm là  $x_1 = -2$  và  $x_2 = \frac{4}{3}$ , nên  $3x^2 + 2x - 8 \leq 0$  khi và chỉ khi  $-2 \leq x \leq \frac{4}{3}$ .

Vậy tập nghiệm của bất phương trình  $\left[-2; \frac{4}{3}\right]$ .

b) Tam thức bậc hai  $2x^2 + 13x + 20$  có  $a = 2 > 0$  và hai nghiệm là  $x_1 = -4$  và  $x_2 = -\frac{5}{2}$ , nên  $2x^2 + 13x + 20 > 0$  khi và chỉ khi  $x < -4$  hoặc  $x > -\frac{5}{2}$ .

Vậy tập nghiệm của bất phương trình  $(-\infty; -4) \cup \left(-\frac{5}{2}; +\infty\right)$ .

c)  $2x^2 - 5x + 2 \leq 0$

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

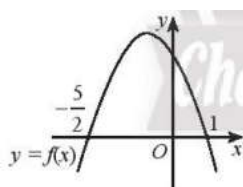
a)  $x = 2$  không là nghiệm của bất phương trình  $x^2 - 3x + 1 > 0$  vì  $2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1 < 0$ .

b)  $x = 2$  là nghiệm của bất phương trình  $-4x^2 - 3x + 5 \leq 0$  vì  $-4 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = -17 < 0$ .

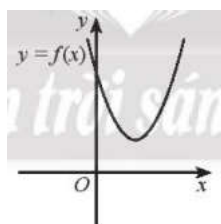
c)  $x = 2$  là nghiệm của bất phương trình  $2x^2 - 5x + 2 \leq 0$  vì  $2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 2 = 0 \leq 0$ .

**Câu 10.** Dựa vào đồ thị của hàm số bậc hai đã cho, hãy nêu tập nghiệm của các bất phương trình bậc hai tương ứng

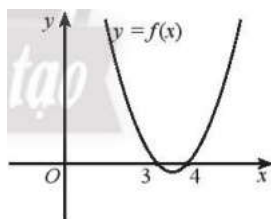
a)  $f(x) \geq 0$



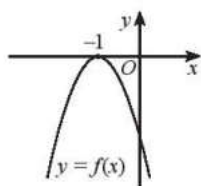
b)  $f(x) < 0$



c)  $f(x) > 0$



d)  $f(x) < 0$



e)  $f(x) \leq 0$

- a)  $x^2 - 3x < 4$  ;
- b)  $0 < 2x^2 - 11x - 6$  ;
- c)  $-2(2x+3)^2 + 4x + 30 \leq 0$  ;
- d)  $-3(x^2 - 4x - 1) \leq x^2 - 8x + 28$  ;
- e)  $2(x-1)^2 \geq 3x^2 + 6x + 27$  ;
- f)  $2(x+1)^2 + 9(-x+2) < 0$  .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

- a)  $-1 < x < 4$  ;
- b)  $x < -\frac{1}{2}$  hoặc  $x > 6$  ;
- c)  $x \leq -3$  hoặc  $x \geq \frac{1}{2}$  ;
- d)  $x \in \mathbb{R}$  ;
- e)  $x = -5$  ;
- g) Vô nghiệm.

**Câu 13.** Tìm tập xác định của các hàm:

- a)  $y = \sqrt{15x^2 + 8x - 12}$  ;
- b)  $y = \frac{x-1}{\sqrt{-11x^2 + 30 - 16}}$  ;
- c)  $y = \frac{1}{x-2} - \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$  ;
- d)  $y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \sqrt{6x^2 - 5x - 21}$  .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

- a) Hàm số xác định khi và chỉ khi  $15x^2 + 8x - 12 \geq 0$  , tức là  $x \leq -\frac{6}{5}$  hoặc  $x \geq \frac{2}{3}$  .

b)  $x = -1$  là một nghiệm của bất phương trình  $mx^2 - 2x + 1 > 0$  khi và chỉ khi  $m + 3 > 0$  hay  $m > -3$ .  
 Vậy  $m > -3$ .

c)  $x = \frac{5}{2}$  là một nghiệm của bất phương trình  $4x^2 + 2mx - 5m \leq 0$  khi và chỉ khi  
 $4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2m \cdot \frac{5}{2} - 5m \leq 0$  hay  $25 \leq 0$ . Bất đẳng thức này sai với mọi  $m \in \mathbb{R}$ .

Vậy không có giá trị nào của  $m$  thỏa mãn yêu cầu.

d)  $x = -2$  là một nghiệm của bất phương trình  $(2m - 3)x^2 - (m^2 + 1)x \geq 0$  khi và chỉ khi  
 $4(2m - 3) + 2(m^2 + 1) \geq 0$  hay  $2m^2 + 8m - 10 \geq 0$  tức là  $m \leq -5$  hoặc  $m \geq 1$ . Vậy  $m \leq -5$  hoặc  $m \geq 1$ .

e)  $x = m + 1$  là một nghiệm của bất phương trình  $2x^2 + 2mx - m^2 - 2 < 0$  khi và chỉ khi  
 $2(m + 1)^2 + 2m(m + 1) - m^2 - 2 < 0$  hay  $3m^2 + 6m < 0$  hay tức là  $-2 < m < 0$ . Vậy  $-2 < m < 0$ .

**Câu 15.** Với giá trị nào của tham số  $m$  thì:

- a) Phương trình  $4x^2 + 2(m - 2)x + m^2 = 0$  có nghiệm;
- b) Phương trình  $(m + 1)x^2 + 2mx - 4 = 0$  có hai nghiệm phân biệt;
- c) Phương trình  $mx^2 + (m + 1)x + (2m - 4) = 0$  vô nghiệm;
- d) Bất phương trình  $2x^2 + (m + 2)x + (2m - 4) \geq 0$  có tập nghiệm là  $\mathbb{R}$ ;
- e) Bất phương trình  $-3x^2 + 2mx + m^2 \geq 0$  có tập nghiệm là  $\mathbb{R}$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi  $\Delta' = (m - 2)^2 - 4m^2 = -3m^2 - 4m + 4 \geq 0$  tức là  $-2 \leq m \leq \frac{2}{3}$ .

Vậy  $-2 \leq m \leq \frac{2}{3}$ .

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi  $m + 1 \neq 0$  và  $\Delta' = m^2 + 4m + 4 > 0$ .

$m + 1 \neq 0$  khi và chỉ khi  $m \neq -1$ .

$m^2 + 4m + 4 > 0$  khi và chỉ khi  $m \neq -2$ .

Vậy  $m \neq -1$  và  $m \neq -2$ .

c) Nếu  $m = 0$  thì phương trình trở thành  $x + 10 = 0$ , có nghiệm  $x = -10$ .

Do đó  $m = 0$  không thỏa mãn yêu cầu.

a) Ta có  $h(t) = -5t^2 + v_0 t + h_0$ . Độ cao của quả bóng tại thời điểm sau khi ném 0,5 giây và 1 giây lần

lượt là 4,75 m và 5 m, ta được:  $\begin{cases} 0,5v_0 + h_0 = 6 \\ v_0 + h_0 = 10 \end{cases}$  tức là  $\begin{cases} v_0 = 8 \\ h_0 = 2 \end{cases}$ . Vậy  $h(t) = -5t^2 + 8t + 2$ .

b) Bóng cao trên 4m khi và chỉ khi  $h(t) = -5t^2 + 8t + 2 > 4$  hay  $\frac{4-\sqrt{6}}{5} < t < \frac{4+\sqrt{6}}{5}$ . Vậy bóng đạt độ cao trên 4m trong khoảng thời gian ít hơn 0,98 giây.

c) Độ cao của quả bóng sau 1 giây trong khoảng từ 2m đến 3m khi và chỉ khi  $2 < h(1) = -5 + v_0 + 2 < 3$  tức là  $5 < v_0 < 6$  (m/s).

**Câu 18.** Từ độ cao  $y_0$  mét, một quả bóng được ném lên xiên một góc  $\alpha$  so với phương ngang với vận tốc đầu  $v_0$  có phương trình chuyển động

$$y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha)x + y_0 \text{ với } g = 10 \text{ m/s}^2.$$

a) Viết phương trình chuyển động của quả bóng nếu  $\alpha = 30^\circ$ ,  $y_0 = 2\text{m}$  và  $v_0 = 7\text{ m/s}$ .

b) Để ném được quả bóng qua bức tường cao 2,5m thì người ném phải đứng cách tường bao xa?

Lưu ý: Đáp số làm tròn đến hàng phần trăm.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $y = -0,14x^2 + 0,58x + 2$ .

b) Với  $x$  là khoảng cách từ người ném đến tường thì bóng ném được qua tường khi và chỉ khi  $y(x) > 2,5$  hay  $-0,14x^2 + 0,58x - 0,5 > 0$  tức là  $1,22 < x < 2,92$  (m).

Vậy người ném bóng cần đứng cách tường trong khoảng từ trên 1,22m đến dưới 2,92m.

**Câu 19.** Một hình chữ nhật có chu vi bằng 20cm. Để diện tích hình chữ nhật lớn hơn hoặc bằng  $15\text{cm}^2$  thì chiều rộng của hình chữ nhật nằm trong khoảng bao nhiêu?

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Gọi  $x(\text{cm})$  là chiều rộng của hình chữ nhật Khi đó chiều dài của hình chữ nhật là  $10 - x$  (cm).

Ta có  $0 \leq x \leq 10 - x$  hay  $0 < x \leq 5$  (cm).

b) Ta xác định các hoành độ  $x$  mà tại đó vòm cổng cao hơn thùng hàng bằng cách giải bất phương trình  $y = -1,25x^2 + 5x \geq 3$ .

Ta có:  $-1,25x^2 + 5x \geq 3$  khi và chỉ khi  $0,74 \leq x \leq 3,26$ .

Vậy chiều rộng tối đa của thùng hàng là  $3,26 - 0,74 = 2,52\text{m}$ .

b) Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$6x^2 - 22x + 14 = 4x^2 - 11x - 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 11x + 15 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ hoặc } x = 3.$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có  $x = 3$  thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là  $x = 3$ .

c) Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$-x^2 + x + 17 = x^2 - 12x + 2$$

$$\Rightarrow -2x^2 + 13x + 15 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{15}{2} \text{ hoặc } x = -1.$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có  $x = -1$  thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là  $x = -1$ .

**Ví dụ 11:** Giải các phương trình sau:

a)  $\sqrt{31x^2 + 57x + 2} = 5x + 4.$

b)  $\sqrt{2x^2 - 17x + 52} = -x + 8.$

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$31x^2 + 57x + 2 = (5x + 4)^2$$

$$\Rightarrow 31x^2 + 57x + 2 = 25x^2 + 40x + 16$$

$$\Rightarrow 6x^2 + 17x - 14 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ hoặc } x = -\frac{7}{2}.$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có  $x = \frac{2}{3}$  thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là  $x = \frac{2}{3}$ .

**Câu 22.** Giải các phương trình sau:

a)  $2\sqrt{x^2 + 4x - 7} = \sqrt{-4x^2 + 38x - 43}$  ;

b)  $\sqrt{6x^2 + 7x - 1} - \sqrt{-29x^2 - 41x + 10} = 0$  .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $x = \frac{3}{2}$  b)  $x = \frac{1}{5}$  và  $x = -\frac{11}{7}$

**Câu 23.** Giải các phương trình sau:

a)  $\sqrt{-x^2 + 7x + 13} = 5$  ;

b)  $\sqrt{-x^2 + 3x + 7} = 3$  ;

c)  $\sqrt{69x^2 - 52x + 4} = -6x + 4$  ;

d)  $\sqrt{-x^2 - 4x + 22} = -2x + 5$  ;

e)  $\sqrt{4x + 30} = 2x + 3$  ;

f)  $\sqrt{-57x + 139} = 3x - 11$  .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $x = 3$  và  $x = 4$  b)  $x = 1$  và  $x = 2$  c)  $x = -\frac{6}{11}$  và  $x = \frac{2}{3}$

d)  $x = \frac{1}{5}$  e)  $x = \frac{3}{2}$  g) Phương trình vô nghiệm

**Câu 24.** Giải các phương trình sau:

a)  $\sqrt{-7x^2 - 60x + 27} + 3(x - 1) = 0$  ;

b)  $\sqrt{3x^2 - 9x - 5} + 2x = 5$  .

c)  $\sqrt{-2x + 8} - x + 6 = x$  .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $x = -3$  và  $x = \frac{3}{8}$

a) Vì  $x$  là khoảng cách  $AN$  nên  $x \geq 0$ .

$$AC = \sqrt{AN^2 + NC^2 - 2AN \cdot NC \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{x^2 + 100 - 10x}$$

$$BC = \sqrt{BN^2 + NC^2 - 2BN \cdot NC \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{(x+3)^2 + 100 - 10(x+3)} = \sqrt{x^2 - 4x + 79}.$$

b) Ta có  $AC = \frac{8}{9}BC \Rightarrow \sqrt{x^2 - 10x + 100} = \frac{8}{9}\sqrt{x^2 - 4x + 79}$

$$\Rightarrow 81(x^2 - 10x + 100) = 64(x^2 - 4x + 79) \Rightarrow 17x^2 - 554x + 3044 = 0$$

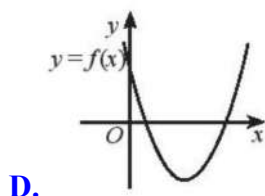
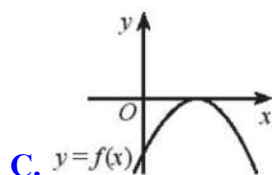
$$\Rightarrow x \approx 25,6 \text{ hoặc } x \approx 7$$

Vậy  $x \approx 25,6$  hoặc  $x \approx 7$ .

c) Ta có  $BC = 2AN \Rightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 79} = 2x \Rightarrow x^2 - 4x + 79 = 4x^2$

$$\Rightarrow x \approx 4,5 \text{ hoặc } x \approx -5,8$$

Mà vì  $x \geq 0$  nên ta có  $x \approx 4,5$ .



A.

B.

C.

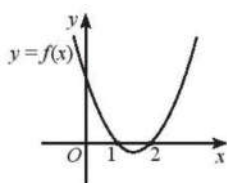
D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 30.** Cho đồ thị của hàm số bậc hai  $y = f(x)$  như Hình 1. Tập nghiệm của bất phương trình  $f(x) \geq 0$  là:



Hình 1

A.  $(1; 2)$ .

B.  $[1; 2]$ .

C.  $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ .

D.  $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn D

**Câu 31.** Bất phương trình nào có tập nghiệm là  $(2; 5)$ ?

A.  $x^2 - 7x + 10 > 0$ .

B.  $x^2 - 7x + 10 < 0$ .

C.  $x^2 + 13x - 30 > 0$ .

D.  $x^2 + 13x - 30 < 0$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 32.** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 3x - 2}} + \sqrt{3 - x}$  là

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 36.** Khẳng định nào đúng với phương trình  $\sqrt{5x^2 + 27x + 36} = 2x + 5$ ?

A. Phương trình có một nghiệm;

B. Phương trình vô nghiệm;

C. Tổng các nghiệm của phương trình là  $-7$ ;D. Các nghiệm của phương trình đều không bé hơn  $-\frac{5}{2}$ .

A.

B.

C.

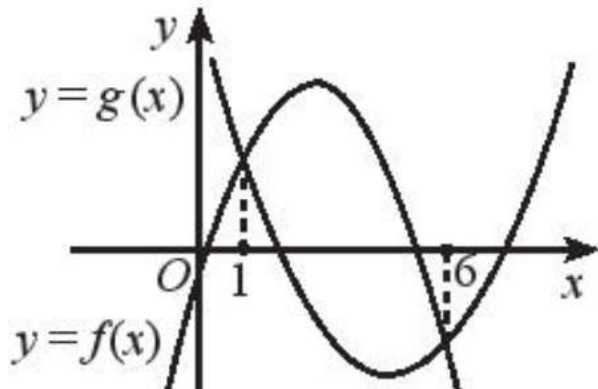
D.

Lời giải

Chọn

Chọn A

**Câu 37.** Cho đồ thị của hai hàm số bậc hai  $f(x) = ax^2 + bx + c$  và  $g(x) = dx^2 + ex + h$  như hình dưới đây.



Hình 2

Khẳng định nào đúng với phương trình  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + h}$ ?

A. Phương trình có hai nghiệm phân biệt là  $x = 1$  và  $x = 6$ ;B. Phương trình có 1 nghiệm là  $x = 1$ ;C. Phương trình có 1 nghiệm là  $x = 6$ ;

D. Phương trình vô nghiệm.

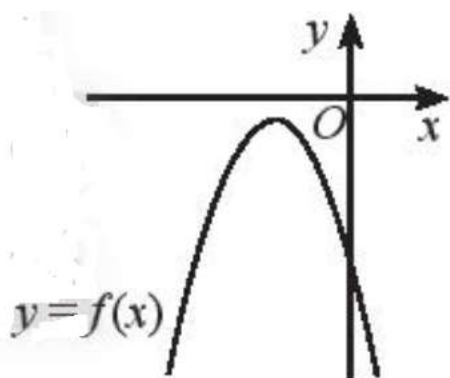
A.

B.

C.

D.

Lời giải



A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

- a)  $f(x)$  dương trong hai khoảng  $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$  và  $(3; +\infty)$ , âm trong khoảng  $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$ .
- b)  $f(x)$  dương trong khoảng  $(-3; 5)$ , âm trong hai khoảng  $(-\infty; -3)$  và  $(5; +\infty)$ .
- c)  $f(x)$  dương với mọi  $x \neq 3$ .
- d)  $f(x)$  âm với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

**Câu 39.** Xét dấu của các tam thức bậc hai sau:

- a)  $f(x) = -7x^2 + 44x - 45$ ; b)  $f(x) = 4x^2 + 36x + 81$ ;
- c)  $f(x) = 9x^2 - 6x + 3$ ; d)  $f(x) = -9x^2 + 30x - 25$ ;
- e)  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ; g)  $f(x) = -4x^2 + 8x - 7$ .

A.

B.

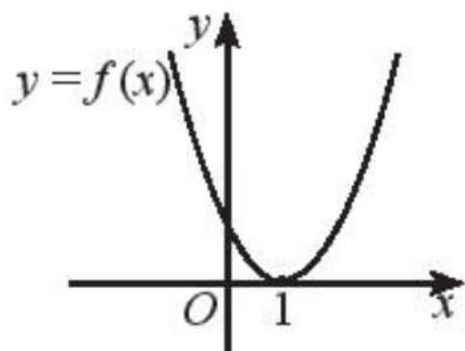
C.

D.

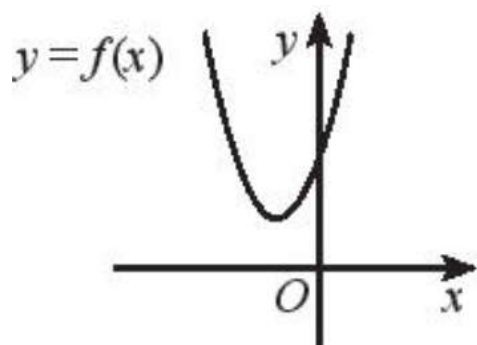
**Lời giải**

**Chọn**

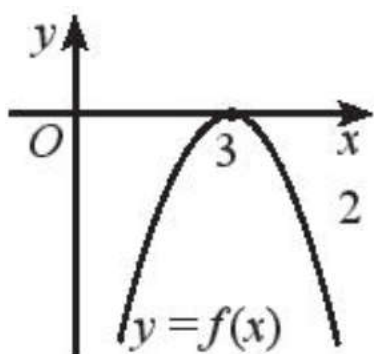
- a)  $f(x)$  dương trong khoảng  $\left(\frac{9}{7}; 5\right)$ , âm trong hai khoảng  $\left(-\infty; \frac{9}{7}\right)$  và  $(5; +\infty)$ .
- b)  $f(x)$  dương với mọi  $x \neq -\frac{9}{2}$ .
- c)  $f(x)$  dương với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .
- d)  $f(x)$  âm với mọi  $x \neq \frac{5}{3}$ .
- e)  $f(x)$  dương trong hai khoảng  $(-\infty; 1)$  và  $(3; +\infty)$ , âm trong khoảng  $(1; 3)$ .
- g)  $f(x)$  âm với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .



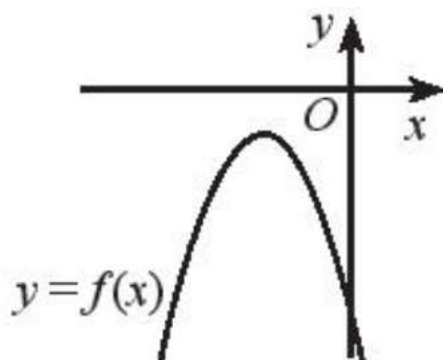
d)  $f(x) < 0$



e)  $f(x) < 0$



g)  $f(x) \leq 0$



A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

a)  $\frac{3}{2} \leq x \leq 4$ . b)  $x < -1$  hoặc  $x > 3$ .

$$2x^2 - 12x - 14 = 5x^2 - 26x - 6$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 14x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = 4 \end{cases}$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy  $x = \frac{2}{3}$  và  $x = 4$  không thoả mãn.

Vậy phương trình vô nghiệm.

d) Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$11x^2 - 43x + 25 = (-3x + 4)^2$$

$$\Rightarrow 11x^2 - 43x + 25 = 9x^2 - 24x + 16$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 19x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 9 \end{cases}$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có  $x = \frac{1}{2}$  thoả mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là  $x = \frac{1}{2}$

e) Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$-5x^2 - x + 35 = (x + 5)^2$$

$$\Rightarrow -5x^2 - x + 35 = x^2 + 10x + 25$$

$$\Rightarrow 6x^2 + 11x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{5}{2} \cup x = \frac{2}{3}$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy  $x = -\frac{5}{2}$  và  $x = \frac{2}{3}$  thoả mãn. Vậy nghiệm

của phương trình đã cho là  $x = -\frac{5}{2}$  và  $x = \frac{2}{3}$ ;

g) Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$11x^2 - 64x + 97 = (3x - 11)^2$$

$$\Rightarrow 11x^2 - 64x + 97 = 9x^2 - 66x + 121$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$\Rightarrow x = -4 \cup x = 3$$

Vậy  $\frac{3}{4} \leq m < 2$  và  $2 < m \leq 7$ .

c) Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi  $\Delta = (3m-1)^2 - 16(m+1) < 0$ , hay  $9m^2 - 22m - 15 < 0$ , tức là  $-\frac{5}{9} < m < 3$ . Vậy  $-\frac{5}{9} < m < 3$ .

d) Bất phương trình có tập nghiệm là  $\mathbb{R}$  khi và chỉ khi  $\Delta' = (m-3)^2 - 6(m^2-3) < 0$ , hay  $-5m^2 - 6m + 27 < 0$ , tức là  $m < -3 \cup m > \frac{9}{5}$ .

Vậy  $m < -3 \cup m > \frac{9}{5}$ .

**Câu 45.** Người ta thử nghiệm ném một quả bóng trên Mặt Trăng. Nếu quả bóng được ném lên từ độ cao  $h_0$ (m) so với bề mặt của Mặt Trăng với vận tốc  $v_0$ (m/s) thì độ cao của bóng sau  $t$  giây được cho bởi hàm số  $h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$  với  $g = 1,625 \text{ m/s}^2$  là gia tốc trọng trường của Mặt Trăng.

a) Biết độ cao ban đầu của quả bóng vào các thời điểm 8 giây và 12 giây lần lượt là 30m và 5m, hãy tìm vận tốc ném; độ cao ban đầu của quả bóng và viết công thức  $h(t)$ .

b) Quả bóng đạt độ cao trên 29m trong bao nhiêu giây?

Lưu ý: Đáp số làm tròn đến hàng phần trăm.

**A.** **B.** **C.** **D.**

**Lời giải**

**Chọn**

**a)** Ta có:  $h(x) = -0,8125t^2 + v_0t + h_0$ ;  $h(8) = 30$ ;  $h(12) = 5$ .

$$\text{Do đó } \begin{cases} -52 + 8v_0 + h_0 = 30 \\ -117 + 12v_0 + h_0 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_0 = 10 \\ h_0 = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Hay } h(x) = -0,8125t^2 + 10t + 2.$$

**b)** Quả bóng đạt độ cao trên 29m  $\Leftrightarrow h(x) = -0,8125t^2 + 10t + 2 > 29 \Leftrightarrow 4 < t < 8,31$

Vậy quả bóng đạt độ cao trên 29m trong khoảng  $8,31 - 4 = 4,31(s)$ .

**Câu 46.** Một người phát cầu qua lưới từ độ cao  $y_0$  mét, nghiêng một góc  $\alpha$  so với phương ngang với vận tốc đầu  $v_0$ .

Phương trình chuyển động của quả cầu là:

$$y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan(\alpha)x + y_0 \text{ với } g = 10 \text{ m/s}^2.$$

c) Giải phương trình

$$AD = 2AC \Leftrightarrow \sqrt{36 - x^2} = 2\sqrt{25 - x^2} \Leftrightarrow 36 - x^2 = 4(25 - x^2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8\sqrt{3}}{3} \\ x = -\frac{8\sqrt{3}}{3} < 0(L) \end{cases}.$$

Vậy  $x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$  thì  $AD = 2AC$ .

**Ví dụ 1:** Gọi  $\bar{x}$  là độ dài đường chéo của hình chữ nhật có chiều dài 3 và chiều rộng 2. Biết  $3,60 < \sqrt{13} < 3,61$ .

- a) Trong hai số  $\sqrt{13}$  và 3,60 thì số nào là số đúng, số nào là số gần đúng của  $\bar{x}$ ?
- b) Hãy ước lượng sai số tuyệt đối và sai số tương đối khi dùng số gần đúng trên.

**A.** **B.** **C.** **D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Theo định lý Pythagore thì  $\bar{x} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$  nên  $\sqrt{13}$  là giá trị đúng của  $\bar{x}$  và  $x = 3,60$  là giá trị gần đúng của  $\bar{x}$ .

b) Vì  $0 < \bar{x} - 3,60 < 3,61 - 3,60 = 0,01$  nên  $|\bar{x} - 3,60| < 0,01$ .

Do đó, sai số tuyệt đối là  $\Delta_x < 0,01$ . Sai số tương đối là  $\delta_x < \frac{0,01}{3,60} \approx 0,28\%$ .

**Ví dụ 2:** Cho số gần đúng  $a = 9981$  với độ chính xác  $d = 100$ . Hãy viết số quy tròn của số  $a$  và ước lượng sai số tương đối của số quy tròn đó.

**A.** **B.** **C.** **D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Hàng lớn nhất của độ chính xác  $d = 100$  là hàng trăm nên ta quy tròn  $a$  đến hàng nghìn.

Vậy số quy tròn của  $a$  là 10000.

Vì số đúng  $\bar{a}$  thỏa mãn  $9981 - 100 = 9881 \leq \bar{a} \leq 9981 + 100 = 10081$  nên  $9981 - 10000 = -119 \leq \bar{a} - 10000 \leq 10081 - 10000 = 81$ . Do đó sai số tuyệt đối của 10000 là  $\Delta_{10000} = |\bar{a} - 10000| \leq 119$ .

Sai số tương đối của số quy tròn là  $\delta_{10000} \leq \frac{119}{10000} = 0,0119 \approx 1,2\%$ .

**Ví dụ 3:**

a) Cho  $\bar{a} = 1,54308$ . Hãy xác định số gần đúng của  $\bar{a}$  với độ chính xác  $d = 0,0003$ .

b) Cho  $\bar{b} = -34524$ . Hãy xác định số gần đúng của  $\bar{b}$  với độ chính xác  $d = 120$ .

**A.** **B.** **C.** **D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của  $d = 0,0003$  là hàng phần chục nghìn.

Quy tròn  $\bar{a}$  đến hàng phần chục nghìn ta được số gần đúng của  $\bar{a}$  là  $a = 1,5431$ .

Do đó sai số tuyệt đối của  $a$  là  $\Delta_a = \left| \sqrt[3]{2} - 1,260 \right| \leq 0,0001$ .

Vậy sai số tuyệt đối của  $a$  là  $\delta_a \leq \frac{0,0001}{1,260} \approx 7,9.10^{-3}\%$ .

b) Hàng của chữ số khác không đầu tiên bên trái của  $d = 0,00007$  là phần trăm nghìn.

Quy tròn  $\sqrt[3]{2}$  đến hàng phần trăm nghìn ta được số gần đúng là 1,25992.

**Câu 4.** Hãy viết số quy tròn của số gần đúng trong những trường hợp sau:

a)  $37213824 \pm 100$ ;

b)  $-5,63057 \pm 0,0005$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) 37214000;

b)  $-5,631$ .

**Câu 5.** Gọi  $\bar{h}$  là độ dài đường cao của tam giác đều có cạnh bằng 6cm. Tìm số quy tròn của  $h$  với độ chính xác  $d = 0,01$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Độ dài đường cao  $\bar{h} = 3\sqrt{3}$ . Ta có  $3\sqrt{3} = 5,1961524...(cm)$ .

Vì hàng lớn nhất của  $d = 0,01$  là hàng phần trăm nên ta quy tròn  $3\sqrt{3}$  đến hàng phần mười. Số quy tròn của  $\bar{h}$  với độ chính xác  $d = 0,01$  là  $h = 5,2$ .

**Câu 6.** Cho số gần đúng  $a = 0,1031$  với độ chính xác  $d = 0,002$ .

Hãy viết số quy tròn của số  $a$  và ước lượng sai số tương đối của số quy tròn đó.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Hàng lớn nhất của độ chính xác  $d = 0,002$  là hàng phần nghìn nên ta quy tròn  $a$  đến hàng phần trăm. Vậy số quy tròn của  $a$  là 0,10.

Vì số đúng  $\bar{a}$  thỏa mãn  $0,1031 - 0,002 = 0,1011 \leq \bar{a} \leq 0,1031 + 0,002 = 0,1051$ .

Nên  $0,1011 - 0,10 = 0,0011 \leq \bar{a} - 0,10 \leq 0,1051 - 0,10 = 0,0051$ .

Do đó, sai số tuyệt đối của 0,10 là  $\Delta_{0,10} = \left| \bar{a} - 0,10 \right| \leq 0,0051$ .

Suy ra  $99,5.69,5 = 6915,25 \leq \overline{a}\overline{b} \leq 100,5.70,5 = 7085,25$ .

Do đó  $6915,25 - 7000 = -84,75 \leq \overline{a}\overline{b} - 7000 \leq 7085,25 - 7000 = 85,25$ .

Vậy diện tích tấm thép là  $7000 \pm 85,25 \text{ (cm}^2\text{)}$ .



(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

Hãy kiểm tra xem các phát biểu sau là đúng hay sai, tại sao?

- Ở năm 2010, diện tích lúa của tỉnh Kiên Giang cao hơn hai lần diện tích lúa của tỉnh An Giang.
- Từ năm 2016, diện tích lúa của tỉnh An Giang đạt trên 650 nghìn hecta.
- Diện tích lúa của cả hai tỉnh An Giang và Hậu Giang đều giảm vào năm 2014 sau đó tăng trở lại vào năm 2015.
- Những năm diện tích lúa của tỉnh An Giang tăng thì diện tích lúa của tỉnh Kiên Giang cũng tăng.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

- Phát biểu a) là sai.
- Phát biểu b) là sai vì sau từ năm 2017 đến 2019, diện tích lúa của An Giang nhỏ hơn 650 nghìn hecta.
- Phát biểu c) là đúng.
- Phát biểu d) là sai vì trong năm 2016, diện tích lúa của An Giang tăng trong khi diện tích lúa của Kiên Giang lại giảm.

#### IV. BÀI TẬP

**Câu 10.** Tâm ghi lại số liệu từ trang web của Tổng cục Thống kê bảng nhiệt độ không khí trung bình các tháng trong năm 2020 tại một trạm quan trắc đặt ở thành phố Vinh.

| Tháng    | 1    | 2    | 3    | 4  | 5    | 6    | 7   | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   |
|----------|------|------|------|----|------|------|-----|------|------|------|------|------|
| Nhiệt độ | 20,9 | 20,7 | 23,7 | 23 | 29,5 | 32,2 | 4,5 | 29,6 | 28,9 | 23,8 | 23,1 | 18,4 |

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Tâm ghi nhầm nhiệt độ của tháng 7. Do đó tháng 7 là vào mùa hè nên nhiệt độ trung bình trong tháng đó ở thành phố Vinh phải cao hơn  $4,5^{\circ}\text{C}$ .

## Lời giải

### Chọn

Phương nhằm giữa số gia đình dùng bếp điện và bếp than.

### 3. Mốt

- Cho một mẫu số liệu dưới dạng bảng tần số. Giá trị có tần số lớn nhất được gọi là **mốt** của mẫu số liệu, kí hiệu là  $M_o$ .

- **Ý nghĩa của mốt:** Mốt đặc trưng cho giá trị xuất hiện nhiều nhất trong mẫu.

**Chú ý:** Một mẫu số liệu có thể có nhiều mốt. Khi tất cả các giá trị trong mẫu số liệu có tần số xuất hiện bằng nhau thì mẫu số liệu đó không có mốt.

### III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 6:** Trong một đợt khảo sát về tốc độ viết của học sinh lớp 3, người ta cho hai nhóm học sinh chép một đoạn văn trong 15 phút. Bảng dưới đây thống kê số chữ mỗi bạn viết được.

|        |    |    |    |    |    |    |    |    |
|--------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Nhóm 1 | 72 | 79 | 77 | 75 | 74 | 77 | 71 |    |
| Nhóm 2 | 70 | 65 | 68 | 90 | 73 | 78 | 72 | 84 |

- Có bao nhiêu học sinh tham gia đợt khảo sát?
- Sử dụng số trung bình để so sánh tốc độ viết của học sinh hai nhóm.
- Sử dụng trung vị để so sánh tốc độ viết của học sinh hai nhóm.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

- Số học sinh tham gia khảo sát là:  $7 + 8 = 15$ .
- Số chữ trung bình mỗi học sinh nhóm 1 viết được là:

$$\frac{1}{7}(72 + 79 + 77 + 75 + 74 + 77 + 71) = 75.$$

Số chữ trung bình mỗi học sinh nhóm 2 viết được là:

$$\frac{1}{8}(70 + 65 + 68 + 90 + 73 + 78 + 72 + 84) = 75.$$

Vậy nếu so sánh theo số trung bình thì tốc độ viết của học sinh hai nhóm là bằng nhau.

- Sắp xếp số chữ học sinh nhóm 1 viết được theo thứ tự không giảm, ta được dãy:  
71; 72; 74; 75; 77; 77; 79.

Trung vị của nhóm 1 là 75.

Sắp xếp số chữ học sinh nhóm 2 viết được theo thứ tự không giảm, ta được dãy:  
65; 68; 70; 72; 73; 78; 84; 90.

Trung vị của nhóm 2 là  $(72 + 73) : 2 = 72,5$ .

Vậy nếu so sánh theo trung vị thì tốc độ viết của học sinh nhóm 1 cao hơn của học sinh nhóm 2.

**Ví dụ 7:** Khối lượng cơ thể lúc trưởng thành của 10 con chim được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: gam).

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 155 | 165 | 150 | 155 | 165 | 170 | 165 | 150 | 155 | 160 |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

Hãy tìm các tứ phân vị và mốt của mẫu số liệu trên.

A.

B.

C.

D.

- b) Sử dụng số trung bình để so sánh số đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã của các tỉnh/thành phố ở hai khu vực.
- c) Sử dụng trung vị để so sánh số đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã của các tỉnh/thành phố ở hai khu vực.
- d) Hãy giải thích tại sao lại có sự khác biệt khi so sánh bằng số trung bình và trung vị
- e) Hãy tìm một của hai khu vực.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

### Lời giải

#### Chọn

a) Khu vực Đông Nam Bộ có 6 tỉnh/thành phố. Khu vực Đồng bằng sông Cửu Long có 13 tỉnh/thành phố.

b) Trung bình số đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã của các tỉnh/thành phố khu vực Đông Nam Bộ là  $(10+8+8+9+6+24):6 \approx 10,83$ .

Trung bình số đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã của các tỉnh/thành phố khu vực Đồng bằng sông Cửu Long là

$$(14+10+8+8+7+10+9+13+9+7+10+6+8):13 \approx 9,15.$$

Vậy nếu so sánh theo số trung bình thì số đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã của các tỉnh/thành phố khu vực Đông Nam Bộ nhiều hơn của các tỉnh Đồng bằng sông Cửu Long.

c) Trung vị số đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã của các tỉnh/thành phố khu vực Đông Nam Bộ là 8,5 và của các tỉnh Đồng bằng sông Cửu Long là 9.

Vậy nếu so sánh theo trung vị thì số đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã của các tỉnh/thành phố khu vực Đông Nam Bộ ít hơn của các tỉnh Đồng bằng sông Cửu Long.

d) Sự khác biệt khi so sánh bằng số trung bình và bằng trung vị là do có 1 tỉnh/thành phố khu vực Đông Nam Bộ có quá nhiều đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã so với các tỉnh/thành phố khác.

e) Một của số liệu khu vực Đông Nam Bộ là 8. Một của số liệu khu vực Đồng bằng sông Cửu Long là 8 và 10.

### IV. BÀI TẬP

**Câu 13.** Hãy tìm số trung bình, tứ phân vị và một của các mẫu số liệu sau:

- a) 15; 15; 12; 14; 17; 16; 16; 15; 15.
- b) 5; 7; 4; 3; 5; 6; 7; 8; 9; 7; 2.
- c) 7; 6; 8; 7; 7; 4; 5; 10; 9; 9; 8; 5.
- d) 87; 87; 88; 88; 70; 83; 85; 86; 97; 89; 92; 89; 90.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

### Lời giải

#### Chọn

a)  $\bar{x} = 15; Q_1 = 14,5; Q_2 = 15; Q_3 = 16; M_0 = 15.$

b)  $Q_1 = 1225,8; Q_2 = 1381,1; Q_3 = 1769,8$ .

**Câu 16.** Số huy chương vàng và bạc trong các giải thể thao quốc tế mà đoàn thể thao Việt Nam đạt được tại các giải đấu ở châu Á trong các năm từ năm 2010 đến 2019 được thống kê ở bảng sau:

| Năm             | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 |
|-----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Huy chương vàng | 39   | 43   | 115  | 52   | 56   | 62   | 130  | 82   | 74   | 120  |
| Huy chương bạc  | 61   | 63   | 121  | 47   | 58   | 73   | 134  | 87   | 74   | 105  |

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

a) Tìm số trung bình và trung vị huy chương vàng và huy chương bạc mà đoàn thể thao Việt Nam đạt được trong 10 năm trên.

b) Hãy so sánh số huy chương vàng đoàn thể thao Việt Nam đạt được trong giai đoạn 2010 - 2014 với giai đoạn 2015-2019.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) Trung bình số huy chương vàng và trung bình số huy chương bạc đạt được trong 10 năm là 77,3 và 82,3.

Trung vị số huy chương vàng và trung vị số huy chương bạc đạt được trong 10 năm là 68 và 73,5.

b) Trung bình và trung vị số huy chương vàng đạt được trong giai đoạn 2010 – 2014 là 61 và 52

Trung bình và trung vị số huy chương vàng đạt được trong giai đoạn 2015 – 2019 là 93,6 và 82.

Vậy nếu so sánh theo số trung bình và số trung vị thì Việt Nam đều giành được nhiều huy chương vàng hơn trong giai đoạn 2015 – 2019 so với giai đoạn 2010 – 2014.

**Câu 17.** Bảng sau ghi lại độ tuổi của hai nhóm vận động viên tham gia một cuộc thi.

|        |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|--------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Nhóm 1 | 20 | 32 | 27 | 31 | 32 | 30 | 32 | 29 | 17 | 29 | 22 | 31 |
| Nhóm 2 | 22 | 29 | 22 | 30 | 22 | 31 | 29 | 21 | 32 | 20 | 31 | 29 |

a) Hãy so sánh độ tuổi của hai nhóm vận động viên theo số trung bình và trung vị.

b) Tìm tứ phân vị của độ tuổi vận động viên cả hai nhóm gộp lại.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) Nhóm 1:  $\bar{x} = 27,67; M_e = 29,5$ .

Nhóm 2:  $\bar{x} = 26,5; M_e = 29$ .

Vậy độ tuổi của các vận động viên nhóm 1 cao hơn nhóm 2.

b)  $Q_1 = 22; Q_3 = 29; Q_3 = 31$ .

c) Xoài Keo:  $Q_1 = 310; Q_2 = 340; Q_3 = 370$ . Xoài Thanh Ca:  $Q_1 = 335; Q_2 = 360; Q_3 = 385$ .

d) Do  $5000 : 338,18 \approx 14,79$  nên nếu bạn Út mua 5 kg xoài Keo thì sẽ được khoảng 14 đến 15 quả.

Do  $5000 : 360 \approx 13,89$  nên nếu bạn Út mua 5 kg xoài Thanh Ca thì sẽ được khoảng 13 đến 14 quả.

**Câu 20.** Số đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã của các tỉnh/thành phố khu vực Đồng bằng sông Hồng và khu vực Trung du và miền núi phía Bắc vào năm 2019 được cho như sau:

Đồng bằng sông Hồng: 30; 7; 7; 10; 10; 15; 9; 7; 5; 9; 6.

Trung du và miền núi phía Bắc: 10; 12; 7; 6; 8; 8; 7; 10; 9; 12; 9; 7; 11; 10.

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

a) Mỗi khu vực nêu trên có bao nhiêu tỉnh/thành phố?

b) Sử dụng số trung bình, hãy so sánh số đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã của các tỉnh/thành phố ở hai khu vực.

c) Sử dụng trung vị, hãy so sánh số đơn vị hành chính cấp quận/huyện/thị xã của các tỉnh/thành phố ở hai khu vực.

d) Hãy giải thích tại sao lại có sự khác biệt khi so sánh bằng số trung bình và trung vị.

e) Hãy tìm tứ phân vị và một của hai khu vực.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Khu vực Đồng bằng sông Hồng (ĐBSH) có 11 tỉnh/thành phố; Khu vực Trung du và miền núi phía Bắc (TDMNPB) có 14 tỉnh thành phố.

b) Trung bình số đơn vị hành chính cấp quận /huyện/ thị xã của khu vực ĐBSH là 10,45 và của khu vực TDMNPB là 9. Do đó theo số trung bình thì các tỉnh thành phố khu vực ĐBSH có nhiều đơn vị hành chính cấp quận /huyện/ thị xã hơn khu vực TDMNPB.

c) Trung vị số đơn vị hành chính cấp quận huyện thị xã của các tỉnh thành phố khu vực ĐBSH và TDMNPB đều là 9.

Vậy nếu so sánh theo trung vị thì số đơn vị hành chính cấp quận/ huyện/ thị xã của các tỉnh/thành phố khu vực ĐBSH và TDMNPB là bằng nhau.

d) Có sự khác biệt khi so sánh bằng số trung bình và số trung vị là do có một tỉnh/ thành phố khu vực ĐBSH có quá nhiều đơn vị hành chính quận/ huyện/ thị xã so với các tỉnh/thành phố khác.

e) ĐBSH  $Q_1 = 7; Q_2 = 9; Q_3 = 10; M_0 = 7$

TDMNPB  $Q_1 = 7; Q_2 = 9; Q_3 = 10, M_0 \in \{7; 10\}$ .

$$S^2 = \frac{1}{n} (n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \dots + n_k x_k^2) - \bar{x}^2$$

### -Ý nghĩa của phương sai và độ lệch chuẩn

+Phương sai là trung bình cộng của các bình phương độ lệch từ mỗi giá trị của mẫu số liệu đến số trung bình.

+Phương sai và độ lệch chuẩn được dùng để đo mức độ phân tán của các số liệu trong mẫu quanh số trung bình. Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì các giá trị của mẫu càng cách xa nhau (có độ phân tán lớn).

## III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 10:** Kiểm tra khối lượng của một số quả măng cụt của hai lô hàng A và B được kết quả như sau (đơn vị: gam)

|      |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Lô A | 85 | 82 | 84 | 83 | 80 | 82 | 84 | 85 | 80 | 81 | 80 | 82 | 85 | 85 |
| Lô B | 81 | 80 | 82 | 84 | 82 | 82 | 85 | 80 | 80 | 83 | 84 | 86 | 78 | 87 |

a) Hãy tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của khối lượng măng cụt ở mỗi lô.

b) Hãy tìm phương sai và độ lệch chuẩn của khối lượng măng cụt ở mỗi lô.

c) Khối lượng của măng cụt ở lô hàng nào đều hơn?

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

### Lời giải

#### Chọn

Sắp xếp khối lượng các quả măng cụt ở lô A và lô B theo thứ tự không giảm, ta được:

|      |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Lô A | 80 | 80 | 80 | 81 | 82 | 82 | 82 | 83 | 84 | 84 | 85 | 85 | 85 | 85 |
| Lô B | 78 | 80 | 80 | 80 | 81 | 82 | 82 | 82 | 83 | 84 | 84 | 85 | 86 | 87 |

a) Đối với lô A, khối lượng cao nhất và thấp nhất tương ứng là 85 và 80. Do đó khoảng biến thiên của lô A là  $R(A) = 85 - 80 = 5$ .

Đối với lô B, khối lượng cao nhất và thấp nhất tương ứng là 78 và 87. Do đó khoảng biến thiên của lô B là  $R(B) = 87 - 78 = 9$

Đối với lô A,  $Q_1^A = 81, Q_3^A = 85$  nên  $\Delta_Q^A = 85 - 81 = 4$ .

Đối với lô B,  $Q_1^B = 80, Q_3^B = 84$  nên  $\Delta_Q^B = 84 - 80 = 4$

b) Khối lượng trung bình của cân nặng măng cụt lô A là

$$\bar{x}(A) = \frac{1}{14} (3 \cdot 80 + 81 + 3 \cdot 82 + 83 + 2 \cdot 84 + 4 \cdot 85) = \frac{579}{7}.$$

Phương sai của cân nặng măng cụt lô A là

$$S(A)^2 = \frac{1}{14} (3 \cdot 80^2 + 81^2 + 3 \cdot 82^2 + 83^2 + 2 \cdot 84^2 + 4 \cdot 85^2) - \frac{579^2}{7^2} \approx 3,63.$$

Độ lệch chuẩn của măng cụt lô A là  $S(A) = \sqrt{S(A)^2} \approx \sqrt{3,63} \approx 1,91$ .

Khối lượng trung bình của cân nặng măng cụt lô B là

a) Điểm trung bình của các bạn học sinh tổ 1 và tổ 2 lần lượt là 7,8 và 7,2. Nếu so sánh theo số trung bình thì điểm thi các bạn tổ 1 cao hơn điểm thi các bạn tổ 2.

b) Tổ 1 có  $Q_1 = 1; Q_2 = 8; Q_3 = 9; \Delta_Q = 9 - 7 = 2$ . Điểm số các bạn tổ 1 không có giá trị ngoại lệ nào.

Tổ 2 có  $Q_1 = 1; Q_2 = 8; Q_3 = 9; \Delta_Q = 9 - 7 = 2$ . Điểm số các bạn tổ 2 có 1 giá trị ngoại lệ là 0.

Sau khi bỏ đi điểm 0 này thì điểm trung bình của các bạn tổ 2 là 7,71.

Vậy điểm các bạn tổ 2 gần bằng điểm các bạn tổ 1.

c) Nên dùng số trung vị để so sánh điểm thi của các bạn tổ 1 và tổ 2 vì trong điểm thi của các bạn tổ 2 có xuất hiện giá trị ngoại lệ.

**Ví dụ 13:** Bảng sau ghi giá bán ra lúc 11 giờ của 2 mã cổ phiếu A và B trong 10 ngày liên tiếp (đơn vị: nghìn đồng)

|   |    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| A | 94 | 93,2 | 95   | 96,6 | 96   | 94   | 97   | 95,8 | 98   | 94,4 |
| B | 80 | 80,3 | 80,5 | 80,5 | 80,1 | 80,1 | 79,7 | 79,5 | 79,6 | 80   |

Người ta lập bảng sau để theo dõi độ dao động giá của từng mã cổ phiếu sau mỗi ngày giao dịch.

|   |      |     |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|------|-----|--|--|--|--|--|--|--|--|
| A | -0,8 | 1,8 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| B | 0,3  | 0,2 |  |  |  |  |  |  |  |  |

a) Hãy điền các số liệu còn lại vào bảng trên.

b) Hãy tính độ lệch chuẩn, khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của độ dao động giá mỗi ngày của hai mã cổ phiếu trên.

c) Một cổ phiếu được gọi là có rủi ro cao nếu nó có biên độ dao động giá lớn. Hãy cho biết trong hai mã cổ phiếu trên, mã nào có độ rủi ro cao hơn.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)

|   |      |     |     |      |    |      |      |     |     |
|---|------|-----|-----|------|----|------|------|-----|-----|
| A | -0,8 | 1,8 | 1,6 | -0,6 | -2 | 3    | -1,2 | 2,2 | 1,4 |
| B | 0,3  | 0,2 | 0   | -0,4 | 0  | -0,4 | -0,2 | 0,1 | 0,4 |

b) Độ lệch chuẩn của độ dao động giá mã cổ phiếu A và B lần lượt là 1,66 và 0,27.

Khoảng biến thiên của độ dao động giá mã cổ phiếu A và B lần lượt là 5,0 và 0,8.

Khoảng tứ phân vị của độ dao động giá mã cổ phiếu A và B lần lượt là 3 và 0,55.

c) Mã cổ phiếu A có độ rủi ro cao hơn mã cổ phiếu **B.**

#### IV. BÀI TẬP

**Câu 21.** Hãy tìm phương sai, khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và giá trị ngoại lệ (nếu có) của mỗi mẫu số liệu sau:

a) 90;56;50;45;46;48;52;43.

b) 19;11;1;16;19;12;14;10;11.

c) 6,7;6,2;9,7;6,3;6,8;6,1;6,2.

d) 0,79;0,68;0,35;0,38; 0,05;0,35.



- a) Hãy viết mẫu số liệu thống kê nhiệt độ từ biểu đồ trên.  
b) Hãy tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó.  
c) Hãy tìm phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)

|          |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Nhiệt độ | 23 | 24 | 24 | 32 | 29 | 25 | 24 | 23 | 24 | 25 |
|----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

b)  $R = 32 - 23 = 9$ ;  $Q_1 = 24$ ;  $Q_3 = 25$ ;  $\Delta_Q = 1$ .

c)  $S^2 = 7,61$ ;  $S \approx 2,76$ .

**Câu 25.** Khuê và Trọng ghi lại số tin nhắn điện thoại mà mỗi người nhận được từ ngày 1/9 đến ngày 15/9 năm 2020 ở bảng sau:

|       |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|---|---|---|---|---|
| Khuê  | 2 | 4 | 3 | 4 | 6 | 2 | 3 | 2 | 4 | 5  | 3 | 4 | 6 | 7 | 3 |
| Trọng | 3 | 4 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 30 | 2 | 2 | 2 | 3 | 6 |

a) Hãy tìm phương sai của từng dãy số liệu.

b) Sau khi bỏ đi các giá trị ngoại lệ (nếu có), hãy so sánh số lượng tin nhắn mỗi bạn nhận được theo số trung bình và theo trung vị.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Khuê:  $S^2 = 2,25$ ; Trọng  $S^2 = 48,12$ .

b) Khuê:  $Q_1 = 3$ ;  $Q_3 = 5$ ;  $\Delta_Q = 2$ ;  $Q_1 - 1,5\Delta_Q = 0$ ;  $Q_3 + 1,5\Delta_Q = 8$ . Mẫu số liệu của Khuê không có giá trị ngoại lệ.

Trọng:  $Q_1 = 2$ ;  $Q_3 = 4$ ;  $\Delta_Q = 2$ ;  $Q_1 - 1,5\Delta_Q = -1$ ;  $Q_3 + 1,5\Delta_Q = 7$ . Mẫu số liệu của Trọng có một giá trị ngoại lệ là 30.

Sau khi bỏ đi giá trị ngoại lệ thì số trung bình của mẫu của Khuê và của Trọng lần lượt là 3,87 và 2,64; trung vị của mẫu của Khuê và của Trọng lần lượt là 4 và 2. Do đó so sánh theo cả trung bình và trung vị thì Khuê có nhiều tin nhắn mỗi ngày hơn Trọng.

**Câu 26.** Bảng sau ghi giá bán ra lúc 11 giờ trưa của 2 mã cổ phiếu A và B trong 10 ngày liên tiếp (đơn vị nghìn đồng).

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

### A. TRẮC NGHIỆM

**Câu 27.** Số quy tròn của 45,6534 với độ chính xác  $d = 0,01$  là:

- A. 45,65.                      B. 45,6.                      C. 45,7.                      D. 45.  
A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn C

**Câu 28.** Cho biết  $\sqrt[3]{3} = 1,44224957\dots$  số gần đúng của  $\sqrt[3]{3}$  với độ chính xác  $d = 0,0001$  là:

- A. 1,4422.                      B. 1,4421.                      C. 1,442.                      D. 1,44.  
A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn A

**Câu 29.** Cho số gần đúng  $a = 0,1571$ . Số quy tròn của  $a$  với độ chính xác  $d = 0,002$  là:

- A. 0,16.                      B. 0,15.                      C. 0,157.                      D. 0,159.  
A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn A

**Câu 30.** Độ dài cạnh của một hình vuông là  $8 \pm 0,2$  cm thì chu vi của hình vuông đó bằng:

- A. 32 cm.                      B.  $32 \pm 0,2$  cm.                      C.  $64 \pm 0,8$  cm.                      D.  $32 \pm 0,8$  cm.  
A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn D

**Câu 31.** Trung vị của mẫu số liệu 4;6;7;6;5;4;5 là:

- A. 4.                      B. 5.                      C. 6.                      D. 7.  
A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 32.** Khoảng biên thiên của mẫu số liệu 6;7;9;4;7;5;6;7;9;5;6 là:

- A. 3.                      B. 4.                      C. 5.                      D. 6.  
A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

## Lời giải

### Chọn

$$\Delta_p = \left| \bar{p} - 31,4 \right| < 2 \cdot 3,142 \cdot 5,2 - 31,4 = 1,2768.$$

**Câu 39.** Bảng sau ghi lại số sách mà các bạn học sinh tổ 1 và tổ 2 quyên góp được cho thư viện trường.

|      |    |   |   |   |   |   |   |   |    |   |    |   |
|------|----|---|---|---|---|---|---|---|----|---|----|---|
| Tổ 1 | 10 | 6 | 9 | 7 | 7 | 6 | 9 | 6 | 9  | 1 | 9  | 6 |
| Tổ 2 | 6  | 8 | 8 | 7 | 9 | 9 | 7 | 9 | 30 | 7 | 10 | 5 |

a) Sử dụng số trung bình và trung vị, hãy so sánh số sách mà mỗi học sinh tổ 1 và tổ 2 quyên góp được cho thư viện trường.

b) Hãy xác định giá trị ngoại lệ (nếu có) cho mỗi mẫu số liệu. So sánh số sách mà mỗi học sinh tổ 1 và tổ 2 quyên góp được cho thư viện trường khi bỏ đi các ngoại lệ.

A.

B.

C.

D.

## Lời giải

### Chọn

a) Tổ 1:  $\bar{x} = 7,08$ ;  $M_e = 7$ ;  $Q_1 = 6$ ;  $Q_3 = 9$ ;  $\Delta_Q = 3$ .

Tổ 2:  $\bar{x} = 9,58$ ;  $M_e = 8$ ;  $Q_1 = 7$ ;  $Q_3 = 9$ ;  $\Delta_Q = 2$ .

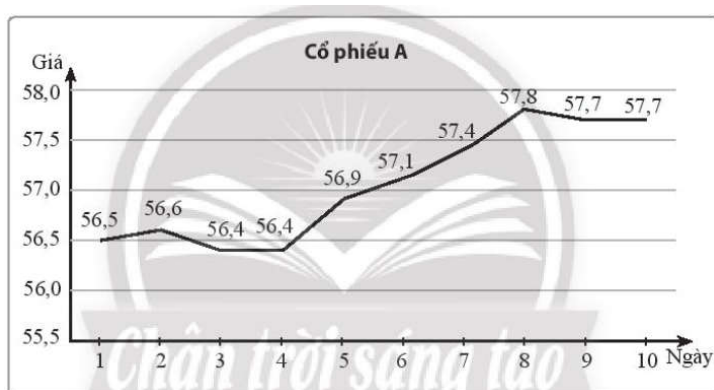
Vậy nếu so sánh theo số trung bình và trung vị thì số sách các bạn tổ 2 quyên góp được nhiều hơn các bạn tổ 1.

b) Có 1 giá trị ngoại lệ là 1 ở tổ 1 và 30 ở tổ 2.

Sau khi bỏ đi giá trị này thì: tổ 1 có  $\bar{x} = 7,64$ ;  $M_e = 7$ ; tổ 2 có  $\bar{x} = 7,73$ ;  $M_e = 8$ .

Vậy sau khi bỏ đi các giá trị ngoại lệ thì khi so sánh theo số trung bình và trung vị các bạn tổ 2 vẫn quyên góp được nhiều sách hơn các bạn tổ 1.

**Câu 40.** Giá bán lúc 10h sáng của một mã cổ phiếu A trong 10 ngày liên tiếp được ghi lại ở biểu đồ sau (đơn vị: nghìn đồng).



a) Viết mẫu số liệu thống kê giá của mã cổ phiếu A từ biểu đồ trên.

b) Tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

c) Tính trung bình, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu.

A.

B.

C.

D.

## Lời giải

### Chọn

a)

|     |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Giá | 56,5 | 56,6 | 56,4 | 56,4 | 56,9 | 57,1 | 57,4 | 57,8 | 57,7 | 57,7 |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|

## Chương IV. MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

### BÀI 1. SỐ GẦN ĐÚNG, SAI SỐ

#### I. LÝ THUYẾT

##### I. Sai số của số gần đúng

###### 1. Sai số tuyệt đối

Nếu  $a$  là số gần đúng của số đúng  $\bar{a}$  thì  $\Delta_a = |\bar{a} - a|$  được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng  $a$ .

###### 2. Độ chính xác của một số gần đúng

Ta nói  $a$  là số gần đúng của  $\bar{a}$  với độ chính xác  $d$  nếu  $\Delta_a = |\bar{a} - a| \leq d$  và quy ước viết gọn là  $\bar{a} = a \pm d$ .

###### 3. Sai số tương đối

Tỉ số  $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$  được gọi là sai số tương đối của số gần đúng  $a$ .

#### II. Số quy tròn. Quy tròn số đúng và số gần đúng

##### 1. Số quy tròn

Khi quy tròn một số nguyên hoặc một số thập phân đến một hàng nào đó thì số nhận được gọi là số quy tròn của số ban đầu.

##### 2. Quy tròn số đến một hàng cho trước

- Nếu chữ số ngay sau hàng quy tròn nhỏ hơn 5 thì ta chỉ việc thay thế chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi 0.

- Nếu chữ số ngay sau hàng quy tròn lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cũng làm như trên nhưng cộng thêm một đơn vị vào chữ số của hàng quy tròn.

Nhận xét: Ta có thể lấy độ chính xác của số quy tròn bằng nửa đơn vị của hàng quy tròn.

##### 3. Quy tròn số gần đúng căn cứ vào độ chính xác cho trước

Quy ước: Cho  $a$  là số gần đúng với độ chính xác  $d$ . Giả sử  $a$  là số nguyên hoặc số thập phân. Khi được yêu cầu quy tròn số  $a$  mà không nói rõ quy tròn đến hàng nào thì ta quy tròn số  $a$  đến hàng thấp nhất mà  $d$  nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó.

#### II. CÁC DẠNG TOÁN

**Vấn đề 1.** Xác định sai số tuyệt đối, độ chính xác, sai số tương đối của số gần đúng

**Vấn đề 2.** Xác định độ chính xác của số quy tròn và quy tròn số gần đúng căn cứ vào độ chính xác cho trước

#### III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 1:** Theo Quyết định số 648/QĐ-BCT ngày 20/3/2019 của Bộ Công Thương, giá bán lẻ điện sinh hoạt từ ngày 20/3/2019 sẽ dao động trong khoảng từ 1678 đồng đến 2927 đồng mỗi kWh tùy bậc thang. Dưới đây là bảng giá bán lẻ điện sinh hoạt (chưa bao gồm thuế VAT):

a) Do  $0,001 < d = 0,007 < 0,01$  nên hàng thấp nhất mà  $d$  nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng phần trăm. Vì thế, ta quy tròn số 893,275846 đến hàng phần trăm. Vậy số quy tròn của 893,275846 là 893,28.

b) Do  $0,0001 < d = 0,0005 < 0,001$  nên hàng thấp nhất mà  $d$  hơn một đơn vị của hàng đó là hàng phần nghìn. Vì thế, ta quy tròn số  $-12,9674507$  đến hàng nghìn. Vậy số quy tròn của  $-12,9674507$  là  $-12,967$ .

#### IV. BÀI TẬP

**Câu 1.** Số quy tròn của 219,46 đến hàng chục là

- A. 210.                      B. 219,4.                      C. 219,5.                      D. 220.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Câu 2.** Số quy tròn của số gần đúng 219,46 với độ chính xác  $d = 500$  là

- A. 673500.                      B. 674000.                      C. 673000.                      D. 673600.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 3.** Mặt đáy của một hộp sữa có dạng hình tròn bán kính 4 cm. Tính diện tích mặt đáy của hộp sữa.

a) Có thể sử dụng số thập phân hữu hạn ghi chính xác diện tích mặt đáy của hộp sữa được không? Vì sao?

b) Bạn Hòa và bạn Bình lần lượt cho kết quả tính diện tích của mặt đáy hộp sữa đó là  $S_1 = 49,6 \text{ cm}^2$  và  $S_2 = 50,2 \text{ cm}^2$ . Bạn nào cho kết quả chính xác hơn?

**Lời giải**

Diện tích mặt đáy của hộp sữa là:  $S = \pi \cdot 4^2 = 16\pi (\text{cm}^2)$ .

a) Vì  $\pi = 3,141592653 \dots$  là số vô tỉ nên không thể sử dụng số thập phân hữu hạn ghi chính xác diện tích mặt đáy của hộp sữa.

b) Vì  $S_1 < S_2 < 50,26548 \dots = 16\pi$  nên bạn Bình cho kết quả chính xác hơn.

**Câu 4.** Một thớt gỗ có bề mặt dạng hình tròn bán kính 15 cm. Hai bạn Thảo và Hoa cùng muốn tính diện tích  $S$  của mặt thớt gỗ đó. Bạn Thảo lấy một giá trị gần đúng của  $\pi$  là 3,14 và bạn Hoa lấy một giá trị gần đúng của  $\pi$  là 3,1415. Bạn nào cho kết quả diện tích của mặt thớt gỗ chính xác hơn?

**Lời giải**

Bạn Hoa cho kết quả chính xác hơn.

**Câu 5.** Một sân bóng đá có dạng hình chữ nhật với chiều dài và chiều rộng của sân lần lượt là 105 m và 68 m. Khoảng cách xa nhất giữa hai vị trí trên sân đúng bằng độ dài đường chéo của sân. Tìm một giá trị gần đúng (theo đơn vị mét) của độ dài đường chéo sân và tìm độ chính xác, sai số tương đối của số gần đúng đó.

**Lời giải**

Gọi  $x$  là độ dài đường chéo của sân bóng. Áp dụng định lý Pythagore, ta có:  
 $x = \sqrt{105^2 + 68^2} = \sqrt{15649} = 125,09596 \dots$  Lấy một giá trị gần đúng của  $x$  là 125,1 ta có:  
 $125,09 < x < 125,1$ . Suy ra  $|x - 125,1| < |125,09 - 125,1| = 0,01$ .

Vậy độ dài sân bóng có thể lấy bằng 125,1m với độ chính xác  $d = 0,01$ .

Sai số tương đối của 125,1 là  $\delta_{125,1} = \frac{\Delta_{125,1}}{|125,1|} < \frac{0,01}{125,1} \approx 0,008\%$ .

## BÀI 2. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM

### I. LÝ THUYẾT

#### 1. Số trung bình cộng (số trung bình)

Số trung bình cộng  $\bar{x}$  của mẫu  $n$  số liệu  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là  $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ .

Ngoài ra, số trung bình cộng có thể tính theo công thức sau:

- $\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n}$ , trong đó  $n_1, n_2, \dots, n_k$  lần lượt là tần số của các số liệu  $x_1, x_2, \dots, x_k$  và

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n.$$

- $\bar{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_k x_k$ , trong đó  $f_1, f_2, \dots, f_k$  lần lượt là tần số tương đối của các số liệu  $x_1, x_2, \dots, x_k$ .

#### 2. Trung vị

Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm  $n$  số liệu thành một dãy không giảm (hoặc không tăng).

- Nếu  $n$  là số lẻ thì số liệu đứng ở vị trí  $\frac{n+1}{2}$  (số đứng chính giữa) gọi là trung vị.
- Nếu  $n$  là số chẵn thì số trung bình cộng của hai số liệu đứng ở vị trí thứ  $\frac{n}{2}$  và  $\frac{n}{2} + 1$ .

Trung vị kí hiệu là  $M_e$ .

#### 3. Tứ phân vị

Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm  $n$  số liệu thành một dãy không giảm.

Tứ phân vị của mẫu số liệu trên là bộ ba giá trị: tứ phân vị thứ nhất, tứ phân vị thứ hai và tứ phân vị thứ ba; ba giá trị này chia mẫu số liệu thành bốn phần có số lượng phần tử bằng nhau.

- Tứ phân vị thứ hai  $Q_2$  bằng trung vị.
- Nếu  $n$  là số chẵn thì tứ phân vị thứ nhất  $Q_1$  bằng trung vị của nửa dãy phía dưới và tứ phân vị thứ ba  $Q_3$  bằng trung vị của nửa dãy phía trên.
- Nếu  $n$  là số lẻ thì tứ phân vị thứ nhất  $Q_1$  bằng trung vị của nửa dãy phía dưới (không bao gồm  $Q_2$ ) và tứ phân vị thứ ba  $Q_3$  bằng trung vị của nửa dãy phía trên (không bao gồm  $Q_2$ ).

#### 4. Mốt

Mốt của mẫu số liệu là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng phân bố tần số và kí hiệu là  $M_o$ .

Chú ý: Một mẫu số liệu có thể có một hoặc nhiều mốt.

## II. CÁC DẠNG TOÁN

**Vấn đề 1. Xác định số trung bình cộng của mẫu số liệu**

**Vấn đề 2. Xác định trung vị của mẫu số liệu**

**Vấn đề 3. Xác định tứ phân vị của mẫu số liệu**

**Vấn đề 4. Xác định mốt của mẫu số liệu**

### Giải

Mẫu số liệu trên đã được sắp xếp theo thứ tự không giảm.

Trung vị của mẫu số liệu trên là 1,14.

Trung vị của dãy 0,9;1,0;1,1 là 1,0.

Trung vị của dãy 1,18;1,2;1,3 là 1,2.

Vậy  $Q_1 = 1,0; Q_2 = 1,14; Q_3 = 1,2$ .

**Ví dụ 9:** Mẫu số liệu thống kê thời gian (đơn vị: phút) đọc hết một cuốn sách của 9 bạn tổ I lớp 10 A như sau:

102130118127115138121109132

Tứ phân vị của mẫu số liệu trên là bao nhiêu?

### Giải

Sắp xếp các số liệu của mẫu trên theo thứ tự không giảm:

102109115118121127130132138

Trung vị của mẫu số liệu trên là 121.

Trung vị của dãy 102,109,115,118 là:  $\frac{109+115}{2} = 112$ .

Trung vị của dãy 127,130,132,138 là:  $\frac{130+132}{2} = 131$ .

Vậy  $Q_1 = 112, Q_2 = 121, Q_3 = 131$ .

**Ví dụ 10:** Một cửa hàng bán giày thống kê số đôi giày bán được trong Quý III năm 2020 như sau:

| Cỡ giày                       | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 |
|-------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Số đôi giày bán được (Tần số) | 41 | 49 | 50 | 71 | 53 | 46 | 27 | 5  |

a) Mốt trong bảng tần số thống kê số giày bán ra trong Quý III năm 2020 của cửa hàng trên là bao nhiêu?

b) Cửa hàng đó nên nhập về nhiều hơn cỡ giày nào để bán tiếp?

### Giải

a) Vì tần số lớn nhất là 71 và 71 tương ứng với cỡ giày 40 nên mốt của bảng trên là 40.

b) Cửa hàng nên nhập về nhiều hơn cỡ giày 40 để bán tiếp.

## IV. BÀI TẬP

**Câu 8.** Cho mẫu số liệu: 3 6 8 9 12

Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là:

A. 6

B. 6,5.

C. 7.

D. 8.

*Lời giải*

|      |                 |           |         |          |         |
|------|-----------------|-----------|---------|----------|---------|
| Đội  | Manchester City | Liverpool | Chelsea | West Ham | Arsenal |
| Điểm | 56              | 45        | 43      | 37       | 35      |

(Nguồn: <https://bongda24h.vw/bang-xep-hang.html>)

Tứ phân vị của mẫu số liệu trên là:

A.  $Q_1 = 45, Q_2 = 43, Q_3 = 37$ .

B.  $Q_1 = 56, Q_2 = 43, Q_3 = 35$ .

C.  $Q_1 = 36, Q_2 = 43, Q_3 = 50,5$ .

D.  $Q_1 = 50,5, Q_2 = 43, Q_3 = 36$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 14.** Cho mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số sau:

|         |   |    |    |    |
|---------|---|----|----|----|
| Giá trị | 5 | 6  | 7  | 8  |
| Tần số  | 7 | 12 | 11 | 10 |

Tính số trung bình cộng của mẫu số liệu trên.

**Lời giải**

6,6.

**Câu 15.** Cho mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số tương đối sau:

|                  |     |     |      |      |     |
|------------------|-----|-----|------|------|-----|
| Giá trị          | 10  | 12  | 15   | 16   | 19  |
| Tần số tương đối | 0,1 | 0,2 | 0,25 | 0,35 | 0,1 |

Tính số trung bình cộng của mẫu số liệu trên.

**Lời giải**

14,65.

**Câu 16.** Thời gian (đơn vị: phút) hoàn thành một bài kiểm tra trực tuyến của 8 học sinh lần lượt là:

40 35 45 42 44 38 43 39

Đối với mẫu số liệu trên, hãy tìm:

a) Số trung bình cộng;

b) Trung vị;

c) Tứ phân vị.

**Lời giải**

## BÀI 3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHEP NHÓM

### I. LÝ THUYẾT

#### 1. Khoảng biến thiên. Khoảng tứ phân vị

- Trong một mẫu số liệu, *khoảng biến thiên* là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đó.

Ta có thể tính khoảng biến thiên  $R$  của mẫu số liệu theo công thức sau:

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

trong đó  $x_{\max}$  là giá trị lớn nhất,  $x_{\min}$  là giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đó.

- Giả sử  $Q_1, Q_2, Q_3$  là tứ phân vị của mẫu số liệu. Ta gọi hiệu

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1$$

là *khoảng tứ phân vị* của mẫu số liệu đó.

#### 2. Phương sai

Cho mẫu số liệu thống kê có  $n$  giá trị  $x_1, x_2, \dots, x_n$  và số trung bình cộng là  $\bar{x}$ .

Ta gọi số  $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$ , trong đó  $n_1, n_2, \dots, n_k$  lần lượt là tần số của các số

liệu  $x_1, x_2, \dots, x_k$  và  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ .

•  $s^2 = f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_k(x_k - \bar{x})^2$ , trong đó  $f_1, f_2, \dots, f_k$  lần lượt là tần số tương đối của các số liệu  $x_1, x_2, \dots, x_k$ .

#### 3. Độ lệch chuẩn

Căn bậc hai (số học) của phương sai gọi là độ lệch chuẩn của mẫu số liệu thống kê.

#### 4. Tính hợp lý của số liệu thống kê

Ta có thể sử dụng khoảng tứ phân vị để xác định số liệu bất thường của mẫu số liệu như sau:

Giả sử  $Q_1, Q_2, Q_3$  là tứ phân vị của mẫu số liệu và hiệu  $\Delta Q = Q_3 - Q_1$  là khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó. Một giá trị trong mẫu số liệu được coi là một giá trị bất thường nếu nó nhỏ hơn  $Q_1 - \frac{3}{2}\Delta_Q$  hoặc lớn hơn  $Q_3 + \frac{3}{2}\Delta_Q$ .

### II. CÁC DẠNG TOÁN

**Vấn đề 1.** Xác định khoảng biến thiên của mẫu số liệu

**Vấn đề 2.** Xác định khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu

**Vấn đề 3.** Xác định phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu.

**Vấn đề 4.** Xác định giá trị bất thường của mẫu số liệu

**Vấn đề 5.** Xác định mẫu số liệu từ biểu đồ và tính các số đặc trưng cho mẫu số liệu đó

### III. VÍ DỤ MẪU

b) Gọi phương sai tương ứng với mẫu số liệu thống kê kết quả 5 lần nhảy của Huy và Tùng lần lượt là  $S_H^2, S_T^2$ . Ta có:

$$S_H^2 = \frac{(2,2-2,4)^2 + (2,5-2,4)^2 + (2,4-2,4)^2 + (2,6-2,4)^2 + (2,3-2,4)^2}{5} = 0,02$$

$$S_T^2 = \frac{(2,0-2,4)^2 + (2,8-2,4)^2 + (2,5-2,4)^2 + (2,4-2,4)^2 + (2,3-2,4)^2}{5} = 0,068$$

Ta cũng có độ lệch chuẩn của mẫu số liệu thống kê kết quả 5 lần nhảy của Huy và Tùng lần lượt

$$\text{Là: } S_H = \sqrt{S_H^2} = \sqrt{0,02} \text{ (m)}; S_T = \sqrt{S_T^2} = \sqrt{0,068} \text{ (m)}.$$

Do  $S_H^2 = 0,02 < S_T^2 = 0,068$  Nên bạn Huy có kết quả nhảy xa ổn định hơn bạn Tùng.

**Ví dụ 14:** Nêu các giá trị bất thường của mẫu số liệu thống kê sau:

0    1    13    16    17    18    19    20    21    22    23    24    28    37    38

### Lời giải

Mẫu số liệu trên có tứ phân vị là  $Q_1 = 16; Q_2 = 20; Q_3 = 24$ . Suy ra:

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 24 - 16 = 8$$

Các giá trị 0, 1 (nhỏ hơn  $Q_1 - \frac{3}{2}\Delta_Q = 16 - \frac{3}{2}.8 = 4$ ) và các giá trị 37, 38 (lớn hơn  $Q_3 + \frac{3}{2}\Delta_Q = 24 + \frac{3}{2}.8 = 36$ ) là các giá trị bất thường của mẫu số liệu đã cho.

**Ví dụ 15:** Biểu đồ đoạn thẳng ở hình 1 biểu diễn tốc độ tăng trưởng GDP của Việt Nam giai đoạn 2012 – 2019.

a) Viết mẫu số liệu thống kê tốc độ tăng trưởng GDP nhận được từ biểu đồ ở hình 1.

b) Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu đó.

c) Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

d) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó.

### Lời giải

a) Mẫu số liệu thống kê tốc độ tăng trưởng GDP nhận được từ biểu đồ trên là:

5,25    5,42    5,98    6,68    6,21    6,81    7,08    7,02

b) Trong mẫu số liệu trên, số lớn nhất là 7,08 và số nhỏ nhất là 5,25. Vậy khoảng biến thiên của mẫu số liệu đó là:

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 7,08 - 5,25 = 1,83 (\%)$$

c) Sắp xếp mẫu số liệu trên theo thứ tự tăng dần, ta được:

Phương sai của mẫu số liệu trên là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

*Lời giải*

*Chọn B*

**Câu 21.** Cho mẫu số liệu:

21      22      23      24      25

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên là:

A. 1.

B.  $\sqrt{2}$ .

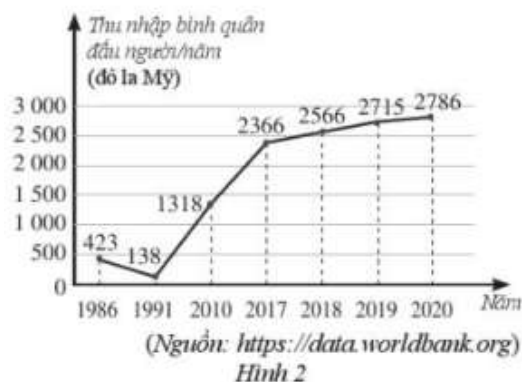
C.  $\sqrt{3}$ .

D. 4.

*Lời giải*

*Chọn B*

**Câu 22.** Biểu đồ đoạn thẳng ở Hình 2 biểu diễn thu nhập bình quân đầu người/năm của Việt Nam ở một số năm trong giai đoạn từ 1986 đến 2020.



Mẫu số liệu nhận được từ biểu đồ ở Hình 2 có khoảng biến thiên là bao nhiêu?

A. 71.

B. 85.

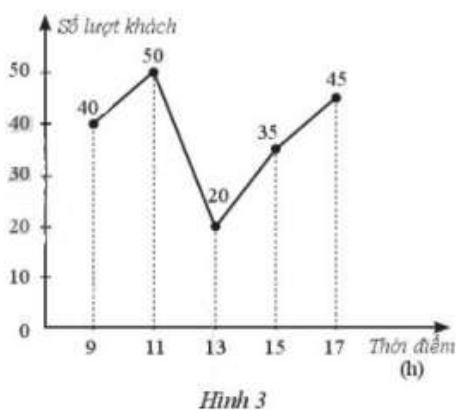
C. 1 180.

D. 2 648.

*Lời giải*

**Chọn D**

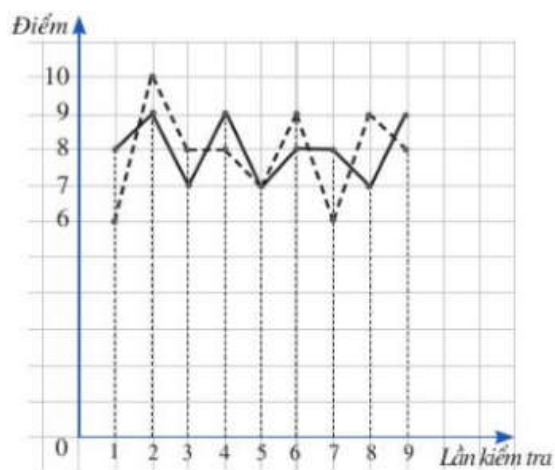
**Câu 23.** Biểu đồ đoạn thẳng ở Hình 3 biểu diễn số lượt khách vào một cửa hàng trong ngày đầu khai trương tại một số mốc thời gian.



Mẫu số liệu nhận được từ biểu đồ ở Hình 3 có khoảng tứ phân vị là bao nhiêu?

A. 10.

B. 15.



Hình 4

### Lời giải

**a)** Mẫu số liệu kết quả thi của bạn Dũng là: 8 9 7 9 7 8 8 7 9 (1)

Mẫu số liệu kết quả thi của bạn Hoàng là: 6 10 8 8 7 9 6 9 8 (2)

**b)** Khoảng biến thiên của mẫu số liệu (1) và (2) lần lượt là 2 và 4.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu (1) và (2) lần lượt là 2 và 2,5.

**c)** Phương sai của mẫu số liệu (1) và (2) lần lượt là  $\frac{2}{3}$  và  $\frac{134}{81}$ .

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu (1) và (2) lần lượt là  $\frac{\sqrt{6}}{3}$  và  $\frac{\sqrt{134}}{9}$ .

Ta có:  $\frac{2}{3} < \frac{134}{81}$  nên kết quả thi của bạn Dũng ổn định hơn.

Vậy xác suất của biến cố  $A$  là:  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .

**Ví dụ 17:** Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

- a) "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo không bé hơn 10";
- b) "Mặt 1 chấm xuất hiện ít nhất một lần".

### Lời giải

Không gian mẫu trong trò chơi trên là tập hợp  $\Omega = \{(i; j) \mid i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Vậy  $n(\Omega) = 36$ .

a) Gọi  $E$  là biến cố "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo không bé hơn 10". Các kết quả thuận lợi cho biến cố  $E$  là:  $(5; 5), (5; 6), (6; 5), (6; 6)$ , tức là  $E = \{(5; 5), (5; 6), (6; 5), (6; 6)\}$ . Vì thế,  $n(E) = 4$ .

Vậy xác suất của biến cố  $E$  là:  $P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ .

b) Gọi  $G$  là biến cố "Mặt 1 chấm xuất hiện ít nhất một lần". Các kết quả thuận lợi cho biến cố  $G$  là:  $(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 1), (3; 1), (4; 1), (5; 1), (6; 1)$ , tức là  $G = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 1), (3; 1), (4; 1), (5; 1), (6; 1)\}$ . Vì thế,  $n(G) = 11$ .

Vậy xác suất của biến cố  $G$  là:  $P(G) = \frac{n(G)}{n(\Omega)} = \frac{11}{36}$ .

## IV. BÀI TẬP

**Câu 27.** Tung một đồng xu hai lần liên tiếp.

Xác suất của biến cố "Kết quả của hai lần tung là khác nhau" là:

- A.  $\frac{1}{2}$ .
- B.  $\frac{1}{4}$ .
- C.  $\frac{3}{4}$ .
- D.  $\frac{1}{3}$ .

### Lời giải

**Chọn A**

**Câu 28.** Tung một đồng xu hai lần liên tiếp.

Xác suất của biến cố "Hai lần tung đều xuất hiện mặt sấp" là:

- A.  $\frac{1}{2}$ .
- B.  $\frac{1}{4}$ .
- C.  $\frac{3}{4}$ .
- D.  $\frac{1}{3}$ .

### Lời giải

**Chọn B**

**Câu 29.** Tung một đồng xu hai lần liên tiếp.

Xác suất của biến cố "Lần thứ nhất xuất hiện mặt sấp" là:

### Lời giải

#### Chọn D

**Câu 35.** Tung một đồng xu hai lần liên tiếp. Phát biểu mỗi biến cố sau dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện:

- a)  $A = \{NS; SS\}$  ;  
b)  $B = \{NN; NS; SN; SS\}$ .

### Lời giải

- a)  $A$  : "Lần thứ hai xuất hiện mặt sấp".  
b)  $B$  : "Lần thứ nhất xuất hiện mặt sấp hoặc mặt ngửa".

**Câu 36.** Tung một đồng xu hai lần liên tiếp. Tính xác suất của biến cố "Lần thứ hai xuất hiện mặt ngửa".

### Lời giải

$$\frac{1}{2}.$$

**Câu 37.** Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp. Phát biểu mỗi biến cố sau dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện:

- a)  $C = \{(1;1)\}$  ;  
b)  $D = \{(1;6);(6;1)\}$  ;  
c)  $G = \{(3;3);(3;6);(6;3);(6;6)\}$  ;  
d)  $E = \{(1;1);(1;3);(1;5);(3;3);(3;1);(3;5);(5;5);(5;1);(5;3)\}$ .

### Lời giải

- a)  $C$  : "Số chấm xuất hiện ở hai lần gieo đều là 1".  
b)  $D$  : "Giá trị tuyệt đối của hiệu số chấm giữa hai lần gieo là 5".  
c)  $E$  : "Số chấm xuất hiện ở hai lần gieo chia hết cho 3".  
d)  $G$  : "Tích số chấm xuất hiện ở hai lần gieo là số lẻ".

**Câu 38.** Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

- a)  $A$  : "Lần thứ hai xuất hiện mặt 5 chấm";  
b)  $B$  : "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo bằng 7";  
c)  $C$  : "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo chia hết cho 3";  
d)  $D$  : "Số chấm xuất hiện lần thứ nhất là số nguyên tố";  
e)  $E$  : "Số chấm xuất hiện lần thứ nhất nhỏ hơn số chấm xuất hiện lần thứ hai".

### Lời giải

a)  $A = \{(i;5) | i = 1,2,3,4,5,6\}$ . Suy ra  $n(A) = 6$ . Vậy  $P(A) = \frac{1}{6}$ .

b)  $B = \{(1;6);(6;1);(2;5);(5;2);(3;4);(4;3)\}$ . Suy ra  $n(B) = 6$ .

Vậy  $P(B) = \frac{1}{6}$ .

c)  $C = \{(1;2);(2;1);(1;5);(5;1);(2;4);(4;2);(3;3);(3;6);(6;3);(4;5);(5;4);(6;6)\}$

## BÀI 5. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

### I. LÝ THUYẾT

#### 1. Một số kiến thức về xác suất

##### a) Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

- Có những phép thử mà ta không thể đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó. Những phép thử như thế gọi là *phép thử ngẫu nhiên* (gọi tắt là phép thử).

- Tập hợp  $\Omega$  các kết quả có thể xảy ra của một phép thử gọi là *không gian mẫu* của phép thử đó.

##### a) Biến cố và xác suất của biến cố

- *Biến cố ngẫu nhiên* (gọi tắt là *biến cố*) là một tập con của không gian mẫu.

- Xét phép thử  $T$  với không gian mẫu là  $\Omega$ . Mỗi biến cố là một tập con của  $\Omega$ . Vì thế, tập rỗng  $\emptyset$  cũng là một biến cố, gọi là *biến cố không thể* (gọi tắt là *biến cố không*). Còn tập hợp  $\Omega$  gọi là *biến cố chắc chắn*.

- Tập hợp  $\Omega \setminus A$  xác định một biến cố, gọi là biến cố đối của biến cố  $A$ , kí hiệu là  $\bar{A}$ .

- Xét phép thử chỉ có một số hữu hạn kết quả có thể xảy ra và khả năng xảy ra của từng kết quả giống nhau. Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử đó. Khi đó, với mỗi biến cố  $A$ , ta có định nghĩa cổ điển của xác suất như sau:

Xác suất của biến cố  $A$ , kí hiệu là  $P(A)$ , bằng tỉ số  $\frac{n(A)}{n(\Omega)}$ , ở đó  $n(A)$ ,  $n(\Omega)$  lần lượt là số phần tử

của hai tập hợp  $A$  và  $\Omega$ . Như vậy:  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ .

#### 2. Tính chất của xác suất

Xét phép thử  $T$  với không gian mẫu là  $\Omega$ . Khi đó, ta có các tính chất sau:

- $P(\emptyset) = 0$ ;  $P(\Omega) = 1$ ;
- $0 \leq P(A) \leq 1$  với mỗi biến cố  $A$ ;
- $P(A) = 1 - P(\bar{A})$  với mỗi biến cố  $A$ ;

### II. CÁC DẠNG TOÁN

**Vấn đề 1. Xác định không gian mẫu, số phần tử của không gian mẫu**

**Vấn đề 2. Xác định biến cố, biến cố đối, biến cố không, biến cố chắc chắn.**

**Vấn đề 3. Tính xác suất của biến cố**

### III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 18:** Một hộp có 2 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ ghi một trong các số 1, 2; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ từ trong hộp, ghi lại số của thẻ được rút ra và bỏ lại thẻ đó vào trong hộp. Xét phép thử “Rút ngẫu nhiên liên tiếp 2 chiếc thẻ trong hộp”. Hãy cho biết không gian mẫu của phép thử đó và tính số phần tử của không gian mẫu.

#### Lời giải

Không gian mẫu của phép thử trên là tập  $\Omega = \{(1;1), (1;2), (2;1), (2;2)\}$ , ở đó, chẳng hạn  $(1;2)$  là kết quả “Lần thứ nhất rút thẻ ghi số 1, lần thứ hai rút ra thẻ ghi số 2”. Không gian mẫu có 4 phần tử.

**Ví dụ 19:** Cho một hộp chứa 4 bi xanh, 5 bi đỏ; các bi có hình dạng và kích thước giống nhau. Xét phép thử “Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi”. Xác định số phần tử của không gian mẫu đó.

#### Lời giải

Tổng số viên bi là  $4 + 5 = 9$ . Mỗi cách lấy đồng thời 2 viên bi là một tổ hợp chập 2 của 9 phần tử. Do đó, không gian mẫu  $\Omega$  gồm các tổ hợp chập 2 của 9 phần tử (9 viên bi) và  $n(\Omega) = C_9^2 = 36$ .

**Ví dụ 20:** Một hộp có 1 quả bóng xanh, 1 quả bóng đỏ, 1 quả bóng vàng; các quả bóng có kích thước và khối lượng giống nhau. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ trong hộp, ghi lại màu của quả bóng lấy ra và bỏ

**b)** Gọi  $B$  là biến cố “Bạn Thảo ngồi ghế đầu tiên và bạn Huy ngồi ghế cuối cùng”. Vì bạn Thảo ngồi ghế đầu tiên và bạn Huy ngồi ghế cuối cùng nên chỉ xếp 2 bạn còn lại vào hai ghế ở giữa. Do đó, tập hợp  $B$  gồm các hoán vị của 2 phần tử và  $n(B) = 2! = 2$ .

$$\text{Vậy xác suất của biến cố } B \text{ là: } P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}.$$

**Ví dụ 23:** Có 3 bông hoa màu trắng, 4 bông hoa màu vàng và 5 bông hoa màu đỏ. Người ta chọn ra 4 bông hoa từ các bông hoa trên. Tính xác suất của biến cố “Bốn bông hoa chọn ra có cả ba màu”.

### Lời giải

Mỗi cách chọn ra đồng thời 4 bông hoa là một tổ hợp chập 4 của 12 phần tử. Do đó, không gian mẫu  $\Omega$  gồm các tổ hợp chập 4 của 12 phần tử và  $n(\Omega) = C_{12}^4 = 495$ .

Gọi  $A$  là biến cố “Bốn bông hoa chọn ra có cả ba màu”. Có 3 trường hợp xảy ra:

**Trường hợp 1:** Chọn ra 2 bông hoa màu trắng, 1 bông hoa màu vàng, 1 bông hoa màu đỏ.

Số cách chọn ra 2 bông hoa màu trắng là:  $C_3^2 = 3$ .

Số cách chọn ra 2 bông hoa màu trắng, 1 bông hoa màu vàng, 1 bông hoa màu đỏ là:

$$3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

**Trường hợp 2:** Chọn ra 1 bông hoa màu trắng, 2 bông hoa màu vàng, 1 bông hoa màu đỏ.

Số cách chọn ra 2 bông hoa màu vàng là:  $C_4^2 = 6$ .

Số cách chọn ra 1 bông hoa màu trắng, 2 bông hoa màu vàng, 1 bông hoa màu đỏ là:  $3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$

**Trường hợp 3:** Chọn ra 1 bông hoa màu trắng, 1 bông hoa màu vàng, 2 bông hoa màu đỏ.

Số cách chọn ra 2 bông hoa màu đỏ là:  $C_5^2 = 10$ .

Số cách chọn ra 1 bông hoa màu trắng, 1 bông hoa màu vàng, 2 bông hoa màu đỏ là:

$$3 \cdot 4 \cdot 10 = 120$$

Tập hợp  $A$  bao gồm các phần tử là các khả năng của tất cả trường hợp 1, 2, 3 và  $n(A) = 60 + 90 + 120 = 270$ .

$$\text{Vậy xác suất của biến cố } A \text{ là: } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{270}{495} = \frac{6}{11}.$$

## IV. BÀI TẬP

**Câu 40.** Xét phép thử “Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp”. Biến cố nào dưới đây là biến cố không?

- A.** Tổng số chấm ở hai lần gieo nhỏ hơn hoặc bằng 1.
- B.** Cả hai lần gieo đều xuất hiện số chấm lẻ.
- C.** Số chấm xuất hiện ở hai lần gieo đều chia hết cho 5.
- D.** Số chấm ở lần gieo thứ nhất nhỏ hơn số chấm ở lần gieo thứ hai.

### Lời giải

**Chọn A**

**Câu 41.** Xét phép thử “Tung một đồng xu hai lần liên tiếp”. Biến cố nào dưới đây là biến cố chắc chắn?

- A.** Mặt sấp chỉ xuất hiện 1 lần.

Xét biến cố  $\bar{A}$ : “Trong 18 tấm thẻ được chọn ra, không có tấm thẻ màu xanh nào” là biến cố đối của biến cố  $A$ . Vì không có tấm thẻ màu xanh nào nên 18 thẻ chọn ra phải có màu đỏ nên số phần tử của biến cố  $\bar{A}$  là  $C_{30}^{18}$ .

$$\text{Vậy xác suất của biến cố } A \text{ là: } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = 1 - \frac{C_{30}^{18}}{C_{50}^{18}}.$$

**Câu 46.** Lớp 10A có 16 nam và 24 nữ. Chọn ngẫu nhiên 5 bạn để phân công trực nhật. Tính xác suất của biến cố  $A$ : “Trong 5 bạn được chọn có 2 bạn nam và 3 bạn nữ”.

### Lời giải

Mỗi cách chọn 5 bạn từ 40 bạn học sinh là một tổ hợp chập 5 của 40 phần tử. Vậy không gian mẫu  $\Omega$  có số phần tử là:  $n(\Omega) = C_{40}^5 = 658008$ .

Xét biến cố  $A$ : “Năm bạn được chọn có 2 bạn nam và 3 bạn nữ”. Số phần tử của biến cố  $A$  là:  $C_{16}^2 \cdot C_{24}^3 = 242880$ .

$$\text{Vậy xác suất của biến cố } A \text{ là: } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{242880}{658008} = \frac{10120}{27417}.$$

**Câu 47.** Xếp ngẫu nhiên 6 bạn An, Bình, Cường, Dũng, Đông, Huy vào một dãy hàng dọc. Tính xác suất của các biến cố sau:

- $A$ : “Bạn Dũng luôn đứng liền sau bạn Bình”.
- $B$ : “Bạn Bình và bạn Cường luôn đứng liền nhau”.

### Lời giải

Xếp 6 bạn theo một hàng dọc có  $6! = 720$  cách nên số phần tử của không gian mẫu  $\Omega$  là 720.

a) Vì bạn Dũng đứng liền sau bạn Bình nên ta có thể coi 2 bạn đó là 1 bạn. Như vậy, chỉ còn xếp chỗ cho 4 bạn và 1 bạn “Bình - Dũng”. Suy ra số cách xếp các vị trí đứng hay số phần tử của biến cố  $A$  là:  $5! = 120$ .

$$\text{Vậy xác suất của biến cố } A \text{ là: } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}.$$

b) Vì bạn Bình và bạn Cường luôn đứng liền nhau nên ta có thể coi 2 bạn đó là 1 bạn, tuy nhiên có hai trường hợp là bạn Bình đứng trước hoặc bạn Cường đứng trước. Như vậy, số cách xếp các vị trí đứng hay số phần tử của biến cố  $B$  là:  $2 \cdot 5! = 240$ .

$$\text{Vậy xác suất của biến cố } B \text{ là: } P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{240}{720} = \frac{1}{3}.$$

**Câu 48.** Từ bộ tứ lơ khơ có 52 quân bài thường đang được úp, rút ngẫu nhiên đồng thời 4 quân bài. Tính xác suất các biến cố sau:

- $A$ : “Rút được 4 quân bài cùng một giá trị” (ví dụ 4 quân 3, 4 quân K, ...);
- $B$ : “Rút được 4 quân bài có cùng chất”;
- $C$ : “Trong 4 quân bài rút được chỉ có 2 quân Át”.

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

**Câu 50.** Số quy tròn của số gần đúng 38,4753701 với độ chính xác 0,005 là:

- A. 38,47.                      B. 38,48.                      C. 38,49.                      D. 38,5.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 51.** Số quy tròn của số gần đúng - 97186 với độ chính xác 50 là:

- A. -97100.                      B. -97000.                      C. -97200.                      D. -97300.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 52.** Cho mẫu số liệu: 3 4 6 9 13

Trung vị của mẫu số liệu trên là:

- A. 7.                      B. 6.                      C. 6,5.                      D. 8.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 53.** Cho mẫu số liệu: 3 4 6 9 13

Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là:

- A. 7                      B. 6.                      C. 6,5.                      D. 8.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 54.** Cho mẫu số liệu: 3 4 6 9 13

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là:

- A. 7.                      B. 6.                      C. 1.                      D. 10.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Câu 55.** Cho mẫu số liệu: 3 4 6 9 13

Tứ phân vị của mẫu số liệu trên là:

- A.  $Q_1 = 4, Q_2 = 6, Q_3 = 9$ .    B.  $Q_1 = 3,5, Q_2 = 6, Q_3 = 9$   
C.  $Q_1 = 4, Q_2 = 6, Q_3 = 11$ .    D.  $Q_1 = 3,5, Q_2 = 6, Q_3 = 11$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

A.  $\frac{1}{A_{10}^6}$ .

B.  $\frac{1}{C_{10}^6}$ .

C.  $\frac{A_{10}^6}{6!}$ .

D.  $\frac{6!}{A_{10}^6}$ .

**Lời giải****Chọn A**

**Câu 62.** Bảng dưới đây thống kê sản lượng thủy sản của Việt Nam từ năm 2013 đến năm 2020 (đơn vị triệu tấn)

| Năm                      | 2013  | 2014  | 2015  | 2016  | 2017  | 2018  | 2019  | 2020  |
|--------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Sản lượng<br>(triệu tấn) | 6,053 | 6,319 | 6,563 | 6,728 | 7,279 | 7,743 | 8,150 | 8,410 |

(Nguồn <https://vasep.com.vn/gioi-thieu/tong-quan-nganh>)

- Viết mẫu số liệu thống kê sản lượng thủy sản của Việt Nam nhận được từ bảng trên.
- Tìm số trung bình cộng, trung vị và tứ phân vị của mẫu số liệu đó.
- Tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó.
- Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó.

**Lời giải**

a)

|       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 6,053 | 6,319 | 6,563 | 6,728 | 7,279 | 7,743 | 8,150 | 8,410 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|

- Số trung bình cộng là 7,155625 (triệu tấn). Trung vị là 7,0035 (triệu tấn).  
Tứ phân vị là  $Q_1 = 6,441$  (triệu tấn),  $Q_2 = 7,0035$  (triệu tấn),  $Q_3 = 7,9465$  (triệu tấn).
- Khoảng biến thiên là 2,357 triệu tấn. Khoảng tứ phân vị là 1,5055 (triệu tấn).
- Phương sai xấp xỉ là 0,67. Độ lệch chuẩn xấp xỉ là 0,82 (triệu tấn).

**Câu 63.** Một hội thảo quốc tế gồm 12 học sinh đến từ các nước: Việt Nam, Nhật Bản, Singapore, Ấn Độ, Hàn Quốc, Brasil, Canada, Tây Ban Nha, Đức, Pháp, Nam Phi, Cameroon, mỗi nước chỉ có đúng một học sinh. Cho ngẫu nhiên ra hai học sinh trong nhóm học sinh quốc tế để tham gia ban tổ chức. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

- A: “Hai học sinh được chọn ra đến từ châu Á”
- B: “Hai học sinh được chọn ra đến từ châu Âu”
- C: “Hai học sinh được chọn ra đến từ châu Mỹ”
- D: “Hai học sinh được chọn ra đến từ châu Phi”

**Lời giải**

Mỗi cách chọn 2 học sinh từ 12 học sinh là một tổ hợp chập 2 của 12 phần tử.

Vậy số phần tử của không gian mẫu  $\Omega$  là:  $n(\Omega) = C_{12}^2 = 66$ .

$$\text{Ta có: } P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{45}{C_{63}^2} = \frac{5}{217}.$$

**Câu 65.** Một đội thanh niên tình nguyện gồm 27 người đến từ các tỉnh (thành phố): Kon Tum, Gia Lai, Đắk Lắk, Đắk Nông, Lâm Đồng, Phú Yên, Khánh Hòa, Ninh Thuận, Bình Thuận, Bà Rịa – Vũng Tàu, Bình Dương, Bình Phước, Đồng Nai, Tây Ninh, Long An, Tiền Giang, Vĩnh Long, Bến Tre, Đồng Tháp, Trà Vinh, An Giang, Cần Thơ, Hậu Giang, Bạc Liêu, Sóc Trăng, Kiên Giang và Cà Mau, mỗi tỉnh chỉ có đúng một thành viên của đội. Chọn ngẫu nhiên 3 thành viên của đội để phân công nhiệm vụ trước. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

- a)  $A$ : “Ba thành viên được chọn đến từ Tây Nguyên”.
- b)  $B$ : “Ba thành viên được chọn đến từ Duyên Hải Nam Trung Bộ”.
- c)  $C$ : “Ba thành viên được chọn đến từ Đông Nam Bộ”.
- d)  $D$ : “Ba thành viên được chọn đến từ Đồng Bằng Sông Cửu Long”.

### Lời giải

a) Có 5 tỉnh thuộc Tây Nguyên là: Kon Tum, Gia Lai, Đắk Lắk, Đắk Nông, Lâm Đồng nên số phần tử của  $A$  là  $C_5^3 = 10$ .

$$\text{Ta có: } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{10}{C_{27}^3} = \frac{2}{585}.$$

b) Có 4 tỉnh thuộc Duyên hải Nam Trung Bộ là: Phú Yên, Khánh Hòa, Ninh Thuận, Bình Thuận nên số phần tử của  $B$  là:  $C_4^3 = 4$ .

$$\text{Ta có: } P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{C_{27}^3} = \frac{4}{2925}.$$

c) Có 5 tỉnh thuộc Đông Nam Bộ là: Bà Rịa - Vũng Tàu, Bình Dương, Bình Phước, Đồng Nai, Tây Ninh nên số phần tử của  $C$  là  $C_5^3 = 10$ .

d) Có 13 tỉnh, thành phố thuộc Đồng bằng sông Cửu Long là: Long An, Tiền Giang, Vĩnh Long, Bến Tre, Đồng Tháp, Trà Vinh, An Giang, Cần Thơ, Hậu Giang, Bạc Liêu, Sóc Trăng, Kiên Giang, Cà Mau nên số phần tử của  $D$  là  $C_{13}^3 = 286$ .

$$\text{Ta có: } P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{286}{C_{27}^3} = \frac{22}{225}.$$

**Câu 66.** Một hộp có 5 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1,2,3,4,5, hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ từ trong hộp, ghi lại số của thẻ được rút ra và bỏ lại thẻ đó vào hộp. Xét phép thử “Rút ngẫu nhiên liên tiếp 3 chiếc thẻ trong hộp”

Tính xác suất của biến cố  $A$  “Tích các số ghi trong thẻ ở 3 lần rút là số chẵn”

### Lời giải

Không gian mẫu  $\Omega$  có số phần tử là  $n(\Omega) = 5^3 = 125$ .

Xét biến cố  $\bar{A}$ : “Tích các số ghi trên thẻ ở 3 lần rút là số lẻ” là biến cố đối của biến cố  $A$ . Tích các số là số lẻ khi và chỉ khi các số đó đều là số lẻ nên số phần tử của  $\bar{A}$  là:  $3^3 = 27$ .

## CHƯƠNG V. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM

### BÀI 12. SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

#### I. LÝ THUYẾT

-Trong nhiều trường hợp, ta không biết hoặc khó biết số đúng ( kí hiệu  $\bar{a}$  ) mà ta chỉ tìm được giá trị khác xấp xỉ nó. Giá trị này được gọi là *số gần đúng*, kí hiệu là  $a$  .

-Giá trị  $\Delta_a = |a - \bar{a}|$  phản ánh mức độ sai lệch giữa số đúng  $\bar{a}$  và số gần đúng  $a$  .

-Nếu  $\Delta_a \leq d$  thì  $a - d \leq \bar{a} \leq a + d$  , khi đó ta viết  $\bar{a} = a \pm d$  và hiểu là số đúng  $\bar{a}$  nằm trong đoạn  $[a - d; a + d]$  . Do  $d$  càng nhỏ thì  $a$  càng gần  $\bar{a}$  nên  $d$  được gọi là *độ chính xác của số gần đúng*.

-Sai số tương đối của số gần đúng  $a$  , kí hiệu là  $\delta_a$  , là tỉ số giữa sai số tuyệt đối và  $|a|$  , tức là  $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$  .

-Số thu được sau khi thực hiện qui tắc làm tròn số được gọi là *số quy tròn*. Số quy tròn là một số gần đúng của số ban đầu.

-Cho số gần đúng  $a$  với độ chính xác  $d$  . Khi được yêu cầu làm tròn số  $a$  mà không nói rõ làm tròn đến hàng nào thì ta làm tròn số  $a$  đến hàng thấp nhất mà  $d$  nhỏ hơn 1 đơn vị của hàng đó.

#### II. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 1:** Bình thực hiện thí nghiệm và xác định được khối lượng riêng của nước tinh khiết ở  $4^\circ C$  là  $999,985 \text{ kg/m}^3$  .

a) Đây là số đúng hay số gần đúng ?

b) Giả sử số đúng cho khối lượng riêng của nước tinh khiết ở  $4^\circ C$  là  $1000 \text{ kg/m}^3$  . Hãy tính sai số tuyệt đối.

c) Làm tròn  $999,985 \text{ kg/m}^3$  đến hàng phần trăm, từ đó xác định số quy tròn.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Giá trị  $999,985 \text{ kg/m}^3$  là số gần đúng cho khối lượng riêng của nước tinh khiết ở  $4^\circ C$ .

b) Số đúng là  $\bar{a} = 1000 \text{ kg/m}^3$ , số gần đúng là  $a = 999,985 \text{ kg/m}^3$ . Do đó sai số tuyệt đối là  $|a - \bar{a}| = 1000 - 999,985 = 0,015$  .

c) Chữ số ở hàng phần nghìn là 5 nên ta tăng chữ số ở hàng phần trăm lên 1 đơn vị, từ đó suy ra số quy tròn là  $999,99 \text{ kg/m}^3$ .

**Ví dụ 2:** Cho kết quả hai phép đo như sau:

Vì số chia nhỏ nhất của thước là 1cm nên độ chính xác  $d = 0,5 \text{ cm}$ .

Sai số tuyệt đối  $\delta \leq d = 0,5 \text{ cm}$  và sai số tương đối  $\delta \leq \frac{d}{a} = \frac{0,5}{163} \approx 0,31\%$ .

**Câu 3.** Biết  $e$  là một số vô tỉ và  $2,7182 < e < 2,7183$ . Lấy  $e \approx 2,71828$

a) Xác định số đúng, số gần đúng.

b) Đánh giá sai số tuyệt đối và sai số tương đối của phép xấp xỉ này.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $e$  là số gần đúng; 2,71828 là số gần đúng.

b) Từ giả thiết ta có:  $|e - 2,71828| < 0,00008 = d$ .

Do đó, sai số tương đối  $\delta < \frac{0,00008}{2,71828} \approx 0,0029\%$ .

**Câu 4.** Sử dụng máy tính cầm tay tìm số gần đúng (làm tròn đến hàng phần nghìn) cho các số sau:

a)  $1 + 2\sqrt{3}$ ; b)  $4\pi - 1$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Sử dụng chức năng bấm căn bậc 2 và bấm số  $\pi$ .

**Câu 5.** Thực hiện làm tròn số

a) 23167 đến hàng trăm

b) 18,062 đến hàng phần trăm

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) 23200

b) 18,06.

**Câu 6.** Thực hiện làm tròn các số gần đúng sau:

a) Phép đo hiệu điện thế với kết quả là  $120 \pm 7,5 \text{ V}$ ;

b) Phép đo gia tốc trọng trường với kết quả là  $9,78 \pm 0,20 \text{ m/s}^2$ .

## BÀI 13. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM

### I. LÝ THUYẾT

- Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm là các số cho ta biết thông tin về vị trí trung tâm của mẫu số liệu.

- *Số trung bình* của mẫu số liệu  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , kí hiệu là  $\bar{x}$  được tính bằng công thức:  $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ .

+ Trong trường hợp mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số thì số trung bình được tính theo công thức:

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_kx_k}{n}$$

Trong đó  $m_k$  là tần số của giá trị  $x_k$  và  $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$ .

+ Ý nghĩa: Số trung bình là giá trị trung bình cộng của các số trong mẫu số liệu, nó cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu và có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu.

- *Trung vị* (kí hiệu là  $Me$ ) là giá trị chia đôi mẫu số liệu, nghĩa là trong dãy số liệu được sắp xếp theo thứ tự tăng dần thì trung vị ở vị trí chính giữa.

+ Để tìm trung vị của một mẫu số liệu, ta thực hiện như sau:

- Sắp xếp các giá trị trong mẫu số liệu theo thứ tự không giảm.
- Nếu số giá trị của mẫu số liệu là số lẻ thì giá trị chính giữa của dãy là trung vị, còn nếu là số chẵn thì trung vị là trung bình cộng của hai giá trị chính giữa dãy.

+ Ý nghĩa: Trung vị không bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường trong khi số trung bình bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường

- Các điểm  $Q_1, Q_2, Q_3$  chia dãy dữ liệu đã sắp xếp theo thứ tự không giảm thành bốn phần, mỗi phần đều chứa 25% giá trị được gọi là các tứ phân vị.

+ Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm.

+ Tìm trung vị. Giá trị này là  $Q_2$ .

+ Tìm trung vị của nửa số liệu bên trái  $Q_2$  (không bao gồm  $Q_2$  nếu  $n$  lẻ). Giá trị này là  $Q_1$ .

+ Tìm trung vị của nửa số liệu bên phải  $Q_2$  (không bao gồm  $Q_2$  nếu  $n$  lẻ). Giá trị này là  $Q_3$ .

$Q_1$  được gọi là *tứ phân vị thứ nhất* hay tứ phân vị dưới,  $Q_3$  được gọi là *tứ phân vị thứ ba* hay tứ phân vị trên.  $Q_2$  chính là trung vị.

- *Mốt* của mẫu số liệu là giá trị hoặc những giá trị xuất hiện với tần số lớn nhất. Người ta thường dùng mốt để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu khi mẫu số liệu có nhiều giá trị trùng nhau. Mốt có thể không là duy nhất.

### II. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 3:** Theo báo cáo của WTTC (World Travel and Tourism Council), mức tăng đóng góp của ngành du lịch cho GDP năm 2021 so với năm 2020 tại một số khu vực (đơn vị: %) như sau:

### III. BÀI TẬP

**Câu 7.** Để ước lượng xem trung bình cần thực hiện bao nhiêu lần gieo xúc xắc để xuất hiện mặt 6 chấm, một nhóm học sinh đã gieo xúc xắc và đếm số lần thực hiện cho đến khi xuất hiện mặt 6 chấm cho kết quả như sau:

8    5    7    10    4    6    7    5    7    6    4    5    5    7    6    5    4    2

Tính số lần gieo trung bình để xuất hiện mặt 6 chấm.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

$$\bar{x} \approx 5,72$$

**Câu 8.** Tại một lớp học chứng chỉ Tin học, nếu mức độ hoàn thành trung bình của 5 bài kiểm tra của học viên lớn hơn hoặc bằng 85% thì học viên sẽ được giảm 30% học phí. An đã làm 4 bài kiểm tra với kết quả là 94%, 82%, 78%, 80%. Hỏi bài cuối cùng An cần đạt được ít nhất bao nhiêu phần trăm để được giảm 30% học phí?

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

91%

**Câu 9.** Tổng số ca mắc Covid-19 tính đến ngày 26-8-2021 tại Thành phố Hồ Chí Minh và một số tỉnh lân cận được thống kê như sau:

|        |       |       |       |      |      |      |      |
|--------|-------|-------|-------|------|------|------|------|
| 190174 | 81182 | 19728 | 19048 | 8155 | 6103 | 5807 |      |
| 4544   | 3760  | 3297  | 2541  | 2000 | 1934 | 1602 | 1195 |

(Theo Bộ Y tế)

a) Tính số trung bình và trung vị cho dãy số liệu trên.

b) Giải thích tại sao số trung bình và trung vị lại khác nhau nhiều?

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) Số trung bình:

$$\bar{x} = \frac{19074 + \dots + 1195}{15} \approx 23404,67.$$

Sắp xếp dãy số liệu theo thứ tự không giảm:

$$Q_2 = \frac{338,28 + 339,98}{2} = 339,13.$$

Nửa số liệu bên trái  $Q_2$  là:

12,02                  19,08                  25,95                  81,26                  338,28;

gồm 5 số do đó số chính giữa là số ở vị trí thứ 3 nên  $Q_1 = 25,95$ .

Nửa số liệu bên phải  $Q_2$  là:

339,98                  340,82                  362,24                  501,89                  1059,64;

gồm 5 số do đó số chính giữa là số ở vị trí thứ 3 nên  $Q_3 = 362,24$ .

b) GDP của Việt Nam năm 2020 là 340,82 tỉ đô la Mỹ ( nhỏ hơn  $Q_3$  ) nên Việt Nam không thuộc nhóm 25% quốc gia trong khu vực Đông Nam Á có GDP cao nhất.

**Câu 12.** Diện tích của các tỉnh đồng bằng sông Cửu Long năm 2022 (đơn vị: nghìn  $km^2$ ) là:

1,44                  3,54                  2,67                  2,39                  4,49                  5,29                  3,31  
1,62                  2,36                  3,38                  1,53                  6,35                  2,51.

a) Tính số trung bình, trung vị cho dãy số liệu trên.

b) Giải thích ý nghĩa của mỗi số thu được ở câu a

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Số trung bình  $\bar{x} \approx 3,14$ . Trung vị  $Me = 2,67$ .

b) Diện tích trung bình của các tỉnh đồng bằng sông Cửu Long là 3,14 nghìn  $km^2$ .

Trung vị  $Me = 2,67$  ( nghìn  $km^2$  ) nghĩa là số tỉnh có diện tích nhỏ hơn 2,67 nghìn  $km^2$  bằng số tỉnh có diện tích lớn hơn 2,67 nghìn  $km^2$ .

Dãy số liệu sắp xếp theo thứ tự không giảm:

16,4 17,0 18,2 20,2 21,4 23,7 24,6 27,2 27,3 28,2 28,8 28,9.

Trung vị là  $Q_2 = (23,7 + 24,6) : 2 = 24,15$ .

Nửa dữ liệu bên trái  $Q_2$  là:

16,4 17,0 18,2 20,2 21,4 23,7.

Do đó,  $Q_1 = (18,2 + 20,2) : 2 = 19,2$ .

Nửa dữ liệu bên phải  $Q_2$  là:

24,6 27,2 27,3 28,2 28,8 28,9.

Do đó,  $Q_3 = (27,3 + 28,2) : 2 = 27,75$ .

Khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu là:  $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 27,75 - 19,2 = 8,55$ .

Số trung bình của mẫu số liệu là:  $\bar{x} = \frac{16,4 + 17,0 + \dots + 28,9}{12} \approx 23,49$ .

Độ lệch chuẩn:

$$s_1 = \sqrt{\frac{(16,4 - 23,49)^2 + \dots + (28,9 - 23,49)^2}{12}} \approx 4,52.$$

Làm tương tự với dãy số liệu về nhiệt độ trung bình cho các tháng tại Thành phố Hồ Chí Minh ta có:

Khoảng biến thiên:  $R = 3,2$ .

Khoảng tứ phân vị là:  $\Delta_Q = 27,7 - 26,55 = 1,15$ .

Độ lệch chuẩn  $s_2 = 0,91$ .

b) Khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, độ lệch chuẩn của dãy số liệu về nhiệt độ trung bình các tháng tại Thành phố Hồ Chí Minh đều nhỏ hơn các số đặc trưng này tại Hà Nội nên ta khẳng định rằng nhiệt độ trung bình các tháng ở Thành phố Hồ Chí Minh ít biến động hơn.

**Ví dụ 6:** Điểm thi môn Toán của các bạn trong lớp được cho trong bảng sau:

|        |   |    |    |    |    |
|--------|---|----|----|----|----|
| Điểm   | 0 | 5  | 6  | 7  | 10 |
| Tần số | 1 | 10 | 20 | 10 | 1  |

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên. Có nên dùng đại lượng này để đo độ phân tán của mẫu số liệu trên không?

A.

B.

C.

D.

**Câu 15.** Điểm số của hai vận động viên bắn cung trong 10 lần bắn thử để chuẩn bị cho Olympic Tokyo 2020 được ghi lại như sau:

|                        |           |           |           |           |           |          |          |           |           |           |
|------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|
| <b>Vận động viên A</b> | <b>10</b> | <b>9</b>  | <b>8</b>  | <b>10</b> | <b>9</b>  | <b>9</b> | <b>9</b> | <b>10</b> | <b>9</b>  | <b>8</b>  |
| <b>Vận động viên B</b> | <b>5</b>  | <b>10</b> | <b>10</b> | <b>10</b> | <b>10</b> | <b>7</b> | <b>9</b> | <b>10</b> | <b>10</b> | <b>10</b> |

a) Tìm khoảng biến thiên và độ lệch chuẩn của mỗi dãy số liệu trên.

b) Vận động viên nào có thành tích bắn thử ổn định hơn?

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Vận động viên A: Khoảng biến thiên = 2, Độ lệch chuẩn = 0,7.

Vận động viên B: Khoảng biến thiên = 5, Độ lệch chuẩn  $\approx 1,64$ .

b) Vì khoảng biến thiên, độ lệch chuẩn về thành tích của vận động viên A đều nhỏ hơn của vận động viên B nên dựa trên các tiêu chí này ta có thể kết luận vận động viên A có thành tích ổn định hơn.

**Câu 16.** Trong các dãy số liệu sau, dãy nào có độ lệch chuẩn lớn nhất?

(a) 98 99 100 101 102

(b) 2 4 6 8 10

(c) 2 10

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Dãy số liệu (c).

**Câu 17.** Mẫu số liệu sau là chiều cao (đơn vị: cm) của các bạn trong tổ của Lan:

165 168 157 162 165 165 179 148 170 167.

a) Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

b) Khoảng tứ phân vị có bị ảnh hưởng bởi chiều cao của bạn cao nhất, bạn thấp nhất không?

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Sắp xếp dãy số liệu theo thứ tự không giảm:

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

### A – Trắc nghiệm

**Câu 19.** Số quy tròn của số gần đúng  $167,23 \pm 0,07$  là

A. 167,23 .                      B. 167,2 .                      C. 167,3 .                      D. 167 .

A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 20.** Biết độ ẩm không khí tại Hà Nội là  $51\% + 2\%$  . Khi đó

A. Sai số tuyệt đối  $\delta = 2\%$  .                      B. Sai số tuyệt đối  $\delta = 1\%$  .

C. Độ chính xác  $d = 2\%$  .                      D. Độ chính xác  $d = 1\%$  .

A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn C

**Câu 21.** Một số học sinh thực hành đo chiều cao của một tòa tháp cho kết quả là 200 m. Biết chiều cao thực của tòa tháp là 201 m, sai số tương đối là

A. 0,5% .                      B. 1% .                      C. 2% .                      D. 4% .

A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn A

**Câu 22.** Điểm thi học kì môn Toán của một nhóm bạn như sau:

8 97107578.

Mốt của mẫu số liệu trên là

A. 5 .                      B. 7 .                      C. 8 .                      D. 9 .

A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Chọn B**

**Câu 27.** Mẫu số liệu trong Bài 5.26 có khoảng biến thiên là

A. 2 .                                      B. 4 .                                      C. 6 .                                      D. 8 .

A.                                      B.                                      C.                                      D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn D**

**Câu 28.** Mẫu số liệu mà tất cả các số trong mẫu này bằng nhau có phương sai là

A. -1.                                      B. 0 .                                      C. 1.                                      D. 2 .

sung thêm số 9 vào mẫu số liệu trong bài Bài 5.22 thì trung vị của mẫu số liệu mới là

A. 6 .                                      B. 7 .                                      C. 7,5 .                                      D. 8 .

A.                                      B.                                      C.                                      D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn B**

**Câu 29.** Số giá trị trong mẫu số liệu nhỏ hơn tứ phân vị dưới  $Q_1$  chiếm khoảng

A. 25% số giá trị của dãy.                                      B. 50% số giá trị của dãy.

C. 75% số giá trị của dãy.                                      D. 100% số giá trị của dãy.

A.                                      B.                                      C.                                      D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn A**

**Câu 30.** Khoảng tứ phân vị  $\Delta_Q$  là

A.  $Q_2 - Q_1$                                       B.  $Q_3 - Q_1$

C.  $Q_3 - Q_2$                                       D.  $(Q_1 + Q_3) : 2$

A.                                      B.                                      C.                                      D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn B**

**Chọn**

Tính  $Z = \frac{155-175,16}{7,64} \approx -2,64$ . Do  $-3 < Z < -2$  nên người ta bị suy dinh dưỡng thể thấp còi, mức độ

vừa.

**Câu 34.** Thời gian chờ của 10 bệnh nhân ( đơn vị: phút) tại một phòng khám được ghi lại như sau:

5      17      22      9      8      11      2      16      55      5

- a) Tính số trung bình, trung vị và môđ của dãy số trên.  
b) Nên dùng đại lượng nào để biểu diễn thời gian chờ của bệnh nhân tại phòng khám này?

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải****Chọn**

a) Số trung bình = 15 , Trung vị = 10 , Môđ = 5.

b) Nên dùng trung vị vì số trung bình bị ảnh hưởng bởi giá trị “ bất thường” là 55, còn môđ xuất hiện là do ngẫu nhiên.

**Câu 35.** Một học sinh dùng một dụng cụ đo đường kính  $d$  của một viên bi ( đơn vị  $mm$  ) thu được kết quả sau:

| Lần đo | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $d$    | 6,50 | 6,51 | 6,50 | 6,52 | 6,49 | 6,50 | 6,78 | 6,49 |

- a) Bạn Minh cho rằng kết quả đo ở lần 7 không chính xác. Hãy kiểm tra khẳng định này của bạn Minh.  
b) Tìm giá trị xấp xỉ cho đường kính của viên bi.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải****Chọn**

a) Tính các tứ phân vị và khoảng tứ phân vị. Kiểm tra xem giá trị 6,78 có lớn hơn  $Q_3 + 1,5 \cdot \Delta_Q$  hay không.

b) Nếu 6,78 là điểm bất thường ta loại bỏ giá trị này và tính số trung bình của 7 giá trị còn lại. Nếu 6,78 không là điểm bất thường ta tính số trung bình của 8 giá trị trong mẫu số liệu.

**Câu 36.** Thu nhập theo tháng( đơn vị: triệu đồng) của các công nhân trong một công ty nhỏ được cho như sau:

5,5      6,0      8,0      7,0      7,5      8,0      7,0      9,5  
12,0      10,0      4,5      11,0      13,0      9,5      8,5      4,0.

## CHƯƠNG V: SƠ ĐỒ HÌNH CÂY.

### BÀI 1. QUY TẮC CỘNG – QUY TẮC NHÂN – SƠ ĐỒ HÌNH CÂY LÍ THUYẾT

#### 1. Quy tắc cộng

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động thứ nhất có  $m$  cách thực hiện, hành động thứ hai có  $n$  cách thực hiện (các cách thực hiện của cả hai hành động là khác nhau đôi một) thì công việc đó có  $m + n$  cách hoàn thành.

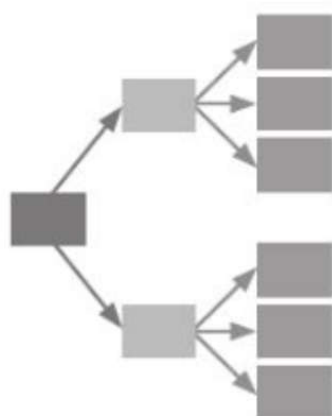
*Nhận xét:* Tương tự, ta cũng có quy tắc sau:

Một công việc được hoàn thành bởi một trong ba hành động. Nếu hành động thứ nhất có  $m$  cách thực hiện, hành động thứ hai có  $n$  cách thực hiện, hành động thứ ba có  $p$  cách thực hiện (các cách thực hiện của ba hành động là khác nhau đôi một) thì công việc đó có  $m + n + p$  cách hoàn thành.

#### 2. Quy tắc nhân

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu hành động thứ nhất có  $m$  cách thực hiện và ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất, có  $n$  cách thực hiện hành động thứ hai thì công việc đó có  $m \cdot n$  cách hoàn thành.

*Nhận xét:* Tương tự, ta cũng có quy tắc sau:



Hình 1

Một công việc được hoàn thành bởi ba hành động liên tiếp. Nếu hành động thứ nhất có  $m$  cách thực hiện; ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất, có  $n$  cách thực hiện hành động thứ hai; ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất và mỗi cách thực hiện hành động thứ hai có  $p$  cách thực hiện hành động thứ ba thì công việc đó có  $m \cdot n \cdot p$  cách hoàn thành.

#### 3. Sơ đồ hình cây

- Sơ đồ hình cây (Hình 1) là sơ đồ bắt đầu tại một nút duy nhất với các nhánh toả ra các nút bổ sung.
- Ta có thể sử dụng sơ đồ hình cây để đếm số cách hoàn thành một công việc khi công việc đó đòi hỏi những hành động liên tiếp.

## II. CÁC DẠNG TOÁN

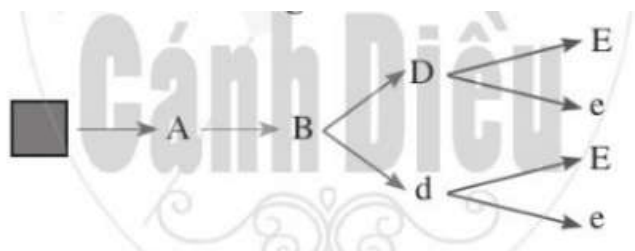
#### Vấn đề 1. Đếm bằng quy tắc cộng

*Chú ý:* Cách thực hiện hành động thứ nhất không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ hai.

#### Vấn đề 2. Đếm bằng quy tắc nhân

#### Vấn đề 3. Đếm bằng sơ đồ hình cây

a) Sơ đồ hình cây biểu thị sự hình thành giao tử:



b) Từ sơ đồ hình cây, ta có 4 loại giao tử của kiểu gen  $AABBDdEe$ .

#### IV. BÀI TẬP

**Câu 1.** Một công việc được hoàn thành bởi một trong ba hành động. Nếu hành động thứ nhất có  $a$  cách thực hiện, hành động thứ hai có  $b$  cách thực hiện, hành động  $c$  cách thực hiện (các cách thực hiện của ba hành động là khác nhau đôi một) thì số cách hoàn thành công việc đó là:

- A.  $abc$ .                      B.  $a + b + c$ .                      C. 1.                      D.  $ab + c$ .

- A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 2.** Một công việc được hoàn thành bởi một trong ba hành động liên tiếp. Nếu hành động thứ nhất có  $a$  cách thực hiện; ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất, có  $b$  cách thực hiện hành động thứ 2; ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất và mỗi cách thực hiện hành động thứ hai có  $c$  cách thực hiện hành động thứ ba thì số cách hoàn thành công việc đó là:

- A.  $abc$ .                      B.  $a + b + c$ .                      C. 1.                      D.  $ab + c$ .

- A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn A

**Câu 3.** Lớp 10A có 10 bạn nữ và 25 bạn nam. Có bao nhiêu cách để chọn một bạn để làm lớp trưởng?

- A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

$10 + 25 = 35$  (cách chọn).

**Câu 4.** Bạn Nam có 8 quyển sách Toán, 6 quyển sách Vật Lý và 5 quyển sách Hóa học, các quyển sách là khác nhau. Hỏi bạn nam có bao nhiêu cách chọn một quyển sách để đọc?

- A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

$8 + 6 + 5 = 19$  (cách chọn).

**Câu 5.** Cho 20 điểm phân biệt. Hỏi lập được bao nhiêu véc tơ khác véc tơ  $\vec{0}$ ? Biết rằng hai đầu mút của mỗi véc tơ là 2 trong 20 điểm đã cho

- A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

b) Có 8 loại giao tử của kiểu gen AaBBDD<sup>ee</sup>.

Với  $a_1$  có thể bằng 0 hoặc khác 0, mỗi số có dạng trên là một hoán vị của 8 chữ số đã cho. Do đó, số các số có thể lập được trong trường hợp 1 là:  $P_8 = 8! = 40320$ .

Trường hợp 2:  $a_1 = 0$ .

Vì  $a_1 = 0$  cố định nên 7 chữ số sau  $a_1$  đều khác 0 và chỉ có 7 chữ số đó thay đổi. Suy ra, mỗi số có dạng  $0a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8$  là một hoán vị của 7 chữ số khác 0 đã cho. Do đó, số các số có thể lập được trong trường hợp 2 là:  $P_7 = 7! = 5040$ .

Vậy số các số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau có thể lập được là:

$$40320 - 5040 = 35280.$$

**Ví dụ 7:** Bạn Nam có 4 quyển sách Toán, 6 quyển sách Tiếng Anh (các quyển sách là khác nhau). Hỏi có bao nhiêu cách xếp các quyển sách thành hàng ngang sao cho:

a) Các quyển sách cùng môn thì xếp cạnh nhau (không có quyển sách Toán nào nằm giữa hai quyển sách Tiếng Anh và ngược lại) ?

b) Các quyển sách Toán thì xếp cạnh nhau?

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Xếp 4 quyển sách Toán cạnh nhau thành một nhóm có  $P_4 = 4! = 24$  (cách)

Xếp 6 quyển sách Tiếng Anh cạnh nhau thành một nhóm có  $P_6 = 6! = 720$  (cách).

Có  $P_2 = 2! = 2$  cách xếp cạnh hai nhóm sách trên.

Vậy số cách xếp các quyển sách sao cho các quyển sách cùng môn thì xếp cạnh nhau là:

$$24 \cdot 720 \cdot 2 = 34560.$$

b) Xếp 4 quyển sách Toán cạnh nhau thành một nhóm có

$$P_4 = 4! = 24 \text{ (cách).}$$

Coi nhóm sách Toán là một quyển sách, gọi là  $A$ , xếp quyển sách  $A$  và 6 quyển sách Tiếng Anh có  $P_7 = 7! = 5040$  (cách).

Vậy số cách xếp các quyển sách sao cho các quyển sách Toán thì xếp cạnh nhau là:

$$24 \cdot 5040 = 120960.$$

**Ví dụ 8:** Bạn Dũng mới mua điện thoại và muốn lập mật khẩu có 6 chữ số đôi một khác nhau. Hỏi bạn Dũng có bao nhiêu cách để lập một mật khẩu?

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Mỗi mật khẩu có thể lập được là một cách chọn 6 chữ số từ 10 chữ số và sắp thứ tự của chúng, tức là một chỉnh hợp chập 6 của 10 phần tử. Vậy bạn Dũng có  $A_{10}^6 = 151200$  cách để lập mật khẩu.

**Câu 12.** Cho tập hợp A gồm  $n \in \mathbb{N}^*$  và một số nguyên  $k$  với  $1 \leq k \leq n$  và Mỗi chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử đã cho là:

- A. Một kết quả của sự sắp xếp thứ tự  $n$  phần tử của A.
- B. Tất cả kết quả của việc lấy  $k$  từ  $n$  phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nhất định.
- C. Một kết quả của việc lấy  $k$  từ  $n$  phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nhất định.
- D. Một số được tính bằng  $n(n-1)\dots(n-k+1)$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Chọn C

**Câu 13.** Cho  $n, k \in \mathbb{N}^*$  và  $k \leq n$ . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A.  $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$ .

B.  $P_n = n(n-1)\dots 2.1$

C.  $P_n = n!$ . D.  $A_n^k = \frac{n!}{k!}$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Chọn D

**Câu 14.** Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ta lập được bao nhiêu số tự nhiên:

- a) Gồm 9 chữ số đôi một khác nhau.
- b) Gồm 7 chữ số đôi một khác nhau.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) Có  $P_9 = 9! = 362880$  (số).

b) Có  $A_9^7 = 181440$  (số).

**Câu 15.** Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ta lập được bao nhiêu số tự nhiên:

- a) Gồm 10 chữ số đôi một khác nhau.
- b) Gồm 6 chữ số đôi một khác nhau.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) Có  $10! - 9! = 3\,265\,920$  (số).

b) Có  $A_{10}^6 - A_9^5 = 136\,080$  (số).

Có  $A_{26}^2 = 650$  cách chọn 2 kí tự đầu. Có  $A_{10}^3 = 720$  cách chọn 3 kí tự tiếp theo. Có 3 cách chọn 1 kí tự cuối cùng.

Vậy số cách tạo ra một mật khẩu là:  $650 \cdot 720 \cdot 3 = 1404000$ .

**Câu 19.** Một lớp có 40 học sinh chụp ảnh tổng kết năm học. Lớp đó muốn trong bức ảnh có 18 học sinh ngồi ở hàng đầu và 22 học sinh đứng ở hàng sau. Có bao nhiêu cách xếp vị trí chụp ảnh như vậy?

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Cách 1:** Chọn 18 học sinh ngồi ở hàng đầu có  $A_{40}^{18}$  cách.

Xếp vị trí của 22 học sinh còn lại đứng ở hàng sau có  $22!$  cách.

Vậy số cách xếp vị trí chụp ảnh là  $A_{40}^{18} \cdot 22!$ .

**Cách 2:** Vì ta có thể xếp vị trí của 40 học sinh rồi chia 18 học sinh ngồi ở hàng đầu và 22 học sinh đứng ở hàng sau nên số cách xếp vị trí chụp ảnh có thể tính bằng  $40!$

Số cách chọn 3 học sinh nữ vào ban cán sự lớp là  $C_{16}^3 = 560$ .

Vậy số cách chọn 3 học sinh làm ban cán sự của lớp sao cho trong đó có ít nhất 1 học sinh nam là :  
 $9880 - 560 = 9320$ .

**Ví dụ 12:** Chứng minh rằng:

a)  $C_n^k = C_n^{n-k}$  với  $0 \leq k \leq n$ ;

b)  $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$  với  $1 \leq k \leq n$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Ta có:

a)  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{[n-(n-k)]!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = C_n^{n-k}$ .

b)  $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{(k-1)![n-1-(k-1)]!} + \frac{(n-1)!}{k![n-1-k]!}$   
 $= (n-1)! \left[ \frac{k}{k!(n-k)!} + \frac{n-k}{k!(n-k)!} \right] = \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k!(n-k)!}$   
 $= \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$ .

### III. BÀI TẬP

**Câu 20.** Cho tập hợp  $A$  gồm  $n$  phần tử và một số nguyên  $k$  với  $1 \leq k \leq n$ . Mỗi tổ hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử đó là:

**A.** Tất cả các kết quả của việc lấy  $k$  phần tử từ  $n$  phần tử của tập hợp  $A$  và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó.

**B.** Một tập con gồm  $k$  phần tử được lấy ra từ phần tử của  $A$ .

**C.** Một kết quả của việc lấy  $k$  phần tử từ  $n$  phần tử của tập hợp  $A$  và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó.

**D.** Tất cả tập con gồm  $k$  phần tử được lấy ra từ phần tử của  $A$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Chọn B

**Câu 21.** Cho  $k, n$  là các số nguyên dương,  $k \leq n$ . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

**A.**  $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$ .

**B.**  $C_n^k = C_n^{n-k}$ .

**C.**  $C_n^k = \frac{A_n^k}{(n-k)!}$ .

**D.**  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Chọn C

**Câu 22.** Tính số đoạn thẳng có hai đầu mút là 2 trong 10 điểm phân biệt.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Mỗi đoạn thẳng tương ứng với một cặp điểm (không tính thứ tự) chọn trong 10 điểm phân biệt nên có  
 $C_{10}^2 = 45$  đoạn thẳng.

**A.****B.****C.  
Lời giải****D.****Chọn**

Ta có

$$\text{a) } kC_n^k = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{k.n!}{k(k-1)!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} = nC_{n-1}^{k-1}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{1}{k+1} C_n^k &= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!} = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{k+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad (2x-1)^5 &= (2x)^5 - 5 \cdot (2x)^4 \cdot 1 + 10 \cdot (2x)^3 \cdot 1^2 - 10 \cdot (2x)^2 \cdot 1^3 + 5 \cdot (2x) \cdot 1^4 - 1^5 \\ &= 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1. \end{aligned}$$

**Ví dụ 16:** Xác định hệ số của  $x^3$  trong khai triển các biểu thức  $(3x-4)^4$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Số hạng chứa  $x^3$  trong khai triển các biểu thức  $(3x-4)^4$  là  $4 \cdot (3x)^3 \cdot (-4) = -432x^3$ .

Vậy hệ số của  $x^3$  trong khai triển các biểu thức  $(3x-4)^4$  là  $-432$ .

**Ví dụ 17:** Xác định hệ số của  $x^2$  trong khai triển các biểu thức  $(3x-2)^5$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Số hạng chứa  $x^2$  trong khai triển các biểu thức  $(3x-2)^5$  là  $10 \cdot (3x)^2 \cdot (-2)^3 = -720x^2$ .

Vậy hệ số của  $x^2$  trong khai triển các biểu thức  $(3x-2)^5$  là  $-720$ .

### III. BÀI TẬP

**Câu 28.** Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A.  $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ .

B.  $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$ .

C.  $(a+b)^4 = b^4 + 4b^3a + 6b^2a^2 + 4ba^3 + a^4$ .

D.  $(a+b)^4 = a^4 + b^4$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Chọn D

**Câu 29.** Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng?

A.  $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ .

B.  $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 - 5ab^4 + b^5$ .

C.  $(a+b)^5 = a^5 + b^5$ .

D.  $(a-b)^5 = a^5 - b^5$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Chọn A

**Câu 30.** Hệ số của  $x^3$  trong khai triển biểu thức  $(2x-1)^4$  là:

A. 32.

B. -32.

C. 8.

D. -8.

Hệ số của  $x^3$  trong khai triển biểu thức  $\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}\right)^5$  là  $\frac{5}{27}$ .

**Câu 35.** Cho  $\left(2x - \frac{1}{3}\right)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ . Tính:

a)  $a_2$ ;

b)  $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $a_2 = \frac{8}{3}$ .

b)  $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 + a_4 \cdot 1^4$

$$= \left(2 \cdot 1 - \frac{1}{3}\right)^4 = \frac{625}{81}$$

**Câu 36.** Cho  $\left(\frac{3}{5}x + \frac{1}{2}\right)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ . Tính:

a)  $a_3$ ;

b)  $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $a_3 = \frac{27}{50}$

b)  $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 + a_4 \cdot 1^4 + a_5 \cdot 1^5$

$$= \left(\frac{3}{5} \cdot 1 + \frac{1}{2}\right)^5 = \frac{161051}{100000}.$$

**Câu 37.** Tính các tổng sau (không sử dụng máy tính cầm tay):

a)  $T = C_4^0 + \frac{1}{2}C_4^1 + \frac{1}{3}C_4^2 + \frac{1}{4}C_4^3 + \frac{1}{5}C_4^4$ ;

b)  $S = C_6^1 + 2C_6^2 + 4C_6^3 + 4C_6^4 + 5C_6^5 + 6C_6^6$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Dựa vào kết quả chứng minh của bài 27 chương V là

$$\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1} \quad (0 \leq k \leq n),$$

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

**Câu 38.** Khi đi từ nhà đến trường, bạn Thảo muốn đi qua hiệu sách. Biết rằng có 3 con đường từ nhà bạn Thảo đến hiệu sách và 2 con đường từ hiệu sách đến trường. Bạn Thảo có bao nhiêu cách chọn đường đi từ nhà đến trường, qua hiệu sách?

- A. 3                      B. 6                      C. 5                      D. 2  
A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 39.** Bạn Huy cần đi từ nhà đến một hiệu sách. Biết rằng, từ nhà bạn Huy có hai hướng đi: theo hướng thứ nhất có 2 hiệu sách, theo hướng thứ 2 có 3 hiệu sách. Bạn Huy có bao nhiêu cách chọn một hiệu sách để đến?

- A. 3                      B. 6                      C. 5                      D. 2  
A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn C

**Câu 40.** Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A.  $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$  với  $k; n$  là các số tự nhiên,  $0 \leq k \leq n$ .

B.  $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$  với  $k; n$  là các số tự nhiên,  $1 \leq k \leq n$ .

C.  $P_n = n!$  Với  $n$  là số nguyên dương.

D.  $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$ .

- A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn A

**Câu 41.** Cho 20 điểm phân biệt và không có ba điểm nào thẳng hàng. Lập được bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm trong 20 điểm đã cho?

- A. 1140                      B. 60                      C. 6840                      D. 8000  
A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 42.** Một trường trung học phổ thông được cử hai học sinh đi dự trại hè thành phố. Nhà trường quyết định chọn hai học sinh từ lớp 11A và lớp 12A. Biết rằng lớp 11A có 34 học sinh và lớp 12A có 36 học sinh. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn nếu:

Hệ số của  $x^3$  trong khai triển biểu thức  $(5x-1)^4$  là  $-500$ .

**Câu 47.** Xác định hệ số của  $x^4$  trong khai triển biểu thức  $(2x+3)^5$ ;

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Hệ số của  $x^4$  trong khai triển biểu thức  $(2x+3)^5$  là 240.

**Câu 48.** Các bạn lớp 10A lập kế hoạch đi du lịch chỉ một trong hai thành phố là thành phố M hoặc thành phố N. Vì đi trong ngày nên các bạn cần lập danh sách 4 địa điểm tham quan và thứ tự đi các địa điểm đó từ trước. Biết rằng các bạn liệt kê ra 10 địa điểm có thể đi ở thành phố M và 4 địa điểm có thể đi ở thành phố N. Các bạn lớp 10A có bao nhiêu cách lập một danh sách các địa điểm để đi du lịch?

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Nếu đi thành phố M, lớp 10A có  $A_{10}^4 = 5040$  cách lập một danh sách 4 địa điểm tham quan.

Nếu đi thành phố N, lớp 10A có  $P_4 = 4! = 24$  cách lập một danh sách 4 địa điểm tham quan.

Vậy số cách lập một danh sách các địa điểm để tham quan là

$$5040 + 24 = 5064.$$

**Câu 49.** Giải bóng chuyền gồm 9 đội tham dự trong đó có 3 đội của nước X. Ban tổ chức cho bốc thăm ngẫu nhiên để xếp các đội vào 3 bảng A;B;C và mỗi bảng có 3 đội. Tính số cách xếp sao cho 3 đội bóng của nước X nằm ở ba bảng khác nhau?

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Xếp 3 đội của nước X vào 3 bảng khác nhau có  $3! = 6$  cách.

Xếp 6 đội còn lại vào 3 bảng A,B,C có:  $C_6^2.C_4^2.C_2^2 = 90$  (cách).

Vậy số cách xếp sao cho 3 đội bóng của nước X ở 3 bảng khác nhau là:

$$6.90 = 540.$$

**Câu 50.** Một đề thi học sinh giỏi lớp 10 môn Toán gồm 5 câu được chọn từ 15 câu thông hiểu, 10 câu vận dụng thấp và 5 câu vận dụng cao. Một đề thi được gọi là tốt nếu trong đề thi có cả ba loại mức độ, đồng thời số câu thông hiểu không ít hơn 3. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề thi tốt?

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Vì đề thi có số câu thông hiểu không ít hơn 2 và có đủ 3 mức độ nên xảy ra 3 trường hợp:

Nếu đề thi có 3 câu thông hiểu, 1 câu vận dụng thấp và 1 câu vận dụng cao thì có  $C_{15}^3.C_{10}^1.C_5^1 = 22750$  (cách chọn đề).

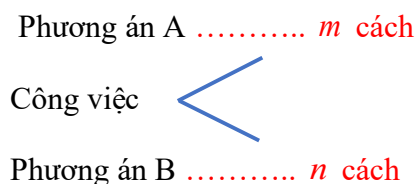
## CHƯƠNG VIII. ĐẠI SỐ TỔ HỢP

### BÀI 1. QUY TẮC CỘNG VÀ QUY TẮC NHÂN

#### I. LÝ THUYẾT

##### 1. Quy tắc cộng

Giả sử một công việc nào đó có thể thực hiện theo phương án  $A$  hoặc  $B$  .: Phương án  $A$  có  $m$  cách thực hiện, phương án  $B$  có  $n$  cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của phương án  $A$  . Khi đó số cách thực hiện công việc là:  $m + n$  cách



Khi đó số cách thực hiện công việc là:  $m + n$  cách

Tổng quát

Giả sử một công việc có thể thực hiện theo  $k$  phương án

- Phương án 1 có  $m_1$  cách thực hiện.

- Phương án 2 có  $m_2$  cách thực hiện.

...

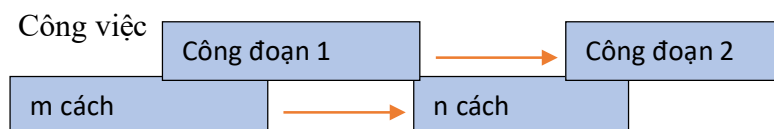
- Phương án  $k$  có  $m_k$  cách thực hiện.

Hơn nữa mỗi cách thực hiện của phương án không trùng với bất kì cách nào của phương án khác.

Khi đó có thể thực hiện công việc theo  $m_1 + m_2 + \dots + m_k$  cách.

##### 2. Quy tắc nhân

Giả sử một công việc nào đó được chia thành hai công đoạn. Công đoạn thứ nhất có  $m$  cách thực hiện và ứng với mỗi cách đó có  $n$  cách thực hiện công đoạn thứ hai. Khi đó công việc có thể thực hiện theo  $m.n$  cách



Có  $m.n$  cách

Tổng quát

Giả sử một công việc nào đó bao gồm  $k$  công đoạn

- Công đoạn 1 có  $n_1$  cách thực hiện.

- Công đoạn 2 có  $n_2$  cách thực hiện.

...

- Công đoạn  $k$  có  $n_k$  cách thực hiện.



Hình 1

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

Có thể coi việc tung con xúc xắc ba lần liên tiếp là công việc gồm ba công đoạn, mỗi công đoạn là một lần tung.

Mỗi lần tung đều có 6 khả năng khác nhau xảy ra (số chấm xuất hiện là 1; 2; ...; 6).

Do đó, theo quy tắc nhân, ta có  $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$  kết quả khác nhau có thể xảy ra.

**Ví dụ 3:** Dùng sáu chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5 có thể lập được bao nhiêu

- a) mật khẩu có bốn chữ số khác nhau?
- b) số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau?
- c) số tự nhiên lẻ có bốn chữ số khác nhau?

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

- a) Kí hiệu mật khẩu cần lập là  $abcd$ , trong đó  $a, b, c, d$  là các chữ số khác nhau từ sáu chữ số đã cho.

Coi việc chọn mật khẩu là một công việc gồm bốn công đoạn.

Công đoạn 1: Chọn chữ số  $a$  từ sáu chữ số đã cho, có 6 cách chọn.

Công đoạn 2: Chọn chữ số  $b$  từ năm chữ số còn lại, có 5 cách chọn.

Công đoạn 3: Chọn chữ số  $c$  từ bốn chữ số còn lại, có 4 cách chọn.

Công đoạn 4: Chọn chữ số  $d$  từ ba chữ số còn lại, có 3 cách chọn.

Từ đó, theo quy tắc nhân, có thể lập được  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$  mật khẩu theo yêu cầu.

- b) Kí hiệu số tự nhiên cần lập là  $\overline{abcd}$ , trong đó  $a, b, c, d$  là các chữ số khác nhau từ sáu chữ số đã cho,  $a \neq 0$ . Đầu tiên, có 5 cách chọn chữ số  $a$ . Tiếp theo, có 5 cách chọn chữ số  $b$  từ các chữ số còn lại. Tiếp tục, có 4 cách chọn chữ số  $c$  và 3 cách chọn chữ số  $d$ . Từ đó, theo quy tắc nhân, có  $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$  số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau lập từ các chữ số đã cho.

**Câu 2.** Có ba cái hộp, hộp thứ nhất có 2 quả cầu dán nhãn  $A, B$ ; hộp thứ hai chứa 3 quả cầu dán nhãn  $a, b, c$ ; hộp thứ ba có chứa 2 quả cầu dán nhãn 1, 2. Từ mỗi hộp lấy ra ngẫu nhiên một quả cầu.

a) Hãy vẽ sơ đồ hình cây để thể hiện tất cả các kết quả có thể xảy ra?

b) Có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra?

**A.**

**B.**

**C.**

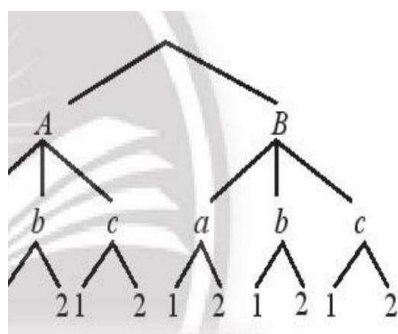
**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Sơ đồ hình cây như Hình 1.

b)  $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$  cách.



Hình 1

**Câu 3.** Ba lớp của một trường lên kế hoạch đi dã ngoại, mỗi lớp có thể chọn một trong năm địa điểm. Có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra về cách chọn địa điểm của ba lớp ?

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Mỗi lớp có 5 cách chọn địa điểm.

Theo quy tắc nhân, số cách chọn địa điểm của ba lớp là  $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ .

**Câu 4.** Mã xác thực (OTP – One Time Password) do một ngân hàng gửi vào điện thoại của khách hàng cho mỗi lần giao dịch là một dãy 6 kí tự từ các chữ số từ 0 đến 9. Có thể tạo ra bao nhiêu mã xác thực khác nhau như vậy?

A.

B.

C.

D.

**Lời giải****Chọn**

Có 6 cách chọn chữ cái cho kí tự đầu tiên.

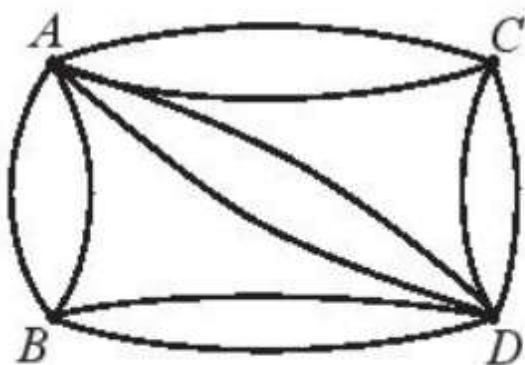
Với 3 kí tự tiếp theo, mỗi kí tự có 10 cách chọn từ 10 chữ số  $0, 1, 2, \dots, 9$ .

Theo quy tắc nhân, công ty có thể tạo ra  $6 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 6000$  mã số nhân viên.

**Câu 7.** Có các con đường nối bốn ngôi làng  $A, B, C, D$  như Hình 5. Có bao nhiêu cách chọn đường đi khác nhau

a) từ  $A$  qua  $B$  rồi đến  $D$ ?

b) từ  $A$  đến  $D$ ?



Hình 5

A.

B.

C.

D.

**Lời giải****Chọn**

a)  $2 \cdot 2 = 4$ ;

b)  $2 \cdot 2 + 2 = 10$

**Câu 8.** Tung đồng thời hai con xúc xắc khác nhau và ghi lại số chấm xuất hiện trên mỗi con xúc xắc. Có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra mà tổng số chấm xuất hiện trên hai mặt là bội của 5?



Hình 6

đồng hồ cho đến khi điểm mốc gặp vạch số  $a$  lần thứ ba, rồi quay vạch số theo chiều ngược lại cho đến khi điểm mốc gặp vạch số  $b$  lần thứ hai, cuối cùng quay mặt số ngược chiều kim đồng hồ cho đến khi điểm mốc gặp vạch số  $c$  lần đầu tiên. Nếu  $a, b, c$  phải khác nhau đôi một, thì có bao nhiêu cách chọn mặt mã cho khóa tổ hợp trên?



Hình 7

A.

B.

C.

D.

Lời giải

**Chọn**

Có 40 cách chọn số  $a$  từ các số từ 0 đến 39. Tiếp theo, có 39 cách chọn số  $b$  từ 39 số còn lại.

Cuối cùng, có 38 cách chọn số  $c$  từ 38 số còn lại.

Áp dụng quy tắc nhân, ta có  $40 \cdot 39 \cdot 38 = 59280$  cách chọn mặt mã cho khóa.

a) Mỗi cách sắp xếp 8 cuốn sách thành một dãy trên giá là một hoán vị của 8 cuốn sách này. Do đó, có  $8! = 40320$  cách sắp xếp.

b) Có  $5!$  cách sắp xếp 5 cuốn sách Toán học cạnh nhau để thành một dãy. Có  $3!$  cách sắp xếp 3 cuốn sách Sinh học cạnh nhau để thành một dãy. Có  $2!$  cách sắp xếp hai dãy trên cạnh nhau để thành một dãy mới. Từ đó, áp dụng quy tắc nhân, số cách sắp xếp các cuốn sách trên thành một dãy sao cho các sách cùng môn được xếp cạnh nhau là  $5!3!2! = 1440$  (cách xếp).

**Ví dụ 6:** Một ga tàu hỏa có 6 đường nhánh, mỗi nhánh chỉ đỗ được một đoàn tàu. Hiện các đường nhánh đều đang trống và có 3 đoàn tàu sắp vào ga. Có bao nhiêu cách bố trí nhánh đỗ cho 3 đoàn tàu?



Hình 2

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Mỗi cách chọn ba đường nhánh và bố trí nhánh đỗ cho ba đoàn tàu là một chỉnh hợp chập 3 của 6 đường nhánh. Do đó, số cách bố trí là  $A_6^3 = 6.5.4 = 120$  (cách).

**Ví dụ 7:** Một bệnh viện có 12 bác sĩ nội khoa và 10 bác sĩ ngoại khoa. Bệnh viện cần cử 5 bác sĩ tham gia vào đội y tế cứu trợ thiên tai.

a) Cần cử 3 bác sĩ nội khoa và hai bác sĩ ngoại khoa. Có bao nhiêu lựa chọn?

b) Cần cử ít nhất hai bác sĩ nội khoa và ít nhất hai bác sĩ ngoại khoa. Có bao nhiêu lựa chọn?

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) Mỗi cách chọn ba trong 12 bác sĩ nội khoa là một tổ hợp chập 3 của 12 bác sĩ này. Do đó, có  $C_{12}^3$  cách chọn 3 trong 12 bác sĩ nội khoa. Có  $C_{10}^2$  cách chọn 2 trong 10 bác sĩ ngoại khoa. Áp dụng quy tắc nhân, số cách cử 5 bác sĩ trong đó có ba bác sĩ nội khoa và hai bác sĩ ngoại khoa là  $C_{12}^3.C_{10}^2 = 220.45 = 9900$  (cách).

**Cách khác:** Có thể giải bài toán bằng cách tìm phần bù. Số cách lấy 3 sản phẩm đều là chính phẩm là  $C_{97}^3$ . Từ đó, số cách lấy 3 sản phẩm trong đó có ít nhất một thứ phẩm là  $C_{100}^3 - C_{97}^3 = 161700 - 147440 = 14260$  (cách).

**Ví dụ 9:** Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên:

- a) Có bốn chữ số khác nhau?
- b) Có bốn chữ số khác nhau và chia hết cho 5 ?
- c) Có bốn chữ số khác nhau và lớn hơn 4500 ?

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Để lập số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau từ 6 chữ số đã cho, ta chọn 4 trong 6 chữ số đó và sắp xếp theo một thứ tự. Do đó, có thể coi mỗi số đó là một chỉnh hợp chập 4 của 6 chữ số đó. Do đó, có  $A_6^4 = 6.5.4.3 = 360$  số như vậy.

b) Để số lập được chia hết cho 5, chữ số tận cùng của nó phải chia hết cho 5. Vậy chữ số tận cùng là 5. Có  $A_5^3$  cách chọn 3 trong 5 chữ số còn lại để viết các chữ số còn lại. Một số chia hết cho 5 thì  $A_5^3 = 5.4.3 = 60$ .

c) Kí hiệu  $\overline{abcd}$  là số tự nhiên có bốn chữ số thoả mãn yêu cầu. Vì  $m > 4500$  nên  $a \geq 4$

Trường hợp 1:  $a = 4$ . Khi đó, để  $m > 4500$  điều kiện cần và đủ là  $b \geq 5$ . Có hai cách chọn chữ số  $b$  (5 hoặc 6). Có  $A_4^2$  cách chọn hai chữ số còn lại.

Do đó, trường hợp này có  $2A_4^2 = 2.4.3 = 24$  số thoả mãn yêu cầu.

Trường hợp 2:  $a \geq 5$ . Khi đó, đương nhiên  $m > 4500$ . Có hai cách chọn chữ số  $a$  (5 hoặc 6). Có  $A_5^3$  cách chọn ba chữ số còn lại.

Do đó, trường hợp này có  $2A_5^3 = 2.5.4.3 = 120$  số thoả mãn yêu cầu. Áp dụng quy tắc cộng, có  $24 + 120 = 144$  số tự nhiên thoả mãn yêu cầu.

### III. BÀI TẬP

**Câu 11.** Sau khi biên soạn 9 câu hỏi trắc nghiệm, cô giáo có thể tạo ra bao nhiêu đề kiểm tra khác nhau bằng cách đảo thứ tự các câu hỏi đó.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Mỗi đoạn thẳng tương ứng với một tổ hợp chập 2 của 7 điểm. Số đoạn thẳng bằng  $C_7^2 = 21$ .

b) Mỗi véc tơ ứng với một chỉnh hợp chập 2 của 7 điểm. Số véc tơ bằng  $A_7^2 = 42$

**Câu 15.** Chọn 4 trong 6 giống hoa khác nhau và trồng trên 4 mảnh đất khác nhau để thử nghiệm. Có bao nhiêu cách thực hiện khác nhau?

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Mỗi cách chọn 4 trong số 6 giống hoa và trồng trên 4 mảnh đất khác nhau là một chỉnh hợp chập 4 của 6 giống hoa. Do đó, số cách thực hiện là  $A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$ .

**Câu 16.** Một tổ công nhân 9 người làm vệ sinh cho một toà nhà lớn. Cần phân công 3 người lau cửa sổ, 4 người lau sàn và 2 người lau cầu thang. Tổ có bao nhiêu cách phân công?

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Có  $C_9^3$  cách chọn 3 trong 9 người để lau cửa sổ. Tiếp theo, có  $C_6^4$  cách chọn 4 người trong 6 người còn lại để lau sàn. Cuối cùng, có  $C_2^2$  cách chọn 2 người trong 2 người còn lại để lau cầu thang.

Áp dụng quy tắc nhân, ta có  $C_9^3 C_6^4 C_2^2 = 84.15.1 = 1260$

**Câu 17.** Chọn 4 trong số 3 học sinh nam và 5 học sinh nữ tham gia một cuộc thi.

a) Nếu chọn 2 nam và 2 nữ thì có bao nhiêu cách chọn?

b) Nếu trong số học sinh được chọn nhất thiết phải có học sinh nam A và học sinh nữ B thì có bao nhiêu cách chọn?

c) Nếu phải có ít nhất một trong hai học sinh A và B được chọn, thì có bao nhiêu cách chọn?

d) Nếu trong 4 học sinh được chọn phải có cả học sinh nam và học sinh nữ thì có bao nhiêu cách chọn?

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) Chọn 2 trong 3 học sinh nam, rồi chọn 2 trong 5 học sinh nữ.

Ta có  $C_3^2 C_5^2 = 3.10 = 30$ .

b) Sau khi đã có A và B, chọn 2 trong số 6 học sinh còn lại. Ta có  $C_6^2 = 15$ .

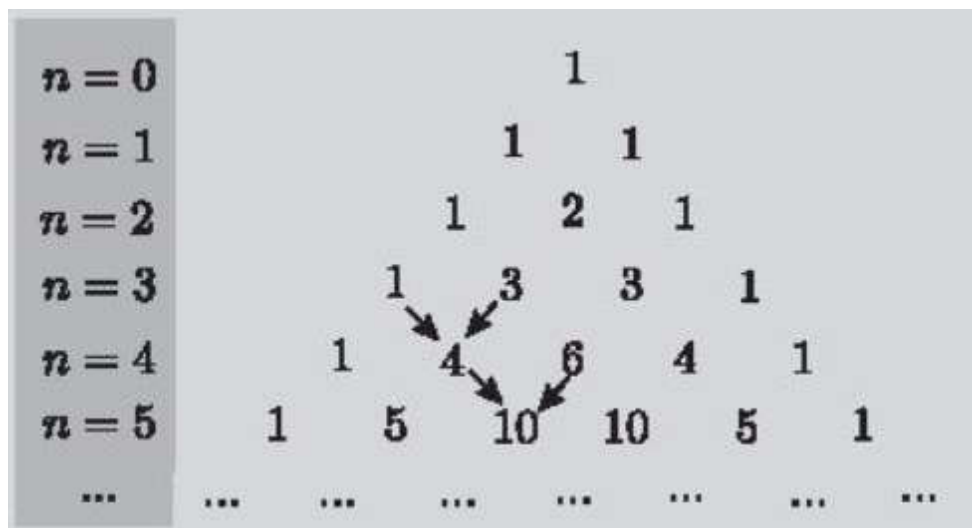
## BÀI 3. NHỊ THỨC NEWTON

### I. LÝ THUYẾT

Với  $n = 4$ :  $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ .

Với  $n = 5$ :  $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ .

Chú ý: Các hệ số trong khai triển nhị thức Newton với  $n = 0; 1; 2; 3; \dots$  tạo thành tam giác Pascal.



### II. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 10:** Sử dụng công thức nhị thức Newton, hãy khai triển:

a)  $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^4$

b)  $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^4 = (2x)^4 + 4(2x)^3\left(-\frac{1}{x}\right) + 6(2x)^2\left(-\frac{1}{x}\right)^2 + 4(2x)\left(-\frac{1}{x}\right)^3 + \left(-\frac{1}{x}\right)^4$

$= 16x^4 - 32x^2 + 24 - \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^4}.$

b)  $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5 = x^5 + 5x^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + 10x^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 10x^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 + 5x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$

$= x^5 + 5x^3\sqrt{x} + 10x^2 + 10\sqrt{x} + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2\sqrt{x}}.$

**Ví dụ 11:** Tìm hệ số của  $x^4$  trong khai triển biểu thức  $(2x+1)(x-1)^5$ .

Từ (1) và (2) ta có:  $(1+x)^5 + (1-x)^5 = 2 + 20x^2 + 10x^4$

Áp dụng công thức trên ta có:

$$A = 1,05^5 + 0,95^5 = (1+0,05)^5 + (1-0,05)^5 = 2 + 20 \cdot (0,05)^2 + 10 \cdot (0,05)^4$$

$$\approx 2 + 20 \cdot 0,0025 \text{ (do } (0,05)^4 \text{ rất bé.)}$$

$$\approx 2 + 20 \cdot 0,0025$$

$$\text{Vậy } A \approx 2,05$$

### III. BÀI TẬP

**Câu 20.** Khai triển các biểu thức sau:

a)  $(x+3y)^4$ ; b)  $(3-2x)^5$ ; c)  $\left(x-\frac{2}{x}\right)^5$ ; d)  $\left(3\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $x^4 + 12x^3y + 54x^2y^2 + 108xy^3 + 81y^4$ .

b)  $-32x^5 + 240x^4 - 720x^3 + 1080x^2 - 810x + 243$ .

c)  $x^5 - 10x^3 + 40x - \frac{80}{x} + \frac{80}{x^3} - \frac{32}{x^5}$ .

d)  $81x^2 - 108x + 54 - \frac{12}{x} + \frac{1}{x^2}$ .

**Câu 21.** Khai triển và rút gọn biểu thức  $(x-2)(2x+1)^4$

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Đầu tiên khai triển  $(2x+1)^4$  rồi tính tích của  $x-2$  với biểu thức khai triển đó.

$$\text{Nên ta có } (x-2)(2x+1)^4 = 16x^5 - 40x^3 - 40x^2 - 15x - 2.$$

**Câu 22.** Tìm giá trị của tham số  $a$  để trong khai triển  $(a+x)(1+x)^4$  có một số hạng là  $22x^2$

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Câu 26.** Bạn An có 4 cái bánh khác nhau từng đôi một. An có bao nhiêu cách chọn ra một số cái bánh (tính cả trường hợp không chọn cái nào) để mang theo trong buổi dã ngoại ?

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Số cách chọn của An bằng số tập hợp con của tập hợp  $A$  gồm 4 cái bánh của An, tức bằng  $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = (1+1)^4 = 2^4 = 16$ .

A. B. C. D.

Lời giải

Chọn

Chọn C

## II. TỰ LUẬN

**Câu 32.** Một bài kiểm tra có 6 câu hỏi trắc nghiệm, mỗi câu có 4 phương án chọn. Nếu chọn một cách tùy ý một phương án cho mỗi câu hỏi thì có bao nhiêu cách hoàn thành bài kiểm tra ?

A. B. C. D.

Lời giải

Chọn

ĐS:  $4^6 = 4096$

**Câu 33.** Chợ Bến Thành có 4 cổng ra vào. Một người đi chợ này thì:

a) Có bao nhiêu cách ra vào chợ ?

b) Có bao nhiêu cách ra vào chợ bằng hai cổng khác nhau ?

A. B. C. D.

Lời giải

Chọn

a) Có 4 cách chọn cổng để vào chợ. Ứng với mỗi cách đó, có 4 cách chọn cổng để đi ra. Do đó, có  $4.4 = 16$  cách vào và ra chợ.

b) Có 4 cách chọn cổng để vào chợ. Ứng với mỗi cách đó, có 3 cách chọn cổng để đi ra khác với cổng đã đi vào. Do đó, có  $4.3 = 12$  cách vào và ra chợ theo hai cổng khác nhau.

**Câu 34.** Chọn 3 cuốn từ 6 cuốn sách khác nhau và đưa cho 3 bạn cùng lớp, mỗi bạn một cuốn. Có bao nhiêu cách thực hiện việc này ?

A. B. C. D.

Lời giải

Chọn

ĐS:  $A_6^3 = 120$

**Câu 35.** Từ một danh sách gồm 9 người, người ta bầu ra một ủy ban gồm một chủ tịch, một phó chủ tịch và 3 ủy viên. Có bao nhiêu khả năng có thể về kết quả bầu ủy ban này ?

A. B. C. D.

Lời giải

## CHƯƠNG VIII

### ĐẠI SỐ TỔ HỢP

#### BÀI 23. QUY TẮC ĐẾM

##### I. LÝ THUYẾT

Có hai quy tắc đếm quan trọng nhất, đó là quy tắc cộng và quy tắc nhân.

**Quy tắc cộng.** Giả sử có một công việc có thể được thực hiện theo một trong  $k$  phương án khác nhau:

- Phương án 1 có  $n_1$  cách thực hiện;
- Phương án 2 có  $n_2$  cách thực hiện;
- ...
- Phương án  $k$  có  $n_k$  cách thực hiện.

Khi đó số cách thực hiện công việc là  $n_1 + n_2 + \dots + n_k$  cách.

**Quy tắc nhân.** Giả sử có một công việc nào đó phải hoàn thành qua  $k$  công đoạn liên tiếp nhau:

- Công đoạn 1 có  $m_1$  cách thực hiện;
- Công đoạn 2 có  $m_2$  cách thực hiện;
- ...
- Công đoạn  $k$  có  $m_k$  cách thực hiện.

Khi đó số cách thực hiện công việc là  $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$  cách.

##### II. CÁC DẠNG TOÁN.

**DẠNG 1.** Bài toán về chọn người, đồ vật dùng quy tắc cộng.

**DẠNG 2.** Bài toán về chọn đồ vật dùng quy tắc nhân.

**DẠNG 3.** Bài toán về chọn đồ vật kết hợp cả quy tắc cộng và quy tắc nhân.

##### III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 1:** Một lớp học có 16 bạn nam và 14 bạn nữ. Hỏi có bao nhiêu cách bầu ra bạn lớp trưởng?

A. B. C. D.

**Lời giải**

##### Chọn

Có hai phương án để bầu ra bạn lớp trưởng:

- Phương án 1: bầu 1 trong số 16 bạn nam làm lớp trưởng;
- Phương án 2: bầu 1 trong số 14 bạn nữ làm lớp trưởng.

Với phương án 1, ta có 16 cách bầu và với phương án 2, ta có 14 cách. Như vậy, theo quy tắc cộng, có tất cả  $16 + 14 = 30$  cách bầu ra một bạn làm lớp trưởng.

|          |                                                                 |
|----------|-----------------------------------------------------------------|
|          | – 30% polyester và 70% cotton<br>– 100% cotton                  |
| Họa tiết | – Tròn<br>– Sọc dọc<br>– Sọc ngang<br>– Ô vuông<br>– Quả trám   |
| Màu áo   | – Trắng<br>– Xám<br>– Đỏ<br>– Cam<br>– Lam<br>– Lá cây<br>– Tím |

Hỏi câu lạc bộ có tất cả bao nhiêu sự lựa chọn cho mẫu áo thi đấu?

**A.** **B.** **C.** **D.**

**Lời giải**

**Chọn**

. Để chọn mẫu áo, câu lạc bộ cần thực hiện việc lựa chọn các mục: kiểu áo, chất liệu, họa tiết và màu áo. Có 2 cách chọn kiểu áo, 4 cách chọn chất liệu áo, 5 cách chọn họa tiết và 7 cách chọn màu áo. Vì thế, theo quy tắc nhân, số cách chọn mẫu áo là:  $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 280$  (cách).

**Câu 4.** Số điện thoại cho mỗi thuê bao của một nhà mạng có 10 chữ số và có các đầu số là 081, 082, 083, 084, 085, 088, 091 hoặc 094. Giả sử hiện tại, nhà mạng đó đã cấp số cho tổng số 35 triệu thuê bao. Hỏi, nếu không có thêm các đầu số mới và không thu hồi các đầu số đã cấp thì nhà mạng đó còn có thể cung cấp bao nhiêu thuê bao nữa?

**A.** **B.** **C.** **D.**

**Lời giải**

**Chọn**

. Mỗi số thuê bao đầu số 081 của nhà mạng đó có dạng  $\overline{081abcdefg}$ , trong đó mỗi kí hiệu  $a, b, c, d, e, f, g$  có thể là bất kì 1 trong các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Như vậy, theo quy tắc nhân thì số các thuê bao có đầu số 081 là:  $10^7 = 10000000$  (so) = 10 (triệu so).

Tương tự, số các thuê bao của mỗi đầu số 082, 083, 084, 085, 088, 091 và 094 cũng là 10 triệu.

Như vậy, theo quy tắc cộng thì kho số thuê bao của nhà mạng có tất cả

## BÀI 24. HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP

### I. LÝ THUYẾT

Trong các bài toán đếm, các khái niệm cơ bản nhất là hoán vị, tổ hợp và chỉnh hợp.

**Hoán vị.** Một hoán vị của một tập hợp  $n$  phần tử là một cách sắp xếp có thứ tự  $n$  phần tử đó ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ ). Số các hoán vị của  $n$ , kí hiệu là  $P_n$ , được tính bằng công thức:

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

Ta quy ước  $0! = 1$ .

**Chỉnh hợp.** Một chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$  là một cách sắp xếp có thứ tự  $k$  phần tử từ một tập hợp  $n$  phần tử, với  $k, n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$ . Số các chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$ , kí hiệu là  $A_n^k$  được tính bằng công thức:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

hay

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

**Tổ hợp.** Một tổ hợp chập  $k$  của  $n$  là một cách chọn  $k$  phần tử từ một tập hợp  $n$  phần tử, với  $k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$ . Số các tổ hợp chập  $k$  của  $n$ , kí hiệu là  $C_n^k$  được tính bằng công thức:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Để tránh nhầm lẫn các khái niệm tổ hợp và chỉnh hợp, cần lưu ý rằng chỉnh hợp liên quan đến việc chọn có xếp thứ tự còn tổ hợp là chọn không xếp thứ tự.

### II. CÁC DẠNG TOÁN

#### DẠNG 1. LẬP SỐ BẤT KÌ

#### DẠNG 2. CHỌN ĐỒ VẬT

### III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 3:** Có bao nhiêu số có 5 chữ số, các chữ số là đôi một khác nhau, được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5?

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Mỗi số như vậy tương ứng với một cách sắp xếp có thứ tự các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Như vậy, số các số có 5 chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán bằng số các hoán vị của 5, nghĩa là có

$$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ (số)}.$$

b) Sau khi tham khảo ý kiến của mọi người, ông điều chỉnh ý định ban đầu và bây giờ muốn các tầng sơn màu nhạt dần từ thấp lên cao. Số cách sơn nhà theo yêu cầu mới là bao nhiêu?

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

a) Để có một cách sơn, ông An cần chọn ra một bộ 4 màu sơn khác nhau, có sắp thứ tự (tương ứng với màu sơn của tầng 1, tầng 2, tầng 3 và tầng 4). Do có 10 màu sơn nên số cách sơn là:

$$A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040 \text{ (cách).}$$

b) Để có một cách sơn nhà, ông An cần chọn ra 4 màu khác nhau từ 10 màu xanh rồi với mỗi bộ 4 màu đã chọn ra, ông An sắp thứ tự từ đậm nhất đến nhạt nhất để sơn các tầng từ thấp lên cao theo mong muốn. Nói cách khác, với mỗi bộ 4 màu khác nhau, ông An có một cách sơn.

Ngược lại, rõ ràng mỗi cách sơn phải dùng 4 màu khác nhau. Như vậy, số cách sơn bằng số cách chọn ra 4 màu sơn từ 10 màu sơn, nghĩa là có:

$$C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \text{ (cách).}$$

**Câu 9.** Một nhóm hành khách, gồm 2 nam và 3 nữ, lên một chiếc xe buýt. Trên xe có 10 ghế trống, trong đó có 5 ghế cạnh cửa sổ.

a) Hỏi có bao nhiêu cách ngồi?

b) Các hành khách nữ mong muốn ngồi cạnh cửa sổ. Hỏi số cách ngồi của họ là bao nhiêu?

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

a) Số cách ngồi của nhóm hành khách chính là số cách chọn ra 5 chiếc ghế có xếp thứ tự từ 10 chiếc ghế trống, nghĩa là:  $A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$  (cách).

b) Việc xếp chỗ cho nhóm khách có thể được thực hiện theo 2 công đoạn:

□ Công đoạn 1: xếp chỗ cho những hành khách nữ;

□ Công đoạn 2: xếp chỗ cho những hành khách nam. Với công đoạn 1, ta cần xếp chỗ cho 3 hành khách nữ vào 3 trong 5 chiếc ghế cạnh cửa sổ. Số cách xếp là:

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ (cách).}$$

Đối với công đoạn 2, ta cần xếp chỗ cho 2 hành khách nam vào 2 trong bất kì  $10 - 3 = 7$  chiếc ghế còn lại. Số cách xếp là:  $A_7^2 = 7 \cdot 6 = 42$  (cách).

Có  $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$  cách chọn ra 2 kí hiệu từ 6 kí hiệu để thay chúng tương ứng bằng 1; 2.

Mỗi kí hiệu còn lại có thể được thay bằng 8 cách khác nhau. Do đó có tổng cộng

$$8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 4096 \text{ (cách).}$$

Theo quy tắc nhân, số các số từ 1 đến 999999 cần tìm là:

$$30 \cdot 4096 = 122880 \text{ (s♦).}$$

**Câu 12.** a) Có bao nhiêu cách sắp xếp các chữ cái của từ: “KHIÊNG” thành một dãy kí tự gồm 6 chữ cái khác nhau (có thể là vô nghĩa)?

b) Cũng câu hỏi như a) nhưng yêu cầu hai chữ cái đầu tiên là các phụ âm?

c) Giống câu hỏi a) nhưng yêu cầu các phụ âm phải đứng liên tiếp nhau?

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Từ KHIÊNG có 6 chữ cái khác nhau. Do đó, số cách sắp xếp 6 chữ cái khác nhau theo yêu cầu là:

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{ (cách).}$$

b) Từ "KHIÊNG" có 4 phụ âm là  $K, H, N$  và  $G$ . Việc sắp xếp 6 chữ cái thoả mãn yêu cầu có thể được thực hiện qua hai công đoạn:

□ Công đoạn 1: chọn 2 trong số 4 phụ âm để xếp vào hai vị trí đầu tiên;

□ Công đoạn 2: xếp  $6 - 2 = 4$  chữ cái còn lại vào 4 vị trí tiếp theo.

Số các cách chọn ra 2 trong 4 phụ âm để xếp vào hai vị trí đầu tiên là:

$$A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ (cách)}$$

Số các cách xếp 4 chữ cái còn lại vào 4 vị trí tiếp theo là:

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ (cách).}$$

Theo quy tắc nhân, số cách sắp xếp cần tìm là:

$$12 \cdot 24 = 288 \text{ (cách).}$$

c) Có 4 phụ âm trong từ KHIÊNG và ta yêu cầu chúng phải đứng liên tiếp nhau, do đó có ba phương án cho vị trí của các phụ âm:

□ Phương án 1: vị trí các phụ âm (từ trái qua phải) là 1, 2, 3, 4;

□ Phương án 2: vị trí các phụ âm (từ trái qua phải) là 2, 3, 4, 5;

□ Phương án 3: vị trí các phụ âm (từ trái qua phải) là 3, 4, 5, 6.

Đối với phương án 1, việc xếp các chữ cái được thực hiện qua hai công đoạn:

□ Công đoạn 1: xếp 4 phụ âm vào các vị trí 1, 2, 3, 4;

## BÀI 25. NHỊ THỨC NEWTON

### ILÝ THUYẾT

Các công thức khai triển nhị thức Newton cho  $(a+b)^4$  và  $(a+b)^5$

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a b^3 + C_4^4 b^4 \\ &= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a b^4 + C_5^5 b^5 \\ &= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5.\end{aligned}$$

### II. CÁC DẠNG TOÁN

#### DẠNG 1. KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTON

#### DẠNG 2. XÁC ĐỊNH SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

#### DẠNG 3. XÁC ĐỊNH HỆ SỐ CỦA SỐ HẠNG

#### DẠNG 4. XÁC ĐỊNH SỐ HẠNG KHÔNG PHỤ THUỘC X

#### DẠNG 5. XÁC ĐỊNH HỆ SỐ LỚN NHẤT TRONG KHAI TRIỂN

#### DẠNG 6. TÍNH TỔNG CÁC TỔ HỢP

#### DẠNG 7. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC TỔ HỢP

### III. VÍ DỤ MINH HỌA

**Ví dụ 5:** Khai triển  $(x+3)^4$

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Các công thức khai triển nhị thức Newton cho  $(a+b)^4$  với  $a=x; b=3$ , ta có:

$$\begin{aligned}(x+3)^4 &= x^4 + 4x^3 \cdot 3 + 6x^2 \cdot 3^2 + 4x \cdot 3^3 + 3^4 \\ &= x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81.\end{aligned}$$

**Ví dụ 6:** Hãy sử dụng ba hạng tử đầu tiên trong khai triển của  $(3-0,02)^5$  để tính giá trị gần đúng của  $2,98^5$ . Xác định sai số tuyệt đối của giá trị gần đúng nhận được.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Ta có:  $2,98^5 = (3-0,02)^5$

Sử dụng công thức khai triển  $(a+b)^5$ , áp dụng cho  $a=3, b=-0,02$  ta thu được:

$$2,98^5 = (3-0,02)^5 = 3^5 + 5 \cdot 3^4 \cdot (-0,02) + 10 \cdot 3^3 \cdot (-0,02)^2 + \dots$$

Áp dụng công thức khai triển của  $(a+b)^5$  với  $a=5x, b=-2$ , ta có:

$$\begin{aligned}(5x-2)^5 &= (5x)^5 + 5.(5x)^4.(-2) + 10.(5x)^3(-2)^2 + 10.(5x)^2(-2)^3 + 5.5x.(-2)^4 + (-2)^5 \\ &= -32 + 400x - 2000x^2 + 5000x^3 - 6250x^4 + 3125x^5\end{aligned}$$

Vậy, số hạng thứ hai trong khai triển theo số mũ tăng dần của  $x$  là  $400x$ .

**Câu 15.** Hãy sử dụng ba số hạng đầu tiên trong khai triển của  $(1+0,03)^4$  để tính giá trị gần đúng của  $1,03^4$ . Xác định sai số tuyệt đối.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Ta có:

$$\begin{aligned}1,03^4 &= (1+0,03)^4 = 1^4 + 4.1^3.0,03 + 6.1^2.0,03^2 + \dots \\ &= 1 + 0,12 + 0,0054 + \dots \approx 1,1254.\end{aligned}$$

Mặt khác, ta tính được giá trị đúng, chẳng hạn bằng máy tính,

$$1,03^4 = 1,12550881.$$

Như vậy, sai số tuyệt đối của giá trị gần đúng nhận được so với giá trị đúng là:

$$|1,1254 - 1,12550881| = 0,00010881.$$

**Câu 16.** Xác định hạng tử không chứa  $x$  trong khai triển của  $\left(x + \frac{2}{x}\right)^4$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Ta có:

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{2}{x}\right)^4 &= x^4 + 4x^3 \cdot \frac{2}{x} + 6x^2 \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^2 + 4x \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^3 + \left(\frac{2}{x}\right)^4 \\ &= x^4 + 8x^2 + 24 + \frac{32}{x^2} + \frac{16}{x^4}.\end{aligned}$$

Vậy, hạng tử không chứa  $x$  là: 24.

**Câu 17.** Khai triển  $\left(z^2 + 1 + \frac{1}{z}\right)^4$

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

## BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG

### I. TRẮC NGHIỆM

**Câu 18.** Có 5 nhà xe vận chuyển hành khách giữa Hà Nội và Hải Phòng. Số cách để một người đi từ Hà Nội tới Hải Phòng rồi sau đó quay lại Hà Nội bằng hai nhà xe khác nhau là:

A. 5.                                      B. 10.                                      C. 15.                                      D. 20.

A.                                      B.                                      C.                                      D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn D**

Phân tích: Từ Hà Nội tới Hải Phòng, một hành khách có 5 cách chọn nhà xe. Để quay lại Hà Nội bằng một nhà xe khác thì hành khách có  $5 - 1 = 4$  cách chọn. như vậy, theo quy tắc nhân thì số cách đi là  $5.4 = 20$  (cách).

**Câu 19.** Số các số tự nhiên chẵn có ba chữ số, các chữ số đôi một khác nhau, được tạo thành từ các chữ số

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 là

A. 224.                                      B. 280.

C. 324.                                      D. Không có số nào trong các số đó.

A.                                      B.                                      C.                                      D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn A**

Phân tích: Một số có ba chữ số như vậy có dạng  $\overline{abc}$ , với  $a, b, c$  khác nhau, được chọn từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 và  $c$  chỉ nhận một trong các giá trị 2; 4; 6; 8. Ta có thể xây dựng một số như vậy bằng cách trước hết chọn  $c$ , sau đó chọn ra hai chữ số có sắp thứ tự  $a, b$  từ các chữ số còn lại. Có 4 cách chọn  $c$  sau đó có  $A_8^2 = 8.7 = 56$ . Vì thế, theo quy tắc nhân, số các số có tính chất của bài toán là:  
 $4.56 = 224$  (số).

**Câu 20.** Số các số tự nhiên trong khoảng từ 3000 đến 4000, chia hết cho 5, các chữ số đôi một khác nhau, được tạo thành từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 là:

A.  $C_4^2$ .                                      B.  $A_4^2$ .                                      C.  $A_5^2$ .                                      D.  $C_6^4$ .

A.                                      B.                                      C.                                      D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn B**

## Lời giải

### Chọn

### Chọn A

Phân tích: Kí hiệu thứ tự các bài báo cáo là 1, 2, 3, 4, 5. Có 4 phương án xếp báo cáo của đại diện của lớp 10B ngay sau báo cáo đại diện của 10A là:

- Phương án 1: 10A báo cáo 1, 10B báo cáo 2;
- Phương án 2: 10A báo cáo 2, 10B báo cáo 3;
- Phương án 3: 10A báo cáo 3, 10B báo cáo 4;
- Phương án 4: 10A báo cáo 4, 10B báo cáo 5.

Đối với mỗi phương án, ban tổ chức có thể xếp đại diện của các lớp 10C, 10D và 10E theo thứ tự bất kì vào vị trí các báo cáo còn lại. Do đó, với mỗi phương án thì số cách xếp là:

$$P_3 = 3! = 3.2.1 = 6 \text{ (cách)}$$

Như vậy, theo quy tắc cộng thì số cách xếp chương trình là:

$$6 + 6 + 6 + 6 = 24 \text{ (cách)}.$$

**Câu 24.** Người ta muốn thành lập một ủy ban gồm 6 thành viên, trong đó có ít nhất 3 thành viên nữ từ một nhóm đại biểu gồm 6 nam và 4 nữ. Số các cách thành lập ủy ban như vậy là:

- A. 100.                      B. 210.                      C. 60.                      D. 95.  
A.                              B.                              C.                              D.

## Lời giải

### Chọn

### Chọn D

Phân tích: Do chỉ có 4 đại biểu nữ nên có 2 phương án:

- Phương án 1: ủy ban gồm 3 nữ và 3 nam;
- Phương án 2: ủy ban gồm 4 nữ và 2 nam.

Đối với phương án 1 số cách chọn ra 3 người từ 4 đại biểu nữ là:

(cách).  
Số cách chọn ra 3 người từ 6 người nam là:

$$C_4^3 = \frac{4.3.2}{3.2.1} = 4 \text{ (cách)}.$$

Như vậy, theo quy tắc nhân thì số cách chọn theo phương án 1 là:

$$4.20 = 80 \text{ (cách)}.$$

Đối với phương án 2: chỉ có duy nhất 1 cách chọn ra 4 người từ 4 đại biểu nữ (nghĩa

là cả 4 đại biểu nữ sẽ nằm trong ủy ban cần lập). Ngoài ra số cách chọn ra 2 người từ 6 đại

biểu nam là  $C_6^2 = \frac{6.5}{2.1} = 15$  (cách)

Do đó có đúng 15 cách chọn theo phương án 2.

Từ đó theo quy tắc cộng thì số cách thành lập ủy ban là

$$80 + 15 = 95 \text{ (cách)}.$$

$$\begin{aligned}
& (\sqrt{5}+1)^5 - (\sqrt{5}-1)^5 \\
&= \left( (\sqrt{5})^5 + 5(\sqrt{5})^4 + 10(\sqrt{5})^3 + 10(\sqrt{5})^2 + 5\sqrt{5} + 1 \right) - \left( (\sqrt{5})^5 - 5(\sqrt{5})^4 + 10(\sqrt{5})^3 - 10(\sqrt{5})^2 + 5\sqrt{5} - 1 \right) \\
&= 10(\sqrt{5})^4 + 20(\sqrt{5})^2 + 2 \\
&= 10.25 + 20.5 + 2 \\
&= 352
\end{aligned}$$

## II. TỰ LUẬN

**Câu 28.** Có bao nhiêu cách xếp 5 bạn nam và 3 bạn nữ thành một hàng ngang sao cho đứng ngoài cùng bên

trái và đứng ngoài cùng bên phải là các bạn nam?

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Có tất cả  $5+3=8$  bạn học sinh. Việc xếp 8 bạn học sinh thỏa mãn yêu cầu bài toán có thể được thực hiện qua hai công đoạn:

- Công đoạn 1: chọn ra 2 bạn trong số 5 bạn nam để xếp vào hai vị trí ngoài cùng bên trái và ngoài cùng bên phải;

- Công đoạn 2: Xếp  $8-2=6$  bạn còn lại vào các vị trí giữa hai bạn nam đã xếp.

Đối với công đoạn 1, số cách chọn ra 2 người và xếp vào hai vị trí là

$$A_5^2 = 5.4 = 20 \text{ (cách).}$$

Đối với công đoạn 2, số cách xếp 6 người vào 6 vị trí còn lại là

$$P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720 \text{ (cách).}$$

Theo quy tắc nhân, tổng số cách xếp là:

$$20.720 = 14400 \text{ (cách).}$$

**Câu 29.** Một phòng thi có 4 hàng ghế, mỗi hàng có 5 bộ bàn ghế. Có 10 thí sinh nam và 10 thí sinh nữ được

xếp vào phòng thi đó. Người ta muốn xếp các thí sinh, mỗi thí sinh ngồi một bàn sao cho mỗi hàng

chỉ xếp các thí sinh cùng giới tính và thí sinh ở hai hàng liên tiếp thì khác giới tính với nhau. Hỏi có

bao nhiêu cách xếp chỗ cho các thí sinh?

**Câu 30.** Ông giám đốc vườn thú mua 10 con vật để nhốt vào 10 cái chuồng mới xây. Thế nhưng có 3 cái chuồng lại không vừa so với 5 con vật lớn nhất. Hỏi vị giám đốc có bao nhiêu cách nhốt 10 con vật, mỗi con trong một chuồng?

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Lưu ý rằng 5 con vật lớn nhất phải được nhốt vào các chuồng phù hợp với kích cỡ của chúng. Số chuồng như vậy là  $10 - 3 = 7$ . Để nhốt các con vật thì vị giám đốc phải tiến hành qua 2 công đoạn như sau:

- Công đoạn 1: Nhốt 5 con vật lớn nhất vào 5 trong 7 cái chuồng phù hợp với chúng;

- Công đoạn 2: Nhốt 5 con vật còn lại vào 5 cái chuồng còn lại.

Số cách thực hiện công đoạn 1 bằng số cách lấy ra 5 phần tử có thứ tự từ một tập hợp có 7 phần tử, nghĩa là bằng

$$A_7^5 = 7.6.5.4.3 = 2520 \text{ (cách).}$$

Số cách thực hiện công đoạn 2 bằng số hoán vị 5 phần tử, nghĩa là bằng

$$P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120 \text{ (cách).}$$

Như vậy, theo quy tắc nhân thì số cách nhốt là

$$2520.120 = 302400 \text{ (cách).}$$

**Câu 31.** Một nhóm người gồm 3 bạn nam và 3 bạn nữ mua 6 chiếc vé xem phim với các chỗ ngồi liên tiếp nhau.

a) Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi sao cho các bạn nam và các bạn nữ ngồi xen kẽ nhau?

b) Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi sao cho các bạn nữ ngồi liên tiếp nhau?

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn.**

a) Để tiện hình dung, ta đánh số các chiếc ghế từ trái qua phải 1, 2, 3, 4, 5, 6.

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|

Để các bạn nam, nữ ngồi xen kẽ thì có hai phương án:

- Phương án 1: các bạn nữ ngồi ghế 1, 3 và 5, các bạn nam ngồi các ghế 2, 4 và 6;

- Phương án 2: các bạn nữ ngồi ghế 2, 4 và 6, các bạn nam ngồi các ghế 1, 3 và 5;

Ta hãy đếm số cách ngồi theo từng phương án. Với mỗi phương án, mỗi cách ngồi có được thực hiện qua 2 công đoạn:

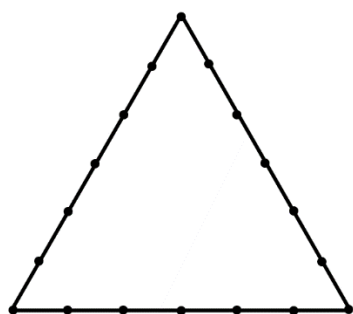
Mỗi cặp song ca hát với nhau trong đúng 2 phút nên tổng thời gian hát, tính theo phút là

$$2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1)$$

Suy ra  $n(n-1) = 30$  hay  $(n+5)(n-6) = 0$ . Từ đó suy ra  $n = 6$ .

Vậy nhóm bạn có 6 người.

**Câu 33.** Trong hình sau đây mỗi cạnh tam giác đều được chia thành 6 đoạn thẳng bằng nhau bởi 5 điểm nằm bên trong cùng với 2 đầu mút. Hỏi có bao nhiêu tam giác có đỉnh là các chấm điểm ở trong hình:



A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Tổng số chấm điểm trong hình là 18. Mỗi tam giác cần đếm được tạo ra bằng cách lấy ra 3 điểm không thẳng hàng. Để đếm số các tam giác ta lấy số các cách lấy ra 3 điểm từ 18 điểm trừ đi số các cách lấy ra 3 điểm thẳng hàng từ 18 điểm.

Số các cách chọn 3 điểm từ 18 điểm là:

$$C_{18}^3 = \frac{18!}{3!15!} = 816 \quad (\text{cách})$$

Ba điểm thẳng hàng nếu chúng nằm trên cùng một cạnh. Số điểm của mỗi cạnh là 7. Do đó, số cách lấy ra 3 điểm trên mỗi cạnh là:

$$C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \quad (\text{cách})$$

Như vậy, theo quy tắc cộng thì số các cách chọn ra 3 điểm thẳng hàng từ 18 điểm là:

$$35 + 35 + 35 = 105 \quad (\text{cách})$$

Suy ra số các tam giác cần tìm là:

$$816 - 105 = 711 \quad (\text{tam giác})$$

**Câu 34.** Hình sau đây được tạo thành từ 2 họ đường thẳng vuông góc, mỗi họ gồm 6 đường thẳng song song.

|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|

Việc bỏ các chữ cái “N, G, H, I, Ê, N” vào 6 chiếc hộp có thể thực hiện qua 2 công đoạn.

-Công đoạn 1: chọn 2 chiếc hộp trong 6 chiếc hộp rồi bỏ 2 chữ cái N, N vào 2 chiếc hộp đó;

-Công đoạn 2: bỏ các chữ cái G, H, I, Ê vào 4 chiếc hộp còn lại.

-Số cách thực hiện công đoạn 1 bằng số các cách chọn 2 hộp từ 6 hộp, do đó bằng  $C_6^2$ . Số cách thực hiện công đoạn 2 bằng số các hoán vị của 4 chữ cái, do đó bằng  $P_4$ . Như vậy, theo quy tắc nhân thì số dãy kí tự được tạo thành là:

$$C_6^2 \cdot P_4 = 15 \cdot 24 = 360 \text{ (từ)}$$

c) Tương tự như b). Từ ‘NGHIÊNG’ có 7 chữ cái, trong đó có các chữ cái giống nhau là “N, N” và “G, G”.

Việc xếp các chữ cái “N, G, H, I, Ê, N, G” của từ “NGHIÊNG” thành một dãy kí tự có 7 chữ cái giống như việc bỏ các chữ cái “N, G, H, I, Ê, N, G” vào 7 hộp (có thứ tự):

|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|

Việc bỏ các chữ cái “N, G, H, I, Ê, N, G” vào 7 chiếc hộp có thể thực hiện qua 3 công đoạn.

-Công đoạn 1: chọn 2 chiếc hộp trong 7 chiếc hộp rồi bỏ các chữ cái N, N vào 2 chiếc hộp đó;

-Công đoạn 2: chọn 2 chiếc hộp trong 5 chiếc hộp còn lại rồi bỏ các chữ cái G, G vào 2 chiếc hộp đó;

-Công đoạn 3: bỏ các chữ cái H, I, Ê vào 3 chiếc hộp còn lại.

Số cách thực hiện công đoạn 1 bằng số các cách chọn 2 hộp từ 7 hộp, nghĩa là bằng  $C_7^2$ . Số cách thực hiện công đoạn 2 bằng số các cách chọn 2 hộp từ 5 hộp, nghĩa là bằng  $C_5^2$ . Số cách thực hiện công đoạn 3 bằng số các hoán vị của 3 chữ cái, do đó bằng  $P_3$ . Như vậy, theo quy tắc nhân thì số dãy kí tự được tạo thành là:

$$C_7^2 \cdot C_5^2 \cdot P_3 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 21 \cdot 10 \cdot 6 = 1260 \text{ (từ)}$$

**Câu 36.** Tính  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^5 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^5$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Áp dụng công thức khai triển của  $(a+b)^5$  lần lượt với  $a = \sqrt{3}$  và  $b = \sqrt{2}$ , rồi  $a = \sqrt{3}$  và  $b = -\sqrt{2}$ , ta có

## Phần THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

### Chương X. XÁC SUẤT

#### BÀI 1. KHÔNG GIAN MẪU VÀ BIẾN CỐ

##### I. LÝ THUYẾT

###### 1. Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

**Phép thử ngẫu nhiên** (gọi tắt là phép thử) là một hoạt động mà ta không thể biết trước được kết quả của nó.

Tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử ngẫu nhiên được gọi là **không gian mẫu**, kí hiệu là  $\Omega$ .

*Chú ý:* Trong chương này ta chỉ xét các phép thử mà không gian mẫu gồm hữu hạn phần tử.

###### 2. Biến cố

Mỗi tập con của không gian mẫu được gọi là một **biến cố**, kí hiệu là  $A, B, C, \dots$

Một kết quả thuộc  $A$  được gọi là kết quả làm cho  $A$  xảy ra hoặc **kết quả thuận lợi** cho  $A$ .

**Biến cố chắc chắn** là biến cố luôn xảy ra, kí hiệu là  $\Omega$ .

**Biến cố không thể** là biến cố không bao giờ xảy ra, kí hiệu là  $\emptyset$ .

##### II. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 1:** Minh muốn gọi điện cho Ngọc nhưng Minh quên mất chữ số cuối cùng của số điện thoại. Minh chọn ngẫu nhiên một chữ số cho chữ số cuối cùng để gọi thử.

- Mô tả không gian mẫu của phép thử.
- Gọi  $A$  là biến cố chữ số Minh chọn là số chia hết cho 3. Viết tập hợp mô tả biến cố  $A$ .
- Gọi  $B$  là biến cố chữ số Minh chọn là hợp số. Hỏi có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố  $B$ ?

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

- Không gian mẫu của phép thử  $\Omega = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ .
- Tập hợp mô tả biến cố  $A$  là:  $A = \{0; 3; 6; 9\}$ .
- $B = \{4; 6; 8; 9\}$ . Có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố  $B$ .

**Ví dụ 2:** Một hộp kín chứa 4 tấm thẻ có kích thước giống nhau. Mỗi thẻ được ghi một trong các chữ cái  $A, B, C, D$ ; hai thẻ khác nhau được ghi hai chữ khác nhau. Mô tả không gian mẫu của các phép thử sau:

### Chọn

a) Không gian mẫu của phép thử là:

$$\Omega = \{(1;1);(1;2);(1;3);(1;4); \\ (2;1);(2;2);(2;3);(2;4); \\ (3;1);(3;2);(3;3);(3;4); \\ (4;1);(4;2);(4;3);(4;4)\}.$$

b) Tập hợp mô tả cho biến cố “Số xuất hiện ở lần gieo thứ hai gấp 2 lần số xuất hiện ở lần gieo thứ nhất” là:  $\{(1;2);(2;4)\}$ .

**Câu 2.** Tung một đồng xu ba lần liên tiếp. Phát biểu mỗi biến cố sau dưới dạng mệnh đề:

$$A = \{SSS; NSS; SNS; NNS\}; \quad B = \{SSN; SNS; NSS\}.$$

A.

B.

C.

D.

Lời giải

### Chọn

A: “Lần tung thứ ba xuất hiện mặt sấp”;

B: “Có đúng một lần tung xuất hiện mặt ngửa”.

**Câu 3.** Một hộp chứa 5 quả bóng xanh, 4 quả bóng đỏ có kích thước và khối lượng như nhau. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử lấy ra ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

### Chọn

Kí hiệu 5 quả bóng xanh lần lượt là  $X_1; X_2; X_3; X_4; X_5$  và 4 quả bóng đỏ lần lượt là  $D_1; D_2; D_3; D_4$ .

Không gian mẫu của phép thử là:  $\Omega = \{X_1; X_2; X_3; X_4; X_5; D_1; D_2; D_3; D_4\}$ .

**Câu 4.** Trường mới của bạn Dũng có 3 câu lạc bộ ngoại ngữ là câu lạc bộ tiếng Anh, câu lạc bộ tiếng Bồ Đào Nha và câu lạc bộ tiếng Campuchia.

a) Dũng chọn ngẫu nhiên 1 câu lạc bộ ngoại ngữ để tìm hiểu thông tin. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử nêu trên.

b) Dũng thử chọn ngẫu nhiên 1 câu lạc bộ ngoại ngữ để tham gia trong học kì 1 và 1 câu lạc bộ ngoại ngữ khác để tham gia trong học kì 2. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử nêu trên.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

### Chọn

Do đó số kết quả thuận lợi cho biến cố “Tích hai số ghi trên hai quả bóng lấy ra chia hết cho 3” là  $90 - 42 = 48$ .

**Câu 7.** Lớp 10A có 20 bạn nam, 25 bạn nữ, lớp 10B có 23 bạn nam, 22 bạn nữ. Chọn ra ngẫu nhiên từ mỗi lớp 2 bạn để phỏng vấn. Tính số các kết quả thuận lợi cho biến cố:

- a) "Cả 4 bạn được chọn đều là nữ";
- b) "Trong 4 bạn được chọn có 3 bạn nam và 1 bạn nữ".

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $C_{25}^2 C_{22}^2 = 69300$ .

b)  $20 \cdot 25 \cdot C_{23}^2 + C_{20}^2 \cdot 23 \cdot 22 = 222640$ .

**Câu 8.** Một hợp tác xã cung cấp giống lúa của 7 loại gạo ngon *ST24*, *MS19RMTT*, *ST25*, Hạt Ngọc Rồng, Ngọc trời Thiên Vương, gạo đặc sản *VD20* Gò Công Tiền Giang, gạo lúa tôm Kiên Giang. Bác Bình và bác An mỗi người chọn 1 trong 7 loại giống lúa trên để gieo trồng cho vụ mới.

- a) Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố “Hai bác Bình và An chọn hai giống lúa khác nhau”?
- b) Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố “Có ít nhất một trong hai bác chọn giống lúa *ST24*”?

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Số kết quả thuận lợi cho biến cố “Hai bác Bình và An chọn hai giống lúa giống nhau” là 7.

b) Tổng số kết quả có thể xảy ra là  $7 \cdot 7 = 49$ .

Số kết quả thuận lợi cho biến cố “Không bác nào chọn giống lúa *ST24*” là  $6 \cdot 6 = 36$ .

Vậy số kết quả thuận lợi cho biến cố “Có ít nhất một trong hai bác chọn giống lúa *ST24*” là  $49 - 36 = 13$ .

**Câu 9.** Mật khẩu để kích hoạt một thiết bị là một dãy gồm 6 ký tự, mỗi ký tự có thể là một trong 4 chữ cái *A, B, C, D* hoặc 1 chữ số từ 0 đến 9. Hà chọn ngẫu nhiên một mật khẩu theo quy tắc trên. Tính số các kết quả thuận lợi cho biến cố:

- a) “Mật khẩu được chọn chỉ gồm số”;
- b) “Mật khẩu được chọn có số và chữ cái xếp xen kẽ nhau”;
- c) “Mật khẩu được chọn có chứa đúng một chữ cái”.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

## BÀI 2. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

### I. LÝ THUYẾT

#### 1. Xác suất của biến cố

Giả sử một phép thử có không gian mẫu gồm hữu hạn các kết quả có cùng khả năng xảy ra và  $A$  là một biến cố.

Xác suất của biến cố  $A$  là một số, kí hiệu là  $P(A)$ , được xác định bởi công thức:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

trong đó:  $n(A)$  và  $n(\Omega)$  lần lượt là kí hiệu số phần tử của tập  $A$  và  $\Omega$ .

Xác suất của mỗi biến cố đo lường khả năng xảy ra của biến cố đó.

— Biến cố có khả năng xảy ra cao hơn sẽ có xác suất lớn hơn biến cố có khả năng xảy ra thấp hơn.

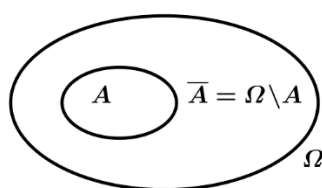
— Biến cố có khả năng xảy ra càng cao thì xác suất của nó càng gần 1. Biến cố chắc chắn có xác suất bằng 1.

— Biến cố có khả năng xảy ra càng thấp thì xác suất của nó càng gần 0. Biến cố không thể có xác suất bằng 0.

#### 2. Biến cố đối

Cho  $A$  là một biến cố. Khi đó biến cố “Không xảy ra  $A$ ”, kí hiệu là  $\bar{A}$ , được gọi là **biến cố đối** của  $A$ .

$$\bar{A} = \Omega \setminus A; P(\bar{A}) + P(A) = 1.$$



Hình 1. Biểu đồ Ven của biến cố đối

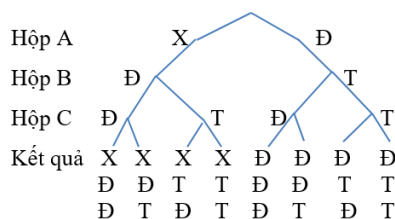
#### 3. Nguyên lí xác suất bé

Nếu một biến cố có xác suất rất bé thì trong một phép thử, biến cố đó sẽ không xảy ra.

### II. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 4:** Giao một con xúc xắc 4 mặt cân đối đồng chất 2 lần. Tính xác suất của các biến cố:

a) Kí hiệu X là bút xanh, Đ là bút đỏ, T là bút tím. Các kết quả có thể xảy ra trong 3 lần lấy bút có thể



được mô tả bởi sơ đồ hình cây ở bên

Hình 3

b) Có tất cả 8 kết quả có thể xảy ra, trong đó có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố  $A$ . Vậy  $P(A) = \frac{3}{8}$ .

**Ví dụ 6:** Một hộp chứa 10 tấm thẻ có kích thước như nhau và được đánh số từ 2021 đến 2030, mỗi thẻ chỉ ghi đúng một số. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 thẻ từ hộp.

a) Tìm biến cố đối của biến cố  $A$ : “Tích các số ghi trên 3 thẻ chia hết cho 5”.

b) Tính xác suất của biến cố  $A$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) Biến cố đối  $\bar{A}$ : “Tích các số ghi trên 3 thẻ không chia hết cho 5”.

b) Do các thẻ có kích thước như nhau nên chúng có cùng khả năng được chọn.

Số các kết quả có thể xảy ra là  $n(\Omega) = C_{10}^3 = 120$ .

Vì biến cố đối  $\bar{A}$  xảy ra khi số trên cả ba thẻ đều không chia hết cho 5 nên các kết quả thuận lợi cho  $\bar{A}$  là  $n(\bar{A}) = C_8^3 = 56$ .

Xác suất xảy ra biến cố  $\bar{A}$  là  $P(\bar{A}) = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$ .

Xác suất xảy ra biến cố  $A$  là  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$ .

### III. BÀI TẬP

**Câu 11.** Gieo một con xúc xắc 4 mặt cân đối và đồng chất ba lần. Tính xác suất của các biến cố:

a) “Tổng các số xuất hiện ở đỉnh phía trên của con xúc xắc trong ba lần gieo lớn hơn 2”;

b) “Có đúng một lần số xuất hiện ở đỉnh phía trên của con xúc xắc là 2”.

A.

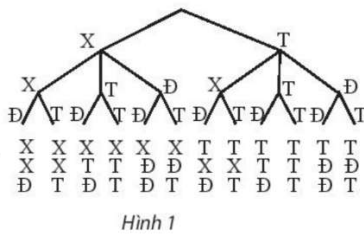
B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**



b) Gọi  $A$  là biến cố “Chỉ có 1 trong 3 thứ để Chi chọn có màu trắng”.

Xác suất xảy ra biến cố  $A$  là  $P(A) = \frac{5}{12}$ .

**Câu 14.** Chọn ngẫu nhiên 10 số tự nhiên từ dãy các số tự nhiên từ 1 đến 100. Xác định biến cố đối của các biến cố sau:

- $A$ : “Có ít nhất 3 số lẻ trong 10 số được chọn”;  
 $B$ : “Tất cả 10 số được chọn đều là số chẵn”;  
 $C$ : “Có không quá 5 số chẵn trong 10 số được chọn”.

**A.** **B.** **C.** **D.**

**Lời giải**

**Chọn**

- $\bar{A}$ : “Có không quá 2 số lẻ trong 10 số được chọn”;  
 $\bar{B}$ : “Có ít nhất 1 số được chọn là số lẻ”;  
 $\bar{C}$ : “Có ít nhất 6 số chẵn trong 10 số được chọn”.

**Câu 15.** Trên tường có một đĩa hình tròn có cấu tạo đồng chất và cân đối. Mặt đĩa được chia thành 12 hình quạt bằng nhau và được đánh số từ 1 đến 12. Trọng quay đĩa quanh trục gắn ở tâm 3 lần và quan sát xem mỗi khi dừng lại mũi tên chỉ vào ô ghi số mấy. Tính xác suất của các biến cố:

- $A$ : “Cả 3 lần mũi tên đều chỉ vào ô ghi số lẻ”;  
 $B$ : “Có đúng 2 lần mũi tên chỉ vào ô ghi số lẻ”;  
 $C$ : “Tích 3 số mũi tên chỉ vào là số nguyên tố”.

**A.** **B.** **C.** **D.**



Hình 4

**Lời giải**

**Chọn**

$$P(A) = \frac{1}{8}; P(B) = \frac{3}{8}.$$

Biến cố  $C$  xảy ra khi có 2 lần mũi tên chỉ vào số 1 và 1 lần chỉ vào các số nguyên tố 2; 3; 5; 7; 11.

**Câu 18.** An, Bình, Cường và 2 bạn nữa xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang để chụp ảnh. Tính xác suất của các biến cố.

- a) “An và Bình đứng ở hai đầu hàng”,
- b) “Bình và Cường đứng cạnh nhau”,
- c) “An, Bình, Cường đứng cạnh nhau”.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

$$\text{a) } \frac{2.3!}{5!} = \frac{1}{10}; \text{b) } \frac{2.3!}{5!} = \frac{1}{10}; \text{c) } \frac{3!3!}{5!} = \frac{3}{5}.$$

**Câu 19.** Một hộp kín có 1 quả bóng xanh và 5 quả bóng đỏ có kích thước và khối lượng bằng nhau. Hỏi Dũng cần lấy ra từ hộp ít nhất bao nhiêu quả bóng để xác suất lấy được quả bóng xanh lớn hơn 0.5 ?

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Gọi  $k$  là số bóng Dũng lấy ra ( $k \in \mathbb{N}^*, k \leq 6$ ). Xác suất trong  $k$  quả bóng đó có quả bóng xanh là

$$1 - \frac{C_5^k}{C_6^k} = \frac{k}{6}.$$

**Câu 20.** Bốn đội bóng  $A, B, C, D$  lọt vào vòng bán kết của một giải đấu. Ban tổ chức bốc thăm chia 4 đội này thành 2 cặp đấu một cách ngẫu nhiên. Tính xác suất của biến cố 2 đội  $A$  và  $B$  đấu với nhau ở trận bán kết.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

$$\text{ĐS: } \frac{1}{3}.$$

**Câu 25.** Gieo một con xúc xắc bốn mặt cân đối và đồng chất ba lần. Xác suất xảy ra biến cố “ Có ít nhất một lần xuất hiện đỉnh ghi số 4 ” là:

A.  $\frac{1}{4}$ .

B.  $\frac{27}{64}$ .

C.  $\frac{37}{64}$ .

D.  $\frac{3}{4}$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn C**

**Câu 26.** Chọn ra ngẫu nhiên 2 người từ 35 người trong lớp của Hùng. Xác suất xảy ra biến cố “Hùng được chọn” là:

A.  $\frac{2}{35}$ .

B.  $\frac{1}{34}$ .

C.  $\frac{1}{35}$ .

D.  $\frac{1}{17}$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn A**

**Câu 27.** Xếp 4 quyển sách toán và 2 quyển sách văn thành một hàng ngang trên giá sách một cách ngẫu nhiên. Xác suất xảy ra biến cố “2 quyển sách văn không được xếp cạnh nhau” là:

A.  $\frac{1}{3}$ .

B.  $\frac{2}{3}$ .

C.  $\frac{1}{2}$ .

D.  $\frac{1}{5}$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn B**

**Câu 28.** Cô giáo chia tổ của Lan và Phương thành hai nhóm, mỗi nhóm gồm 4 người để làm việc nhóm một cách ngẫu nhiên. Xác suất của biến cố Lan và Phương thuộc cùng một nhóm là:

A.  $\frac{1}{2}$ .

B.  $\frac{1}{3}$ .

C.  $\frac{4}{7}$ .

D.  $\frac{3}{7}$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn D**

**B. TỰ LUẬN**

$$P(A) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{2}{5}; P(B) = 1 - \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{4}{5}; P(C) = \frac{4}{C_6^2} = \frac{4}{15}$$

**Câu 32.** Một hộp có 5 lá thăm cùng loại được đánh số 2; 4; 6; 8; 10. Lấy ra ngẫu nhiên từ hộp 2 lá thăm. Tính xác suất của các biến cố sau:

$A$ : “Tổng các số ghi trên hai lá thăm bằng 11”;

$B$ : “Tích các số ghi trên hai lá thăm là số tròn chục”.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

$$P(A) = 0; P(B) = 1 - \frac{C_4^2}{C_5^2} = \frac{2}{5}$$

**Câu 33.** Doanh nghiệp  $A$  chọn ngẫu nhiên 2 tháng trong năm 2020 để tri ân khách hàng. Doanh nghiệp  $B$  cũng chọn ngẫu nhiên 1 tháng trong năm đó để tri ân khách hàng. Tính xác suất của biến cố “Hai doanh nghiệp tri ân khách hàng cùng một tháng trong năm”.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Số các kết quả có thể xảy ra là  $n(\Omega) = 12C_{12}^2$ .

Gọi  $A$  là biến cố “Hai doanh nghiệp tri ân khách hàng cùng một tháng trong năm”. Số các kết quả thuận lợi cho  $\bar{A}$  là  $n(\bar{A}) = 10C_{12}^2$ .

Xác suất của biến cố  $A$  là  $1 - \frac{10C_{12}^2}{12C_{12}^2} = \frac{1}{6}$ .

**Câu 34.** Lớp học của hai bạn Hà và Giang có 32 học sinh. Cô giáo chia các bạn vào 4 tổ, mỗi tổ có 8 học sinh một cách ngẫu nhiên. Tính xác suất của biến cố “Hà và Giang được xếp ở hai tổ khác nhau”.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

$$1 - \frac{4C_{30}^6 C_{24}^8 C_{16}^8}{C_{32}^8 C_{24}^8 C_{16}^8} = 1 - \frac{4C_{30}^6}{C_{32}^8} = \frac{24}{31}.$$

**Câu 35.** Một hộp chứa 2 quả bóng xanh và một số quả bóng trắng. Lấy ra ngẫu nhiên 2 quả bóng từ hộp. Biết rằng xác suất chọn được 2 quả bóng khác màu là  $\frac{10}{21}$ .

a) Tính xác suất 2 quả bóng lấy ra có cùng màu.

## CHƯƠNG IX. TÍNH XÁC SUẤT THEO ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN

### BÀI 26. BIẾN CỐ VÀ ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN CỦA XÁC SUẤT

#### I – LÝ THUYẾT

• Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà kết quả của nó không thể biết trước được. Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra khi thực hiện phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử và kí hiệu là  $\Omega$ .

• Kết quả phép thử làm cho biến cố  $E$  xảy ra gọi là kết quả thuận lợi cho  $E$ . Biến cố  $E$  là một tập con của không gian mẫu  $\Omega$ , bao gồm tất cả các kết quả thuận lợi cho  $E$ .

• Biến cố đối của biến cố  $E$  là biến cố: " $E$  không xảy ra" và được kí hiệu là  $\bar{E}$ . Đó là phần bù của  $E$  trong  $\Omega$ .

• Cho phép thử  $T$  có không gian mẫu là  $\Omega$  với các kết quả của  $T$  là đồng khả năng. Nếu  $E$  là một biến cố có liên quan đến phép thử  $T$  thì xác suất của  $E$  được cho bởi công thức

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}.$$

tức là xác suất của  $E$  bằng tỉ số giữa số kết quả thuận lợi của  $E$  và số kết quả có thể.

• Nếu biến cố  $E$  có xác suất là  $P(E)$  thì khi thực hiện phép thử  $n$  lần ( $n \geq 30$ ) thì số lần xuất hiện biến cố  $E$  sẽ xấp xỉ bằng  $nP(E)$  ( $n$  càng lớn thì sai số tương đối càng bé).

#### II- VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 1:** Một túi có chứa 3 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ, 5 viên bi đen và 6 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ trong túi.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Gọi  $H$  là biến cố "Bi rút ra có màu đỏ". Các biến cố  $H$  và  $\bar{H}$  là các tập con nào của không gian mẫu?

c) Gọi  $K$  là biến cố "Bi rút ra có màu xanh hoặc màu trắng". Các biến cố  $K$  và  $\bar{K}$  là các tập con nào của không gian mẫu?

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Kí hiệu 3 viên bi xanh là  $X_1; X_2; X_3$ , 4 viên bi đỏ là  $D_1; D_2; D_3; D_4$ , 5 viên bi đen là  $B_1; B_2; B_3; B_4; B_5$  và 6 viên bi trắng là  $T_1; T_2; T_3; T_4; T_5; T_6$ . Ta có

a)  $\Omega = \{X_1; X_2; X_3; D_1; D_2; D_3; D_4; B_1; B_2; B_3; B_4; B_5; T_1; T_2; T_3; T_4; T_5; T_6\}$ .

b)  $H = \{D_1; D_2; D_3; D_4\}$ .

$\bar{H} = \{X_1; X_2; X_3; B_1; B_2; B_3; B_4; B_5; T_1; T_2; T_3; T_4; T_5; T_6\}$ .

c)  $K = \{X_1; X_2; X_3; T_1; T_2; T_3; T_4; T_5; T_6\}$ .

$\bar{K} = \{D_1; D_2; D_3; D_4; B_1; B_2; B_3; B_4; B_5\}$ .

**Ví dụ 2:** Xếp ngẫu nhiên 3 bạn An, Bình, Cường đứng thành một hàng dọc. Tính xác suất để

a) An không đứng cuối hàng;

b) Bình và Cường đứng cạnh nhau;

c) An đứng giữa Bình và Cường;

d) Bình đứng trước An.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Kí hiệu  $A, B, C$  tương ứng là An, Bình, Cường.

Ta có  $\Omega = \{ABC; ACB; BCA; BAC; CAB; CBA\}$

Vậy  $n(\Omega) = 6$ .

b) Xét các biến cố sau:

$A$ : “Hai số trên hai tấm thẻ bằng nhau”;

$B$ : “Hai số trên hai tấm thẻ chênh nhau 2”;

$C$ : “Hai số trên hai tấm thẻ chênh nhau lớn hơn hay bằng 2”.

Các biến cố  $A, \bar{A}, B, \bar{B}, C, \bar{C}$  là các tập con nào của không gian mẫu?

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

$$a) \Omega = \left\{ (1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (2,5); (3,1); \right. \\ \left. (3,2); (3,3); (3,4); (3,5); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4); (4,5) \right\}$$

$$b) A = \{(1,1); (2,2); (3,3); (4,4)\}$$

$$\bar{A} = \{(1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (2,1); (2,3); (2,4); (2,5); (3,1); (3,2); (3,4); (3,5); (4,1); (4,2); (4,3); (4,5)\}$$

$$B = \{(1,3); (3,1); (2,4); (4,2); (3,5)\}$$

$$\bar{B} = \{(1,1); (1,2); (1,4); (1,5); (2,1); (2,2); (2,3); (2,5); (3,2); (3,3); (3,4); (4,1); (4,3); (4,4); (4,5)\}$$

$$C = \{(1,3); (1,4); (1,5); (2,4); (2,5); (3,1); (3,5); (4,1); (4,2)\}$$

$$\bar{C} = \{(1,1); (1,2); (2,1); (2,2); (2,3); (3,2); (3,3); (3,4); (4,3); (4,4); (4,5)\}$$

**Câu 4.** Gieo một đồng xu và một con xúc xắc đồng thời. Tính xác suất của biến cố  $A$ : “Đồng xu xuất hiện mặt sấp hoặc con xúc xắc xuất hiện mặt 5 chấm”.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

$$\Omega = \{(N,1); (N,2); (N,3); (N,4); (N,5); (N,6); (S,1); (S,2); (S,3); (S,4); (S,5); (S,6)\}, n(\Omega) = 12.$$

$$A = \{(S,1); (S,2); (S,3); (S,4); (S,5); (S,6); (N,5)\}, n(A) = 7$$

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{7}{12} \approx 0,583.$$

**Câu 5.** Có hai hộp  $I$  và  $II$ . Hộp thứ nhất chứa 12 tấm thẻ vàng đánh số từ 1 đến 12. Hộp thứ hai chứa 6 tấm thẻ đỏ đánh số từ 1 đến 6. Rút ngẫu nhiên từ mỗi hộp một tấm thẻ. Tính xác suất của các biến cố:

a)  $A$ : “Cả hai tấm thẻ đều mang số 5”.

b)  $B$ : “Tổng hai số trên hai tấm thẻ bằng 6”.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

$$\Omega = \{(a;b), 1 \leq a \leq 12, 1 \leq b \leq 6\}, n(\Omega) = 12.6 = 72.$$

$$a) A = \{(5;5)\}, n(A) = 1, P(A) = \frac{1}{72}.$$

$$b) B = \{(1,5); (2,4); (3,3); (4,2); (5,1)\}, n(B) = 5, p(B) = \frac{5}{72}.$$

**Câu 6.** Có ba chiếc hộp. Hộp thứ nhất chứa 5 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 5. Hộp thứ hai chứa 6 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 6. Hộp thứ ba chứa 7 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 7. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một tấm thẻ. Tính xác suất để tổng ba số ghi trên ba tấm thẻ bằng 15.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

$$\Omega = \{(a,b,c), 1 \leq a \leq 5; 1 \leq b \leq 6; 1 \leq c \leq 7\}, n(\Omega) = 5.6.7 = 210.$$

$$A = \{(2,6,7); (3,6,6); (3,5,7); (4,6,5); (4,5,6); (4,4,7); (5,3,7); (5,4,6);$$

## BÀI 27. THỰC HÀNH TÍNH XÁC SUẤT THEO ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN

### I – LÝ THUYẾT

• Trong nhiều bài toán, để tính số phần tử của không gian mẫu và biến cố ta sử dụng phương pháp tổ hợp như: các quy tắc đếm, các công thức tính số hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp.

• Trong một số bài toán, phép thử được hình thành từ một vài phép thử. Khi đó để có thể mô tả đầy đủ, trực quan không gian mẫu và biến cố, ta sử dụng sơ đồ hình cây.

• Cho  $E$  là một biến cố. Xác suất của biến cố đối  $\bar{E}$  liên hệ với xác suất của  $E$  bởi công thức sau:

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E).$$

Trong một số bài toán, nếu tính trực tiếp xác suất của một biến cố gặp khó khăn, ta có thể tính gián tiếp bằng cách tính xác suất biến cố đối của nó.

### II – VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 3:** Một hộp đựng 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên 10 tấm thẻ. Tính xác suất để trong đó có 5 số chia hết cho 3 và 5 số không chia hết cho 3.

A. B. C. D.  
Lời giải

Chọn

Ta có  $n(\Omega) = C_{30}^{10}$ .

Gọi  $E$  là biến cố “Trong 10 số có 5 số chia hết cho 3 và 5 số không chia hết cho 3”. Trong tập  $\{1; 2; \dots; 30\}$  có 10 số chia hết cho 3 và 20 số không chia hết cho 3. Vậy có  $C_{10}^5$  cách chọn 5 số chia hết cho 3 từ 10 số chia hết cho 3; có  $C_{20}^5$  cách chọn 5 số không chia hết cho 3 từ 20 số không chia hết cho 3.

Theo quy tắc nhân, ta có  $n(E) = C_{10}^5 C_{20}^5$ .

$$\text{Vậy } P(E) = \frac{C_{10}^5 C_{20}^5}{C_{30}^{10}} \approx 0,13.$$

**Ví dụ 4:** Gieo một đồng tiền cân đối ba lần.

a) Vẽ sơ đồ hình cây mô tả các phần tử của không gian mẫu.

b) Tính xác suất của các biến cố:

A: “Trong ba lần gieo có hai lần sấp, một lần ngửa”;

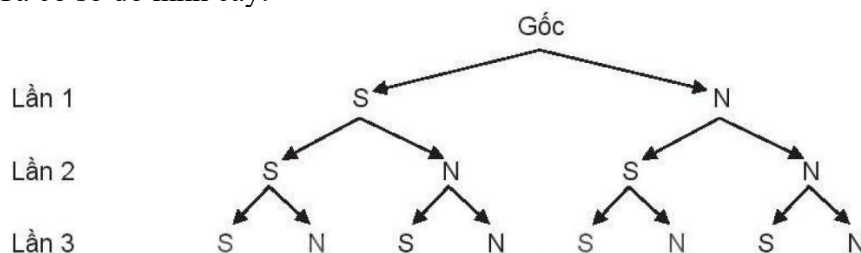
B: “Trong ba lần gieo có ít nhất một lần sấp”.

A. B. C. D.  
Lời giải

Chọn

a) Ký hiệu  $S$  là đồng tiền ra mặt sấp,  $N$  là đồng tiền ra mặt ngửa”.

Ta có sơ đồ hình cây:



Các nhánh cây là:  $SSS, SSN, SNS, SNN, NSS, NSN, NNS, NNN$ .

Vậy  $\Omega = \{SSS; SSN; SNS; SNN; NSS; NSN; NNS; NNN\}$ ,  $n(\Omega) = 8$ .

b)  $A = \{SSN; SNS; NSS\}$ ,  $n(A) = 3$ . Vậy  $P(A) = \frac{3}{8}$ .

$B = \{SSS; SSN; SNS; SNN; NSS; NSN; NNS\}$ ,  $n(B) = 7$ . Vậy  $P(B) = \frac{7}{8}$ .

**Ví dụ 5:** Gieo ba con xúc xắc cân đối. Tính xác suất để có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm.

A. B. C. D.  
Lời giải

Chọn

$$\Omega = \{\text{ĐXĐ; ĐXX; ĐVĐ; ĐVX; XXĐ; XXX; XVĐ; XVX; VXĐ; VXX; VVĐ; VVX}\}$$

$$n(\Omega) = 12.$$

b) Gọi  $A$  là biến cố đang xét. Biến cố đối của  $A$  là  $\bar{A}$ : “Trong ba viên bi không có viên bi màu đỏ”

$$\bar{A} = \{\text{XXX; XVX; VXX; VVX}\}, n(\bar{A}) = 4. \text{ Vậy } P(\bar{A}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Do đó } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

**Câu 10.** Có ba hộp đựng thẻ. Hộp  $I$  chứa các tấm thẻ đánh số  $\{1; 2; 3\}$ . Hộp  $II$  chứa các tấm thẻ đánh số  $\{2; 4; 6; 8\}$ . Hộp  $III$  chứa các tấm thẻ đánh số  $\{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$ . Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một tấm thẻ rồi cộng ba số trên ba tấm thẻ với nhau. Tính xác suất để kết quả là một số lẻ.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

$$\Omega = \{(a, b, c)\}, \text{ trong đó } a \in \{1; 2; 3\}, b \in \{2; 4; 6; 8\}, c \in \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$$

$$n(\Omega) = 3.4.6 = 72.$$

$$A = \{(a, b, c), a + b + c \text{ lẻ}\}$$

$$\text{Vậy } A = \{(2, b, c)\}, \text{ trong đó } b \in \{2; 4; 6; 8\}, c \in \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}, n(A) = 1.4.6 = 24.$$

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}.$$

**Câu 11.** Trên một dãy phố có ba quán ăn  $A, B, C$ . Hai bạn Văn và Hải mỗi người chọn ngẫu nhiên một quán để ăn trưa.

a) Vẽ sơ đồ hình cây mô tả các phần tử của không gian mẫu.

b) Tính xác suất của các biến cố sau:

$E$ : “Hai người cùng vào một quán”.

$F$ : “Cả hai không chọn quán  $C$ ”.

A.

B.

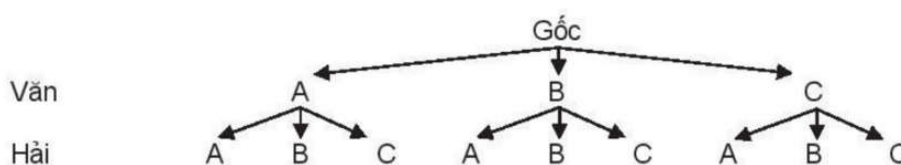
C.

D.

Lời giải

Chọn

a) Sơ đồ hình cây:



$$b) \Omega = \{AA; AB; AC; BA; BB; BC; CA; CB; CC\}$$

$$E = \{AA; BB; CC\}. \text{ Vậy } P(E) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

$$F = \{AA; AB; BA; BB\}. \text{ Vậy } P(F) = \frac{4}{9}$$

**Câu 12.** Trên một phố có hai quán ăn  $A, B$ . Bốn bạn Sơn, Hải, Văn, Đạo mỗi người chọn ngẫu nhiên một quán ăn.

a) Vẽ sơ đồ hình cây mô tả các phần tử của không gian mẫu.

b) Tính xác suất để:

- Tất cả đều vào một quán;
- Mỗi quán có đúng 2 bạn vào;
- Quán  $A$  có 3 bạn vào, quán  $B$  có 1 bạn vào;
- Một quán có 3 bạn vào, quán kia có 1 bạn vào.

A.

B.

C.

D.

**Câu 16.** Xếp ngẫu nhiên ba bạn An, Bình, Cường đứng trên một hàng dọc.

d) Xác suất để Bình đứng trước An là

- A.  $\frac{1}{4}$ .                      B.  $\frac{2}{3}$ .                      C.  $\frac{2}{5}$ .                      D.  $\frac{1}{2}$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn D**

**Câu 17.** Một cái túi đựng 3 viên bi đỏ, 5 viên bi xanh và 6 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi. Xác suất để chọn được 3 viên bi màu đỏ là

- A.  $\frac{1}{364}$ .                      B.  $\frac{1}{14}$ .                      C.  $\frac{1}{182}$ .                      D.  $\frac{1}{95}$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn A**

**Câu 18.** Gieo hai con xúc xắc cân đối.

a) Xác suất để có đúng một con xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm là

- A.  $\frac{11}{36}$ .                      B.  $\frac{1}{3}$ .                      C.  $\frac{5}{18}$ .                      D.  $\frac{4}{9}$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn C**

**Câu 19.** Gieo hai con xúc xắc cân đối.

b) Xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc nhỏ hơn hoặc bằng 7 là

- A.  $\frac{11}{36}$ .                      B.  $\frac{7}{12}$ .                      C.  $\frac{5}{11}$ .                      D.  $\frac{4}{9}$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn B**

**Câu 20.** Chọn ngẫu nhiên 5 số trong tập  $S = \{1; 2; \dots; 20\}$ . Xác suất để 5 số được chọn không vượt quá 10 xấp xỉ là

- A. 0,016.                      B. 0,013.                      C. 0,014.                      D. 0,015.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn A**

**Câu 21.** Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh trong một danh sách được đánh số thứ tự từ 1 đến 199.

a) Xác suất để cả 5 học sinh được chọn có số thứ tự nhỏ hơn 100 xấp xỉ là

- A. 0,028.                      B. 0,029.                      C. 0,027.                      D. 0,026.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn B**

**Câu 22.** Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh trong một danh sách được đánh số thứ tự từ 1 đến 199.

b) Xác suất để cả 5 học sinh được chọn có số thứ tự lớn hơn 149 xấp xỉ là

- A. 0,00089.                      B. 0,00083.                      C. 0,00088.                      D. 0,00086.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

### Chọn C

**Câu 29.** Một khách sạn có 6 phòng đơn. Có 10 khách thuê phòng trong đó có 6 nam và 4 nữ. Người quản lí chọn ngẫu nhiên 6 người cho nhận phòng.

b) Xác suất để có 4 nam và 2 nữ

A.  $\frac{2}{7}$ .

B.  $\frac{3}{7}$ .

C.  $\frac{4}{7}$ .

D.  $\frac{5}{7}$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 30.** Một khách sạn có 6 phòng đơn. Có 10 khách thuê phòng trong đó có 6 nam và 4 nữ. Người quản lí chọn ngẫu nhiên 6 người cho nhận phòng.

c) Xác suất để có ít nhất 3 nữ là

A.  $\frac{17}{42}$ .

B.  $\frac{23}{42}$ .

C.  $\frac{25}{42}$ .

D.  $\frac{19}{42}$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn D

TỰ LUẬN

**Câu 31.** Gieo một con xúc xắc cân đối. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên ba con xúc xắc bằng 7.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

$\Omega = \{(a, b, c)\}$  với  $a, b, c$  là các số tự nhiên phân biệt và  $1 \leq a, b, c \leq 6$ ,  $n(\Omega) = 6^3 = 216$ .

Gọi  $A$  là biến cố: “Tổng số chấm xuất hiện trên 3 con xúc xắc bằng 7”.

$A = \{(a, b, c) : a + b + c = 7\}$ .  $(1, 1, 5)$  có 3 hoán vị;  $(1, 2, 4)$  có 6 hoán vị;  $(1, 3, 3)$  có 3 hoán vị;  $(2, 2, 3)$  có 3 hoán vị.

Vậy  $n(A) = 3 + 6 + 3 + 3 = 15$ . Do đó  $P(A) = \frac{15}{6^3} = \frac{5}{72}$ .

**Câu 32.** Một cửa hàng bán ba loại kem: xoài, sô cô la và sữa. Một học sinh chọn mua ba cốc kem một cách ngẫu nhiên. Tính xác suất để ba kem chọn được thuộc hai loại.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Kí hiệu  $A$  là kem xoài,  $B$  là kem sôcôla và  $C$  là kem sữa.

$\Omega = \{AAA; BBB; CCC; ABC; ABB; ACC; BCC; BAA; CAA; CBB\}$ ,  $n(\Omega) = 10$ .

Gọi  $E$  là biến cố: “Ba cốc kem chọn được thuộc hai loại”,

$E = \{ABB; ACC; BCC; BAA; CAA; CBB\}$ ,  $n(E) = 6$ . Vậy  $P(E) = \frac{6}{10} = 0,6$ .

**Câu 33.** Hai thầy trò đến dự một buổi hội thảo. Ban tổ chức xếp ngẫu nhiên 6 đại biểu trong đó hai thầy trò ngồi trên một chiếc ghế dài. Tính xác suất để hai thầy trò ngồi cạnh nhau.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

$n(\Omega) = 6! = 720$ . Gọi  $E$  là biến cố: “Hai thầy trò ngồi cạnh nhau”.

Công đoạn 1: Xếp hai thầy trò ngồi cạnh nhau:  
 $(1, 2); (2, 1); (2, 3); (3, 2); (3, 4); (4, 3); (4, 5); (5, 4); (5, 6); (6, 5)$ . Có 10 cách xếp.

## BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

**Câu 36.** Cho các mệnh đề:

P: “Phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  có hai nghiệm phân biệt”

Q: “Phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  có biệt thức  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ”

a) Hãy phát biểu các mệnh đề:  $P \Rightarrow Q$ ,  $Q \Rightarrow P$ ,  $P \Leftrightarrow Q$ ,  $\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề này.

b) Dùng các khái niệm “điều kiện cần” và “điều kiện đủ” để diễn tả mệnh đề  $P \Rightarrow Q$ .

c) Gọi  $X$  là tập hợp các phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  có hai nghiệm phân biệt,  $Y$  là tập hợp các phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  có hệ số  $a$  và  $c$  trái dấu. Nêu mối quan hệ giữa hai tập hợp  $X$  và  $Y$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) + Mệnh đề  $P \Rightarrow Q$ : Nếu phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  có hai nghiệm phân biệt thì nó có biệt thức  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ . Mệnh đề này đúng.

+ Mệnh đề  $Q \Rightarrow P$ : Nếu phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  có biệt thức  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$  thì nó có hai nghiệm phân biệt. Mệnh đề này đúng.

+ Mệnh đề  $P \Leftrightarrow Q$ : Phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi nó có biệt thức  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ . Mệnh đề này đúng.

+ Mệnh đề  $\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}$ : Nếu phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  không có hai nghiệm phân biệt thì nó có biệt thức  $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$ . Mệnh đề này đúng.

b) + Phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  có hai nghiệm phân biệt là điều kiện đủ để nó có biệt thức  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ .

+ Phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  có biệt thức  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$  là điều kiện cần để nó có hai nghiệm phân biệt.

c) Các phương trình bậc hai có  $ax^2 + bx + c = 0$  hệ số  $a$  và  $c$  trái dấu thì luôn có hai nghiệm trái dấu. Vì thế  $Y \subset X$ .

**Câu 37.** a) Biểu diễn hình học tập nghiệm  $D$  của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn sau:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x - 2y \geq -6 \\ 2x + y \leq 10 \end{cases}$$

b) Từ kết quả câu a), tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức  $F(x; y) = 2x + 3y$  trên miền  $D$ , biết rằng giá trị lớn nhất (tương ứng, nhỏ nhất) của  $F$  đạt được tại một trong các đỉnh của miền đa giác  $D$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Bước 1: Trục  $Oy$  có phương trình  $x = 0$  và điểm  $(1; 0)$  thỏa mãn  $1 > 0$ . Do đó miền nghiệm của bất phương trình  $x \geq 0$  là nửa mặt phẳng bờ  $Oy$  chứa điểm  $(1; 0)$  (miền không bị gạch).

Bước 2: Trục  $Ox$  có phương trình  $y = 0$  và điểm  $(0; 1)$  thỏa mãn  $1 > 0$ . Do đó miền nghiệm của bất phương trình  $y \geq 0$  là nửa mặt phẳng bờ  $Ox$  chứa điểm  $(0; 1)$  (miền không bị gạch). Bước 3: Vẽ đường thẳng  $d_1: 3x - 2y = -6$ . Lấy điểm  $O(0; 0)$  không thuộc  $d_1$  và thay  $x = 0; y = 0$  vào biểu thức  $3x - 2y$  ta được:  $3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0 > -6$ . Do đó miền nghiệm của bất phương trình  $3x - 2y \geq -6$  là nửa mặt phẳng bờ  $d_1$  chứa điểm  $O(0; 0)$  (miền không bị gạch). Bước 4: Vẽ đường thẳng  $d_2: 2x + y = 10$ . Lấy điểm  $O(0; 0)$  thỏa mãn  $2 \cdot 0 + 0 = 0 < 10$ . Do đó miền nghiệm của bất phương trình  $2x + y \leq 10$  là nửa mặt phẳng bờ  $d_2$  chứa điểm  $O(0; 0)$  (miền không bị gạch).

b) Ta có  $a = -1 < 0$  nên parabol quay bề lõm xuống dưới. Đỉnh  $I(1;4)$ . Trục đối xứng  $x = 1$ . Giao điểm của parabol với trục  $Oy$  là  $(0;3)$ . Điểm đối xứng với điểm  $(0;3)$  qua trục đối xứng  $x = 1$  là  $(2;3)$ . Giao điểm của parabol với trục  $Ox$  là  $(-1;0)$  và  $(3;0)$ .

c) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty;1)$ , hàm số nghịch biến trên khoảng  $(1;+\infty)$ . Tập giá trị của hàm số là  $(-\infty;4]$ .

$$\text{Xét bất phương trình } \frac{f(x)}{x-2} \geq 0 \text{ hay } \frac{-x^2+2x+3}{x-2} \geq 0$$

$f(x) = -x^2 + 2x + 3$  có  $\Delta' = 4 > 0$  và  $a = -1 < 0$ ,  $f(x)$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1 = -1$  và  $x_2 = 3$ . Do đó  $f(x) > 0$  với mọi  $x \in (-1;3)$  và  $f(x) < 0$  với mọi  $x \in (-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$ .

Ta có bảng xét dấu:

| $x$                | $-\infty$ | $-1$ | $2$ | $3$ | $+\infty$ |
|--------------------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $f(x)$             | $-$       | $0$  | $+$ | $0$ | $-$       |
| $x-2$              | $-$       | $-$  | $0$ | $+$ | $+$       |
| $\frac{f(x)}{x-2}$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$ | $-$       |

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là  $S = (-\infty;-1] \cup (2;3]$ .

**Câu 39.** Một quả bóng chày được đánh đi với vận tốc 35 m/s hợp với phương ngang một góc bằng  $45^\circ$  ở độ cao 1 m so với mặt sân phẳng ở chỗ vọt bóng. Bỏ qua sức cản của không khí và lấy  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

a) Biết rằng quỹ đạo chuyển động của quả bóng chày được cho bởi phương trình:

$$y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha + h,$$

Trong đó  $x$  là quãng đường (tính bằng mét) quả bóng bay được theo phương ngang,  $h$  là độ cao của quả bóng lúc được đánh đi so với mặt đất, vận tốc ban đầu  $v_0$  hợp với phương ngang một góc  $\alpha$ .

Viết phương trình chuyển động của quả bóng chày.

b) Tính độ cao lớn nhất của quả bóng chày.

c) Tính tầm xa của quả bóng chày, tức là khoảng cách từ mặt đất ở chỗ đánh bóng và nơi quả bóng chạm đất (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

d) Có một hàng rào cao 4 m cách chỗ đánh bóng 125 m theo hướng đánh bóng. Hỏi quả bóng chày được đánh đi như trên có bị bay qua hàng rào đó hay không?

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Phương trình chuyển động của quả bóng chày là:

$$y = \frac{-9,8}{2 \cdot 35^2 \cos^2 45^\circ} x^2 + x \tan 45^\circ + 1 = \frac{-1}{125} x^2 + x + 1$$

b) Quả bóng chày đạt độ cao lớn nhất lớn nhất tức là hàm số  $y = \frac{-1}{125} x^2 + x + 1$  đạt giá trị lớn nhất. Hàm

số đạt giá trị lớn nhất tại  $x = -\frac{b}{2a} = 62,5$ , khi đó  $y(62,5) = 32,25$ .

Vậy độ cao cực đại của quả bóng chày là  $32,25m$ .

c) Xét  $y = \frac{-1}{125} x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 126$  hoặc  $x = -1$  (loại). Vậy tầm xa của quả bóng chày là khoảng

$126m$ .

d) Quả bóng chày không bị bay qua hàng rào khi độ cao của quả bóng chày nhỏ hơn độ cao của hàng rào là 4.

$$\text{Xét } y < 4 \Leftrightarrow \frac{-1}{125} x^2 + x + 1 < 4 \Leftrightarrow x^2 - 125x + 375 > 0 \Leftrightarrow x < 3 \text{ hoặc } x > 122$$

Vậy quả bóng chày không bị bay qua hàng rào khi được đánh đi ở vị trí cách hàng rào  $125m$

**Câu 42.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \sqrt{x^2 + 2mx - 2m + 3}$  có tập xác định là toàn bộ tập số thực  $\mathbb{R}$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Hàm số đã cho có tập xác định là toàn bộ tập số thực  $\mathbb{R}$  khi và chỉ khi  $x^2 + 2mx - 2m + 3 \geq 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

Xét  $f(x) = x^2 + 2mx - 2m + 3$  có  $\Delta' = m^2 - (-2m + 3) = m^2 + 2m - 3$  và  $a = 1 > 0$ .

Ta có  $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1$ .

Vậy  $-3 \leq m \leq 1$ .

**Câu 43.** Giải các phương trình chứa căn thức sau:

a)  $\sqrt{3x^2 - 4x + 1} = \sqrt{x^2 - x}$  ;

b)  $\sqrt{6x^2 - 11x - 3} = 2x - 1$

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

a)  $\sqrt{3x^2 - 4x + 1} = \sqrt{x^2 - x}$  .

Bình phương cả hai vế ta được phương trình:  $3x^2 - 4x + 1 = x^2 - x$ .

Sau khi thu gọn, ta được  $2x^2 - 3x + 1 = 0$ , do đó  $x = 1$  hoặc  $x = \frac{1}{2}$ .

Thử lại ta thấy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x = 1$ .

b)  $\sqrt{6x^2 - 11x - 3} = 2x - 1$ .

Bình phương cả hai vế ta được phương trình:  $6x^2 - 11x - 3 = (2x - 1)^2$ .

Sau khi thu gọn ta được  $2x^2 - 7x - 4 = 0$ , do đó  $x = 4$  hoặc  $x = -\frac{1}{2}$ .

Thử lại ta thấy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x = 4$ .

**Câu 44.** Đội văn nghệ của một trường trung học phổ thông gồm có 5 học sinh khối lớp 10, 5 học sinh khối lớp 11 và 5 học sinh khối lớp 12. Nhà trường cần chọn một đội gồm 10 học sinh để tham gia thi văn nghệ cấp huyện. Tính số cách lập đội văn nghệ sao cho có học sinh ở cả ba khối lớp và có nhiều nhất 2 học sinh khối lớp 10.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Trường hợp 1: Có đúng 1 học sinh khối lớp 10.

Số cách chọn 1 học sinh khối lớp 10 là:  $C_5^1$  cách.

Số cách chọn 9 học sinh còn lại ở hai khối lớp 11 và 12 là:  $C_{10}^9$  cách.

Trường hợp 2: Có đúng 2 học sinh khối lớp 10.

Số cách chọn 2 học sinh khối lớp 10 là:  $C_5^2$  cách.

Số cách chọn 8 học sinh còn lại ở hai khối lớp 11 và 12 là:  $C_{10}^8$  cách.

Vậy số cách lập đội văn nghệ thỏa mãn đề bài là:

$$C_5^1 \cdot C_{10}^9 + C_5^2 \cdot C_{10}^8 = 500 \text{ (cách).}$$

**Câu 45.** Viết khai triển nhị thức Newton của  $(3x - 2)^n$ , biết  $n$  là số tự nhiên thỏa mãn  $A_n^2 + 2C_n^1 = 30$

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

**Câu 48.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng  $BC, AC, AB$ . Biết rằng  $M(1;2), N(0;-1)$  và  $P(-2;3)$ .

- Lập phương trình tham số của đường thẳng  $BC$ .
- Lập phương trình tổng quát của đường trung trực của đoạn thẳng  $BC$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) Vì  $P, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC$  nên  $PN$  song song với  $BC$ . Do đó  $\overrightarrow{U_{BC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PN} = (1; -2)$  là vector chỉ phương của  $BC$ . Mặt khác, đường thẳng  $BC$  đi qua điểm  $M(1;2)$  nên  $BC$  có phương trình tham số là  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$ .

b) Gọi  $\Delta$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $BC$ . Ta có  $\Delta$  đi qua trung điểm  $M$  của  $BC$  và vuông góc với  $BC$ . Do đó  $\overrightarrow{n_{\Delta}} = \overrightarrow{u_{BC}} = (1; -2)$  là vector pháp tuyến của  $\Delta$ . Vậy phương trình tổng quát của  $\Delta$  là  $1(x-1) - 2(y-2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 3 = 0$ .

**Câu 49.** Cho đường thẳng  $\Delta: 3x + 4y - 25 = 0$ . Gọi  $(C)$  là đường tròn tâm  $O$  và tiếp xúc với  $\Delta$ .

- Viết phương trình đường tròn  $(C)$ .
- Tìm tọa độ tiếp điểm  $H$  của  $\Delta$  và  $(C)$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) Bán kính của  $(C)$  bằng  $R = d(O, \Delta) = \frac{|-25|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5$

Vậy phương trình của  $(C)$  là:  $x^2 + y^2 = 25$

b) Vì  $\Delta$  tiếp xúc với  $(C)$  tại tiếp điểm  $H$  nên ta có  $OH \perp \Delta$ . Do đó  $\overrightarrow{u_{OH}} = \overrightarrow{n_{\Delta}} = (3; 4)$ . Suy ra  $\overrightarrow{n_{OH}} = (4; -3)$ . Phương trình của đường thẳng  $OH$  là  $4x - 3y = 0$ .

Ta có  $H = OH \cap \Delta$ , do đó tọa độ của  $H$  là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x + 4y - 25 = 0 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy  $H(3;4)$

**Câu 50.** Chuyển động của một vật thể trong khoảng thời gian 180 phút được thể hiện trong mặt phẳng tọa độ. Theo đó, tại thời điểm  $t$  ( $0 \leq t \leq 180$ ), vật thể có vị trí tọa độ  $(4 \cos t^\circ; 3 \sin t^\circ)$ .

- Tìm vị trí ban đầu và vị trí kết thúc của vật thể.
- Tìm quỹ đạo chuyển động của vật thể.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) Vị trí ban đầu của vật thể ứng với  $t = 0$ , suy ra vật thể ở vị trí có tọa độ là  $A_1(4;0)$ .

Vị trí kết thúc của vật thể ứng với  $t = 180$ , suy ra vật thể ở vị trí có tọa độ là  $A_2(-4;0)$ .

b) Từ đẳng thức  $(\sin t^\circ)^2 + (\cos t^\circ)^2 = 1$  và tọa độ của vật thể  $M$ , ta suy ra

$$\left(\frac{y_M}{3}\right)^2 + \left(\frac{x_M}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x_M^2}{16} + \frac{y_M^2}{9} = 1$$

Do đó vật thể chuyển động trên đường elip  $(E)$  có phương trình

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

trùng với 4 số của bộ số trúng thưởng thì người chơi trúng giải nhì. Tính xác suất bạn Bình trúng giải nhì khi chơi.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

**Chọn**

Không gian mẫu  $\Omega$  là tập hợp tất cả các tập con có 6 phần tử của tập  $\{1; 2; \dots; 44; 45\}$ .

$$n(\Omega) = C_{45}^6 = 8145060.$$

Gọi  $E$  là biến cố: “Bạn Bình trúng giải nhì”.

$E$  là tập hợp tất cả các tập con gồm sáu phần tử của tập  $\{1; 2; 3; \dots; 45\}$  có tính chất:

- Bốn phần tử của nó thuộc tập  $\{4; 12; 20; 31; 32; 33\}$ ;
- Hai phần tử còn lại không thuộc tập  $\{4; 12; 20; 31; 32; 33\}$

Mỗi phần tử của  $E$  được hình thành từ hai công đoạn

Công đoạn 1: Chọn 4 phần tử trong tập  $\{4; 12; 20; 31; 32; 33\}$ . Có  $C_6^4 = 15$  cách chọn.

Công đoạn 2: Chọn 2 phần tử còn lại trong 39 phần tử của tập  $\{1; 2; \dots; 44; 45\} \setminus \{4; 12; 20; 31; 32; 33\}$ . Có  $C_{39}^2 = 741$  cách chọn.

Theo quy tắc nhân, tập  $E$  có  $15 \cdot 741 = 11115$  phần tử. Vậy  $n(E) = 11115$ .

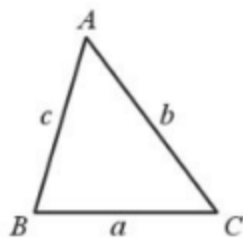
$$\text{Từ đó } P(E) = \frac{11115}{8145060} \approx 0,001365$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\alpha \neq 90^\circ); \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\alpha \neq 180^\circ);$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 (\alpha \neq 0^\circ, \alpha \neq 90^\circ, \alpha \neq 180^\circ)$$

## II. Định lí côsin

Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a, CA = b, AB = c$  (Hình 2).



Hình 2

Khi đó:

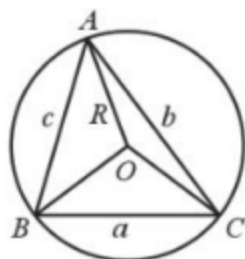
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

## III. Định lí sin

Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a, CA = b, AB = c$  và bán kính đường tròn ngoại tiếp là  $R$  (Hình 3).



Hình 3

$$\text{Khi đó } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

## B- VÍ DỤ

### Vấn đề 1. Tính các giá trị lượng giác

**Ví dụ 1:** Tính giá trị các biểu thức sau:

a)  $A = \sin 13^\circ \cdot \cos 131^\circ + \sin 167^\circ \cdot \cos 49^\circ;$

b)  $B = \cot 35^\circ \cdot \cot 65^\circ \cdot \cot 125^\circ \cdot \cot 155^\circ.$

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

$$b) \cos(B+C) = \cos(180^\circ - A) = -\cos A \Rightarrow \cos A + \cos(B+C) = 0$$

$$c) \tan(B+C) = \tan(180^\circ - A) = -\tan A \Rightarrow \tan A + \tan(B+C) = 0$$

$$d) \cot(B+C) = \cot(180^\circ - A) = -\cot A \Rightarrow \cot A + \cot(B+C) = 0$$

## Vấn đề 2: Ứng dụng

**Ví dụ 4:** Từ một tấm bìa hình tròn, bạn An cắt ra được một hình tam giác có các cạnh  $AB = 8 \text{ cm}$ ,  $BC = 15 \text{ cm}$  và góc  $B = 60^\circ$  (hình 4). Tính độ dài cạnh  $AC$  và bán kính  $R$  của miếng bìa

A.

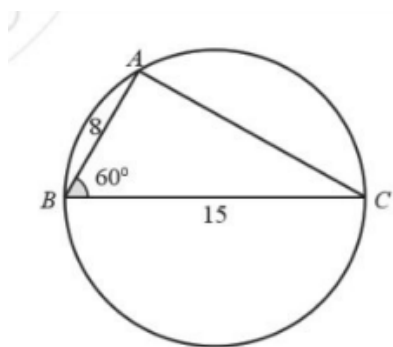
B.

C.

D.

Lời giải

Chọn



Hình 4

Áp dụng định lý côsin cho tam giác  $ABC$  ta có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B = 8^2 + 15^2 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \cos 60^\circ = 169.$$

$$\text{Suy ra } AC = \sqrt{169} = 13$$

Áp dụng định lý sin cho tam giác  $ABC$  ta có  $\frac{AC}{\sin B} = 2R$

$$\text{Suy ra } R = \frac{AC}{2 \sin B} = \frac{13}{2 \sin 60^\circ} = \frac{13\sqrt{3}}{3} (\text{cm}).$$

**Ví dụ 5:** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = 6$ ,  $AD = 8$ ,  $\widehat{BAD} = 60^\circ$  (Hình 5). Tính độ dài các đường chéo  $AC, BD$ .

A.

B.

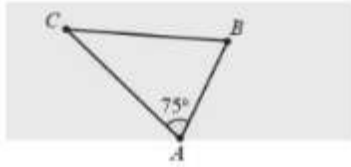
C.

D.

Lời giải

Chọn

**Ví dụ 7:** Hai tàu đánh cá cùng xuất phát từ bến  $A$  và đi thẳng đều về hai vùng biển khác nhau, theo hai hướng tạo với nhau góc  $75^\circ$ . Tàu thứ nhất đi với tốc độ 8 hải lí một giờ và tàu thứ hai đi với vận tốc 12 hải lí một giờ. Hỏi sau 2,5 giờ thì khoảng cách giữa hai tàu là bao nhiêu hải lí (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Hình 7

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Giả sử sau 2,5 giờ tàu thứ nhất ở vị trí  $B$  và tàu thứ hai ở vị trí  $C$  (Hình 7)

Ta có  $AB = 2,5.8 = 20$  (hải lí)

$AC = 2,5.12 = 30$  (hải lí)

Áp dụng định lý côsin cho tam giác  $ABC$  ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos \widehat{BAC}$$

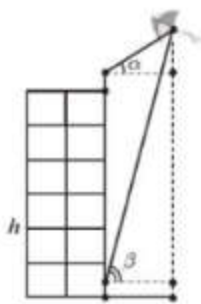
$$= 20^2 + 30^2 - 2.20.30.\cos 75^\circ \approx 989,42$$

Suy ra  $BC = \sqrt{989,42} \approx 31,5$  (hải lí).

Vậy khoảng cách giữa hai tàu sau 2,5 giờ là 31,5 (hải lí).

**Ví dụ 8:** Người  $A$  đứng ở đỉnh của tòa nhà và quan sát chiếc điều, nhận thấy góc nâng (góc nghiêng giữa phương từ mắt của người  $A$  tới chiếc điều và phương nằm ngang

g) là  $\alpha = 35^\circ$ , khoảng cách từ đỉnh tòa nhà tới mắt người  $A$  là  $1,5m$ . Cùng lúc đó ở dưới chân tòa nhà, người  $B$  cũng quan sát chiếc điều và thấy góc nâng là  $\beta = 75^\circ$ , khoảng cách từ mặt đất đến người  $B$  cũng là  $1,5m$ . Biết chiều cao của tòa nhà là  $h = 20m$  (Hình 8).



Hình 8

Chiếc điều bay cao bao nhiêu mét so với mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

A.

B.

C.

D.

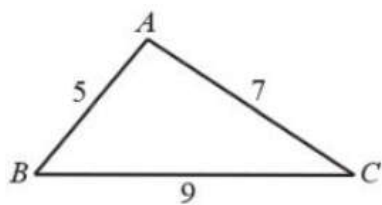
**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn****Chọn A****Câu 3.** Tính giá trị của biểu thức  $T = \sin^2 25^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 115^\circ + \sin^2 165^\circ$ .**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**Ta có  $\sin 115^\circ = \sin(180^\circ - 115^\circ) = \sin 65^\circ = \cos(90^\circ - 65^\circ) = \cos 25^\circ$ ; $\sin 165^\circ = \sin(180^\circ - 165^\circ) = \sin 15^\circ = \cos(90^\circ - 15^\circ) = \cos 75^\circ$ .

Do đó,  $T = \sin^2 25^\circ + \sin^2 75^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 75^\circ$   
 $= (\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ) + (\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ) = 1 + 1 = 2$ .

**Câu 4.** Cho  $\tan \alpha = -2$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \frac{\cos \alpha + 3 \sin \alpha}{\sin \alpha + 3 \cos \alpha}$ .**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**Vì  $\tan \alpha = -2$  nên  $\cos \alpha \neq 0$ . Chia cả tử và mẫu của  $P$  cho  $\cos \alpha$  ta có:

$$P = \frac{1 + 3 \tan \alpha}{\tan \alpha + 3} = \frac{1 + 3 \cdot (-2)}{(-2) + 3} = -5.$$

**Câu 5.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 6, AC = 8, \hat{A} = 100^\circ$ . Tính độ dài cạnh  $BC$  và bán kính  $R$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**Áp dụng định lý côsin cho tam giác  $ABC$  (Hình 54) ta có:



Hình 56

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{5^2 + 7^2 - 9^2}{2.5.7} = -\frac{1}{10}$$

Do đó,  $\widehat{A} \approx 95,7^\circ$ .

$$\text{Áp dụng định lí sin ta có: } 2R = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow R \approx \frac{9}{2.\sin 95,7^\circ} \approx 4,5$$

**Câu 8.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = a, BC = b, AC = m, BD = n$ . Chứng minh  $m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2)$ .

A.

B.

C.

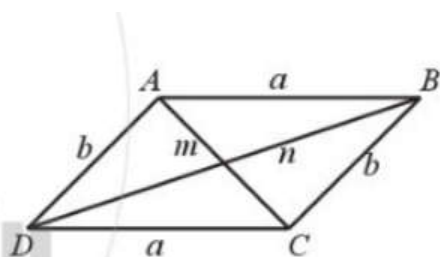
D.

Lời giải

Chọn

Đặt  $\widehat{ABC} = \alpha$ , ta có:  $\widehat{BAD} = 180^\circ - \alpha$

Xét tam giác  $ABC$  (Hình 57), áp dụng định lí cô sin, ta có:



Hình 57

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos \widehat{ABC}$$

$$\Rightarrow m^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

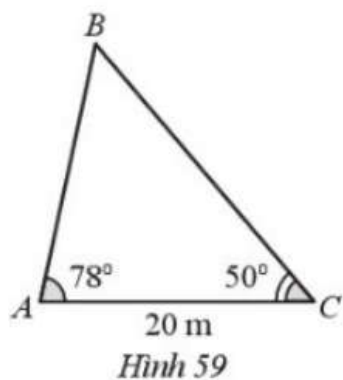
Xét tam giác  $ABD$ , áp dụng định lí cô sin ta có

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos \widehat{BAD}$$

$$\Rightarrow n^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$$

$$\text{Vậy } m^2 + n^2 = (a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha) + (a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha) = 2(a^2 + b^2)$$

Xét tam giác  $ABC$  (Hình 59), ta có:



$$\hat{B} = 180^\circ - 50^\circ - 78^\circ = 52^\circ$$

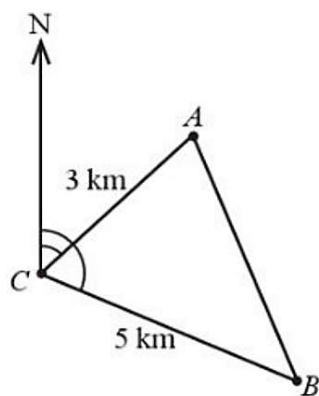
Áp dụng định lí sin, ta có:  $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$

Do đó

$$AB = \frac{20 \sin 50^\circ}{\sin 52^\circ} \approx 19,4(m)$$

Vậy chiều dài của cây là xấp xỉ  $19,4m$

**Câu 11.** Tàu  $A$  cách cảng  $C$  một khoảng 3 km và lệch hướng bắc một góc  $47,45^\circ$ . Tàu  $B$  cách cảng  $C$  một khoảng 5 km và lệch hướng bắc một góc  $112,90^\circ$  (Hình 11). Hỏi khoảng cách giữa hai tàu là bao nhiêu ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Hình 11

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Xét Hình 60, ta có

## BÀI 2. GIẢI TAM GIÁC. TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC

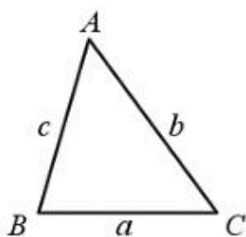
### I. LÝ THUYẾT

#### 1. Giải tam giác khi biết:

- Độ dài hai cạnh và độ lớn góc xen giữa hai cạnh đó: Sử dụng định lý côsin.
- Độ dài ba cạnh: Sử dụng định lý côsin.
- Độ dài một cạnh và độ lớn hai góc kề với cạnh đó: Sử dụng định lý sin.

#### 2. Công thức tính diện tích tam giác

Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a, CA = b, AB = c$  (Hình 12). Khi đó diện tích  $S$  của tam giác  $ABC$  là:



Hình 12

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \text{ hoặc } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

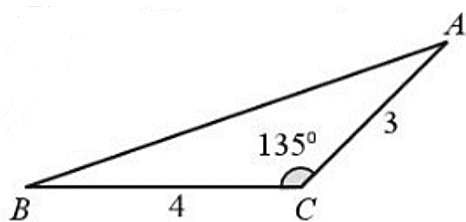
### II. CÁC DẠNG TOÁN

#### Vấn đề 1. Giải tam giác

#### Vấn đề 2. Ứng dụng

### III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 9:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AC = 3, BC = 4, \widehat{C} = 135^\circ$  (Hình 13). Tính độ dài cạnh  $AB$  và diện tích tam giác  $ABC$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 13

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Áp dụng định lý côsin cho tam giác  $ABC$  ta có

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 135^\circ = 25 + 12\sqrt{2}.$$

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{6^2 + 10^2 - 14^2}{2.6.10} = -\frac{1}{2}.$$

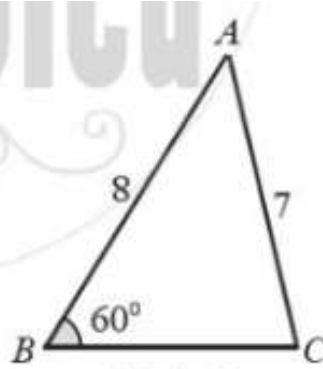
Do đó,  $\hat{A} = 120^\circ$ . Diện tích tam giác  $ABC$  là:  $S = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}.6.12.\sin 120^\circ = 15\sqrt{3}$ .

Độ dài đường cao  $AH$  là:  $AH = \frac{2S}{BC} = \frac{2.15\sqrt{3}}{14} = \frac{15\sqrt{3}}{7}$ .

**Ví dụ 12:** Cho tam giác  $ABC$ . Tính độ dài cạnh đáy  $BC$  và số đo các góc  $A, C$  trong mỗi Hình 16, 17.



Hình 16



Hình 17

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Đặt  $BC = x (x > 0)$ . Áp dụng định lí côsin cho tam giác  $ABC$  ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos B \Rightarrow 7^2 = 8^2 + x^2 - 2.8.x.\cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = 5. \text{ Vậy } BC = 3 \text{ hoặc } BC = 5.$$

+ Trường hợp 1:  $BC = 3$  (Hình 16).

$$\text{Áp dụng định lí sin ta có: } \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}. \text{ Suy ra } \sin A = \frac{BC.\sin B}{AC} = \frac{3.\sin 60^\circ}{7} = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

Do đó,  $\hat{A} \approx 21,8^\circ$  và  $\hat{C} \approx 180^\circ - 60^\circ - 21,8^\circ = 98,2^\circ$ .

+ Trường hợp 2:  $BC = 5$  (Hình 17).

$$\text{Áp dụng định lí sin ta có: } \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}. \text{ Suy ra } \sin A = \frac{BC.\sin B}{AC} = \frac{5.\sin 60^\circ}{7} = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

Do đó,  $\hat{A} \approx 38,2^\circ$  và  $\hat{C} \approx 180^\circ - 60^\circ - 38,2^\circ = 81,8^\circ$ .

**Ví dụ 13:** Từ một phần của miếng tôn hình tròn người ta cắt ra được một hình tam giác  $ABC$  có  $AB = 6$  cm,  $AC = 8$  cm,  $\hat{A} = 150^\circ$  (Hình 18). Tính bán kính của miếng tôn ban đầu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị xăng-ti-mét) và diện tích tam giác  $ABC$ .

Áp dụng định lí côsin cho tam giác  $ABC$  ta có:  $AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2.AC.CB.\cos C$

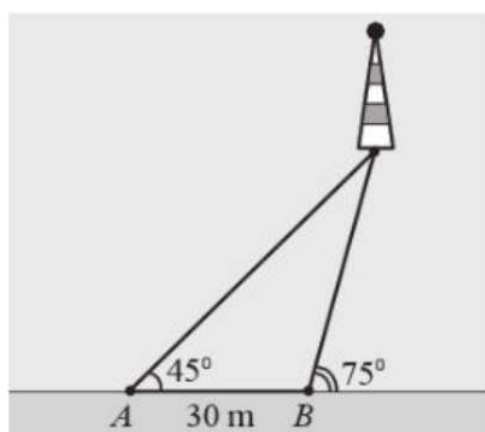
$$= 1000^2 + 800^2 - 2.1000.800.\cos 105^\circ$$

$$\approx 2054110,472.$$

Suy ra  $AB \approx \sqrt{2054110,472} \approx 1433,2$ .

Vậy khoảng cách  $AB$  là xấp xỉ 1433,2 m.

**Ví dụ 15:** Một người đi dọc bờ biển từ vị trí  $A$  đến vị trí  $B$  và quan sát một ngọn hải đăng. Góc nghiêng của phương quan sát từ các vị trí  $A$ ,  $B$  tới ngọn hải đăng với đường đi của người quan sát lần lượt là  $45^\circ$  và  $75^\circ$ . Biết khoảng cách giữa hai vị trí  $A$ ,  $B$  là 30m (Hình 20). Ngọn hải đăng cách bờ biển bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Hình 20

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Gọi vị trí ngọn hải đăng là điểm  $C$ ,  $H$  là hình chiếu của  $C$  trên đường thẳng  $AB$ .

Ta có:  $\widehat{ACB} = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$  (tính chất góc ngoài tam giá

c). Áp dụng định lí sin cho tam giác  $ABC$  ta có:  $\frac{BC}{\sin 45^\circ} = \frac{AB}{\sin 30^\circ} \Rightarrow BC = \frac{30 \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 30\sqrt{2}$ .

Xét tam giác vuông  $BCH$ , ta có:  $CH = BC \sin 75^\circ = 30\sqrt{2} \sin 75^\circ \approx 41$  (m).

Vậy ngọn hải đăng cách bờ biển khoảng 41 m.

#### IV. BÀI TẬP

**Câu 12.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 6,5$  cm,  $AC = 8,5$  cm,  $\hat{A} = 125^\circ$ . Tính (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị tương ứng

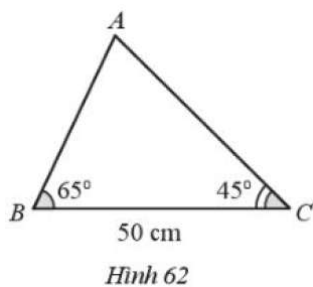
g)

a) Độ dài cạnh  $BC$ ;

b) Số đo các góc  $B, C$ ;

## Chọn

Xét tam giác  $ABC$  (Hình 62).



Ta có:  $\hat{A} = 180^\circ - 65^\circ - 45^\circ = 70^\circ$ .

Áp dụng định lí sin ta có:  $\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R$ .

a) Ta có:

$$AB = \frac{BC \sin C}{\sin A} = \frac{50 \sin 45^\circ}{\sin 70^\circ} \approx 37,6(\text{cm});$$

$$AC = \frac{BC \sin B}{\sin A} = \frac{50 \sin 65^\circ}{\sin 70^\circ} \approx 48,2(\text{cm})$$

b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  là:  $R = \frac{50}{2 \sin 70^\circ} \approx 26,6(\text{cm})$ .

**Câu 14.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 10$ ,  $AC = 8$ ,  $BC = 9$ . Tính (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

a) Số đo các góc  $A, B, C$ ;

b) Diện tích tam giác  $ABC$ .

A.

B.

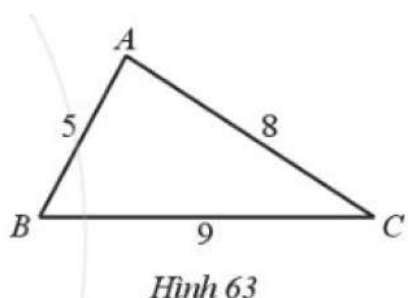
C.

D.

Lời giải

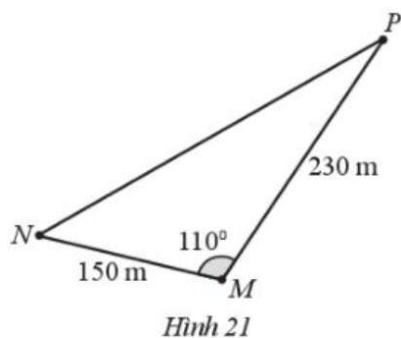
## Chọn

Xét tam giác  $ABC$  (Hình 63):



a) Áp dụng định lí cosin ta có:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{5^2 + 8^2 - 9^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = 0,1$$



a) Diện tích mảnh đất mà gia đình bạn An sở hữu là bao nhiêu mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

b) Chiều dài hàng rào  $NP$  là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) Diện tích mảnh đất của gia đình bạn An (tam giác  $MNP$ ) là:

$$S = \frac{1}{2} MN \cdot MP \cdot \sin M = \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 230 \cdot \sin 110^\circ \approx 16209,7 \text{ (m}^2\text{)}.$$

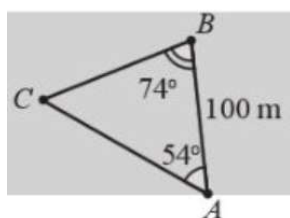
b) Áp dụng định lí côsin ta có:

$$NP^2 = MN^2 + MP^2 - 2MN \cdot MP \cdot \cos M = 150^2 + 230^2 - 2 \cdot 150 \cdot 230 \cdot \cos 110^\circ \\ \approx 98999,39.$$

$$\text{Suy ra } NP \approx \sqrt{98999,39} \approx 314,6 \text{ (m)}.$$

Vậy chiều dài hàng rào  $NP$  là khoảng 314,6 m.

**Câu 17.** Hai người  $A$  và  $B$  cùng quan sát một con tàu đang neo đậu ngoài khơi tại vị trí  $C$ . Người  $A$  đứng trên bờ biển, người  $B$  đứng trên một hòn đảo cách bờ một khoảng  $AB = 100$  m. Hai người tiến hành đo đạc và thu được kết quả:  $\widehat{CAB} = 54^\circ$ ,  $\widehat{CBA} = 74^\circ$  (Hình 22). Hỏi con tàu cách hòn đảo bao xa (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị mét)?



A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) Xét tam giác  $ABC$  ta có:  $\widehat{ACB} = 180^\circ - 6^\circ - 4^\circ = 170^\circ$ . Áp dụng định lí sin ta có:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AC = \frac{AB \sin B}{\sin C} = \frac{762 \sin 4^\circ}{\sin 170^\circ} \approx 306(\text{m}).$$

Xét tam giác vuông  $AHC$  ta có  $h = CH = AC \sin A \approx 306 \sin 6^\circ \approx 32(\text{m})$ .

Vậy chiều cao con dốc là khoảng 32 m.

b) Áp dụng định lí sin ta có:  $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow BC = \frac{762 \sin 6^\circ}{\sin 170^\circ} \approx 459 (\text{m})$ .

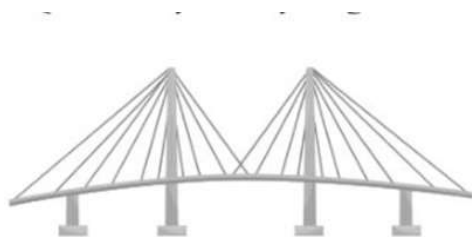
Ta có:  $AC \approx 306 \text{ m} = 0,306 \text{ km}$ ;  $CB \approx 459 \text{ m} = 0,459 \text{ km}$ .

Như vậy, thời gian bạn An đi từ nhà đến trường là:

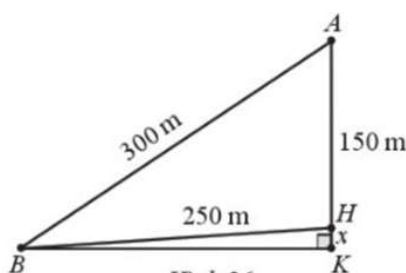
$$t = \frac{AC}{4} + \frac{CB}{19} \approx \frac{0,306}{4} + \frac{0,459}{19} \approx 0,1 (\text{giờ}) = 6 (\text{phút}).$$

Vậy bạn An đến trường lúc khoảng 6 giờ 6 phút.

**Câu 20.** Quan sát cây cầu dây văng minh họa ở Hình 25.



Hình 25



Hình 26

Tại trụ cao nhất, khoảng cách từ đỉnh trụ (vị trí  $A$ ) tới chân trụ trên mặt cầu (vị trí  $H$ ) là 150 m, độ dài dây văng dài nhất nối từ đỉnh trụ xuống mặt cầu (vị trí  $B$ ) là 300 m, khoảng cách từ chân dây văng dài nhất tới chân trụ trên mặt cầu là 250 m (Hình 26). Tính độ dốc của cầu qua trụ nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị độ).

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Độ dốc của cầu là góc nghiêng giữa đường cầu qua trụ và phương nằm ngang, tức là góc  $KBH$ .

Xét tam giác  $ABH$ , áp dụng định lí cosin ta có:

$$\cos \widehat{AHB} = \frac{BH^2 + AH^2 - AB^2}{2 \cdot BH \cdot AH} = \frac{250^2 + 150^2 - 300^2}{2 \cdot 250 \cdot 150} = -\frac{1}{15} \Rightarrow \widehat{AHB} \approx 93,8^\circ.$$

Xét tam giác  $BHK$  ta có:  $\widehat{HBK} \approx 93,8^\circ - 90^\circ = 3,8^\circ$  (tính chất góc ngoài tam giá

c).

Vậy độ dốc của cầu qua trụ theo đề bài là khoảng  $3,8^\circ$ .

## BÀI 3. KHÁI NIỆM VECTO

### I. LÝ THUYẾT

- Vector là một đoạn thẳng có hướng.
- Hai vector được gọi là *cùng phương* nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.
- Độ dài vector là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vector. Độ dài của vector  $\vec{a}$ , kí hiệu là  $|\vec{a}|$ .
- Vector bằng nhau
  - + Hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$  bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu  $\vec{a} = \vec{b}$ .
  - + Nếu  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  thì  $\vec{AI} = \vec{IB}$ .
  - + Nếu  $ABCD$  là hình bình hành thì  $\vec{AB} = \vec{DC}$ .
  - + Khi cho trước vector  $\vec{a}$  và điểm  $O$ , thì ta luôn tìm được một điểm  $A$  duy nhất sao cho  $\vec{OA} = \vec{a}$ .
- Vector-không là vector có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là  $\vec{0}$ .
- + Vector-không cùng phương, cùng hướng với mọi vector và có độ dài bằng 0.

### II. CÁC DẠNG TOÁN

**Vấn đề 1: Xác định vector; xác định phương, hướng của các vector**

**Vấn đề 2. Độ dài vector**

**Vấn đề 3. Hai vector bằng nhau**

**Vấn đề 4. Ứng dụng**

### III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 16:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Viết các vector khác  $\vec{0}$  thỏa mãn:

- Có điểm đầu là  $A$ , điểm cuối là một trong các đỉnh của tứ giác trên.
- Có điểm cuối là  $B$ , điểm đầu là một trong các đỉnh của tứ giác trên

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Các vector thỏa mãn là:  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$

b) Các vector thỏa mãn là:  $\vec{AB}, \vec{CB}, \vec{DB}$

**Ví dụ 17:** Cho ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng,  $B$  nằm giữa  $A$  và  $C$ . Chỉ ra ba cặp vector khác  $\vec{0}$  có điểm đầu và điểm cuối trong các điểm  $A, B, C$  thỏa mãn:

- Cặp vector đó ngược hướng.

Vì  $\overrightarrow{AM}$  cùng hướng với  $\overrightarrow{AB}$  nên giá của  $\overrightarrow{AM}$  trùng với giá của  $\overrightarrow{AB}$  và  $B, M$  cùng phía so với  $A$  hoặc  $M$  trùng  $A$ . Như vậy, tập hợp tất cả các điểm  $M$  là tia  $AB$ .

**Ví dụ 21:** Cho  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ ,  $AB = 3a$ ,  $AC = 4a$ . Tính  $|\overrightarrow{BC}|$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

$$|\overrightarrow{BC}| = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = \sqrt{25a^2} = 5a.$$

**Ví dụ 22:** Cho  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$  và  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính  $|\overrightarrow{AM}|$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Vì tam giác  $ABC$  đều nên trung tuyến  $AM$  cũng là đường cao. Vậy ta có:

$$|\overrightarrow{AM}| = AM = AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

**Ví dụ 23:** Cho tam giác  $ABC$ . Thực hiện các yêu cầu sau:

a) Vẽ điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$ .

b) Vẽ điểm  $N$  sao cho  $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{BC}$ .

A.

B.

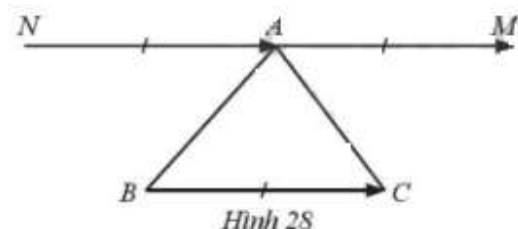
C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

(Hình 28)



**Ví dụ 24:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của bốn cạnh  $AB, BC, CD, DA$  (Hình 29). Chứng minh  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ .

g)  $\vec{T}$  có hướng từ dưới lên trên.



Hình 30

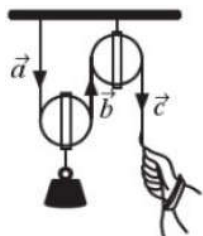
A. B. C. D.

Lời giải

Chọn

Các phát biểu đúng là a, b, c, g.

**Ví dụ 27:** Quan sát ròng rọc hoạt động khi dùng lực để kéo một đầu của ròng rọc. chuyển động của các đoạn dây được mô tả bằng các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  (Hình 31).



Hình 31

- a) Hãy chỉ ra các cặp vectơ cùng phương.  
b) Trong các cặp vectơ đó, cho biết chúng cùng hướng hay ngược hướng?

A. B. C. D.

Lời giải

Chọn

- a) Các cặp vectơ cùng phương là  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ ,  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$ ,  $\vec{c}$  và  $\vec{a}$ .  
b) Cặp vectơ cùng hướng là  $\vec{c}$  và  $\vec{a}$ . Các cặp vectơ ngược hướng là  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ ,  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$ .

## BÀI TẬP

**Câu 22.** Trong mặt phẳng cho hai điểm phân biệt  $A, B$ . Tập hợp tất cả các điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AM}$  ngược hướng với  $\overrightarrow{AB}$  là hình gì?

- A. Đường thẳng  $AB$ . B. Tia  $AB$ .  
C. Tia đối của tia  $AB$  trừ điểm  $A$ . D. Đoạn thẳng  $AB$ .  
A. B. C. D.

Lời giải

**Chọn**

**Chọn D**

**Câu 27.** Cho năm điểm phân biệt  $A, B, C, D, E$ .

a) Viết các vector khác  $\vec{0}$  có cùng điểm đầu là  $A$ , điểm cuối là một trong các điểm đã cho.

b) Viết các vector khác  $\vec{0}$  có cùng điểm cuối là  $B$ , điểm đầu là một trong các điểm đã cho.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}, \vec{AE}$

b)  $\vec{AB}, \vec{CB}, \vec{DB}, \vec{EB}$ .

**Câu 28.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Tính  $|\vec{AB}|, |\vec{AC}|$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

$$|\vec{AB}| = AB = a, \quad |\vec{AC}| = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}.$$

**Câu 29.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ .

Chứng minh rằng:

a)  $\vec{MN} = \vec{PA}$ ;

b)  $\vec{MP} = \vec{CN}$ .

**A.**

**B.**

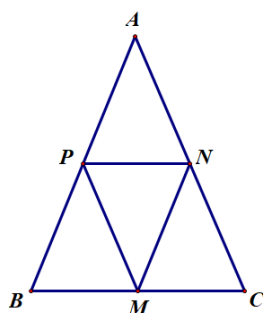
**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Xét tam giác  $ABC$  (Hình 65).



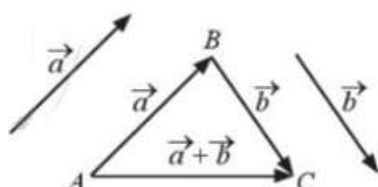
## BÀI 4. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

### I. LÝ THUYẾT

#### I. Tổng của hai vectơ

##### 1. Định nghĩa

Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$ . Lấy một điểm  $A$  tùy ý, vẽ  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$ . Vectơ  $\overrightarrow{AC}$  được gọi là tổng của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , kí hiệu  $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$  (Hình 33).



Hình 33

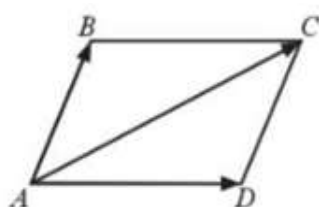
*Nhận xét:* Công thức trên cho ta cách rút gọn tổng nhiều vectơ liên tiếp mà điểm cuối của mỗi vectơ trong tổng là điểm đầu của vectơ liền sau nó (trừ vectơ cuối cùng).

g). Đồng thời, ta cũng phân tích được một vectơ thành tổng của hai hoặc nhiều vectơ khác. Ta cũng gọi công thức trên là *quy tắc cộng*.

##### 2. Quy tắc hình bình hành

Nếu  $ABCD$  là hình bình hành thì  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$  (Hình 34).

*Nhận xét:* Công thức trên cho ta một cách rút gọn tổng của hai vectơ có cùng điểm đầu.



Hình 34

##### 3. Tính chất

Với ba vectơ tùy ý  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  ta có:

- ☐  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  (tính chất giao hoán);
- ☐  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  (tính chất kết hợp);
- ☐  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$  (tính chất vector không);
- ☐ g);

*Chú ý:* Tổng ba vectơ  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  được xác định theo một trong hai cách:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$  hoặc  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

### III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 28:** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$ . Chứng minh  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$$

Từ hai đẳng thức trên, ta có  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$ .

**Ví dụ 29:** Cho năm điểm  $A, B, C, D, E$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$ .

$$\text{Cách 1: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$$

$$\text{Cách 2: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$$

$$\text{Cách 3: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AE}$$

**Ví dụ 30:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác.  $M, N, P$  là ba điểm bất kỳ. Chứng minh  $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Vì  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  nên  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CP} = (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} \\ &= \vec{0} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} \end{aligned}$$

*Nhận xét:* Ta sử dụng quy tắc cộng để tách mỗi vector ở vế trái bằng một tổng một vector ở vế phải cộng với một vector khác

**Ví dụ 31:** Cho sáu điểm  $A, B, C, D, E, F$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{FA}$ .

A.

B.

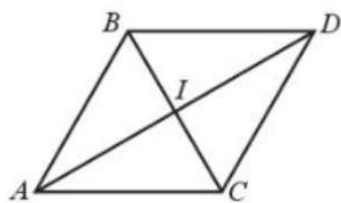
C.

D.

Lời giải

Chọn

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} - (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) - (\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OF}) = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OE}.$$

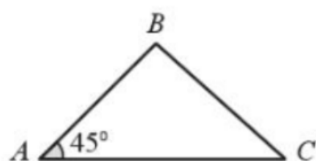


Hình 36

Vì tam giác  $ABC$  đều nên  $AI \perp BC \Rightarrow AI = AB \cdot \sin B = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

do đó  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = 2AI = a\sqrt{3}$ .

**Ví dụ 34:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2a, AC = 3a, \widehat{BAC} = 45^\circ$  (hình 37).



Hình 37

Tính:

a)  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ ;

b)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Ta có:  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = BC$ .

Áp dụng định lí côsin cho tam giác  $ABC$  ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = (2a)^2 + (3a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3a \cdot \cos 45^\circ = (13 - 6\sqrt{2})a^2.$$

Vậy  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{13 - 6\sqrt{2}}$ .

b) Dựng hình bình hành  $ABDC$  (hình 38), ta có:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ .

$$\widehat{ABD} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 135^\circ, BD = AC = 3a.$$

## Lời giải

### Chọn

Từ một điểm  $A$  trong mặt phẳng, vẽ  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  và  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$  thì  $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$  (hình 39).

Vì hai véc tơ  $\vec{a}, \vec{b}$  không cùng phương nên ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng. Theo bất đẳng thức tam giác, ta có:  $AB + BC > AC$ . Vậy suy ra  $|\vec{a}| + |\vec{b}| > |\vec{a} + \vec{b}|$ .

**Ví dụ 38:** Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \overrightarrow{OA}, \vec{F}_2 = \overrightarrow{OB}$  và  $\vec{F}_3 = \overrightarrow{OC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $O$  và vật đứng yên. Cho biết cường độ của  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều là  $120N$  và góc  $\widehat{AOB} = 120^\circ$ . Xác định cường độ và hướng của lực  $\vec{F}_3$ .

A.

B.

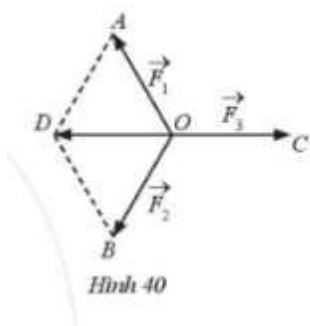
C.

D.

## Lời giải

### Chọn

Dựng hình bình hành  $OADB$  (hình 40), ta có  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$ . Vì vật đứng yên nên  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$  tức là  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ .



Suy ra  $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$  hay  $O$  là trung điểm của  $CD$ . Như vậy  $\overrightarrow{OD}$  ngược hướng với  $\overrightarrow{OC}$  hay hướng của lực  $\vec{F}_3$  ngược hướng với tổng hợp hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ .

Hình bình hành  $OADB$  có  $OA = OB$  nên là hình thoi.

Suy ra  $\widehat{AOD} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = 60^\circ$  nên tam giác  $AOD$  là tam giác đều, do đó  $OD = OA$ . Vậy  $OC = OA$  và cường độ của lực  $\vec{F}_3$  bằng cường độ của lực  $\vec{F}_1$  và bằng  $120N$ .

**Ví dụ 39:** Một dòng sông chảy từ phía bắc xuống phía nam với vận tốc là  $10\text{km/h}$ . Một chiếc ca nô chuyển động từ phía đông sang phía tây với vận tốc  $40\text{km/h}$  so với mặt nước. Tìm vận tốc củ ca nô với bờ sông.

A.

B.

C.

D.

## Lời giải

### Chọn

**Câu 34.** Cho các điểm  $A, B, O$ . Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ .      B.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ .      C.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ .      D.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$ .
- A.      B.      C.      D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn B**

**Câu 35.** Cho ba điểm  $A, B, M$  phân biệt. Điều kiện cần và đủ để  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  là

- A.  $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ .      B.  $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$ .
- C.  $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$  ngược hướng. D.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .

- A.      B.      C.      D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn D**

**Câu 36.** Cho tam giác  $ABC$ . Điều kiện cần và đủ để  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  là

- A.  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC}$ .      B.  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AG}$ .
- C.  $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB}$ .      D.  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

- A.      B.      C.      D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn B**

**Câu 37.** Cho tứ giác  $ABCD$ ,  $O$  là trung điểm của  $AB$ . Chứng minh  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ .

- A.      B.      C.      D.

**Lời giải**

**Chọn**

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \vec{0} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}.$$

**Câu 38.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = 4a, AC = 5a$ . Tính

- a)  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ .
- b)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ .

Từ một điểm  $A$  trong mặt phẳng, vẽ  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  và  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ . Nếu hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng hướng thì ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng,  $B$  nằm giữa  $A$  và  $C$ . Suy ra  $AB + BC = AC$ .

$$\text{Vậy } |\vec{a}| + |\vec{b}| = AB + BC = AC = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\vec{a} + \vec{b}|.$$

**Câu 42.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ .

A.

B.

C.

D.

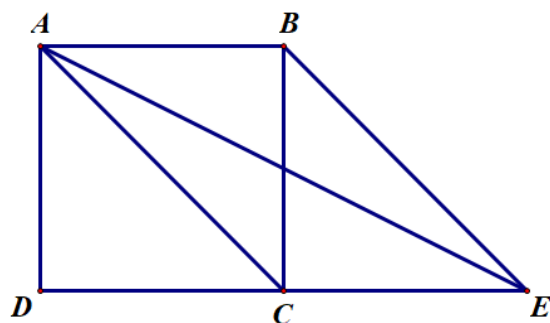
**Lời giải**

**Chọn**

Dựng hình bình hành  $ABEC$  (Hình 67).

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AE}| = AE.$$

Vì  $CD \parallel AB$ ,  $CE \parallel AB$  nên  $C, D, E$  thẳng hàng.



Hình 67

$$\text{Ta có: } DE = DC + CE = 2a.$$

$$\text{Tam giác } ADE \text{ vuông tại } D, \text{ suy ra } AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}.$$

$$\text{Vậy } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AE}| = a\sqrt{5}.$$

**Câu 43.** Cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành,  $O$  là giao điểm của hai đường chéo,  $E$  là trung điểm của  $AD$ ,  $G$  là giao điểm của  $BE$  và  $AC$ . Tính

a)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ .

b)  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD}$ .

A.

B.

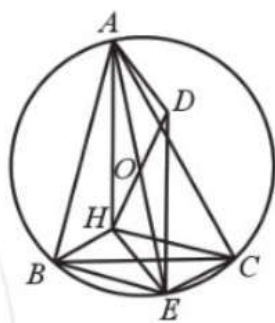
C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) Vì  $ABCD$  là hình bình hành nên  $O$  là trung điểm của cả hai đoạn thẳng  $AC$  và  $BD$ .



Hình 69

- Nếu hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ( $\vec{b} \neq 0$ ) cùng hướng và  $|\vec{a}| = m \cdot |\vec{b}|$  thì  $\vec{a} = m\vec{b}$ .

- Nếu hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ( $\vec{b} \neq 0$ ) ngược hướng và  $|\vec{a}| = m \cdot |\vec{b}|$  thì  $\vec{a} = -m\vec{b}$ .

### Vấn đề 3. Biểu thị một vector theo hai vector không cùng phương

*Phương pháp:*

- Sử dụng định nghĩa, tính chất của các phép toán: phép cộng vector, phép trừ vector, phép nhân một số với một vector.

- Sử dụng tính chất trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác, hình bình hành.

### Vấn đề 4. Chứng minh đẳng thức vector

*Phương pháp:*

- Xét hiệu của hai vế.

- Biến đổi từ biểu thức vế này sang vế kia.

- Chứng minh hai biểu thức vector cùng bằng một vector trung gian.

- Chứng minh hai biểu thức vector cùng bằng một biểu thức vector trung gian bằng cách sử dụng quy tắc trừ với điểm đầu là điểm  $O$  bất kì.

## III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 40:** Cho đoạn thẳng  $AB = 3$  cm. Xác định các điểm  $M$ ,  $N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ .

A.

B.

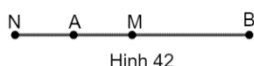
C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

(Hình 42)



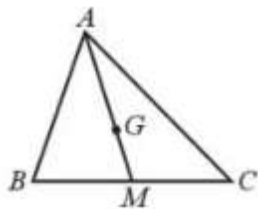
Do  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$  nên  $\overrightarrow{AM}$  và  $\overrightarrow{AB}$  cùng hướng,  $AM = \frac{1}{3}AB$ . Vậy điểm  $M$  thuộc tia  $AB$  thỏa mãn

$$AM = \frac{1}{3}AB = 1 \text{ cm}.$$

Do  $\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$  nên  $\overrightarrow{AN}$  và  $\overrightarrow{AB}$  ngược hướng,  $AN = \frac{1}{3}AB$ .

Vậy điểm  $N$  thuộc tia đối của tia  $AB$  thỏa mãn  $AN = \frac{1}{3}AB = 1 \text{ cm}$ .

**Ví dụ 41:** Cho tam giác  $ABC$ . Xác định điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AM} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ .



Hình 45

a) Biểu thị  $\overrightarrow{AG}$  theo  $\overrightarrow{AM}$  ;

b) Biểu thị  $\overrightarrow{GA}$  theo  $\overrightarrow{GM}$  .

A.

B.

C.

D.

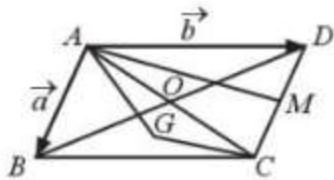
**Lời giải**

**Chọn**

a) Vì  $\overrightarrow{AG}$  và  $\overrightarrow{AM}$  cùng hướng và  $|\overrightarrow{AG}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{AM}|$  nên  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$  .

b) Vì  $\overrightarrow{GA}$  và  $\overrightarrow{GM}$  ngược hướng và  $|\overrightarrow{GA}| = 2|\overrightarrow{GM}|$  nên  $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM}$  .

**Ví dụ 44:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ ,  $M$  là trung điểm của  $CD$ ,  $G$  là trọng tâm của tam giác  $OBC$  (Hình 46). Biểu thị các vectơ  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AO}$ ,  $\overrightarrow{AM}$ ,  $\overrightarrow{AG}$ ,  $\overrightarrow{CG}$  theo hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ .



Hình 46

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Theo quy tắc hình bình hành ta có:  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$  .

Vì  $\overrightarrow{AO}$  cùng hướng với  $\overrightarrow{AC}$  và  $|\overrightarrow{AO}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$  nên  $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$  .

Vì  $M$  là trung điểm của  $CD$  nên  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$  .

Vì  $G$  là trọng tâm của tam giác  $OBC$  nên

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) + \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b})\right] = \frac{5}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} .$$

$$\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$$

b) Từ các đẳng thức trên, ta có:  $\overrightarrow{HE} = \frac{5}{4}\left(-\frac{8}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{5}{4}\overrightarrow{DH}.$

Vậy hai vector  $\overrightarrow{HE}, \overrightarrow{DH}$  cùng phương nên  $D, H, E$  thẳng hàng.

**Nhận xét:** Nếu bỏ câu a) thì việc chứng minh câu

b) trở nên khó khăn.

Khi đó, ta chuyển bài toán chứng minh ba điểm thẳng hàng về bài toán chứng minh hai vector cùng phương, chuyển bài toán chứng minh hai vector cùng phương về bài toán biểu diễn hai vector theo hai vector (không cùng phương)

g) cho trước.

**Ví dụ 47:** Cho hình bình hành  $ABCD$  và  $M$  là một điểm tùy ý. Chứng minh  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}.$

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Cách 1:**

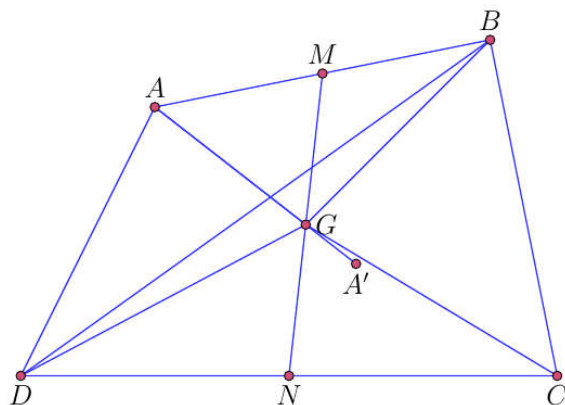
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) - (\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD} = \vec{0}.$$

**Cách 2:**

Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Vì  $ABCD$  là hình bình hành nên  $O$  là trung điểm của  $AC$  và  $BD$ .

Suy ra  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$ . Vậy  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}.$

**Ví dụ 48:** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $M, N$  lần lượt là trung điểm của hai cạnh  $AB$  và  $CD$ . Gọi  $G$  là trung điểm của đoạn thẳng  $MN$ ,  $A'$  là trọng tâm của tam giác  $BCD$  (Hình 48). Chứng minh:



Hình 48

a)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN};$

**Câu 48.** Cho tam giác  $ABC$  và  $M$  là trung điểm của  $BC$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{GM}$ .      B.  $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{GM}$ .      C.  $\overrightarrow{AM} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{GM}$ .      D.  $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{GM}$ .

**Chọn D**

**Câu 49.** Cho  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A.  $\vec{a}$  và  $4\vec{a}$  cùng phương.      B.  $\vec{a}$  và  $-4\vec{a}$  cùng phương.  
C.  $\vec{a}$  và  $4\vec{a}$  không cùng hướng.      D.  $\vec{a}$  và  $-4\vec{a}$  ngược hướng.

**Chọn C**

**Câu 50.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và điểm  $C$  nằm giữa hai điểm  $A, B$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{AC} = \frac{AC}{AB}\overrightarrow{AB}$ .      B.  $\overrightarrow{AC} = -\frac{AC}{AB}\overrightarrow{AB}$ .      C.  $\overrightarrow{AC} = \frac{AB}{AC}\overrightarrow{AB}$ .      D.  $\overrightarrow{AC} = -\frac{AB}{AC}\overrightarrow{AB}$ .

**Chọn A**

**Câu 51.** Cho đoạn thẳng  $BC$  và điểm  $A$  nằm giữa hai điểm  $B, C$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{AC} = \frac{AC}{AB}\overrightarrow{AB}$ .      B.  $\overrightarrow{AC} = -\frac{AC}{AB}\overrightarrow{AB}$ .      C.  $\overrightarrow{AC} = \frac{AB}{AC}\overrightarrow{AB}$ .      D.  $\overrightarrow{AC} = -\frac{AB}{AC}\overrightarrow{AB}$ .

**Chọn B**

**Câu 52.** Cho tam giác  $ABC$ . Xác định các điểm  $M, N, P$  trong mỗi trường hợp sau:

- a)  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB}$ ;  
b)  $\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ ;  
c)  $\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ .

- A.      B.      C.      D.

**Lời giải**

**Chọn**

- a) Điểm  $M$  nằm ở vị trí thỏa mãn tứ giác  $AMBC$  là hình bình hành.  
b) Lấy  $K$  là trung điểm  $BC$ . Điểm  $N$  đối xứng với  $K$  qua  $A$ .  
c) Điểm  $P$  nằm trên tia  $Cx$  song song với  $AB$ , cùng phía  $A$  so với  $BC$  và  $2PC = AB$

**Câu 53.** Cho tam giác  $ABC$ , kẻ phân giác  $AD$ . Đặt  $AB = b, AC = c$ . Chứng minh:  $b\overrightarrow{DB} + c\overrightarrow{DC} = \vec{0}$ .

- A.      B.      C.      D.

**Lời giải**

$$\overrightarrow{EN} = t\overrightarrow{DE} \Leftrightarrow \frac{2k}{3}\vec{a} + \frac{5k-6}{15}\vec{b} = t\left(-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2k}{3} + \frac{t}{3}\right)\vec{a} = -\left(\frac{5k-6}{15} - \frac{2t}{5}\right)\vec{b}$$

Vì  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và không cùng phương nên  $\frac{2k}{3} + \frac{t}{3} = \frac{5k-6}{15} - \frac{2t}{5} = 0$ .

Suy ra  $k = \frac{6}{17}$ .

**Câu 56.** Cho tam giác  $ABC$ . Lấy các điểm  $A', B', C'$  không trùng với đỉnh của tam giác và lần lượt thuộc các cạnh  $AB, BC, CA$  thỏa mãn  $\frac{AA'}{AB} = \frac{BB'}{BC} = \frac{CC'}{CA}$ . Chứng minh hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  có cùng trọng tâm.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Giả sử hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  có trọng tâm lần lượt là  $G, G'$ .

Ta có:  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'} = 3\overrightarrow{GG'}$ .

Đặt  $\frac{AA'}{AB} = \frac{BB'}{BC} = \frac{CC'}{CA} = k$ , ta có  $\overrightarrow{AA'} = k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BB'} = k\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CC'} = k\overrightarrow{CA}$ .

Suy ra  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{CA} = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = k\vec{0} = \vec{0}$

Từ các đẳng thức trên, ta có:  $3\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$  hay  $G$  và  $G'$  trùng nhau.

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2.$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2.$$

## II. CÁC DẠNG TOÁN

**Vấn đề 1. Tính tích vô hướng của hai vector**

**Vấn đề 2. Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng**

**Phương pháp:**

- Biến đổi từ biểu thức về này sang về kia.
- Chứng minh hai biểu thức cùng bằng một biểu thức trung gian.
- Sử dụng các tính chất của phép toán vector, tính chất của tích vô hướng.
- Tách vector, biến đổi về các tích vô hướng khác.

**Vấn đề 3. Tính khoảng cách giữa hai điểm, chứng minh đẳng thức độ dài**

**Phương pháp:** Sử dụng tính chất:

Với hai điểm  $A, B$  phân biệt, ta có  $\overline{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$ , do đó  $AB = \sqrt{\overline{AB}^2}$ .

**Vấn đề 4. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc**

**Phương pháp:** Sử dụng các tính chất:

Hai đường thẳng  $a$  và  $b$  vuông góc khi và chỉ khi  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , trong đó  $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$ , giá của vector  $\vec{u}$  song song hoặc trùng với đường thẳng  $a$  và giá của vector  $\vec{v}$  song song hoặc trùng với đường thẳng  $b$ .

**Vấn đề 5. Tính góc giữa hai vector**

Phương pháp: Với hai vector khác vector  $\vec{0}$ , sử dụng công thức  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ .

## III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 49:** Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  trong các trường hợp sau:

a)  $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 7, (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$ .

b)  $|\vec{a}| = 8, |\vec{b}| = 9, (\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$ .

**A.**

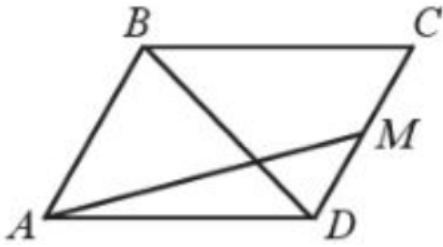
**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**



A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} &= \left( \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \right) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 \\ &= AD^2 - \frac{1}{2}AD \cdot AB \cdot \cos \widehat{BAD} - \frac{1}{2}AB^2 = 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ - \frac{1}{2} \cdot 3^2 = \frac{17}{2} \end{aligned}$$

**Ví dụ 53:** Cho hình thoi  $ABCD$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) = 0$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Vì  $ABCD$  là hình thoi nên  $AC \perp BD$ . Khi đó, ta có:

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$

**Ví dụ 54:** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $O$  là trung điểm của  $AB$ . Với mỗi điểm  $M$ , chứng minh rằng  $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{BA}$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

$$\text{Cách 1: } \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{BA}.$$

$$\text{Cách 2: } \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 - (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2$$

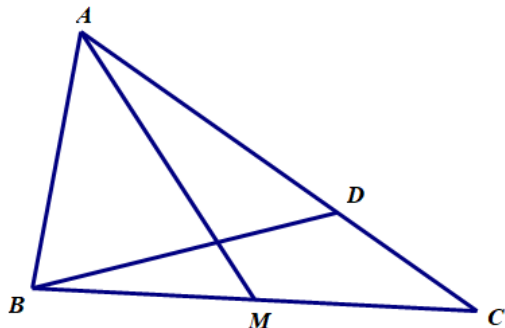
$$= \overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2 - \overrightarrow{MO}^2 - 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB}^2 = 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{BA}$$

$$= 2MO^2 + OA^2 + OB^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \vec{0}$$

$$= 2MO^2 + OA^2 + OB^2.$$

**Ví dụ 57:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 60^\circ$ . Gọi  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ .

Điểm  $D$  thuộc cạnh  $AC$  thỏa mãn  $AD = \frac{7}{12} AC$  (Hình 52). Chứng minh  $AM \perp BD$ .



Hình 52

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \left( \frac{7}{12}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \right).$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{7}{12}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{7}{12} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{12} \cdot 3^2 - 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}(7 - 4 - 3) = 0. \text{ Vậy } AM \perp BD.$$

**Ví dụ 58:** Tính  $(\vec{a}, \vec{b})$  biết rằng  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, \vec{a} \cdot \vec{b} = -6\sqrt{3}$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-6\sqrt{3}}{3 \cdot 4} = \frac{-\sqrt{3}}{2}. \text{ Do đó, } (\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ.$$

#### IV. BÀI TẬP

**Câu 57.** Cho tam giác  $ABC$ . Giá trị của biểu thức  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$  bằng

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}) = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \frac{5}{4}\overrightarrow{CA}\right)$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \frac{5}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \cdot \frac{5}{4}\overrightarrow{CA}$$

$$= a^2 \cos 120^\circ + \frac{5}{4}a^2 \cos 120^\circ + \frac{1}{3}a^2 + \frac{5}{12}a^2 \cos 120^\circ$$

$$= -a^2$$

$$\text{b) } MN^2 = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN})^2 = \left(\frac{-1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \frac{5}{4}\overrightarrow{CA}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{5}{4}\overrightarrow{CA}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cdot \cos 120^\circ + \left(\frac{5}{4}\overrightarrow{CA}\right)^2$$

$$= \frac{4}{9}a^2 - \frac{5}{6}a^2 + \frac{25}{16}a^2 = \frac{169}{144}a^2. \text{ Vậy } MN = \frac{13}{12}a$$

**Câu 62.** Cho hình thoi  $ABCD$  cạnh  $a$  và  $\hat{A} = 120^\circ$ . Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 + a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}a^2.$$

**Câu 63.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ .

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0.$$

**Câu 66.** Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ 650 km/h thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ 35 km/h. Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị km/h).

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

Gọi  $\vec{v}_0$  là vận tốc của máy bay khi không có gió,  $|\vec{v}_0| = 650(\text{km/h})$ ;

$\vec{v}_1$  là vận tốc của gió,  $|\vec{v}_1| = 35(\text{km/h})$ ;  $\vec{v}_2$  là vận tốc của máy bay khi có gió.

Ta có:  $\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$ . Vì  $(\vec{v}_1, \vec{v}_0) = 45^\circ$  nên

$$\vec{v}_2^2 = (\vec{v}_0 + \vec{v}_1)^2 = \vec{v}_0^2 + \vec{v}_1^2 + 2\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1 = |\vec{v}_0|^2 + |\vec{v}_1|^2 + 2|\vec{v}_0| \cdot |\vec{v}_1| \cdot \cos 45^\circ$$

$$= 650^2 + 35^2 + 2.650.35 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 455898,36.$$

Suy ra  $|\vec{v}_2| \approx 675,2(\text{km/h})$ .

a)  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

b)  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Ta có:.

a) Nếu  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  thì  $\cos \alpha > 0$  nên  $\cos \alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$ .

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{4}{3}.$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = \frac{4}{5}, \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{3}{5},$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{4}{5}.$$

b) Nếu  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  thì  $\cos \alpha < 0$  nên  $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$ .

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{5} : \frac{-4}{5} = -\frac{3}{4}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-4}{5} : \frac{3}{5} = -\frac{4}{3}.$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = -\frac{4}{5}, \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{3}{5},$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = \frac{4}{5}.$$

**Câu 72.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 6$ ,  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ . Tính (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị):

a) Độ dài cạnh  $BC$  và độ lớn góc  $B$ ;

b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp  $R$ ;

c) Diện tích của tam giác  $ABC$ .

d) Độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh  $A$ .

e)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}$  với  $M$  là trung điểm của  $BC$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

$$\text{a) Áp dụng định lý cosin, ta có: } \cos \widehat{ABC} = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2BA \cdot BC} = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{5}.$$

$$\Rightarrow (\sin \widehat{ABC})^2 = 1 - (\cos \widehat{ABC})^2 = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25} \Rightarrow \sin \widehat{ABC} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

b) Diện tích tam giác  $ABC$  là:

$$S = \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 6\sqrt{6}.$$

$$\text{c) } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}).$$

$$\text{Ta có: } 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{CB}^2$$

$$\Rightarrow AM^2 = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2) = \frac{1}{4}(2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 7^2 - 6^2) = 28 \Rightarrow AM = 2\sqrt{7}.$$

**Câu 75.** Cho ba điểm phân biệt  $I, A, B$  và số thực  $k \neq 1$  thỏa mãn  $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IB}$ . Chứng minh rằng với  $O$  là điểm bất kì, ta có:  $\overrightarrow{OI} = \left(\frac{1}{1-k}\right)\overrightarrow{OA} - \left(\frac{k}{1-k}\right)\overrightarrow{OB}$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

$$\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IB} \Rightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}) \Rightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OI}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OI} - k\overrightarrow{OI} = (1-k)\overrightarrow{OI} \Rightarrow \overrightarrow{OI} = \left(\frac{1}{1-k}\right)\overrightarrow{OA} - \left(\frac{k}{1-k}\right)\overrightarrow{OB}$$

**Câu 76.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4, AC = 5, \widehat{BAC} = 120^\circ$ . Điểm  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ , điểm  $D$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  và chứng minh  $AM \perp BD$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = 4 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = -10$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{5}(-10) - \frac{1}{2} \cdot 4^2 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 - \frac{1}{2}(-10) = 0.$$

**Câu 79.** a) Chứng minh đẳng thức  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$  với  $\vec{a}, \vec{b}$  là hai vectơ bất kì.

b) Cho  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$ . Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  và  $(\vec{a}, \vec{b})$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

$$\text{a) Ta có } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\text{b) } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2) = \frac{1}{2} [(\sqrt{7})^2 - 2^2 - 3^2] = -3.$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3}{2 \cdot 3} = \frac{-1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ.$$

**Câu 80.** Cho tam giác  $ABC$  có ba trung tuyến  $AD, BE, CF$ . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2),$$

$$\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{BC}^2),$$

$$\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}) \cdot (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{CA}^2).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) + \frac{1}{2} (\overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{BC}^2) + \frac{1}{2} (\overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{CA}^2) = 0.$$

**Câu 81.** Cho tứ giác  $ABCD$ .  $M$  là điểm thay đổi trong mặt phẳng thoả mãn  $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 0$ . Chứng minh rằng điểm  $M$  luôn nằm trên một đường tròn cố định.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Gọi  $P$  và  $Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ .

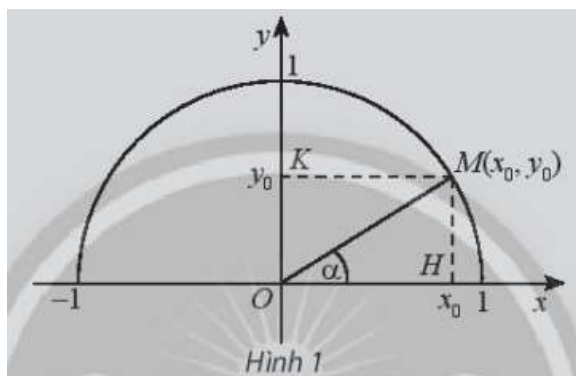
$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MP}, \quad \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MQ}.$$

## Chương IV. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

### BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ $0^0$ ĐẾN $180^0$

#### I. LÝ THUYẾT

##### 1. Giá trị lượng giác



Với mỗi góc  $\alpha$  ( $0^0 \leq \alpha \leq 180^0$ ) ta xác định được một điểm  $M$  duy nhất trên nửa đường tròn đơn vị sao cho  $\widehat{xOM} = \alpha$ . Gọi  $(x_0; y_0)$  là tọa độ điểm  $M$ , ta có:

- Tung độ  $y_0$  của  $M$  là sin của góc  $\alpha$ , kí hiệu là  $\sin \alpha = y_0$ ;
- Hoành độ  $x_0$  của  $M$  là cosin của góc  $\alpha$ , kí hiệu là  $\cos \alpha = x_0$ ;
- Tỉ số  $\frac{y_0}{x_0}$  ( $x_0 \neq 0$ ) là tang của góc  $\alpha$ , kí hiệu là  $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0}$ ;
- Tỉ số  $\frac{x_0}{y_0}$  ( $y_0 \neq 0$ ) là cotang của góc  $\alpha$ , kí hiệu là  $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0}$ .

Các số  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$ ,  $\cot \alpha$  được gọi là các *giá trị lượng giác* của góc  $\alpha$ .

##### 2. Tính chất

- Mỗi liên hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc **phụ nhau**:

$$\cos(90^0 - \alpha) = \sin \alpha; \sin(90^0 - \alpha) = \cos \alpha;$$

$$\tan(90^0 - \alpha) = \cot \alpha; \cot(90^0 - \alpha) = \tan \alpha.$$

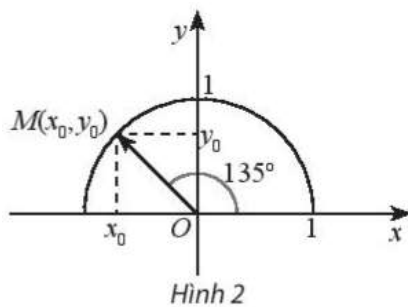
- Mỗi liên hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc **bù nhau**:

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin \alpha; \cos(180^0 - \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\tan(180^0 - \alpha) = -\tan \alpha (\alpha \neq 90^0); \cot(180^0 - \alpha) = -\cot \alpha (0^0 < \alpha < 180^0)$$

##### 3. Giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt

| $\alpha$           | $0^0$ | $30^0$ | $45^0$ | $60^0$ | $90^0$ | $120^0$ | $135^0$ | $150^0$ | $180^0$ |
|--------------------|-------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| Giá trị lượng giác |       |        |        |        |        |         |         |         |         |



Ta có  $\widehat{MOy} = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$ .

Ta tính được tọa độ điểm  $M$  là  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

Vậy theo định nghĩa ta có:

$$\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 135^\circ = -1; \cot 135^\circ = -1$$

**Ví dụ 2:** Không dùng máy tính cầm tay, tính các giá trị lượng giác sau:  $\sin 120^\circ$ ;  $\cos 150^\circ$ ,  $\tan 120^\circ$ ,  $\cot 135^\circ$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}; \cot 135^\circ = -\cot 45^\circ = -\tan 45^\circ = -1.$$

**Ví dụ 3:** Dùng máy tính cầm tay, tính.

a)  $\sin 144^\circ 23' 57''$ ; b)  $\cos 123^\circ 5' 48''$ ;

c)  $\tan 115^\circ 43' 26''$ ; d)  $\cot 139^\circ 35' 28''$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $\sin 144^\circ 23' 57'' = 0,582$ ; b)  $\cos 123^\circ 5' 48'' \approx -0,546$ ;

c)  $\tan 115^\circ 43' 26'' \approx -2,076$ ; d)  $\cot 139^\circ 35' 28'' \approx -1,175$ .

**Ví dụ 4:** Dùng máy tính cầm tay, tìm  $x$  ( $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ ), biết:

a)  $\cos x = -0,511$ ; b)  $\sin x = 0,456$ ;

c)  $\tan x = -0,473$ ; d)  $\cot x = -0,258$ .

A.

B.

C.

D.

- a)  $\alpha = 150^\circ$  ;
- b)  $\alpha = 60^\circ$  hay  $\alpha = 120^\circ$  ;
- c)  $\alpha = 150^\circ$  ;
- d)  $\alpha = 135^\circ$  .

**Câu 4.** Chứng minh rằng trong tam giác  $ABC$  ta có:

- a)  $\tan B = -\tan(A + C)$  .
- b)  $\sin C = \sin(A + B)$  .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

- a)  $\tan B = -\tan(180^\circ - B) = -\tan(A + C)$  ;
- b)  $\sin C = \sin(180^\circ - C) = \sin(A + B)$  .

**Câu 5.** Chứng minh rằng với mọi góc  $x$  ( $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ ), ta đều có:

- a)  $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$  .
- b)  $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$  .
- c)  $\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} (x \neq 90^\circ)$  .
- d)  $\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} (x \neq 0^\circ)$  .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

- a) Ta có:  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ;  $\sin x \geq 0 \Rightarrow \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$  ;
- b) Ta có:  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ;  $\cos x \geq 0 \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$  ;
- c) Ta có:  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} (x \neq 90^\circ)$  ;
- d) Ta có:  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} (x \neq 0^\circ)$  .

**Câu 6.** Cho góc  $x$  với  $\cos x = -\frac{1}{2}$ . Tính giá trị biểu thức  $S = 4\sin^2 x + 8\tan^2 x$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

## BÀI 2. ĐỊNH LÝ COSIN VÀ ĐỊNH LÝ SIN

### I. LÝ THUYẾT

#### 1. Định lý cosin trong tam giác

##### Định lý cosin

Với mọi tam giác  $ABC$ , nếu đặt  $BC = a, AC = b, AB = c$  thì ta luôn có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

##### Hệ quả

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

#### 2. Định lý sin trong tam giác

Với mọi tam giác  $ABC$ , nếu đặt  $BC = a, AC = b, AB = c$ , ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Trong đó  $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$

##### Hệ quả

$$a = 2R \sin A; \quad b = 2R \sin B; \quad c = 2R \sin C.$$

$$\sin A = \frac{a}{2R}; \quad \sin B = \frac{b}{2R}; \quad \sin C = \frac{c}{2R}.$$

#### 3. Các công thức tính diện tích tam giác

Cho tam giác  $ABC$ . Ta kí hiệu:

- ♦  $h_a, h_b, h_c$  là độ dài các đường cao lần lượt ứng với các cạnh  $BC, CA, AB$ .
- ♦  $R, r$  lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác.
- ♦  $p$  là nửa chu vi tam giác.
- ♦  $S$  là diện tích tam giác.

Ta có các **công thức tính diện tích tam giác** sau:

$$1) \quad S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c$$

$$2) \quad S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$3) \quad S = \frac{abc}{4R}$$

$$4) \quad S = pr$$

$$5) \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{công thức Heron})$$

### II. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 5:** Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{C} = 120^\circ, AC = 6 \text{ cm}$  và  $BC = 10 \text{ cm}$ . Tính độ dài cạnh  $AB$  và các góc  $A, B$  của tam giác đó.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Ta có:  $a = 25 \text{ cm}$ ;  $\hat{C} = 180^\circ - (80^\circ + 69^\circ) = 31^\circ$ .

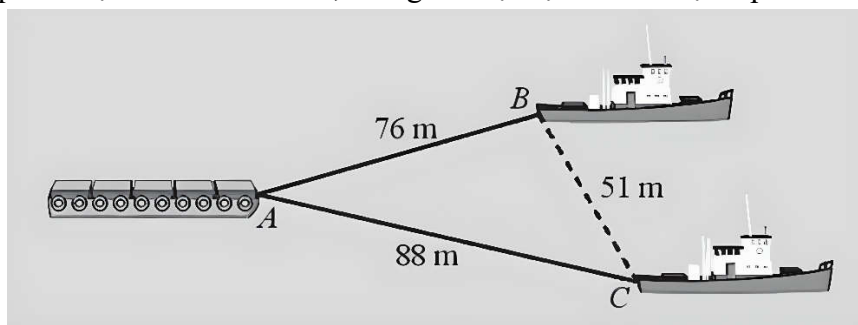
Áp dụng định lí sin, ta có:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ .

Suy ra:  $AC = b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{25 \cdot \sin 80^\circ}{\sin 69^\circ} \approx 26,37(\text{cm})$ ;

$AB = c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{25 \cdot \sin 31^\circ}{\sin 69^\circ} \approx 13,79(\text{cm})$ ;

$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{25}{2 \cdot \sin 69^\circ} \approx 13,39(\text{cm})$ .

**Ví dụ 8:** Hai tàu kéo cách nhau  $51m$ , cùng kéo một chiếc xà lan như Hình 3. Biết chiều dài của hai sợi cáp lần lượt là  $76m$  và  $88m$ , tính góc được tạo bởi hai sợi cáp.



Hình 3

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

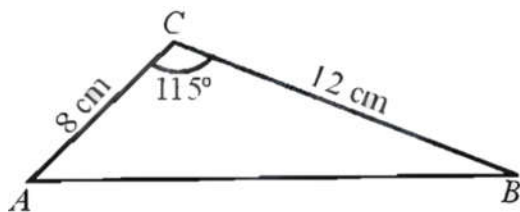
**Chọn**

Gọi vị trí của xà lan và hai con tàu lần lượt là  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Theo hệ quả của định lí cosin, ta có:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{76^2 + 88^2 - 51^2}{2 \cdot 76 \cdot 88} \approx 0,8163.$$

Vậy góc được tạo bởi hai sợi cáp là:  $\hat{A} \approx 35^\circ 16' 57''$

**Ví dụ 9:** Tính diện tích tam giác  $ABC$  trong Hình 4.



Hình 4

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Diện tích tam giác  $ABC$ :

b) Ta có  $S = \frac{abc}{4R}$ , suy ra  $R = \frac{abc}{4S} = \frac{15.13.14}{4.84} = 8,125 \text{ (cm)}$ .

c) Ta có công thức  $S = p.r$ .

Suy ra  $r = \frac{S}{p} = \frac{84}{21} = 4 \text{ (cm)}$ .

**Ví dụ 12:** Cho tam giác  $ABC$  có ba cạnh là  $a, b, c$  và  $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Chứng minh rằng:  $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ .

**Lời#A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Ta có các công thức:  $S = \frac{1}{2} a.b.\sin C$ ;  $a = 2R \sin A$ ;  $b = 2R \sin B$ .

Suy ra  $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ .

**Ví dụ 13:** Tính diện tích một cánh buồm hình tam giác có chiều dài một cạnh là 3,2 m và hai góc kề cạnh đó có số đo lần lượt là  $48^\circ$  và  $105^\circ$  (Hình 5).



Hình 5

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Gọi ba đỉnh của cánh buồm là  $A, B, C$ . Đặt  $a = BC$ ;  $b = AC$ ;  $c = AB$ .

Ta có:  $c = 3,2 \text{ m}$ ;  $\hat{C} = 90^\circ - (105^\circ + 48^\circ) = 27^\circ$ .

Áp dụng định lí sin, ta có:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ .

Suy ra:  $AC = b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{3,2 \cdot \sin 105^\circ}{\sin 27^\circ} \approx 6,8 \text{ (m)}$ ;

Ta có  $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 6,8 \cdot 3,2 \cdot \sin 48^\circ \approx 8,1 \text{ (m}^2\text{)}$ .

**Câu 11.** Tính góc lớn nhất của tam giác  $ABC$ , biết các cạnh là  $a = 8, b = 12, c = 6$ .

A.

B.

C.

D.

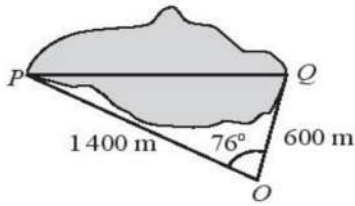
**Lời giải**

**Chọn**

Do  $b$  là cạnh lớn nhất nên góc  $B$  là góc lớn nhất. Ta có:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{8^2 + 6^2 - 12^2}{2 \cdot 8 \cdot 6} \approx -\frac{11}{24}; \Rightarrow \hat{B} \approx 117^\circ 16' 46''.$$

**Câu 12.** Tính khoảng cách giữa hai điểm  $P$  và  $Q$  của một hồ nước (Hình 7). Cho biết từ một điểm  $O$  cách 2 điểm  $P$  và  $Q$  lần lượt là 1400 m và 600 m người quan sát nhìn thấy một góc  $76^\circ$ .



A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{OP^2 + OQ^2 - 2OP \cdot OQ \cdot \cos O} \\ &= \sqrt{1400^2 + 600^2 - 2 \cdot 1400 \cdot 600 \cdot \cos 76^\circ} \approx 1383,32(\text{m}). \end{aligned}$$

**Câu 13.** Cho tam giác  $ABC$  với  $BC = a; AC = b; AB = c$ . Chứng minh rằng:

$$1 + \cos A = \frac{(a + b + c)(-a + b + c)}{2bc}.$$

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

$$1 + \cos A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{(a + b + c)(-a + b + c)}{2bc}$$

**Câu 14.** Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 24$  cm,  $b = 26$  cm,  $c = 30$  cm.

a) Tính diện tích tam giác  $ABC$ .

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác  $ABC$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

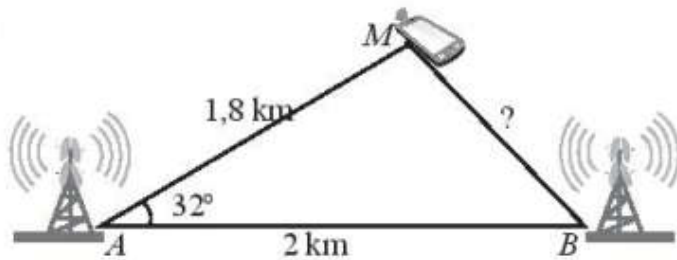
**Chọn**

$$\text{a) } p = \frac{1}{2}(a + b + c) = 40.$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{40 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 10} = 80\sqrt{14} (\text{cm}^2)$$

### Chọn

Diện tích miếng bánh mì kebab là:  $S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 \cdot \sin 35^\circ \approx 34,4 \text{ (cm}^2\text{)}.$



Hình 2

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

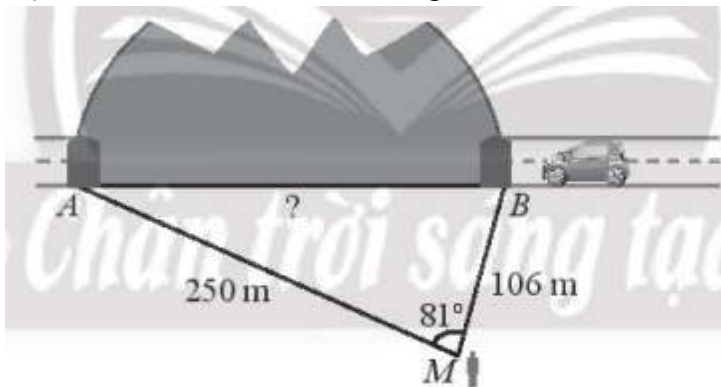
Áp dụng định lí côsin trong tam giác  $MAB$ , ta có:

$$MB^2 = AB^2 + MA^2 - 2 \cdot AB \cdot MA \cdot \cos A = 2^2 + 1,8^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1,8 \cdot \cos 32^\circ \approx 1,134.$$

Suy ra:  $MB \approx \sqrt{1,134} \approx 1,065$  (km).

Vậy khoảng cách từ vị trí của người đi đến trạm phát sóng  $B$  là 1,065 (km).

**Ví dụ 16:** Tính chiều dài của đường hầm  $AB$  với số liệu cho trong Hình 3.



Hình 3

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Gọi vị trí của người quan sát là điểm  $M$  và gọi  $A, B$  lần lượt là hai đầu đường hầm.

Ta có tam giác  $MAB$  với  $MA = 250$  m,  $MB = 106$  m và  $\widehat{M} = 81^\circ$ .

Áp dụng định lí côsin trong tam giác  $MAB$ , ta có:

$$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2 \cdot MA \cdot MB \cdot \cos \widehat{M} = 250^2 + 106^2 - 2 \cdot 250 \cdot 106 \cdot \cos 81^\circ \approx 65444,97.$$

Suy ra:  $AB \approx \sqrt{65444,97} \approx 255,82$  (m).

Vậy chiều dài của đường hầm  $AB$  khoảng 255,82 m.

**Ví dụ 17:** Hai máy bay cùng cất cánh từ một sân bay nhưng bay theo hai hướng khác nhau. Một chiếc đi chuyển với tốc độ 450 km/h theo hướng tây và chiếc còn lại đi chuyển theo hướng hợp với hướng bắc

### Chọn

$$\cos B = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot BA \cdot BC} = \frac{78^2 + 49^2 - 104^2}{2 \cdot 78 \cdot 49} = -\frac{111}{364} \Rightarrow \hat{B} \approx 107^\circ 45' 18''.$$

Vậy góc tạo bởi hai hướng cầu cao tốc là:  $107^\circ 45' 18''$

### III. BÀI TẬP

**Câu 19.** Cho tam giác  $ABC$  với  $BC = a$ ;  $AC = b$ ;  $AB = c$  và  $a = b$ . Chứng minh rằng:  $c^2 = 2a^2(1 - \cos C)$

A.

B.

C.

D.

Lời giải

### Chọn

Áp dụng định lý cosin ta có:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$ .

Do  $a = b$  nên  $c^2 = 2a^2 - 2a^2 \cdot \cos C = 2a^2(1 - \cos C)$ .

**Câu 20.** Tính các góc chưa biết của tam giác  $ABC$  trong các trường hợp sau:

a)  $\hat{A} = 42^\circ$ ,  $\hat{B} = 63^\circ$ ;

b)  $BC = 10$ ,  $AC = 20$ ,  $\hat{C} = 80^\circ$ ;

c)  $AB = 15$ ,  $AC = 25$ ,  $BC = 30$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

### Chọn

a)  $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 42^\circ - 63^\circ = 75^\circ$ .

b) Áp dụng định lý cosin, ta có:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C = 10^2 + 20^2 - 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \cos 84^\circ = 430,54 \Rightarrow AB \approx 20,75$$

Áp dụng định lý Sin ta có:  $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{10}{\sin A} = \frac{20}{\sin B} = \frac{20,75}{\sin C}$

$$\Rightarrow \sin A \approx 0,475; \sin B \approx 0,949 \Rightarrow \hat{A} \approx 28^\circ 21' 34'', \hat{B} \approx 71^\circ 37' 21''.$$

c) Áp dụng định lý cosin, ta có:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{15^2 + 25^2 - 30^2}{2 \cdot 15 \cdot 25} = -\frac{1}{15}$$

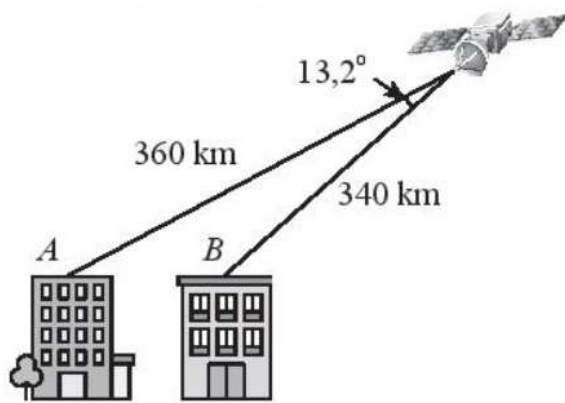
$$\Rightarrow \hat{A} \approx 93^\circ 49' 21''$$

Áp dụng định lý sin, ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{30}{\sin 93^\circ 49' 21''} = \frac{25}{\sin B} = \frac{15}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \hat{C} \approx 29^\circ 55' 35''; \hat{B} \approx 56^\circ 15' 4''.$$

**Câu 21.** Để xác định chiều cao của một toà nhà cao tầng, một người đứng tại điểm  $M$ , sử dụng giác kế nhìn thấy đỉnh toà nhà với góc nâng  $\widehat{RQA} = 79^\circ$ , người đó lùi ra xa một khoảng cách  $LM = 50\text{m}$  thì nhìn



Hình 8

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

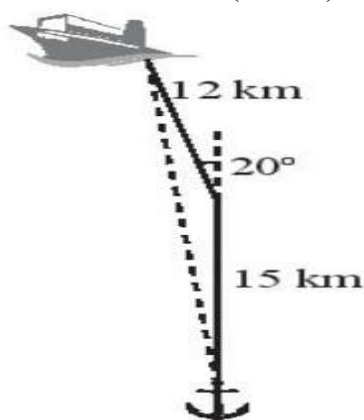
Áp dụng định lý cosin trong tam giác  $OAB$ , ta có:

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \widehat{AOB} = 360^2 + 340^2 - 2 \cdot 360 \cdot 340 \cdot \cos 13,2^\circ \approx 6867,88$$

Suy ra  $AB = \sqrt{6867,88} \approx 82,87 (km)$ .

Vậy khoảng cách giữa nóc hai tòa nhà cao ốc khoảng 83km.

**Câu 24.** Một chiếc tàu khởi hành từ bến cảng, đi về hướng bắc  $15 km$ , sau đó rẽ trái  $20^\circ$  về hướng tây bắc và đi thêm  $12 km$  nữa (Hình 9). Tính khoảng cách từ tàu đến bến cảng.



Hình 9

A.

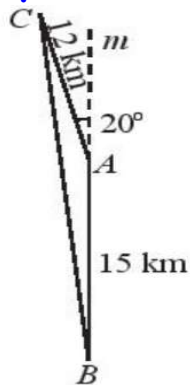
B.

C.

D.

Lời giải

Chọn



Hình 1

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

**Câu 25.** Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.**  $\sin a = \sin(180^\circ - a)$ ; **B.**  $\cos a = \cos(180^\circ - a)$ ;  
**C.**  $\tan a = \tan(180^\circ - a)$ ; **D.**  $\cot a = \cot(180^\circ - a)$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn A**

**Câu 26.** Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào sai?

- A.**  $\cos 45^\circ = \sin 135^\circ$ , **B.**  $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$ ,  
**C.**  $\sin 60^\circ = \cos 120^\circ$ . **D.**  $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn D**

**Câu 27.** Bất đẳng thức nào dưới đây là đúng?

- A.**  $\sin 90^\circ 15' < \sin 90^\circ 30'$ ; **B.**  $\sin 90^\circ < \sin 150^\circ$ ;  
**C.**  $\cos 90^\circ 30' > \cos 100^\circ$  **D.**  $\cos 150^\circ > \cos 120^\circ$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn C**

**Câu 28.** Trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào là đúng?

- A.**  $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  **B.**  $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  
**C.**  $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  **D.**  $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn C**

**Câu 29.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a, CA = b, AB = c$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** Nếu  $b^2 + c^2 - a^2 > 0$  thì góc  $A$  nhọn; **B.** Nếu  $b^2 + c^2 - a^2 > 0$  thì góc  $A$  tù;

**Câu 34.** Cho  $\widehat{xOy} = 30^\circ$ . Gọi  $A$  và  $B$  là hai điểm di động lần lượt trên  $Ox$  và  $Oy$  sao cho  $AB = 1$ . Độ dài lớn nhất của đoạn  $OB$  bằng:

A. 1,5.                                      B.  $\sqrt{3}$ .                                      C.  $2\sqrt{2}$ .                                      D. 2.

A.                                              B.                                              C.                                              D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn D**

**Câu 35.** Cho tam giác với ba cạnh là  $a, b, c$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

A.                                              B.                                              C.                                              D.

**Lời giải**

**Chọn**

Áp dụng định lý cosin, ta có:

$$\frac{\cos A}{a} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc}; \frac{\cos B}{b} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2abc}; \frac{\cos C}{c} = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2abc}.$$

$$\Rightarrow \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}.$$

**Câu 36.** Cho tam giác  $ABC$ . Biết  $a = 24$ ;  $b = 36$ ;  $\widehat{C} = 52^\circ$ . Tính cạnh  $c$  và hai góc  $\widehat{A}, \widehat{B}$ .

A.                                              B.                                              C.                                              D.

**Lời giải**

**Chọn**

Áp dụng định lý cosin:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C = 24^2 + 36^2 - 2 \cdot 24 \cdot 36 \cdot \cos 52^\circ \approx 808,14.$$

$$\Rightarrow c \approx 28,43.$$

$$\text{Áp dụng định lý sin, ta có: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{24}{\sin A} = \frac{36}{\sin B} = \frac{28,43}{\sin 52^\circ}.$$

$$\Rightarrow \sin A \approx \frac{24 \cdot \sin 52^\circ}{28,43} \approx 0,665; \sin B \approx \frac{36 \cdot \sin 52^\circ}{28,43} \approx 0,998.$$

$$\Rightarrow \widehat{A} \approx 41^\circ 40' 56'', \widehat{B} \approx 86^\circ 22' 32''.$$

**Câu 37.** Hai chiếc tàu thủy  $P$  và  $Q$  cách nhau 50m. Từ  $P$  và  $Q$  thẳng hàng với chân  $A$  của tháp hải đăng  $AB$  ở trên bờ biển, người ta nhìn chiều cao  $AB$  của tháp dưới các góc  $\widehat{BPA} = 40^\circ$  và  $\widehat{BQA} = 52^\circ$ . Tính chiều cao của tháp hải đăng đó.

A.                                              B.                                              C.                                              D.

**Lời giải**

**Chọn**

A.

B.

C.

D.

## Lời giải

## Chọn

Ta có:  $\angle AOB = 180^\circ - 45^\circ - 15^\circ = 120^\circ$

Áp dụng định lí coossin, ta có

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos AOB} \\ &= \sqrt{2400^2 + 1800^2 - 2 \cdot 2400 \cdot 1800 \cdot \cos 120^\circ} \approx 3650 \text{ (km)} \end{aligned}$$

Vậy hai máy bay cách nhau khoảng 3650(km)

**Câu 40.** Cho tam giác  $ABC$  không vuông. Chứng minh rằng  $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2}$ .

A.

B.

C.

D.

## Lời giải

## Chọn

$$\text{Ta có: } \frac{\tan A}{\tan B} = \frac{\sin A}{\sin B} \cdot \frac{\cos B}{\cos A} = \frac{\frac{a}{2R}}{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} \cdot \frac{\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}}{\frac{b}{2R}} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}$$

**Câu 41.** Một tháp viễn thông cao 42 m được dựng thẳng đứng trên một sườn dốc  $34^\circ$  so với phương ngang. Từ đỉnh tháp người ta neo một sợi dây cáp xuống một điểm trên sườn dốc cách chân cáp 33 m như Hình 2. Tính chiều dài của sợi dây cáp đó.

A.

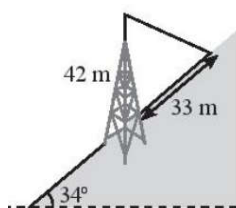
B.

C.

D.

## Lời giải

## Chọn



Hình 2

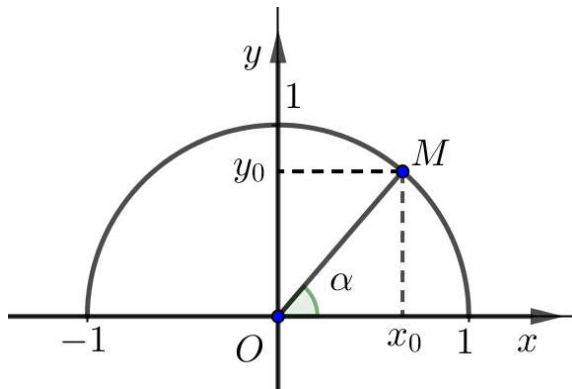
Ta có:  $AC = 42, BC = 33, \angle CMH = 34^\circ, \angle CHM = 90^\circ$ .

## CHƯƠNG III: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

### BÀI 5: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ $0^\circ$ đến $180^\circ$

#### I. LÝ THUYẾT

1. Điểm  $M(x_0; y_0)$  nằm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho  $\widehat{XOM} = \alpha$  (H.3.1).



Hình 3.1

Khi đó:

$$\sin \alpha = y_0, \cos \alpha = x_0,$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ),$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq 0^\circ, \alpha \neq 180^\circ),$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \quad (\alpha \notin \{0^\circ; 90^\circ; 180^\circ\}).$$

2. Khi  $\alpha = 0^\circ$  thì  $\sin \alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = 1$ .

Khi  $\alpha = 90^\circ$  thì  $\sin \alpha = 1$ ,  $\cos \alpha = 0$ .

Khi  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  thì  $0 < \sin \alpha < 1$ ,  $0 < \cos \alpha < 1$ ,  $\tan \alpha > 0$  và  $\cot \alpha > 0$ .

Khi  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  thì  $0 < \sin \alpha < 1$ ,  $-1 < \cos \alpha < 0$ ,  $\tan \alpha < 0$  và  $\cot \alpha < 0$ .

3. Bảng giá trị lượng giác (GTLG) của một số góc đặc biệt cần nhớ

a) Từ Bảng 3.1 ta thấy

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = -\cos 135^\circ, \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \sin 150^\circ \text{ và } \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 120^\circ.$$

$$\text{Từ đó suy ra } A = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1.$$

$$\text{b) Do } \tan 135^\circ = -1, \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{nên } B = -1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1.$$

$$\text{c) Cũng từ Bảng 3.1, } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \cos 180^\circ = -1, \cot 45^\circ = 1.$$

$$\text{Suy ra } C = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - (-1) \cdot 1 = 0.$$

**Chú ý.** Nếu để ý đến mối liên hệ giữa góc có trong biểu thức, như các góc bù nhau, các góc phụ nhau, thì ta có thể giải bài toán theo cách sau:

$$\text{a) Do } 135^\circ = 180^\circ - 45^\circ, 150^\circ = 180^\circ - 30^\circ, 120^\circ = 180^\circ - 60^\circ \text{ nên}$$

$$A = \sin 45^\circ \cdot (-\cos 45^\circ) + \cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ - \cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1.$$

$$\text{b) Do } 135^\circ = 180^\circ - 45^\circ, 60^\circ = 90^\circ - 30^\circ, 150^\circ = 180^\circ - 30^\circ \text{ nên}$$

$$B = -1 + 1 - \tan 60^\circ \cdot (-\tan 30^\circ) = 1.$$

$$\text{c) Do } 150^\circ = 180^\circ - 30^\circ \text{ nên}$$

$$C = 2 \sin 60^\circ \cdot (-\tan 30^\circ) - \cos 180^\circ \cdot \cot 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - (-1) \cdot 1 = 0.$$

**Ví dụ 2:** Cho góc  $\alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$  thỏa mãn  $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ .

a) Tính  $\tan \alpha$ .

b) Tính giá trị của biểu thức  $P = \tan \alpha + 2 \cot \alpha$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

$$\tan 75^\circ \cdot \cot 105^\circ = \tan 75^\circ \cdot (-\cot 75^\circ) = -1. \quad (2)$$

Do  $40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$  nên theo hệ thức cơ bản, ta có:

$$\tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ = \tan 40^\circ \cdot \cot 40^\circ = 1. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra  $D = 12 - 4 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 15$ .

e) Do  $148^\circ + 32^\circ = 108^\circ + 72^\circ = 180^\circ$  và  $72^\circ + 18^\circ = 90^\circ$  nên

$$\begin{aligned} E &= 4 \tan 32^\circ \cdot (-\cot 32^\circ) \cdot \cos 60^\circ + 5(-\cot 72^\circ)^2 \cdot \cos^2 18^\circ + 5 \cos^2 18^\circ \\ &= 4 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot 1 = 3. \end{aligned}$$

**Câu 2.** Cho góc  $\alpha$ ,  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  thỏa mãn  $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ . Tính giá trị của biểu thức

$$F = \frac{\tan \alpha + 2 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}.$$

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

**HD.** Sử dụng hệ thức cơ bản, chú ý do  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  nên

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{\sqrt{7}}{4}. \text{ Đáp số: } F = \frac{23}{16}.$$

**Câu 3.** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ,  $\tan \alpha = 2$ . Tính giá trị của các biểu thức sau:

a)  $G = 2 \sin \alpha + \cos \alpha$ ;

b)  $H = \frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}.$

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

**HD.** Sử dụng hệ thức cơ bản, chú ý do  $\tan \alpha > 0$  nên  $\alpha$  là góc nhọn.

Đáp số: a)  $G = \sqrt{5}$ ; b)  $H = 5$ .

**Câu 4.** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ,  $\tan \alpha = \sqrt{2}$ . Tính giá trị của biểu thức

$$K = \frac{\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha - 4 \cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}.$$

trong đó  $m = 0$  nếu  $1 \leq N \leq 172$ ,  $m = 1$  nếu  $173 \leq N \leq 355$ ,  $m = 2$  nếu  $356 \leq N \leq 365$ .

a) Hãy áp dụng công thức trên để tính góc nghiêng của Mặt Trời vào ngày 10/10 trong năm không nhuận (năm mà tháng 2 có 28 ngày) tại vị trí có vĩ độ  $\phi = 20^\circ$ .

b) Hãy xác định vĩ độ tại nơi em sống và tính góc nghiêng của Mặt Trời tại đó theo hai cách đã được đề cập trong bài toán (đo trực tiếp và tính theo công thức) và so sánh hai kết quả thu được.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

### Lời giải

#### Chọn

a) Ngày 10/10 là ngày thứ 283 của năm không nhuận. Do đó, góc nghiêng của Mặt Trời vào ngày này tại vĩ độ  $\phi = 20^\circ$  bằng

$$\alpha = 90^\circ - 20^\circ - \left| \cos \left( \left( \frac{2(283+10)}{365} - 1 \right) \cdot 180^\circ \right) \right| \cdot 23,5^\circ = 70^\circ - \left| \cos \frac{221}{365} \cdot 180^\circ \right| \cdot 23,5^\circ \approx 62,35^\circ.$$

b) **Chú ý.** Vĩ độ của nơi có góc nghiêng Mặt Trời  $\alpha$  vào ngày thứ  $N$  trong năm bằng

$$\phi = 90^\circ - \alpha - \left| \cos \left( \left( \frac{2(N+10)}{365} - 1 \right) \cdot 180^\circ \right) \right| \cdot 23,5^\circ.$$

**Chú ý.** Công thức tính toán nói trên chính xác tới  $\pm 0,5^\circ$ .

Góc nghiêng của Mặt Trời có ảnh hưởng tới sự hấp thụ nhiệt của Mặt Trời của Trái Đất, tạo nên các mùa trong năm trên Trái Đất. Chẳng hạn, vào mùa hè, góc nghiêng lớn nên nhiệt độ cao.

Suy ra  $p-a=\frac{7}{2}$ ,  $p-b=\frac{5}{2}$ ,  $p-c=\frac{11}{2}$ . Từ đó, theo công thức Heron ta được diện tích của tam giác là

$$S = \sqrt{\frac{23}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{11}{2}} = \frac{\sqrt{8855}}{4}.$$

Suy ra bán kính đường tròn nội tiếp  $r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{8855}}{46}$  và bán kính đường tròn ngoại tiếp

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{432}{\sqrt{8855}}.$$

### Nhận xét

- Định lí cosin giúp ta giải tam giác trong trường hợp biết ba cạnh của tam giác hoặc biết hai cạnh và góc xem giữa hai cạnh đó (bài tập 3.9 và 3.9).

- Từ  $\cos A = \frac{53}{108}$ , sử dụng hệ thức cơ bản (bài tập 3.3, SGK Toán 10, tập một), tính được  $\sin A = \frac{\sqrt{8855}}{108}$ .

Từ đó, sử dụng công thức  $S = \frac{1}{2}bc \sin A$  ta cũng thu được  $S = \frac{\sqrt{8855}}{4}$ .

**Ví dụ 4:** Cho tam giác  $ABC$  có  $\hat{A} = 15^\circ$ ,  $c = 6$  và  $\hat{B} = 120^\circ$ .

a) Tính độ dài các cạnh  $a, b$ ;

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp và diện tích của tam giác;

c) Tính độ dài đường cao  $h_a$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

### Lời giải

#### Chọn

a) Do  $\hat{A} = 15^\circ$ ,  $\hat{B} = 120^\circ$  nên  $\hat{C} = 120^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 45^\circ$ .

Áp dụng định lí sin ta được:

$$a = \frac{c}{\sin C} \cdot \sin A = \frac{6}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 15^\circ = 3(\sqrt{3} - 1),$$

$$b = \frac{c}{\sin C} \cdot \sin B = \frac{6}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 120^\circ = 3\sqrt{6}.$$

b) Theo định lí sin, bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác là

$$R = \frac{c}{2 \sin C} = \frac{6}{2 \sin 45^\circ} = 3\sqrt{2}.$$

Suy ra  $AB^2 = BM^2 + 2BM.MD + AM^2$  (1).

Một cách tương tự, áp dụng định lý Pythagore trong tam giác  $ADC$ , cũng được  $AC^2 = AD^2 + (MC - MD)^2 = MC^2 - 2MC.MD + AM^2$  (2).

Từ (1) và (2) suy ra

$$AB^2 + AC^2 = (BM^2 + CM^2) + 2(BM.MD - CM.MD) + 2AM^2 = (BM^2 + CM^2) + 2AM^2.$$

$$\text{Hay } m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

b) Từ công thức tính diện tích tam giác ta suy ra  $\frac{1}{r} = \frac{p}{S} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ .

### Nhận xét

- Công thức  $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$  cho phép ta tính được độ dài đường trung tuyến của một tam giác, khi biết ba cạnh của nó. Cụ thể thu được công thức này bằng cách làm tương tự như trong bài 3.16 (Toán 10, tập một).

- Nếu gọi  $E$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $M$  thì tứ giác  $ABEC$  là một hình bình hành với hai đường chéo  $BC$ ,  $AE$ . Khi đó công thức tính độ dài đường trung tuyến ở phần a) trở thành  $BC^2 + AE^2 = AB^2 + BE^2 + EC^2 + CA^2$ .

**Ví dụ 6:** Cho tam giác  $ABC$  có các góc thỏa mãn  $\sin C = 2.\sin B.\cos A$ . Chứng minh rằng tam giác  $ABC$  là một tam giác cân.

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

Áp dụng định lý sin và cosin, ta có

$$\sin C = 2.\sin B.\cos A \Leftrightarrow c = 2b \cos A \Leftrightarrow c = 2b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Leftrightarrow c^2 = b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow a = b.$$

Vậy tam giác  $ABC$  cân tại  $C$ .

**Ví dụ 7:** Để đo chiều cao của một tòa nhà, người ta chọn hai điểm  $A$  và  $B$  thẳng hàng với chân  $C$  của tòa nhà, cách nhau 15 m. Sử dụng giác kế, từ  $A$  và  $B$  tương ứng nhìn thấy đỉnh  $D$  của tòa nhà dưới các góc  $35^\circ$  và  $40^\circ$  so với phương nằm ngang. Hỏi chiều cao của tòa nhà đo được là bao nhiêu mét?

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

**Câu 8.** Tam giác  $ABC$  có  $a = 19$ ,  $b = 6$  và  $c = 15$ .

- a) Tính  $\cos A$ .
- b) Tính diện tích của tam giác.
- c) Tính độ dài đường cao  $h_c$ .
- d) Tính độ dài bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Đáp số:  $\cos A = -\frac{5}{9}$ .

b) Có thể tính diện tích theo công thức Heron hoặc công thức  $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ .

Đáp số:  $S = 10\sqrt{14}$ .

c) Đáp số:  $h_c = \frac{4\sqrt{14}}{3}$ .

d) Sử dụng công thức  $S = p \cdot r$ . Đáp số:  $r = \frac{\sqrt{14}}{2}$ .

**Câu 9.** Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 4$ ,  $\hat{C} = 60^\circ$ ,  $b = 5$

- a) Tính các góc và cạnh còn lại của tam giác.
- b) Tính diện tích của tam giác.
- c) Tính độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Theo định lý côsin,  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 21$ . Suy ra  $c = \sqrt{21}$ .

Áp dụng định lý sin, ta được  $\sin A = \frac{a}{c} \cdot \sin C = \frac{4}{\sqrt{21}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{7}}$ .

Suy ra  $\hat{A} \approx 49^\circ 6' 24''$ .

Cũng vậy, tính được  $\sin B = \frac{b}{c} \cdot \sin C = \frac{5}{\sqrt{21}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$ .

b) Áp dụng định lí sin cho tam giác  $ABC$  ta được  $\sin \widehat{CAB} = \frac{BC}{AC} \cdot \sin \widehat{ABC} \approx 0,6993$ .

Suy ra  $\widehat{CAB} \approx 44^\circ$  và do đó  $AC$  chệch về hướng tây một góc  $44^\circ - 24^\circ = 20^\circ$  so với phương bắc.

Vậy hướng từ  $A$  tới  $C$  là  $N20^\circ W$ .

**Câu 11.** Một tàu du lịch xuất phát từ bãi biển Đồ Sơn (Hải Phòng), chạy theo hướng  $N80^\circ E$  với vận tốc 20 km/h. Sau khi đi được 30 phút, tàu chuyển sang hướng  $E20^\circ S$  giữ nguyên vận tốc và chạy tiếp 36 phút nữa đến đảo Cát Bà. Hỏi khi đó tàu du lịch cách vị trí xuất phát bao nhiêu kilômet?

A.

B.

C.

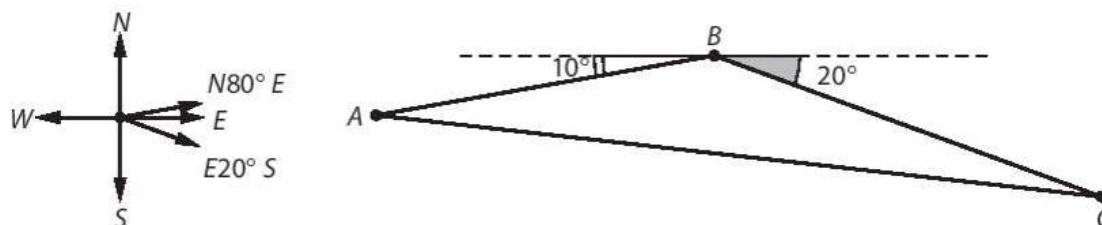
D.

**Lời giải**

**Chọn**

Coi điểm xuất phát là  $A$ , điểm tàu chuyển hướng là  $B$  và đích đến là  $C$  (H3.8).

Theo giả thiết  $\widehat{ABC} = 180^\circ - (10^\circ + 20^\circ) = 150^\circ$ .



Hình 3.8

Do tàu chạy từ  $A$  tới  $B$  với vận tốc 20 km/h trong 30 phút, nên  $AB = 20 \cdot \frac{30}{60} = 10$  (km).

Do tàu chạy từ  $B$  đến  $C$  với vận tốc 20 km/h trong 36 phút, nên  $BC = 20 \cdot \frac{36}{60} = 12$  (km).

Áp dụng định lí cosin cho tam giác  $ABC$  ta được

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 452.$$

Suy ra  $AC \approx \sqrt{452} \approx 21$  (km).

**Câu 12.** Một cây cổ thụ mọc thẳng đứng bên lề một con dốc có độ dốc  $10^\circ$  so với phương nằm ngang. Từ một điểm dưới chân dốc, cách gốc cây 31m người ta nhìn đỉnh ngọn cây dưới một góc  $40^\circ$  so với phương nằm ngang. Hãy tính chiều cao của cây.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Áp dụng định lí sin cho tam giác  $ABC$  (H.3.9).

### Lời giải

#### Chọn

a) Gọi  $M, N$  theo thứ tự là trung điểm của các cạnh  $BC, CA$ ; gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$

(H.3.10). Khi đó  $AG = \frac{2}{3}AM, BG = \frac{2}{3}BN$ . Từ đó theo định lý Pythagore ta có

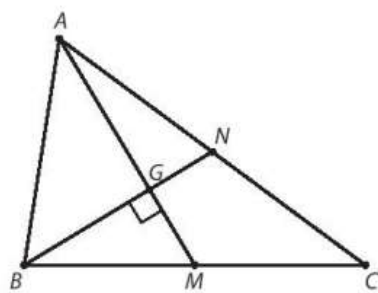
$$c^2 = AB^2 = AG^2 + BG^2 = \frac{4}{9} \left( \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) + \frac{4}{9} \left( \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4} \right) = \frac{4}{9} \left( c^2 + \frac{a^2 + b^2}{4} \right).$$

Suy ra  $5c^2 = a^2 + b^2$ .

b) Do  $a^2 + b^2 = 5c^2$  nên  $\cot C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} = \frac{c^2}{S}$ .

Mà  $2(\cot A + \cot B) = 2 \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S} \right) = \frac{c^2}{S}$ .

Suy ra  $\cot C = 2(\cot A + \cot B)$ .



Hình 3.10

**Câu 15.** Cho tam giác  $ABC$  có các góc thỏa mãn  $\frac{\sin A}{1} = \frac{\sin B}{2} = \frac{\sin C}{\sqrt{3}}$ . Tính số đo các góc của tam giác.

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

HD.

Áp dụng định lý sin, ta có  $a : b : c = 1 : 2 : \sqrt{3}$ .

Đáp số:  $\hat{A} = 30^\circ, \hat{B} = 90^\circ, \hat{C} = 60^\circ$ .

**Câu 16.** Cho tam giác  $ABC$  có  $S = 2R^2 \sin A \sin B$ . Chứng minh rằng tam giác  $ABC$  là một tam giác vuông.

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

### I. TRẮC NGHIỆM

**Câu 17.** Tam giác  $ABC$  có  $\hat{A} = 15^\circ$ ,  $\hat{B} = 45^\circ$ . Giá trị của  $\tan C$  bằng

- A.  $-\sqrt{3}$ .                      B.  $\sqrt{3}$ .                      C.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .                      D.  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

- A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn A

**Câu 18.** Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , lấy điểm  $M$  thuộc nửa đường tròn đơn vị sao cho  $\widehat{xOM} = 135^\circ$ . Tích hoành độ và tung độ của điểm  $M$  bằng

- A.  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ .                      B.  $\frac{1}{2}$ .                      C.  $-\frac{1}{2}$ .                      D.  $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ .

- A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn C

**Câu 19.** Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , lấy điểm  $M$  thuộc nửa đường tròn đơn vị sao cho  $\widehat{xOM} = 150^\circ$ . Gọi  $N$  là điểm đối xứng với  $M$  qua trục tung. Giá trị của  $\tan \widehat{xON}$  bằng

- A.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .                      B.  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ .                      C. 1.                      D.  $-\sqrt{3}$ .

- A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn A

**Câu 20.** Cho góc nhọn  $\alpha$  có  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ . Giá trị của tích  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$  bằng

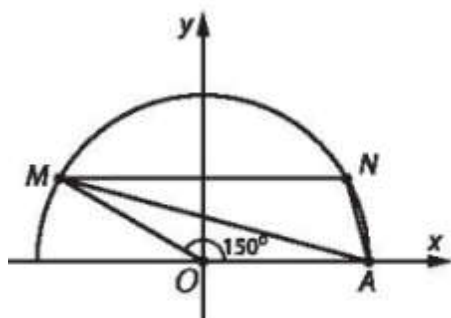
- A.  $\frac{4}{3}$ .                      B.  $\frac{12}{25}$ .                      C.  $\frac{25}{12}$ .                      D.  $\frac{3}{4}$ .

- A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

**Câu 24.** Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  lấy điểm  $M$  thuộc nửa đường tròn đơn vị, sao cho  $\widehat{XOM} = 150^\circ$  (H.3.5). Lấy  $N$  đối xứng với  $M$  qua trục tung. Diện tích của tam giác  $MAN$  bằng



Hình 3.5

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ .      B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .      C.  $\sqrt{3}$ .      D.  $2\sqrt{3}$ .

A.      B.      C.      D.

Lời giải

Chọn

Chọn A

**Câu 25.** Cho  $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ . Giá trị của  $P = \frac{\tan \alpha + 2 \cot \alpha}{2 \tan \alpha + 3 \cot \alpha}$  là

- A.  $-\frac{17}{33}$ .      B.  $\frac{17}{33}$ .      C.  $\frac{1}{2}$ .      D.  $\frac{16}{33}$ .

A.      B.      C.      D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 26.** Tam giác  $ABC$  có  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $c = 4$ . Bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác  $ABC$  là

- A.  $R = \frac{\sqrt{15}}{2}$ .      B.  $R = \frac{7}{\sqrt{15}}$       C.  $R = \frac{\sqrt{15}}{6}$ .      D.  $R = \frac{8}{\sqrt{15}}$ .

A.      B.      C.      D.

Lời giải

Chọn

Chọn D

**Câu 27.** Tam giác  $ABC$  có  $a = 4$ ,  $b = 5$ ,  $c = 6$ . Độ dài đường cao  $h_b$  bằng

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn B**

**Câu 32.** Tam giác  $ABC$  có diện tích  $S = 2R^2 \cdot \sin B \sin C$ , với  $R$  là độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác. Số đo góc  $A$  bằng

**A.**  $60^\circ$ .                      **B.**  $90^\circ$ .                      **C.**  $30^\circ$ .                      **D.**  $75^\circ$ .

**A.**                      **B.**                      **C.**                      **D.**

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn B**

**Câu 33.** Tam giác  $ABC$  có  $AB = \sqrt{5}$ ,  $AC = \sqrt{2}$  và  $\hat{C} = 45^\circ$ . Độ dài cạnh  $BC$  bằng

**A.** 3.                      **B.** 2.                      **C.**  $\sqrt{3}$ .                      **D.**  $\sqrt{2}$ .

**A.**                      **B.**                      **C.**                      **D.**

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn A**

**Câu 34.** Tam giác  $ABC$  có  $\hat{C} = 60^\circ$ ,  $AC = 2$  và  $AB = \sqrt{7}$ . Diện tích của tam giác  $ABC$  bằng

**A.**  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .                      **B.**  $3\sqrt{3}$ .                      **C.**  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .                      **D.**  $\sqrt{3}$ .

**A.**                      **B.**                      **C.**                      **D.**

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn C**

**Câu 35.** Tam giác  $ABC$  có  $\hat{A} = 60^\circ$ ,  $AB = 3$  và  $BC = 3\sqrt{3}$ . Độ dài bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác  $ABC$  là

**A.**  $\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}$ .                      **B.**  $\frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}$ .                      **C.**  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ .                      **D.**  $\sqrt{3}-1$ .

**A.**                      **B.**                      **C.**                      **D.**

**Lời giải**

**Chọn**

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

$$\text{a) } \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \tan \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \cot \alpha = -2\sqrt{2}.$$

$$\text{b) } A = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}; B = -3.$$

**Câu 39.** Cho  $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ .

$$\text{a) Tính } \sin 75^\circ, \cos 105^\circ, \tan 165^\circ.$$

$$\text{b) Tính giá trị của biểu thức } A = \sin 75^\circ \cdot \cos 165^\circ + \cos 105^\circ \cdot \sin 165^\circ.$$

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

$$\text{Do } \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \text{ suy ra } \cos 15^\circ = \sqrt{1-\sin^2 15^\circ} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Do đó } \tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = 2 - \sqrt{3}.$$

$$\text{a) } \sin 75^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos 105^\circ = \cos(180^\circ - 75^\circ) = -\cos 75^\circ = -\cos(90^\circ - 15^\circ)$$

$$= -\sin 15^\circ = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

$$\tan 165^\circ = \tan(180^\circ - 15^\circ) = -\tan 15^\circ = -2 + \sqrt{3}.$$

$$\text{b) Đáp số: } A = -1.$$

**Câu 40.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 1$ ,  $BC = 2$  và  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ . Tính độ dài cạnh và số đo các góc còn lại của tam giác.

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

$$\text{Đáp số: } \widehat{CAB} = 90^\circ, \widehat{BCA} = 30^\circ \text{ và } CA = \sqrt{3}.$$

### Chọn

Đáp số:  $a = \sqrt{3}$ ,  $h_a = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ .

**Câu 44.** Cho tam giác  $ABC$ , có  $c = 5, a = 8$  và  $\widehat{B} = 60^\circ$ .

- a) Tính  $b$  và số đo các góc  $A, C$  (số đo các góc làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị độ).
- b) Tính độ dài đường cao kẻ từ  $B$ .
- c) Tính độ dài trung tuyến kẻ từ  $A$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

### Lời giải

### Chọn

- a) HD. Áp dụng định lí Côsin.

Đáp số:  $b = 7, \widehat{C} \approx 38^\circ, \widehat{A} \approx 82^\circ$ .

b) Đáp số:  $h_b = \frac{20\sqrt{3}}{7}$ .

c) Đáp số:  $m_a = \sqrt{21}$

**Câu 45.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{B} = 15^\circ, \widehat{C} = 30^\circ$  và  $c = 2$ .

- a) Tính số đo góc  $A$  và độ dài các cạnh  $a, b$ .
- b) Tính diện tích và bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác.
- c) Lấy điểm  $D$  thuộc cạnh  $AB$  sao cho  $\widehat{BCD} = \widehat{DCA}$  (tức  $CD$  là phân giác của góc  $\widehat{BCA}$ ). Tính độ dài  $CD$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

### Lời giải

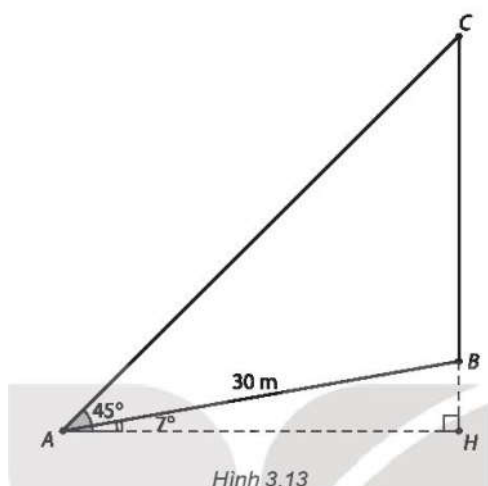
### Chọn

a) Đáp số:  $\widehat{A} = 135^\circ, a = 2\sqrt{2}, b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ .

b) Đáp số:  $S = \sqrt{3} - 1, R = 2$ .

- c) Do  $CD$  là phân giác của  $\widehat{BCA}$  nên  $\widehat{BCD} = \widehat{DCA} = 15^\circ = \widehat{CBD}$ . Suy ra tam giác  $DBC$  cân tại **D**. Từ đó, nếu gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$  thì  $IC = IB = \sqrt{2}$  và  $DI \perp BC$  (H.3.11).

Coi người quan sát từ điểm  $A$  cách gốc cây  $B$  một khoảng bằng  $30\text{ m}$ , nhìn ngọn cây  $C$  dưới góc  $45^\circ$  (H.3.13).



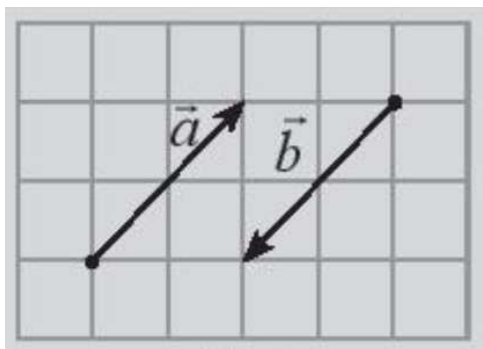
Do sườn đồi có độ dốc  $12\%$ , nên sườn đồi tạo với phương nằm ngang một góc  $\widehat{BAH} \approx 7^\circ$ .

Từ đó  $\widehat{BAC} = \widehat{HAC} - \widehat{HAB} \approx 38^\circ$  và  $\widehat{BCA} = 45^\circ$ .

Áp dụng định lí sin cho tam giác  $ABC$ , ta được

$$BC = \frac{AB}{\sin \widehat{BCA}} \cdot \sin \widehat{BAC} \approx 26(m).$$

9. Hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là **đối nhau** nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài, kí hiệu  $\vec{a} = -\vec{b}$ . Khi đó, vector  $\vec{b}$  được gọi là **vector đối** của vector  $\vec{a}$ .



Hình 5

10. Cho vector  $\vec{a}$  và điểm  $O$ , ta luôn tìm được một điểm  $A$  duy nhất sao cho:  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ .

11. Với một điểm  $A$  bất kì, ta quy ước có một vector đặc biệt mà điểm đầu và điểm cuối đều là  $A$ . Vector này được kí hiệu là  $\overrightarrow{AA}$  và gọi là vector-không. Ta kí hiệu vector-không là  $\vec{0}$ . Như vậy  $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \dots$  với mọi điểm  $A, B, C$ .

12. Vector-không có độ dài bằng 0 và cùng hướng với mọi vector.

## II. CÁC DẠNG TOÁN:

**Dạng 1: Xác định vector, sự cùng phương, cùng hướng, bằng nhau của hai vector và tính độ dài vector.**

**Dạng 2: Chứng minh các vector bằng nhau.**

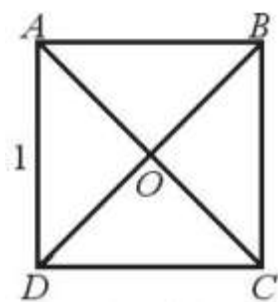
**Dạng 3: Bài toán thực tế.**

## III. VÍ DỤ MẪU:

**Ví dụ 1:** Cho hình vuông  $ABCD$  có tâm  $O$  và có cạnh bằng 1 (Hình 6).

a) Tìm điểm đầu, điểm cuối, giá và độ dài của các vector:  $\overrightarrow{CA}$ ;  $\overrightarrow{OA}$ ;  $\overrightarrow{BD}$

b) Tìm các vector đơn vị trong hình



(Hình 6).

A.

B.

C.

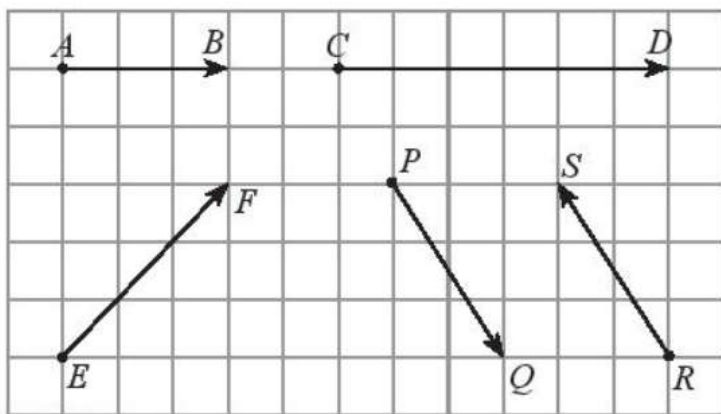
D.

Lời giải

Chọn

a)

Vector  $\overrightarrow{CA}$  có điểm đầu là  $C$ , điểm cuối là  $A$  và có giá là đường thẳng  $AC$ .



Hình 8

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

a) Vector cùng phương với vector  $\overrightarrow{AB}$  là  $\overrightarrow{CD}$ .

b) Vector cùng hướng với vector  $\overrightarrow{AB}$  là  $\overrightarrow{CD}$ .

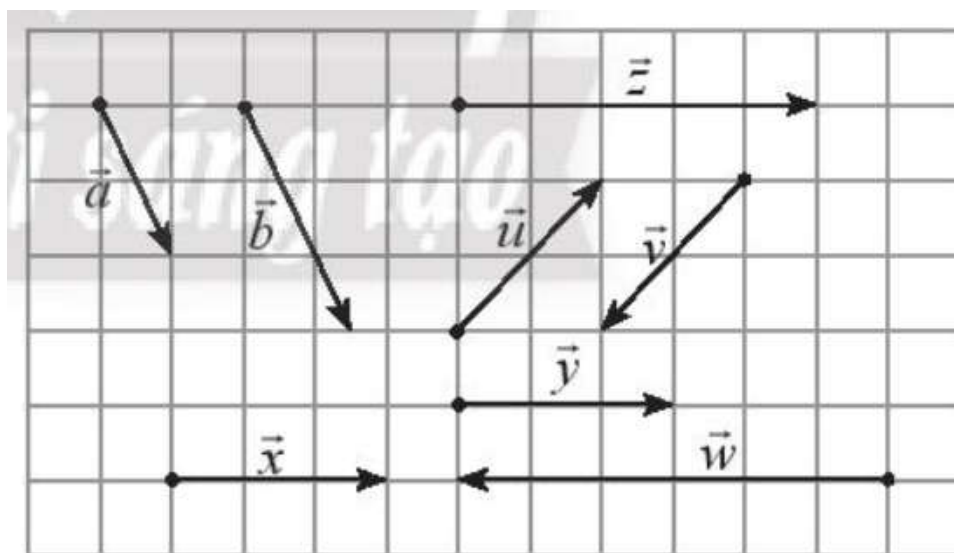
c) Vector đối của vector  $\overrightarrow{PQ}$  là  $\overrightarrow{RS}$ .

**Ví dụ 4:** Tìm trong Hình 9, các vector:

a) cùng phương với vector  $\vec{x}$ ;

b) cùng hướng với vector  $\vec{a}$ ;

c) ngược hướng với vector  $\vec{u}$ .



Hình 9

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

a) Vector cùng phương với vector  $\vec{x}$  là  $\vec{y}, \vec{w}, \vec{z}$ .

b) Vector cùng hướng với vector  $\vec{a}$  là  $\vec{b}$ .

- a) cùng hướng;
- b) ngược hướng;
- c) bằng nhau.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

- a)  $\overrightarrow{AO}$  cùng hướng với  $\overrightarrow{AC}$ .
- b)  $\overrightarrow{DO}$  ngược hướng với  $\overrightarrow{BD}$ .
- c)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .

**Câu 6.** Gọi  $O$  là tâm của hình bát giác đều  $ABCDEFGH$ .

- a) Tìm hai vector khác  $\vec{0}$  và cùng hướng với  $\overrightarrow{OA}$ .
- b) Tìm vector bằng vector  $\overrightarrow{BD}$

**A.**

**B.**

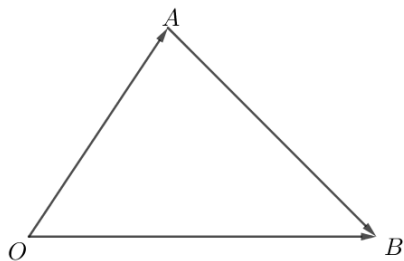
**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

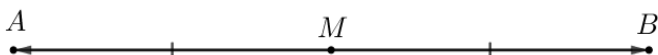
- a) Hai vector  $\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{EA}$  khác  $\vec{0}$  và cùng hướng với  $\overrightarrow{OA}$
- b) Vector  $\overrightarrow{HF}$  bằng vector  $\overrightarrow{BD}$



Hình 4

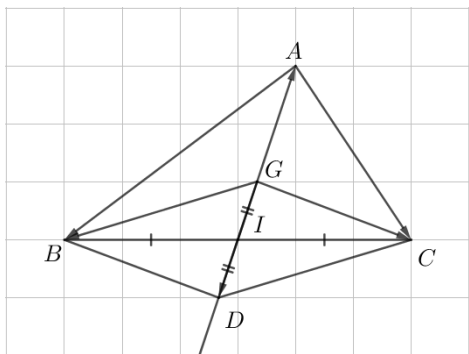
## 5. Tính chất vector của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

Điểm  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .



Hình 5

Điểm  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .



Hình 6

## II. CÁC DẠNG TOÁN:

**Dạng 1:** Tìm tổng, hiệu của hai hoặc nhiều vector.

**Dạng 2:** Chứng minh đẳng thức vector.

**Dạng 3:** Tính độ dài của vector.

**Dạng 4:** Xác định một điểm thỏa mãn một đẳng thức vector cho trước.

**Dạng 5:** Bài toán thực tế.

## III. VÍ DỤ MẪU:

**Ví dụ 5:** Cho tứ giác  $ABCD$ , tìm các vector sau

a)  $\vec{m} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{BC}$ .

b)  $\vec{n} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$ .

c)  $\vec{m} - \vec{n}$ .

A.

B.

C.

D.

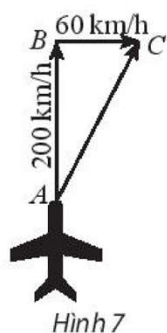
Lời giải

Chọn

Áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng vector, ta có:

Suy ra  $|\vec{b}| = 2AM = \sqrt{3}$ .

**Ví dụ 9:** Một máy bay có vector vận tốc chỉ theo hướng bắc, vận tốc gió là một vector theo hướng đông như Hình 7. Tính độ dài vector tổng của hai vector nói trên.



A. B. C. D.

Lời giải

Chọn

Gọi  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BC}$  lần lượt là vector vận tốc của máy bay và vận tốc của gió.

Ta có:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

Suy ra  $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{200^2 + 60^2} \approx 209 \text{ km/h}$ .

#### IV.BÀI TẬP:

**Câu 7.** Cho hình thoi  $ABCD$  và  $M$  là trung điểm cạnh  $AB$ ,  $N$  là trung điểm của cạnh  $CD$ . Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MN}$ .

A. B. C. D.

Lời giải

Chọn

Gọi  $O$  là tâm của hình thoi.

Ta có:  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MN}$ .

**Câu 8.** Chứng minh rằng với tứ giác  $ABCD$  bất kì, ta luôn có:

a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ . b)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$ .

A. B. C. D.

Lời giải

Chọn

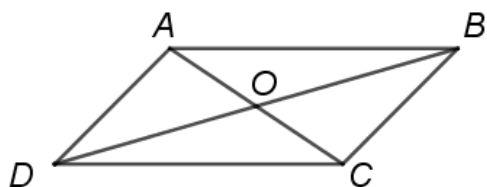
a) Theo quy tắc ba điểm của phép cộng vector, ta có:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ;  $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$ .

Suy ra  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Vậy  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

b) Ta có:  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$  và  $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB}$ .

Suy ra  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$



Hình 2

**Câu 11.** Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \vec{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \vec{MB}$  và  $\vec{F}_3 = \vec{MC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  và vật đứng yên. Cho biết độ lớn của  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  đều là  $100\text{N}$  và  $\widehat{AMB} = 60^\circ$ . Tìm độ lớn của lực  $\vec{F}_3$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

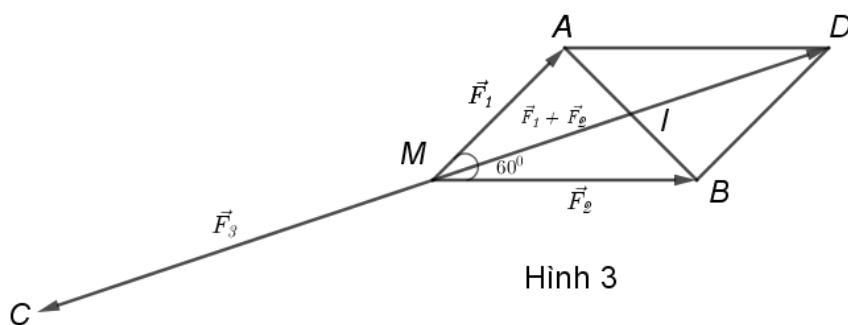
**Chọn**

$$M \text{ đứng yên nên } \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

Ta cần tính  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ .

$$\text{Cường độ } \vec{F}_1 \text{ và } \vec{F}_2 \text{ đều là } 100\text{N} \Rightarrow |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 100.$$

Đựng hình bình hành  $MADB$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AB$  và  $MD$ , khi đó  $I$  là trung điểm của  $AB$  và  $MD$ .



Hình 3

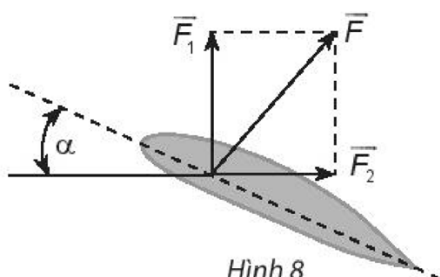
Mặt khác  $\widehat{AMB} = 60^\circ$  nên tam giác  $ABM$  đều. Khi đó  $MI \perp AB \Rightarrow \triangle AIM$  vuông tại  $I$ .

$$\Rightarrow MI = AM \sin \widehat{MAI} = 100 \cdot \sin 60^\circ = 50\sqrt{3} \Rightarrow MD = 2MI = 2 \cdot 50\sqrt{3} = 100\sqrt{3}.$$

$$\text{Mà } \vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = -(\vec{MA} + \vec{MB}) = -\vec{MD}.$$

Do đó  $\vec{F}_3$  có hướng ngược với hướng của  $\vec{MD}$  và có độ lớn  $|\vec{F}_3| = |-\vec{MD}| = 100\sqrt{3}$ .

**Câu 12.** Khi máy bay nghiêng cánh một góc  $\alpha$ , lực  $\vec{F}$  của không khí tác động vuông góc với cánh và bằng tổng của lực nâng  $\vec{F}_1$  và lực cản  $\vec{F}_2$  (Hình 8). Cho biết  $\alpha = 45^\circ$  và  $|\vec{F}| = a$ . Tính  $|\vec{F}_1|$  và  $|\vec{F}_2|$  theo  $a$ .



Hình 8

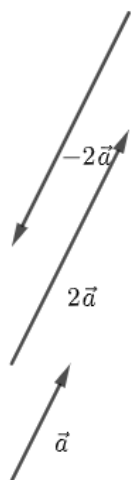
### BÀI 3. TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTOR

#### LÍ THUYẾT:

#### 1. Tích của một số với một vector và các tính chất:

- Cho số  $k$  khác 0 và vector  $\vec{a}$  khác  $\vec{0}$ . Tích của số  $k$  với vector  $\vec{a}$  là một vector, kí hiệu là  $k\vec{a}$ .

Vector  $k\vec{a}$  cùng hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k > 0$ , ngược hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k < 0$  và có độ dài bằng  $|k| \cdot |\vec{a}|$ .



Hình 1

Quy ước:  $0\vec{a} = \vec{0}$  và  $k\vec{0} = \vec{0}$ .

- Với hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bất kì, với mọi số thực  $h$  và  $k$ , ta có:

☐  $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

☐  $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$

☐  $h(k\vec{a}) = hk\vec{a}$

☐  $1.\vec{a} = \vec{a}$

☐  $(-1).\vec{a} = -\vec{a}$

#### 2. Điều kiện để hai vector cùng phương

Hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ( $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ ) cùng phương khi và chỉ khi có một số  $k$  sao cho  $\vec{a} = k\vec{b}$ .

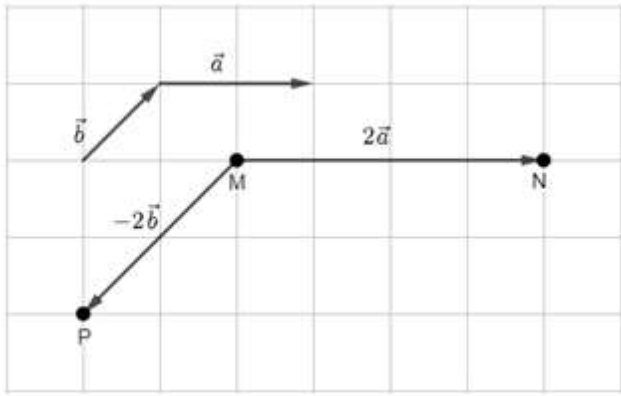
#### 3. Điều kiện để ba điểm thẳng hàng

Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi có số  $k$  khác 0 để  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

### Lời giải

#### Chọn

a)



Hình 4

$$b) |5\vec{a}| = 5|\vec{a}| = 5.2 = 10; \quad |-5\vec{b}| = |-5| \cdot |\vec{b}| = 5|\vec{b}| = 5\sqrt{2}$$

**Ví dụ 12:** Máy bay A bay với tốc độ  $a \text{ km/h}$ , máy bay B bay ngược hướng và có tốc độ gấp năm lần máy bay A. Biểu diễn vector vận tốc  $\vec{b}$  của máy bay B theo vận tốc  $\vec{a}$  của máy bay A.

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

Vector vận tốc của máy bay B là:  $\vec{b} = -5\vec{a}$

**Ví dụ 13:** Cho tam giác  $ABC$  và hai điểm  $M, N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ .

Tìm các bộ ba điểm thẳng hàng.

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

Ta có:  $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$  suy ra  $B, C, M$  thẳng hàng.

$\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$  suy ra  $C, N, A$  thẳng hàng.

### IV. BÀI TẬP:

**Câu 14.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABD$ .

Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

**Câu 17.** Cho hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$ . Tìm điểm  $K$  sao cho  $3\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$ .

A.

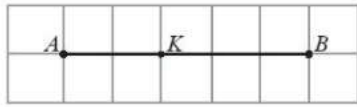
B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**



Hình 2

Vì  $3\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$  nên  $3\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$ .

Suy ra  $\overrightarrow{KA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{KB} = -\frac{2}{3}(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB})$ .

Do đó  $\frac{5}{3}\overrightarrow{KA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ .

Nên  $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ .

Vậy  $K$  nằm giữa  $A$  và  $B$  sao cho  $AK = \frac{2}{5}AB$ .

**Câu 18.** Cho lục giác  $ABCDEF$ . Gọi  $M, N, P, Q, R, S$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, BC, CD, DE, EF, FA$ . Chứng minh rằng hai tam giác  $MPQ$  và  $NQS$  có cùng trọng tâm.

A.

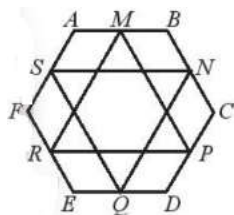
B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**



Hình 3

$MN$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$  nên ta có:  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ .

Tương tự ta có:  $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$ ;  $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$ .

Suy ra  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ .

Vậy  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \vec{0}$ .

Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $MPR$ , ta có:

$$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GR} = \vec{0}.$$

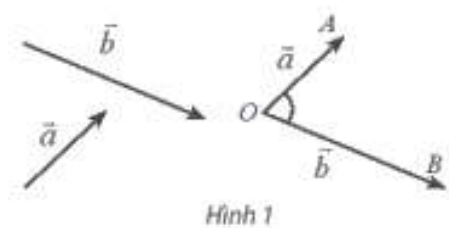
Mặt khác:  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GN}$ ;  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GQ}$ ;  $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RG} + \overrightarrow{GS}$ .

## BÀI 4. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

### LÍ THUYẾT:

#### 1. Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác  $\vec{0}$ . Từ một điểm  $O$  bất kì ta vẽ  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ . Góc  $\widehat{AOB}$  với số đo từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$  được gọi là **góc giữa hai vectơ**  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .



Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là  $(\vec{a}, \vec{b})$ .

Nếu  $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$  thì ta nói rằng  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc với nhau, kí hiệu là  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

*Chú ý:*

- Từ định nghĩa ta có  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ .
- Góc giữa hai vectơ cùng hướng và khác  $\vec{0}$  luôn bằng  $0^\circ$ .
- Góc giữa hai vectơ ngược hướng và khác  $\vec{0}$  luôn bằng  $180^\circ$ .
- Trong trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ  $\vec{a}$  hoặc  $\vec{b}$  là vectơ  $\vec{0}$  thì ta quy ước số đo góc giữa hai vectơ đó là tùy ý (từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$ ).

#### 2. Tích vô hướng của hai vectơ

Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác  $\vec{0}$ .

**Tích vô hướng** của  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là một số, kí hiệu là  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , được xác định bởi công thức:  
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

*Chú ý:*

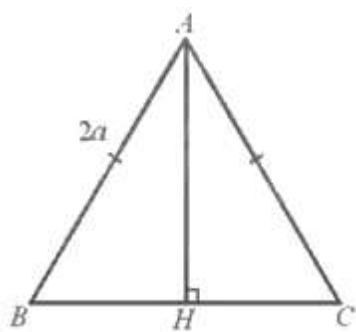
- Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng  $\vec{0}$ , ta quy ước  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .
- Với hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác  $\vec{0}$ , ta có  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .
- Khi  $\vec{a} = \vec{b}$  thì tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  được kí hiệu là  $\vec{a}^2$  và được gọi là *bình phương vô hướng* của vectơ  $\vec{a}$ .

Ta có  $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$ . Vậy bình phương vô hướng của một vectơ luôn bằng bình phương độ dài của vectơ đó.

#### 3. Tính chất của tích vô hướng

- Với ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  bất kì và mọi số  $k$ , ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ;
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ ;
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$ .



Hình 3

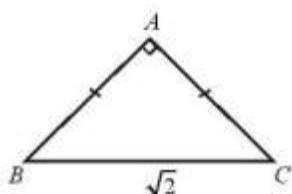
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2a \cdot 2a \cdot \cos 60^\circ = 4a^2 \cdot \frac{1}{2} = 2a^2$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 2a \cdot 2a \cdot \cos 120^\circ = 4a^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2a^2,$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AH}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = |\overrightarrow{AH}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

$$\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = |\overrightarrow{HB}| \cdot |\overrightarrow{HC}| \cdot \cos(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = a \cdot a \cdot \cos 180^\circ = a^2(-1) = -a^2.$$

**Ví dụ 16:** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ , có cạnh  $BC$  bằng  $\sqrt{2}$ . Tính các tích vô hướng:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ;  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ ;  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .



Hình 4

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  có  $BC = \sqrt{2}$  suy ra  $AB = AC = 1$ .

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1.$$

**Ví dụ 17:** Cho hai vector  $\vec{i}, \vec{j}$  vuông góc có cùng độ dài bằng 1 và cho biết  $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j}$ . Tính tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  và tính số đo góc  $(\vec{a}, \vec{b})$ .

A.

B.

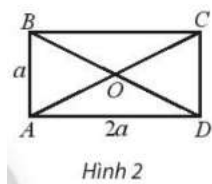
C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

$$\text{Ta có } \vec{a} \cdot \vec{b} = (4\vec{i} - \vec{j}) \cdot (\vec{i} + 4\vec{j}) = 4\vec{i}^2 + 16\vec{i} \cdot \vec{j} - \vec{j} \cdot \vec{i} - 4\vec{j}^2 = 4 - 4 = 0.$$



Hình 2

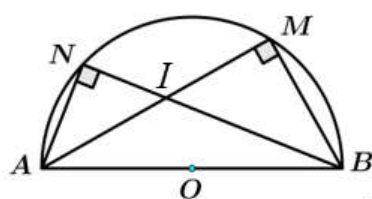
$$a) \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \cos \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AO}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$$

$$= a \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{a^2}{2};$$

$$b) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0.$$

**Câu 22.** Cho nửa đường tròn tâm  $O$  có đường kính  $AB = 2R$ . Gọi  $M$  và  $N$  là hai điểm thuộc nửa đường tròn sao cho  $AM$  và  $BN$  cắt nhau tại  $I$  như Hình 5.



Hình 5

$$a) \text{ Chứng minh } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}; \quad \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}.$$

$$b) \text{ Tính } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN} \text{ theo } R.$$

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $AB$  là đường kính nên  $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).  $AM \perp MB$  và  $AN \perp NB$ .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BM}$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BM} \text{ (do } AM \perp BM) \text{ nên } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BM} = 0.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

$$\text{Tương tự, ta có: } \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}.$$

$$b) \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} \cdot (-\overrightarrow{AB})$$

$$= \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI}) = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = 4R^2.$$

**Câu 23.** Tính công sinh bởi một lực  $\vec{F}$  có độ lớn 60 N kéo một vật dịch chuyển một vector  $\vec{d}$  có độ dài 200 m. Cho biết  $(\vec{F}, \vec{d}) = 60^\circ$ .

**BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG V**  
**I. TRẮC NGHIỆM:**

**Câu 25.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 3, BC = 4$ . Độ dài của vector  $\overrightarrow{AC}$  là:

A. 5;                                      B. 6;                                      C. 7;                                      D. 9.

A.                                      B.                                      C.                                      D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn A**

**Câu 26.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  có tâm  $O$ . Số các vector bằng vector  $\overrightarrow{OC}$  có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là:

A. 2;                                      B. 3;                                      C. 4;                                      D. 6.

A.                                      B.                                      C.                                      D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn A**

**Câu 27.** Cho ba điểm phân biệt  $A, B, C$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A.  $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$ ;                      B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ ;                      C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$ ;                      D.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$ .

A.                                      B.                                      C.                                      D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn C**

**Câu 28.** Cho hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$ . Điều kiện để điểm  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  là:

A.  $IA = IB$ ;                                      B.  $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$ ;                                      C.  $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ ;                                      D.  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$ .

A.                                      B.                                      C.                                      D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn C**

**Câu 29.** Cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm và  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A.  $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$ ;                                      B.  $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ ;                                      C.  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$ ;                                      D.  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$ .

A.                                      B.                                      C.                                      D.

**Lời giải**

A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ ;      B.  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} < \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ ;

C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} < \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ ;      D.  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} < \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn D

II.TỰ LUẬN:

**Câu 35.** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt thẳng hàng. Trong trường hợp nào thì hai vector  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .

a) cùng hướng?

b) ngược hướng?

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

a) Hai vector  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng hướng khi  $A$  không nằm giữa  $B$  và  $C$ .

b) Hai vector  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  ngược hướng khi  $A$  nằm giữa  $B$  và  $C$ .

**Câu 36.** Cho ba vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  cùng phương. Chứng tỏ rằng có ít nhất hai vector cùng hướng trong ba vector đó.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Trong ba vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  chọn hai vector tùy ý:

- Nếu chúng cùng hướng thì đó là hai vector cần tìm;

- Nếu chúng ngược hướng thì vector còn lại sẽ cùng hướng với một trong hai vector đã chọn.

**Câu 37.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp trong đường tròn  $(O)$ . Gọi  $H$  là trực tâm tam giác  $ABC$  và  $B'$  đối xứng với  $B$  qua tâm  $O$ . Hãy so sánh các vector  $\overrightarrow{AH}$  và  $\overrightarrow{B'C}$ ,  $\overrightarrow{AB'}$  và  $\overrightarrow{HC}$ .

A.

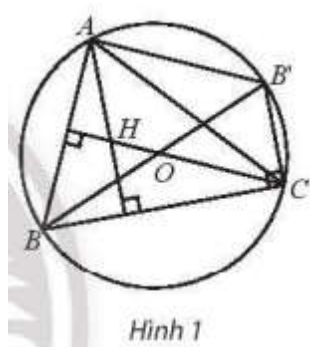
B.

C.

D.

Lời giải

Chọn



Hình 1

**Câu 40.** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $A'$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $A$ , gọi  $B'$  là điểm đối xứng với  $C$  qua  $B$ , gọi  $C'$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $C$ . Chứng minh rằng với một điểm  $O$  tùy ý, ta có  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{C'C} \\ &= \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}. \end{aligned}$$

**Câu 41.** Tam giác  $ABC$  là tam giác gì nếu nó thỏa mãn một trong các điều kiện sau đây?

a)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ .

b) Vector  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  vuông góc với vector  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$  ta có:

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| \Rightarrow 2|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{CB}| \Rightarrow 2AM = CB.$$

Vậy tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

b) Vector  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  vuông góc với vector  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} \Rightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) = 0$ .

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 = 0 \Rightarrow AB^2 - AC^2 = 0 \Rightarrow AB = AC.$$

Vậy  $ABC$  là tam giác cân tại  $A$ .

**Câu 42.** Tứ giác  $ABCD$  là tứ giác gì nếu nó thỏa mãn một trong các điều kiện sau đây?

a)  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC}$ .

b)  $\overrightarrow{DB} = k\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD$  là hình bình hành.

b)  $\overrightarrow{DB} = k\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} \Rightarrow \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} = k\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC} \Rightarrow AB // DC \Rightarrow ABCD$  là hình thang.

**Câu 43.** Cho tam giác  $ABC$ , trên cạnh  $AB$  lấy hai điểm  $M, N$  sao cho  $AM = MN = NB$ . Chứng minh rằng hai tam giác  $ABC$  và  $MNC$  có cùng trọng tâm.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

## CHƯƠNG IV. VECTO

### BÀI 7. CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

#### I – LÝ THUYẾT

1. Vecto là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là trong hai đầu mút của đoạn thẳng, đã chỉ rõ điểm đầu, điểm cuối.

Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó.

2. Một vectơ hoàn toàn được xác định khi biết hướng và độ dài của nó.

3. Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.

Đối với hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.

4. Hai vectơ gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

5. Vectơ  $\vec{0}$  – không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.

Vecto  $\vec{0}$  có độ dài bằng 0, cùng phương với mọi vectơ, cùng hướng với mọi vectơ.

#### II – VÍ DỤ.

**Ví dụ 1:** Cho hình thoi  $ABCD$ . Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC, BD$ . Xét các cặp vectơ:  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{DA}$  và  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  và  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{CO}$ ,  $\overrightarrow{BO}$  và  $\overrightarrow{DO}$ .

a) Hãy chỉ ra mối quan hệ về phương, hướng và độ dài của các vectơ trong mỗi cặp trên.

b) Trong các cặp trên, có bao nhiêu cặp gồm hai vectơ bằng nhau?

A.

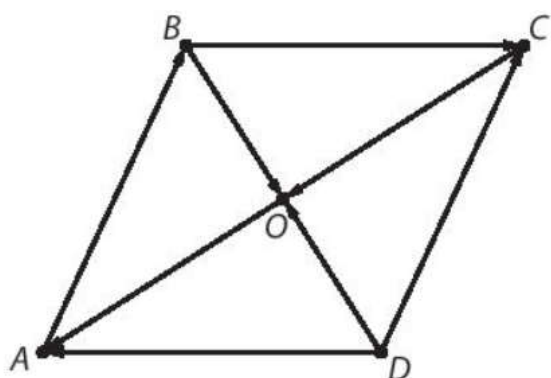
B.

C.

D.

Lời giải

Chọn



Hình 4.1

a) Do tứ giác  $ABCD$  là hình thoi, nên các cặp cạnh đối diện song song và bằng nhau, hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Từ đó

- Hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{DC}$  cùng hướng và cùng độ dài.

**Câu 1.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là một khẳng định đúng?

- a) Hai vectơ  $\overrightarrow{GA}$  và  $\overrightarrow{GM}$  cùng phương;
- b) Hai vectơ  $\overrightarrow{GA}$  và  $\overrightarrow{GM}$  cùng hướng;
- c) Hai vectơ  $\overrightarrow{GA}$  và  $\overrightarrow{GM}$  ngược hướng;
- d) Độ dài của vectơ  $\overrightarrow{AM}$  bằng ba lần độ dài của vectơ  $\overrightarrow{MG}$ .

A.

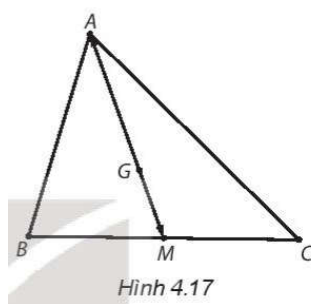
B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**



Do  $M$  là trung điểm của  $BC$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác, nên

$A, G, M$  thẳng hàng theo thứ tự đó và  $AG = \frac{2}{3} AM$  (H.4.17).

Suy ra hai vectơ  $\overrightarrow{GA}$ ,  $\overrightarrow{GM}$  ngược hướng và  $|\overrightarrow{GA}| = 2|\overrightarrow{GM}|$ . Do đó  $|\overrightarrow{AM}| = 3|\overrightarrow{GM}|$ .

Từ đó, các khẳng định  $a, c, d$  là các khẳng định đúng; khẳng định  $b$  là khẳng định sai.

**Câu 2.** Cho trước hai vectơ không cùng phương  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Hỏi có hay không một vectơ cùng phương với cả  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ ?

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Có, đó là vectơ  $\vec{0}$ .

**Câu 3.** Cho ba vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  cùng phương và cùng khác vectơ  $\vec{0}$ . Chứng minh rằng có ít nhất hai vectơ trong chúng có cùng hướng.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

## Lời giải

### Chọn

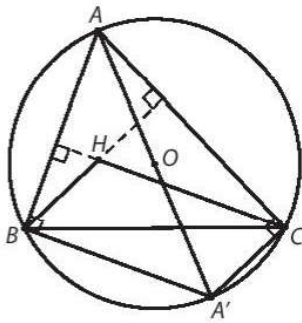
a) Do  $AA'$  là đường kính của  $(O)$ , nên  $\widehat{ABA'} = \widehat{ACA'} = 90^\circ$

Suy ra  $A'C \perp AC$

và  $A'B \perp AB$ . Do  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$  nên  $BH \perp AC$  và  $CH \perp AB$ .

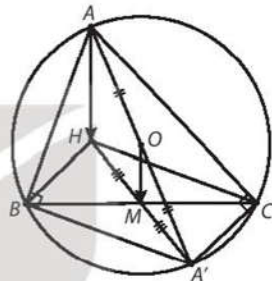
Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra tứ giác  $BHCA'$  là hình bình hành.

Do đó  $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{A'C}$ .



Hình 4.19

b) Do  $AA'$  là đường kính của  $(O)$ , nên  $O$  là trung điểm của  $AA'$  (H.4.20).



Hình 4.20

Do  $BHCA'$  là hình bình hành, nên trung điểm

Hình 4.19  $M$  của  $BC$  cũng là trung điểm của  $HA'$ . Từ (5) và (6) suy ra  $OM$  là đường trung bình của tam giác  $AHA'$ .

Do đó  $OM \parallel AH$  và  $OM = \frac{1}{2}AH$ .

Suy ra hai vectơ  $\overrightarrow{AH}$  và  $\overrightarrow{OM}$  cùng hướng và  $|\overrightarrow{AH}| = 2|\overrightarrow{OM}|$ .

**Câu 6.** Trên biển Đông, một tàu chuyển động đều từ vị trí  $A$  theo hướng  $N20^\circ E$  với vận tốc  $20 \text{ km/h}$ . Sau 2 giờ, tàu đến được vị trí  $B$ . Hỏi  $A$  cách  $B$  bao nhiêu kilômét và về hướng nào so với  $B$ ?

A.

B.

C.

D.

## Lời giải

## BÀI 8. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

### I – LÝ THUYẾT

#### 1. Vector đối

Vector đối của vector  $\vec{a}$ , kí hiệu  $-\vec{a}$ , là vector ngược hướng và cùng độ dài với vector  $\vec{a}$ .

#### 2. Quy tắc cộng, trừ hai vector

- Quy tắc ba điểm (hay còn được gọi là quy tắc tam giác):

Với ba điểm bất kì  $A, B, C$ , ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}.$$

- Quy tắc hình bình hành: Nếu  $ABCD$  là hình bình hành thì  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .

#### 3. Tính chất

- Tính chất giao hoán của phép cộng:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \forall \vec{a}, \vec{b}$ .

- Tính chất kết hợp của phép cộng:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}), \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

- Tính chất của vector  $\vec{0}$ :  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}, \forall \vec{a}$ .

- Tính chất của vector đối:  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \forall \vec{a}$ .

#### 4. Dấu hiệu nhận biết trung điểm đoạn thẳng, trọng tâm tam giác

-  $M$  là trung điểm đoạn thẳng  $AB$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .

-  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

### II - VÍ DỤ

**Ví dụ 3:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  với  $AB = a$ ,  $AD = a\sqrt{2}$ .

a) Tính độ dài của vector  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}$ .

b) Xác định điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM}$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

a) Do hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = a$ ,  $AD = a\sqrt{2}$  nên độ dài của hai đường chéo:

$$AC = BD = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{3}. \quad (\text{H.4.3a}).$$

a) Do  $O$  là tâm của lục giác đều  $ABCDEF$  nên  $O$  là trung điểm của các đường chéo  $AD, BE, CF$  (H.4.4a)

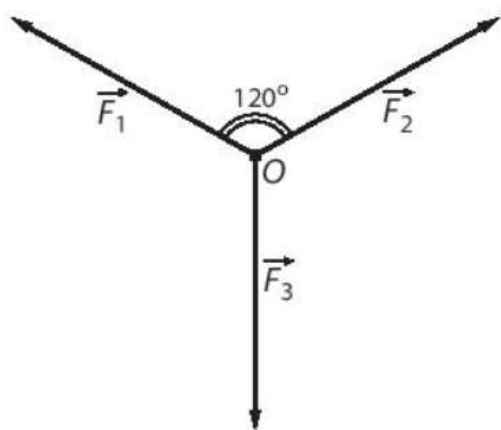
$$\text{Khi đó } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}, \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}, \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}.$$

b) Theo kết quả của bài tập 4.4 ta được  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{FE}$  (H.4.4b)

Từ đó, do độ dài các cạnh của lục giác  $ABCDEF$  bằng 1 nên  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OE}| = |\overrightarrow{FE}| = 1$ .

**Ví dụ 5:** Trên hình 4,5 biểu diễn ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  cùng tác động vào một vật ở vị trí cân bằng  $O$ .



Hình 4.5

Cho biết cường độ của  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều bằng  $100\text{ N}$  và góc tạo bởi  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  bằng  $120^\circ$ . Tính cường độ của lực  $\vec{F}_3$ .

A.

B.

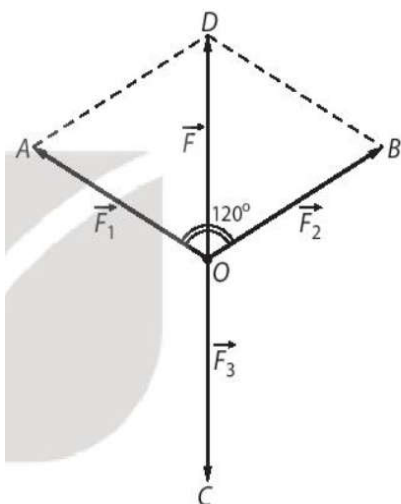
C.

D.

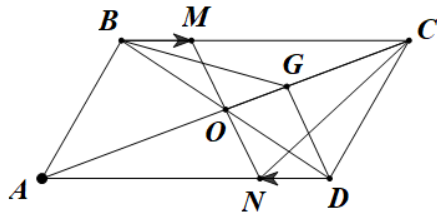
**Lời giải**

**Chọn**

Ta sử dụng các vector  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$  và  $\overrightarrow{OD}$  lần lượt biểu diễn các lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  và hợp lực  $\vec{F}$  của  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  (H.4.6).



Hình 4.6



Hình 4.23

b) Do  $O$  là trung điểm của  $BD$  và  $MN$  nên  $BMDN$  là một hình bình hành.

Suy ra  $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DN} = \vec{0}$ . Do  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$  nên  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ .

Theo quy tắc ba điểm, ta có  $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BM}$  và  $\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DN}$ . Từ đó và (1), (2) suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} &= \overrightarrow{GC} + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DN}) \\ &= (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DN}) = \vec{0}.\end{aligned}$$

Suy ra  $G$  là trọng tâm tam giác  $MNC$ .

**Câu 9.** Cho tứ giác  $ABCD$ .

a) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ .

b) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Theo tính chất kết hợp của phép cộng vector, ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.\end{aligned}$$

b) Do  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$  nên  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}$ .

Do tính kết hợp của phép cộng, ta được  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ .

Từ đó  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .

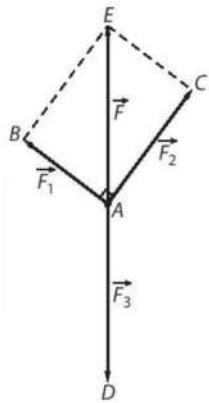
Do tính kết hợp, giao hoán của phép cộng vector, tính chất của vector  $\vec{0}$ , nên

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}.$$

**Câu 10.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $D, E, F$  theo thứ tự là trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$ .

a) Xác định vector  $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$ .

Do vật ở vị trí cân bằng, nên hai lực  $\vec{F}$  và  $\vec{F}_3$  có cùng cường độ và ngược hướng, tức là các vector  $\overrightarrow{AE}$  và  $\overrightarrow{AD}$  là các vector có cùng độ dài và ngược hướng. Bởi vậy, cường độ của lực  $\vec{F}_3$  bằng  $|\vec{F}_3| = |\vec{F}| = AE = 50 \text{ (N)}$ .



Hình 4.24

**Câu 12.** Trên mặt phẳng, chất điểm  $A$  chịu tác dụng của 3 lực  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  và ở trạng thái cân bằng. Góc giữa hai vector  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  bằng  $60^\circ$ . Tính độ lớn của  $\vec{F}_3$  biết  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 2\sqrt{3} \text{ N}$ .

A.

B.

C.

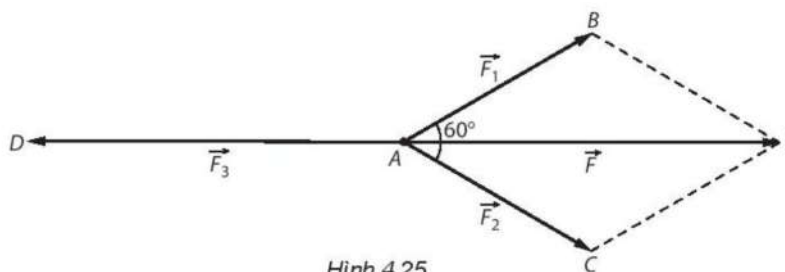
D.

**Lời giải**

**Chọn**

Ta sử dụng các vector  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AD}$  lần lượt biểu thị cho các lực  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  và vector  $\overrightarrow{AE}$  để biểu thị cho hợp lực  $\vec{F}$  của hai lực  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  (H.4.25). Khi đó, tứ giác  $BACE$  là một hình bình hành. Từ đó, do  $AB = AC = 2\sqrt{3}$  và  $\widehat{BAC} = 60^\circ$  nên  $BACE$  là một hình thoi và tam giác  $ABC$  là một tam giác đều.

$$\text{Do đó } AE = 2 \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 6.$$



Hình 4.25

Do  $A$  ở vị trí cân bằng nên hai lực  $\vec{F}$  và  $\vec{F}_3$  có cùng cường độ và ngược hướng, tức là các vector  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{AE}$  đối nhau. Bởi vậy, cường độ của lực  $\vec{F}_3$  bằng  $|\vec{F}_3| = |\vec{F}| = AE = 6 \text{ (N)}$ .

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}.$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OG_1}, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OG_2}.$$

Từ đó suy ra

$$3(\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_2}) = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 6\overrightarrow{OG}.$$

Suy ra  $\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_2} = 2\overrightarrow{OG}$ . Do đó  $G$  là trung điểm của  $G_1G_2$ .

**Ví dụ 7:** Cho tam giác  $ABC$ . Trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $BM = 2MC$ .

a) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .

b) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM}$ .

**A.**

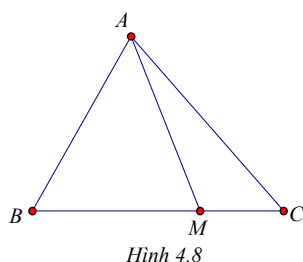
**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**



a) Do  $M$  thuộc cạnh  $BC$  và  $BM = 2MC$  nên hai vector  $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$  ngược hướng và  $|\overrightarrow{MB}| = 2|\overrightarrow{MC}|$ . Suy ra  $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC}$  và do đó  $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .

b) Theo quy tắc ba điểm, ta có  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}; \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$ .

$$\text{Từ đó } \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) = 3\overrightarrow{AM} + (\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 3\overrightarrow{AM}.$$

**Nhận xét**

- Điểm  $M$  trong ví dụ này được gọi là điểm chia đoạn thẳng  $BC$  theo tỉ số  $-2$ .

- Bằng lập luận tương tự ta chứng minh được điểm  $M$  chia đoạn  $AB$  theo tỉ số  $k$  (tức là  $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ ) khi và chỉ khi  $\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB} = (1-k)\overrightarrow{OM}, \forall O$ .

**Ví dụ 8:** Gọi  $G$  và  $G'$  theo thứ tự là trọng tâm của tam giác  $ABC$  và tam giác  $A'B'C'$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$ .

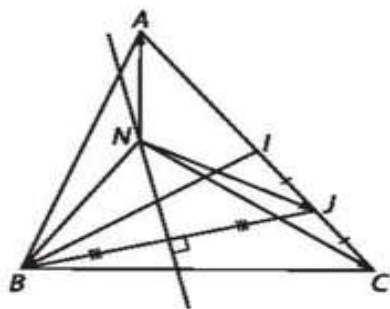
**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**



Hình 4.9b

Khi đó  $JA = 3JC$  và do đó  $\overrightarrow{JA} = -3\overrightarrow{JC}$ .

Từ đó suy ra

$$\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = (\overrightarrow{NJ} + \overrightarrow{JA}) + 3(\overrightarrow{NJ} + \overrightarrow{JC}) = 4\overrightarrow{NJ}.$$

Do đó  $|\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC}| = 4|\overrightarrow{NJ}| \Leftrightarrow 4|\overrightarrow{NJ}| = 4|\overrightarrow{NB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{NJ}| = |\overrightarrow{NB}|$ , tức là  $N$  thuộc trung trực của đoạn  $JB$ .

Vậy tập hợp các điểm  $N$  cần tìm là đường trung trực của đoạn  $JB$ .

### III - BÀI TẬP

**Câu 13.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $D, E$  tương ứng là trung điểm của  $BC, CA$ . Hãy biểu thị các vector  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CA}$  theo hai vector  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{BE}$ .

A.

B.

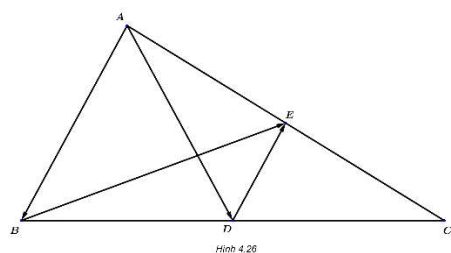
C.

D.

Lời giải

Chọn

Do  $D, E$  theo thứ tự là trung điểm của  $BC, CA$  (H.4.26), nên



$$\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC} \quad (2)$$

Theo quy tắc ba điểm, ta có:

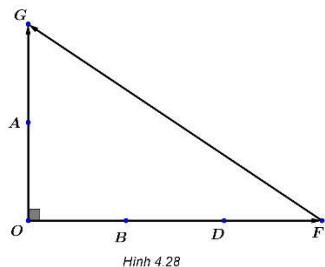
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EB} \quad (3)$$

$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB} \quad (4)$$

$\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE}$  với  $E$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $OAED$  dựng trên hai cạnh  $OA$ ,  $OD$ . Do tam giác  $OAB$  vuông cân tại  $O$  nên  $OAED$  là hình chữ nhật, với  $OA = a$ ,  $OD = 2a$ .

Suy ra  $|\overrightarrow{OE}| = OE = \sqrt{OA^2 + OD^2} = a\sqrt{5}$ .

d) Lấy  $F$  đối xứng với  $B$  qua  $D$  và lấy  $G$  đối xứng với  $O$  qua  $A$  (H.4.28).



Khi đó  $\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OF} = 3\overrightarrow{OB}$ . Suy ra  $2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{FG}$ . (1)

Do cách dựng các điểm  $F$ ,  $G$ , tam giác  $OFG$  vuông tại  $O$ ,  $OG = 2OA = 2a$ ,  $OF = 3OB = 3a$ . Từ đó và (1) suy ra  $|2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{FG}| = FG = \sqrt{OF^2 + OG^2} = a\sqrt{13}$ .

**Câu 15.** Cho tam giác  $ABC$  có trực tâm  $H$ , trọng tâm  $G$  và tâm đường tròn ngoại tiếp  $O$ .

a) Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$ .

b) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$ .

c) Chứng minh rằng ba điểm  $G, H, O$  cùng thuộc một đường thẳng.

**A.**

**B.**

**C.**

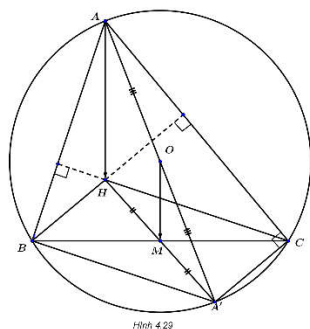
**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

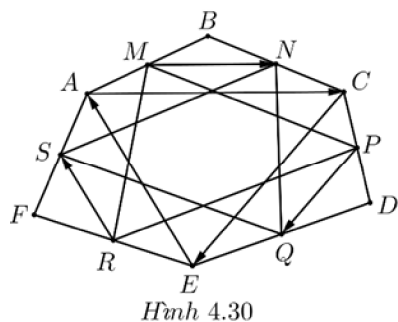
a) Do  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ , nên  $BH \perp CA$ ,  $CH \perp AB$ . (1)

Kẻ đường kính  $AA'$  của đường tròn ngoại tiếp  $(O)$ . Khi đó  $O$  là trung điểm của  $AA'$  (H.4.29).



Hơn nữa  $\widehat{A'CA} = 90^\circ = \widehat{A'BA}$ , do đó  $A'C \perp CA$ ,  $A'B \perp AB$ . Từ đó và (1) suy ra  $A'C \parallel BH$ ,  $A'B \parallel CH$

và do đó tứ giác  $BHCA'$  là hình bình hành. Mà  $M$  là trung điểm của  $BC$ , suy ra  $M$  cũng là trung điểm của  $HA'$ .



Do đó  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$ . (1)

Tương tự cũng có  $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CE}$ . (2)

và  $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2} \overrightarrow{EA}$ . (3)

Theo quy tắc ba điểm và tính chất kết hợp của phép cộng vector, ta có

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EA} = \vec{0}.$$

Từ đó và từ (1), (2), (3), suy ra  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA}) = \vec{0}$ .

Do đó, theo kết quả của Ví dụ 3 thì hai tam giác  $MPR$  và  $NQS$  có cùng trọng tâm.

**Câu 18.** Cho tam giác  $ABC$  đều với trọng tâm  $O$ .  $M$  là một điểm tùy ý nằm trong tam giác. Gọi  $D, E, F$  theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên  $BC, CA, AB$ .

Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2} \overrightarrow{MO}$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

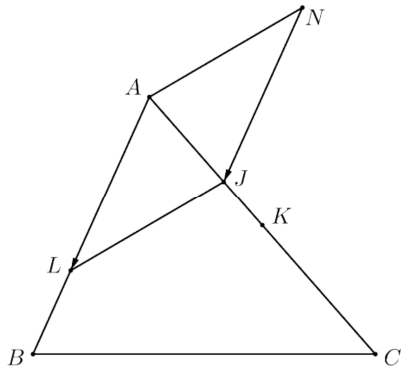
**Chọn**

Đường thẳng đi qua  $M$  và song song với  $BC$  cắt  $AB, AC$  tại  $L, I$ ; đường thẳng đi qua  $M$  song song với  $CA$  cắt  $BC, AB$  tại  $H, K$ ; đường thẳng đi qua  $M$  song song với  $AB$  cắt  $CA, BC$  tại  $J, G$  (H.4.31).

Do tam giác  $ABC$  đều và  $MG \parallel AB$ ,  $MH \parallel AC$  nên tam giác  $MGH$  cũng là một tam giác đều. Từ đó, do  $MD \perp GH$  nên  $D$  là trung điểm của  $GH$ .

$$= 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{NA}.$$

Gọi  $J$  là điểm thỏa mãn  $2\overrightarrow{JK} + \overrightarrow{JA} = \vec{0}$ .



Hình 4.32

Khi đó  $2\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{NJ}$ . Do đó  $4\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{NJ}$ .

Từ đó  $4\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{NJ} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{NJ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}. \quad (1)$$

Lấy điểm  $L$  thuộc cạnh  $AB$  sao cho  $\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ . Khi đó (1)  $\Leftrightarrow \overrightarrow{NJ} = \overrightarrow{AL}$ .

Từ đó, do  $A, L, J$  không thẳng hàng, nên tứ giác  $ALJN$  là một hình bình hành.

Vậy, điểm  $N$  cần tìm là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $ALJN$ .

**Câu 20.** Cho tam giác  $ABC$ .

a) Tìm điểm  $K$  thỏa mãn  $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ .

b) Tìm tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Giả sử tìm được điểm  $K$  thỏa mãn  $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ .

Gọi  $I$  là trung điểm của  $AC$ , gọi  $J$  là trung điểm của  $BC$ . Khi đó

$$\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC}) + 2(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}) = 2\overrightarrow{KI} + 4\overrightarrow{KJ}. \quad (1)$$

Lấy điểm  $L$  thuộc đoạn  $IJ$  sao cho  $LI = 2LJ$ . Khi đó, theo kết quả ví dụ 2, ta được  $\overrightarrow{LI} + 2\overrightarrow{LJ} = \vec{0}$ . Suy ra  $\overrightarrow{KI} + 2\overrightarrow{KJ} = 3\overrightarrow{KL}$ . Từ đó và (1) suy ra  $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{KI} + 2\overrightarrow{KJ}) = \vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{KL} = \vec{0}$ , điều này tương đương với  $K \equiv L$ .

## BÀI 10. VECTO TRONG MẶT PHẪNG TOẠ ĐỘ

### I – LÝ THUYẾT

#### 1. Trục tọa độ, tọa độ đối với trục

*Trục tọa độ* (còn gọi là trục hay trục số) là một đường thẳng, mà trên đó đã xác định một điểm  $O$  và một vector  $\vec{e}$  có độ dài bằng 1. Điểm  $O$  gọi là *gốc tọa độ*, vector  $\vec{e}$  gọi là *vector đơn vị* của trục.

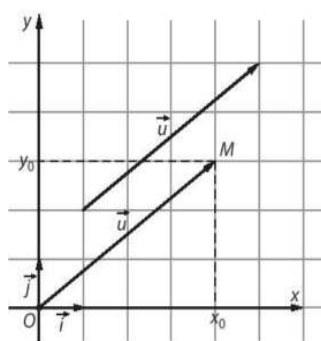
Điểm  $M$  trên trục biểu diễn số  $x_0$  nếu  $\overrightarrow{OM} = x_0 \vec{e}$  (H.4.10).



Hình 4.10

#### 2. Hệ trục tọa độ, tọa độ đối với hệ trục tọa độ

*Hệ trục tọa độ* là một hệ gồm hai trục  $Ox$  (với vector đơn vị  $\vec{i}$ ) và trục  $Oy$  (với vector đơn vị  $\vec{j}$ ) vuông góc với nhau tại gốc chung  $O$ . Trục  $Ox$  được gọi là *trục hoành*, trục  $Oy$  được gọi là *trục tung* (H.4.11).



Hình 4.11

Với mỗi vector  $\vec{u}$  trên mặt phẳng  $Oxy$ , có duy nhất cặp số thực  $(x_0; y_0)$  sao cho  $\vec{u} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}$ .

Cặp số  $(x_0; y_0)$  ở đây được gọi là *tọa độ* của vector  $\vec{u}$  đối với hệ trục. Ta viết  $\vec{u} = (x_0; y_0)$  hay  $\vec{u}(x_0; y_0)$  để chỉ rằng vector  $\vec{u}$  có tọa độ là  $(x_0; y_0)$  đối với hệ trục tọa độ. Các số  $x_0, y_0$  tương ứng gọi là *hoành độ*, *tung độ* của vector  $\vec{u}$ .

Nếu điểm  $M$  có tọa độ  $(x_0; y_0)$  thì vector  $\overrightarrow{OM}$  có tọa độ  $(x_0; y_0)$  và  $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ .

Với hai điểm  $M(x; y)$  và  $N(x'; y')$  thì  $\overrightarrow{MN} = (x' - x; y' - y)$  và khoảng cách giữa hai điểm  $M, N$  bằng  $MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$ .

#### 3. Tính chất

Cho hai vector  $\vec{u} = (x; y), \vec{v} = (x'; y')$  và cho số thực  $k$ . Khi đó

$$\vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y'); \vec{u} - \vec{v} = (x - x'; y - y'); k\vec{u} = (kx; ky)$$

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

a) Từ giả thiết suy ra  $\overrightarrow{AB} = (-1; 5), \overrightarrow{AC} = (-4; 4)$ . Do  $\frac{-1}{-4} \neq \frac{5}{4}$  nên các vector  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  không cùng phương. Suy ra  $A, B, C$  là ba đỉnh của một tam giác.

b) Gọi  $G(x; y)$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Khi đó 
$$\begin{cases} x = \frac{2+1+(-2)}{3} = \frac{1}{3} \\ y = \frac{(-1)+4+3}{3} = 2. \end{cases}$$
 Suy ra  $G\left(\frac{1}{3}; 2\right)$ .

**Ví dụ 12:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho hai điểm  $A, B$  thỏa mãn  $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ ,  $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ .

- a) Chứng minh rằng  $O, A, B$  không thẳng hàng.  
 b) Tìm tọa độ của điểm  $C$  sao cho tứ giác  $ABCO$  là hình bình hành.  
 c) Tìm tọa độ của điểm  $D$  thuộc trục hoành sao cho  $DA = DB$ .

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

a) Từ giả thiết suy ra  $\overrightarrow{OA} = (2; -3)$  và  $\overrightarrow{OB} = (3; 2)$ . Vì  $\frac{2}{3} \neq \frac{-3}{2}$  nên hai vector  $\overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{OB}$  không cùng phương, hay  $O, A, B$  không thẳng hàng.

b) Từ giả thiết suy ra  $\overrightarrow{AB} = (1; 5)$ . Giả sử tìm được điểm  $C$  sao cho tứ giác  $ABCO$  là hình bình hành. Khi đó do  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$  nên  $\overrightarrow{OC} = (1; 5)$ . Suy ra  $C(1; 5)$ .

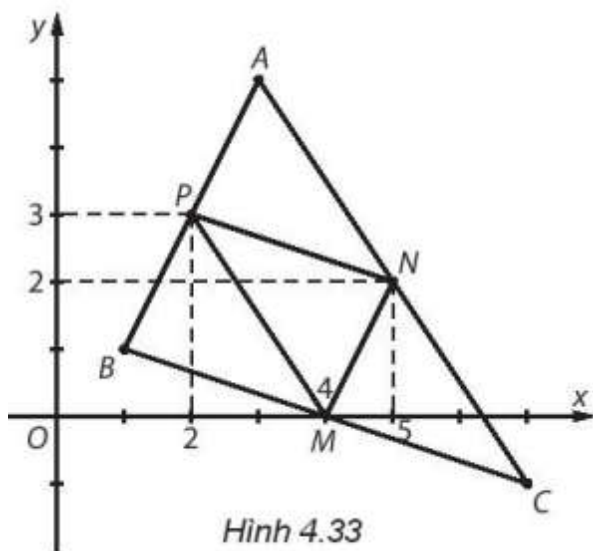
c) Xét điểm  $D(d; 0) \in Ox$ . Khi đó  $DA = \sqrt{(2-d)^2 + 9}, DB = \sqrt{(3-d)^2 + 4}$ .

Suy ra  $DA = DB \Leftrightarrow DA^2 = DB^2 \Leftrightarrow (2-d)^2 + 9 = (3-d)^2 + 4 \Leftrightarrow d = 0$ .

Vậy điểm  $D$  cần tìm trùng với gốc tọa độ  $O(0; 0)$ .

**Ví dụ 13:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho hai điểm  $A(1; 2)$  và  $B(3; -4)$ . Tìm tọa độ của điểm  $C$  thuộc trục tung sao cho vector  $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$  có độ dài ngắn nhất.

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**



Hình 4.33

**Câu 23.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho ba điểm  $A(2;-1)$ ,  $B(1;4)$  và  $C(7;0)$ .

- Tính độ dài các đoạn thẳng  $AB$ ,  $BC$  và  $CA$ . Từ đó suy ra tam giác  $ABC$  là một tam giác vuông cân.
- Tìm tọa độ của điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABDC$  là một hình vuông.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Đáp số:  $AB = \sqrt{26}$ ;  $BC = \sqrt{52}$ ;  $CA = \sqrt{26}$ . Tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ .

b) HD: Hình vuông  $ABDC$  là một hình bình hành.

Đáp số:  $D(6;5)$ .

**Câu 24.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho hai điểm  $M(-2;1)$  và  $N(4;5)$ .

- Tìm tọa độ của điểm  $P$  thuộc  $Ox$  sao cho  $PM = PN$ .
- Tìm tọa độ của điểm  $Q$  sao cho  $\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{PN}$ .
- Tìm tọa độ của điểm  $R$  thỏa mãn  $\overrightarrow{RM} + 2\overrightarrow{RN} = \vec{0}$ . Từ đó suy ra  $P, Q, R$  thẳng hàng.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $P(3;0)$ .

b) Đáp số:  $Q(0;11)$ .

c) Giả sử tìm được điểm  $R$  thỏa mãn yêu cầu. Do  $\overrightarrow{RM} + 2\overrightarrow{RN} = \vec{0}$  nên

Gọi  $I$  là trung điểm  $CD$ , thế thì  $I(6;4)$  và với mỗi điểm  $M$  đều có  $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MI}$ .

Suy ra  $|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = CD \Leftrightarrow 2|\overrightarrow{MI}| = 2\sqrt{29} \Leftrightarrow IM = \sqrt{29}$ .

Vậy tập hợp các điểm  $M$  cần tìm là đường tròn tâm  $I$  bán kính  $\frac{CD}{2} = \sqrt{29}$ .

**Câu 27.** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho ba điểm  $A(1;2)$ ,  $B(3;4)$  và  $C(2;-1)$ .

a) Chứng minh rằng  $A, B, C$  là ba đỉnh của một tam giác. Tìm tọa độ trọng tâm tam giác đó.

b) Tìm tọa độ tâm  $I$  của đường tròn ngoại tiếp và trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) HD. Chứng minh các vec tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  không cùng phương. Trọng tâm của tam giác là  $G\left(2; \frac{5}{3}\right)$ . b)

HD. Gọi  $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp và  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ .

Thế thì  $IA = IB = IC$  và  $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$ .

Đáp số:  $I\left(\frac{15}{4}, \frac{5}{4}\right); H\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ .

**Câu 28.** Để kéo dây điện băng qua một hồ hình chữ nhật  $ABCD$  với độ dài  $AB = 200m$ ,  $AD = 180m$  người ta dự định làm 4 cột điện liên tiếp cách đều, cột thứ nhất nằm trên bờ  $AB$  và cách đỉnh  $A$  khoảng cách 20 m, cột thứ tư nằm trên bờ  $CD$  và cách đỉnh  $C$  khoảng cách 30m. Tính khoảng cách từ vị trí cột thứ hai, thứ ba đến các bờ  $AB, CD$ .

**A.**

**B.**

**C.**

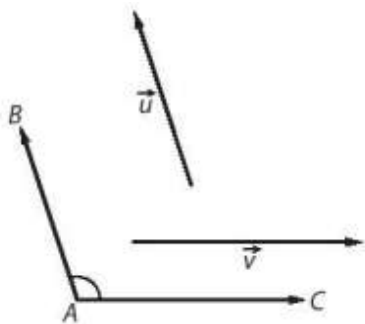
**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Chọn hệ trục  $Oxy$  sao cho  $A(0;0)$ ,  $B(200;0)$ ,  $C(200;180)$ ,  $D(0;180)$ .

Gọi vị trí các cột điện được tròng là  $C_1, C_2, C_3, C_4$  (H.4.34)



Hình H.4.12

**2. Tích vô hướng của hai vectơ** khác vectơ –không  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  là một số, kí hiệu là  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , được xác định bởi công thức  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$ .

### Chú ý

- Hai vectơ khác vectơ –không  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  có phương vuông góc với nhau khi và chỉ khi  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .
- Bình phương vô hướng của một vectơ bằng bình phương độ dài của vectơ đó:  $\vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$ .

**3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng:** Trong mặt phẳng tọa độ cho hai vectơ  $\vec{u} = (x; y)$  và  $\vec{v} = (x'; y')$ . Khi đó tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{u}, \vec{v}$  được tính theo công thức  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ .

**Nhận xét.** Với hai vectơ  $\vec{u} = (x; y)$  và  $\vec{v} = (x'; y')$  ta có:

- Hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  vuông góc nhau khi và chỉ khi  $xx' + yy' = 0$ .
- Bình phương vô hướng của vectơ  $\vec{u}$  là  $\vec{u}^2 = x^2 + y^2$ .
- Nếu  $\vec{u} \neq \vec{0}$  và  $\vec{v} \neq \vec{0}$  thì  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}$ .

### 4. Tính chất

Với ba vectơ  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  bất kì và mọi số thực  $k$ , ta có:

- Tính chất giao hoán:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ .
- Tính chất phân phối đối với phép cộng vectơ:  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ .
- Tính chất kết hợp đối với phép nhân một số:  $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$ .

**Nhận xét.** Với hai vectơ  $\vec{u}, \vec{v}$  bất kì, ta có:

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2;$$

$$\text{b) Do } AM \perp BC \text{ nên } AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Do } O \text{ là tâm của tam giác đều } ABC, \text{ nên } |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = OA = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{2};$$

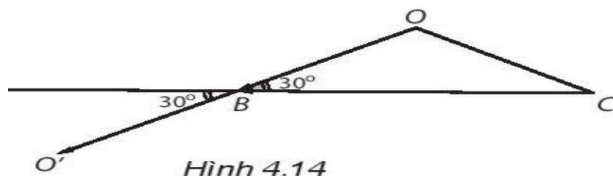
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{6};$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{BC}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0;$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{OB}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{CB}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

**Nhận xét.** Ta có thể xác định góc giữa hai vector  $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{CB}$  như sau: Lấy  $O'$  đối xứng với  $O$  qua  $B$  và  $C'$  đối xứng với  $C$  qua  $B$  (H.4.14).

Khi đó, do  $\overrightarrow{BO'} = \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CB}$ , nên  $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{BO'}; \overrightarrow{BC'}) = \widehat{O'BC'} = \widehat{OBC} = 30^\circ$ .



Hình 4.14

**Ví dụ 15:** Cho nửa đường tròn với đường kính  $AB = 2R$ . Gọi  $M$  và  $N$  là hai điểm trên nửa đường tròn sao cho hai dây cung  $AM$  và  $BN$  cắt nhau tại một điểm  $I$ .

a) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$ .

b) Tính  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN}$  theo  $R$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3^2 - \left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{27}{2};$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}^2 = \left(-\frac{9}{2}\right) - 3^2 = -\frac{27}{2}.$$

b) Theo quy tắc ba điểm ta có  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ . Từ đó

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = 27.$$

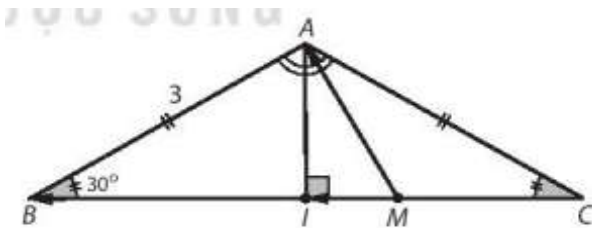
Suy ra  $BC = 3\sqrt{3}$ .

c) Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ . Do  $M$  thuộc cạnh  $BC$  và  $MB = 2MC$ ,  $I$  là trung điểm  $BC$ , nên theo kết quả của Ví dụ 2, Bài 9, ta có  $\overrightarrow{MB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ .

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{IB} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$$

Từ đó, theo định lý chiếu, ta được

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CB}^2 = 3.$$



### Nhận xét

- Để tính độ dài của một đoạn thẳng  $XY$ , trước hết ta biểu thị vector  $\overrightarrow{XY}$  theo hai vector không cùng phương  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  đã biết, rồi tính bình phương vô hướng của vector  $\overrightarrow{XY}$

- Nhờ vào kết quả của Ví dụ 2, bài 9, ta chứng minh được  $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CA})$ . Suy ra  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{2}{9}(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB})$ . Bởi vậy cũng có thể tính tích vô hướng  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$  nhờ vào việc tính các tích vô hướng  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB}$  và  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ .

**Ví dụ 17:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho hai điểm  $A(1;3)$  và  $B(7;1)$ .

a) Tính chu vi của tam giác  $OAB$ .

b) Chứng minh rằng  $OA$  vuông góc với  $AB$ . Tính diện tích của tam giác  $OAB$ .

c) Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Tính số đo góc  $\widehat{BOM}$

A.

B.

C.

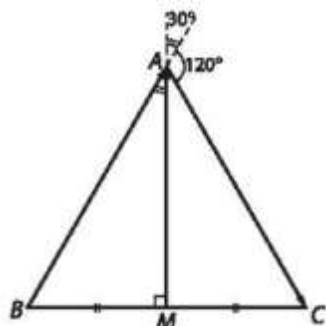
D.

## Lời giải

## Chọn

a) Do tam giác  $ABC$  là tam giác đều với độ dài các cạnh bằng 1,  $M$  là trung điểm  $BC$  nên  $MA = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

$$(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{BA}) = 30^\circ, (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{AC}) = 120^\circ \text{ (H.4.35)}$$



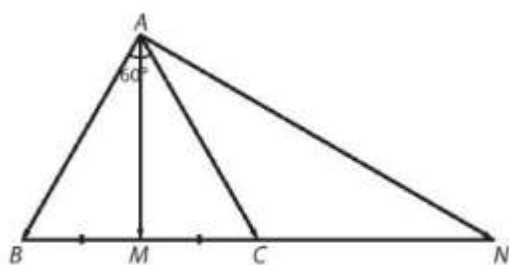
Hình 4.35

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{BA}| \cdot \cos(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{BA}) = \frac{3}{2}, \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{AC}) = \frac{-\sqrt{3}}{4}$$

b) Do tam giác  $ABC$  đều nên  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$  (1)

Do  $M$  là trung điểm  $BC$  nên  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$  (2)

Do  $N$  đối xứng với  $B$  qua  $C$  nên  $C$  là trung điểm  $BN$  (H.4.36)



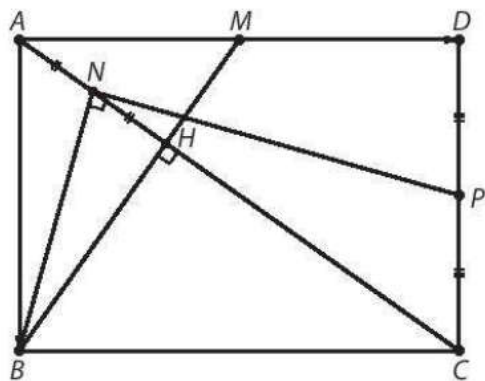
Hình 4.36

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \text{ (3)}$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) suy ra } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = \frac{3}{4}$$



Hình 4.38

b) Theo định lí Pythagore ta có  $AC = \sqrt{3}$  và  $AH = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Suy ra  $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ . Do  $N$  là trung điểm của

$$AH \text{ nên } \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{d})\right] + \vec{b} = \frac{5}{6}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{d}. (1)$$

Do  $P$  là trung điểm của  $CD$  và  $N$  là trung điểm của  $AH$  nên theo kết quả bài 4.12, Toán 10 tập một,

$$\text{ta có } \overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HC}) = \frac{1}{2}\left[\vec{d} + \frac{2}{3}(\vec{b} + \vec{d})\right] = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{5}{6}\vec{d}. (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{NP} = \left(\frac{5}{6}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{d}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{5}{6}\vec{d}\right) = \frac{5}{18}\vec{b}^2 - \frac{5}{36}\vec{d}^2 = \frac{5}{18} \cdot 1 - \frac{5}{36} \cdot 2 = 0$ . Suy ra

$NB \perp NP$  và do đó tam giác  $NBP$  vuông tại  $N$ .

**Câu 31.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\hat{A} < 90^\circ$ . Dựng ra  $ABCD$  phía ngoài tam giác hai tam giác vuông cân đỉnh  $A$  là  $ABD$  và  $ACE$ . Gọi  $M, N, P$  theo thứ tự là trung điểm  $BC, BD, CE$ . Chứng minh rằng:

- $AM$  vuông góc với  $DE$ ;
- $BE$  vuông góc với  $CD$ ;
- Tam giác  $MNP$  là một tam giác vuông cân.

**A.**

**B.**

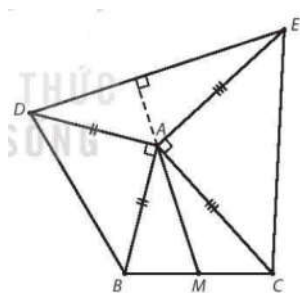
**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Do  $\hat{A} < 90^\circ$  nên  $\widehat{BAE} = 90^\circ + \hat{A} = \widehat{CAD}$ . (1)



Hình 4.39a

Do đó  $MP \parallel BE, MP = \frac{1}{2} BE$ . (5)

Từ (4), (5) và kết quả của phần b) suy ra  $MN = MP, MN \perp MP$ , hay tam giác  $MNP$  vuông cân tại  $M$ .

**Câu 32.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = 6$ ,  $|\vec{b}| = 8$  và  $|\vec{a} + \vec{b}| = 10$ .

a) Tính tích vô hướng  $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ .

b) Tính số đo của góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{a} + \vec{b}$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Từ một điểm  $O$ , dựng vectơ  $\vec{OA} = \vec{a}$ , rồi dựng vectơ  $\vec{AB} = \vec{b}$ .

Khi đó  $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$  và tam giác  $OAB$  vuông tại  $A$ .

a) **Đáp số.**  $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 36$ .

b) **Đáp số.**  $(\vec{a}; \vec{a} + \vec{b}) \approx 53^\circ 7' 48''$ .

**Câu 33.** Cho tam giác  $ABC$  không cân. Gọi  $D, E, F$  theo thứ tự là chân các đường cao kẻ từ  $A, B, C$ ; gọi  $M, N, P$  tương ứng là trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng:

$$\vec{MD} \cdot \vec{BC} + \vec{NE} \cdot \vec{CA} + \vec{PF} \cdot \vec{AB} = 0$$

A.

B.

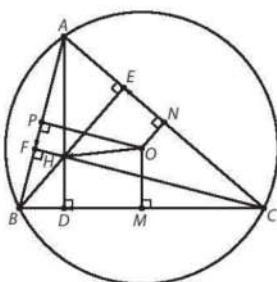
C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Gọi  $H$  là trực tâm và  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác  $ABC$  (H.4.40). Khi đó  $D, E, F$  tương ứng là hình chiếu vuông góc của  $H$  trên  $BC, CA, AB$  và  $M, N, P$  tương ứng là hình chiếu vuông góc của  $O$  trên  $BC, CA, AB$



Hình 4.40

Theo định lý hình chiếu, ta có:

## Lời giải

### Chọn

a) Xét điểm  $C(c;0) \in Ox$ . Khi đó  $CA^2 = (c-1)^2 + 1, CB^2 = (c-7)^2 + 25$ .

Vậy  $C$  cách đều  $A, B$  khi và chỉ khi

$$CA^2 = CB^2 \Leftrightarrow (c-1)^2 - (c-7)^2 = 25 - 1 \Leftrightarrow c = 6.$$

Vậy  $C(6;0)$  là điểm cần tìm.

b) Gọi  $M$  là trung điểm  $AB$ . Khi đó  $M(4;3)$ . Với mọi điểm  $D$  ta có  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DM}$ . Suy ra vector  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$  có độ dài ngắn nhất khi vector  $2\overrightarrow{DM}$  có độ dài ngắn nhất.

Từ đó điểm  $D$  thuộc trục tung sao cho vector  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$  có độ dài ngắn nhất khi và chỉ khi  $D$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên  $Oy$ , tức là  $D(0;3)$ .

**Câu 37.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho ba điểm  $A(-3;2)$ ,  $B(1;5)$  và  $C(3;-1)$

a) Chứng minh rằng  $A, B, C$  là ba đỉnh của một tam giác. Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác ấy.

b) Tìm tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ .

c) Gọi  $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Tìm tọa độ của  $I$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

## Lời giải

### Chọn

a) **HD.** Chứng minh hai vector  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  không cùng phương.

Đáp số:  $G\left(\frac{1}{3}; 2\right)$ .

b) Từ giả thiết, suy ra  $\overrightarrow{AB}(4;3), \overrightarrow{BC}(2;-6)$ . Gọi  $H(x;y)$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ . Khi đó  $\overrightarrow{AH}(x+3;y-2), \overrightarrow{CH}(x-3;y+1)$ .

Do  $AH \perp BC, CH \perp AB$  nên

$$\begin{cases} 2(x+3) - 6(y-2) = 0 \\ 4(x-3) + 3(y+1) = 0. \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được  $x=0, y=3$ . Vậy trực tâm của tam giác  $ABC$  là điểm  $H(0;3)$ .

b)**HD.** Sử dụng kết quả của bài tập 4.15.

## BÀI TẬP CHƯƠNG IV

### I – TRẮC NGHIỆM

**Câu 39.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Xét các vector có hai điểm mút lấy từ các điểm  $A, B, C, D$  và  $O$ . Số các vector khác vector – không và cùng phương với  $\overrightarrow{AC}$  là

- A. 6.                                      B. 3.                                      C. 4.                                      D. 2.

- A.                                      B.                                      C.                                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn A

**Câu 40.** Cho đoạn thẳng  $AC$  và  $B$  là một điểm nằm giữa  $A, C$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là một khẳng định đúng?

A. Hai vector  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CB}$  cùng hướng.

B. Hai vector  $\overrightarrow{CA}$  và  $\overrightarrow{BC}$  cùng hướng.

C. Hai vector  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng hướng.

D. Hai vector  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{BA}$  cùng hướng.

- A.                                      B.                                      C.                                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn C

**Câu 41.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Gọi  $K, L, M, N$  tương ứng là trung điểm các cạnh  $AB, BC, CD, DA$ . Trong các vector có đầu mút lấy từ các điểm  $A, B, C, D, K, L, M, O$  có bao nhiêu vector bằng vector  $\overrightarrow{AK}$ ?

- A. 2.                                      B. 6.                                      C. 4.                                      D. 8.

- A.                                      B.                                      C.                                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 42.** Cho hình thoi  $ABCD$  có độ dài các cạnh bằng 1 và  $\widehat{DAB} = 120^\circ$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .                      B.  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ .                      C.  $|\overrightarrow{BD}| = 1$ .                      D.  $|\overrightarrow{AC}| = 1$ .

- A.                                      B.                                      C.                                      D.

### Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 48.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho ba điểm  $A(-3;1)$ ,  $B(2;-1)$ ,  $C(4;6)$ . Trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  có tọa độ là

A.  $(1;2)$ . B.  $(2;1)$ . C.  $(1;-2)$ . D.  $(-2;1)$ .

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

Chọn

Chọn A

**Câu 49.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho ba điểm  $A(-3;3)$ ,  $B(5;-2)$  và  $G(2;2)$ . Tọa độ của điểm  $C$  sao cho  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  là

A.  $(5;4)$ . B.  $(4;5)$ . C.  $(4;3)$ . D.  $(3;5)$ .

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 50.** Cho hình vuông  $ABCD$  với độ dài cạnh bằng  $a$ . Tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  bằng

A.  $a^2\sqrt{2}$ . B.  $\frac{a^2}{\sqrt{2}}$ . C.  $a^2$ . D.  $\frac{a^2}{2}$ .

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

Chọn

Chọn C

**Câu 51.** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng khác  $\vec{0}$ . Khi đó  $\vec{a}, \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$  tương đương với

A.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương. B.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng.

C.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng. D.  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

Chọn

Chọn C

**Câu 52.** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng khác  $\vec{0}$ . Khi đó  $\vec{a}, \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$  tương đương với

A.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương. B.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng.

### Lời giải

#### Chọn

Chọn A

**Câu 57.** Cho tam giác  $ABC$  đều có độ dài các cạnh bằng  $3a$ . Lấy điểm  $M$  thuộc cạnh  $BC$  sao cho  $MB = 2MC$ . Tích vô hướng của hai vector  $\overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{MC}$  bằng

A.  $\frac{a^2}{2}$ .                      B.  $-\frac{a^2}{2}$ .                      C.  $a^2$ .                      D.  $-a^2$ .

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

Chọn B

**Câu 58.** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $|\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{AC}|$  là

- A. đường tròn tâm  $A$  bán kính  $BC$ .  
B. đường thẳng đi qua  $A$  và song song với  $BC$ .  
C. đường tròn đường kính  $BC$ .  
D. đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $BC$ .

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

Chọn A

## II – TỰ LUẬN

**Câu 59.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  theo thứ tự là trung điểm của  $BC, AD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là giao điểm của  $BD$  với  $AM, CN$ . Xét các vector khác  $\vec{0}$ , có đầu mút lấy từ các điểm  $A, B, C, D, M, N, I, J, O$ .

- a) Hãy chỉ ra những vector bằng vector  $\overrightarrow{AB}$ ; những vector cùng hướng với  $\overrightarrow{AB}$ .  
b) Chứng minh rằng  $BI = IJ = JD$ .

A.

B.

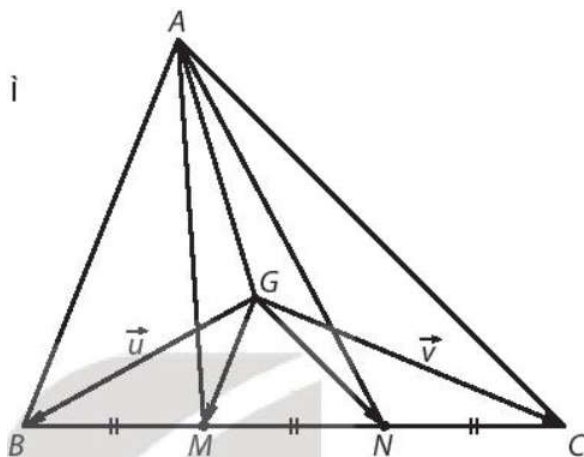
C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

(H.4.41) a) Những vector bằng vector  $\overrightarrow{AB}$ :  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{NM}, \overrightarrow{DC}$ ;



Hình 4.42

Từ đó, theo Nhận xét ở Ví dụ 2, Bài 9, thì  $(1 - (-2))\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GC} - (-2)\overrightarrow{GB}$ . Suy ra  $\overrightarrow{GM} = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$ .

Tương tự, cũng được  $\overrightarrow{GN} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$ .

Do  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  nên  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

Suy ra  $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}$  và do đó  $\overrightarrow{GA} = -\vec{u} - \vec{v}$ .

**Câu 61.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4, AC = 5$  và  $\widehat{CAB} = 60^\circ$ .

a) Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

b) Lấy các điểm  $M, N$  thỏa mãn  $2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$  và  $\overrightarrow{NB} + x\overrightarrow{NC} = \vec{0} (x \neq -1)$ . Xác định  $x$  sao cho  $AN$  vuông góc với  $BM$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Gọi ý:  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ .

Đáp số:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -6$ .

b) Do  $2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$  nên  $2(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}) + 3(\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BM}) = \vec{0}$ . Suy ra

$$\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BA} = 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + 2\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}. \quad (1)$$

Do  $\overrightarrow{NB} + x\overrightarrow{NC} = \vec{0}$  nên  $(1+x)\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}$ . Từ đó và (1) suy ra

$$\begin{aligned} (1+x)\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM} &= (\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}) \cdot (-\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}) \\ &= -\overrightarrow{AB}^2 + 3x\overrightarrow{AC}^2 + (3-x)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -16 + 75x + 10(3-x). \end{aligned}$$

**Câu 63.** Cho tam giác  $ABC$  với trọng tâm  $G$ . Lấy điểm  $A', B'$  sao cho  $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{CA}$ . Gọi  $G'$  là trọng tâm của tam giác  $A'B'C$ . Chứng minh rằng  $GG'$  song song với  $AB$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

**Ví dụ 18:** Sử dụng kết quả Bài 9, ta được  $3\overrightarrow{GG'} = 2\overrightarrow{BA}$ .

**Câu 64.** Cho tứ giác lồi  $ABCD$ , không có hai cạnh nào song song. Gọi  $E, F$  theo thứ tự là trung điểm  $AB, CD$ . Gọi  $K, L, M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AF, CE, BF, DE$ .

a) Chứng minh rằng tứ giác  $KLMN$  là một hình bình hành.

b) Gọi  $I$  là giao điểm của  $KM, LN$ . Chứng minh rằng  $E, I, F$  thẳng hàng.

A.

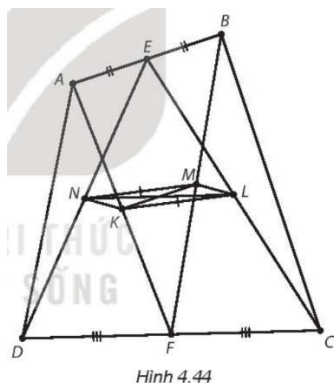
B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**



Hình 4.44

a) Do  $E$  là trung điểm của  $AB$ ,  $F$  là trung điểm của  $CD$  nên  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$ ,  $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{DF}$ .

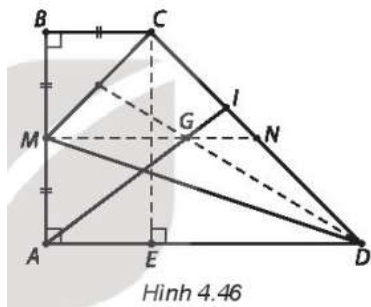
Do  $K$  là trung điểm của  $AF$ ,  $L$  là trung điểm  $CE$ ,  $M$  trung điểm của  $BF$ ,  $N$  trung điểm của  $DE$  nên theo kết quả của bài tập 4.12, Toán 10, Tập một, ta có  $2\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{NM}$ . Suy ra  $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$  và do đó  $KLMN$  là một hình bình hành.

b) Do  $KLMN$  là một hình bình hành và  $I$  là giao điểm của  $KM, LN$  nên  $I$  là trung điểm trung của  $KM, LN$ . Suy ra  $2\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{EL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ED} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EF}$ .

Do đó  $E, I, F$  thẳng hàng, hơn nữa  $I$  là trung điểm của  $EF$ .

**Câu 65.** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có  $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = 90^\circ$ ,  $BC = 1$ ,  $AB = 2$  và  $AD = 3$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ .

a) Hãy biểu thị các vectơ  $\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CD}$  theo các vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AD}$ .



Hình 4.46

c) Từ (4), để ý rằng  $AD \perp AB$ , suy ra

$$\begin{aligned} 196AI^2 &= (14\overline{AI})^2 = (9\overline{AB} + 8\overline{AD})^2 = 81\overline{AB}^2 + 2(9\overline{AB})(8\overline{AD}) + 64\overline{AD}^2 \\ &= 81AB^2 + 64AD^2 = 81.4 + 64.9 = 900 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } AI = \frac{15}{7}$$

$$\text{Theo quy tắc ba điểm ta có } \overline{BI} = \overline{AI} - \overline{AB} = -\frac{5}{14}\overline{AB} + \frac{4}{7}\overline{AD}.$$

$$\text{Suy ra } BI^2 = \left(-\frac{5}{14}\overline{AB} + \frac{8}{14}\overline{AD}\right)^2 = \frac{25}{196}.4 + \frac{64}{196}.9 = \frac{196}{49} \text{ và do đó } BI = \frac{13}{7}.$$

**Câu 66** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  trong mặt phẳng. Chứng minh rằng:  $\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{BC}.\overline{AD} + \overline{CA}.\overline{BD} = 0$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Biểu diễn các vector theo ba vector  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ .

Theo quy tắc ba điểm ta có  $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ ;  $\overline{CA} = -\overline{AB} - \overline{BC}$ ;  $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD}$ .

$$\text{Suy ra } \overline{AB}.\overline{CD} + \overline{BC}.\overline{AD} + \overline{CA}.\overline{BD} = \overline{AB}.\overline{CD} + \overline{BC}.\left(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}\right) + \left(-\overline{AB} - \overline{BC}\right)\left(\overline{BC} + \overline{CD}\right).$$

Khai triển, giản ước, thu được điều phải chứng minh.

**Câu 66.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho ba véc tơ  $\vec{a} = (1; 2)$ ,  $\vec{b} = (3; -4)$ ,  $\vec{c} = (-5; 3)$ .

a) Tính các tích vô hướng  $\vec{a}.\vec{b}$ ,  $\vec{b}.\vec{c}$ ,  $\vec{c}.\vec{a}$ .

b) Tính góc giữa hai véc tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b} + \vec{c}$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) Đáp số:  $\vec{a}.\vec{b} = -5$ ;  $\vec{b}.\vec{c} = -27$ ;  $\vec{c}.\vec{a} = 1$

Từ đó suy ra  $\overrightarrow{OI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$  và do đó  $I\left(\frac{9}{5}; \frac{1}{5}\right)$

### Nhận xét

- Ta có thể tìm được tọa độ điểm  $I$  nhờ vào dấu hiệu  $IA = IB = IC$ .

- Việc sử dụng đẳng thức  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IH}$  hay  $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$  cho phép ta thu được tọa độ của điểm còn lại khi biết tọa độ của hai trong ba điểm  $G, H, I$ .

**Câu 68.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho ba điểm  $A(2; -1)$ ,  $B(5; 3)$  và  $C(-2; 9)$ .

a) Tìm tọa độ điểm  $D$  thuộc trục hoành sao cho  $B, C, D$  thẳng hàng.

b) Tìm tọa độ điểm  $E$  thuộc trục hoành sao cho  $EA + EB$  nhỏ nhất.

c) Tìm tọa độ điểm  $F$  thuộc trục tung sao cho  $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC}$  có độ dài ngắn nhất.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

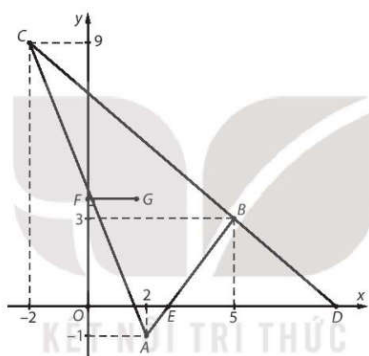
### Lời giải

### Chọn

(H.4.47) a) Xét điểm  $D(d; 0) \in Ox$ . Ta có  $\overrightarrow{BD} = (d - 5; -3)$ ,  $\overrightarrow{CD} = (d + 2; -9)$ . Từ đó  $B, C, D$  thẳng hàng khi và chỉ khi hai vector  $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CD}$  cùng phương, tức là  $(d - 5) : (-3) = (d + 2) : (-9)$ . Từ đó tìm được  $d = \frac{17}{2}$ .

Vậy  $D\left(\frac{17}{2}; 0\right)$  là điểm cần tìm.

b) Từ giả thiết suy ra  $A$  và  $B$  nằm về hai phía của trục hoành. Bởi vậy, với mỗi điểm  $E \in Ox$  ta có  $EA + EB \geq AB$ , đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $E$  là giao điểm của  $AB$  với  $Ox$ . Bằng lập luận như ở phần a), tìm được  $E\left(\frac{11}{4}; 0\right)$ .



Hình 4.47

c) Giả sử tìm được điểm  $F$  thỏa mãn yêu cầu bài toán. Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Khi đó  $G\left(\frac{5}{3}; \frac{11}{3}\right)$ . (1)

## BÀI 1. TỌA ĐỘ CỦA VECTOR

### I. LÝ THUYẾT

#### 1. Tọa độ của một điểm

Để xác định tọa độ của một điểm  $M$  tùy ý trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , ta làm như sau (Hình 1)

- Từ  $M$  kẻ vuông góc với trục hoành và cắt trục hoành tại điểm  $H$  ứng với số  $a$ . Số  $a$  là hoành độ của điểm  $M$ .

- Từ  $M$  kẻ đường thẳng vuông góc với trục tung và cắt trục tung tại điểm  $K$  ứng với số  $b$ . Số  $b$  là tung độ của điểm  $M$ .

Cặp số  $(a;b)$  là tọa độ của điểm  $M$  trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ . Ta kí hiệu là  $M(a;b)$ .

#### 2. Tọa độ của một vector

- Tọa độ của điểm  $M$  được gọi là tọa độ của vector  $\overrightarrow{OM}$ . Nếu  $\overrightarrow{OM}$  có tọa độ  $(a;b)$  thì ta viết  $\overrightarrow{OM} = (a;b)$  hay  $\overrightarrow{OM}(a;b)$ , trong đó  $a, b$  lần lượt là hoành độ và tung độ của vector  $\overrightarrow{OM}$ .

- Vector  $\vec{i}$  có điểm gốc là  $O$  có tọa độ là  $(1;0)$  gọi là vector đơn vị của trục  $Ox$ , vector  $\vec{j}$  có điểm gốc là  $O$  và có tọa độ  $(0;1)$  là vector đơn vị trên trục  $Oy$ .

- Với mỗi vector  $\vec{u}$  trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , tọa độ của vector  $\vec{u}$  là tọa độ của điểm  $A$ , trong đó  $A$  là điểm sao cho  $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ . Nếu  $\vec{u}$  có tọa độ  $(a;b)$  thì ta viết  $\vec{u} = (a;b)$  hay  $\vec{u}(a;b)$ , trong đó  $a, b$  lần lượt là hoành độ, tung độ của vector  $\vec{u}$ .

- Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , nếu  $\vec{u} = (a;b)$  thì  $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ . Ngược lại, nếu  $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$  thì  $\vec{u} = (a;b)$ .

- Với  $\vec{a} = (x_1; y_1); \vec{b} = (x_2; y_2)$ , ta có  $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

#### 3. Liên hệ giữa tọa độ của điểm và tọa độ của vector

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(x_A; y_A)$  và  $B(x_B; y_B)$ .

Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

### II. CÁC DẠNG TOÁN

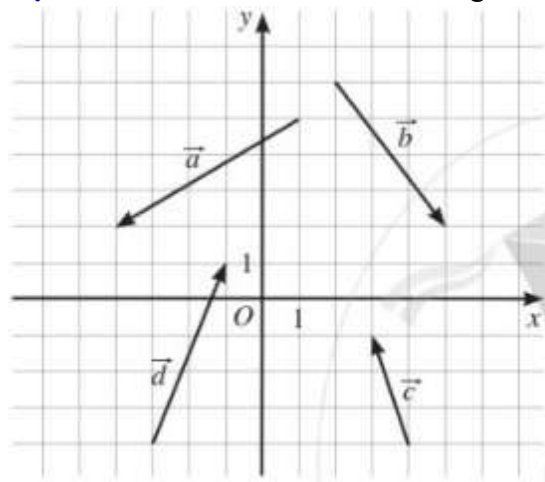
#### Dạng 1. Tìm tọa độ của vector

#### Dạng 2. Tìm điều kiện để hai vector bằng nhau, chứng minh hai vector bằng nhau

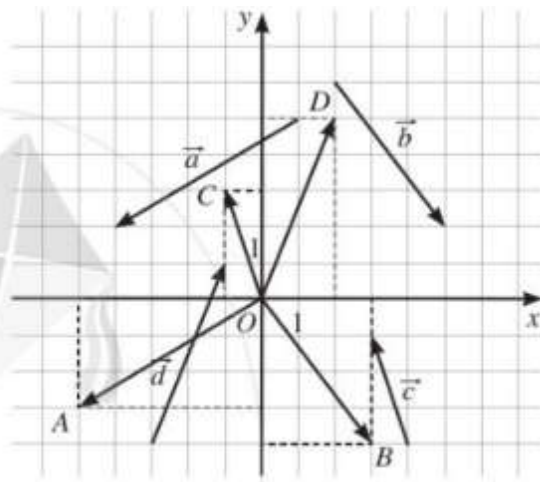
#### Dạng 3. Tìm tọa độ của một điểm thỏa mãn điều kiện cho trước

### III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 1:** Tìm tọa độ của các vector trong Hình 2.



Hình 2



Hình 3

A.

B.

C.

D.

Lời giải

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

a) Giả sử  $M(x; y)$ . Ta có:  $\overrightarrow{AM} = (x-2; y-3), \overrightarrow{BC} = (4; -2)$ .

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=4 \\ y-3=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases} \text{ Vậy } M(6;1).$$

b) Giả sử  $N(x; y)$ . Ta có:  $\overrightarrow{AN} = (x-2; y-3), \overrightarrow{NC} = (3-x; -1-y)$ .

Vì  $N$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AC$  nên ta có:

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BN} = \left(\frac{7}{2}; 0\right), \overrightarrow{NM} = \left(\frac{7}{2}; 0\right). \text{ Suy ra } \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NM}.$$

**Ví dụ 6:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác  $ABC$ . Các điểm:  $M(1; -2), N(4; -1)$  và  $P(6; 2)$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, AC, AB$ . Tìm tọa độ của các điểm  $A, B, C$ .

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

Vì  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, AC, AB$ . Tìm tọa độ của các điểm  $A, B, C$  Nên tứ giác  $ANMP$  là hình bình hành, suy ra  $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{PM}$ . Giả sử  $A(x_A; y_A)$ .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AN} = (4-x_A; -1-y_A), \overrightarrow{PM} = (-5; -4). \text{ Suy ra } \begin{cases} 4-x_A=-5 \\ 1-y_A=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A=9 \\ y_A=5 \end{cases}. \text{ Vậy } A(9;5).$$

Tương tự, từ  $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{NP}$ , ta tính được  $B(3;1), C(-1; -5)$ .

**IV. BÀI TẬP**

**Câu 1.** Tìm tọa độ của vector  $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$  là

**A.**  $(-3; 2)$ .**B.**  $(2; -3)$ .**C.**  $(-3\vec{i}; 2\vec{j})$ .**D.**  $(3; 2)$ .**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn****Chọn A**

**Câu 2.** Tìm tọa độ của vector  $\vec{u} = 5\vec{j}$  là

**A.**  $(5; 0)$ .**B.**  $(5; \vec{j})$ .**C.**  $(-2; -5)$ .**D.**  $(0; 5)$ .**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn****Chọn D**

**Câu 3.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho  $A(2; -5)$ . Tọa độ của vector  $\overrightarrow{OA}$  là

**A.**  $(2; 5)$ **B.**  $(2; -5)$ .**C.**  $(0; 5\vec{j})$ .**D.**  $(-2; 5)$ .**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn****Chọn B**

**Câu 4.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho  $A(-1; 3), B(2; -1)$ . Tọa độ của vector  $\overrightarrow{AB}$  là

**A.**  $(1; -4)$ **B.**  $(-3; 4)$ .**C.**  $(3; -4)$ .**D.**  $(1; -2)$ .**A.****B.****C.****D.**

Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành khi và chỉ khi  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ . Suy ra  $D(2; -4)$ .

**Câu 10.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tứ giác  $ABCD$  có  $A(x_A; y_A); B(x_B; y_B); C(x_C; y_C); D(x_D; y_D)$ . Chứng minh tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành khi và chỉ khi  $x_A + x_C = x_B + x_D$  và  $y_A + y_C = y_B + y_D$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Ta có:  $\overrightarrow{DC} = (x_C - x_D; y_C - y_D)$ ,  $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$ . Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành khi và chỉ khi  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - x_D = x_B - x_A \\ y_C - y_D = y_B - y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$

**Câu 11.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm không thẳng hàng  $M(1; -2), N(3; 1), P(-1; 2)$ . Tìm tọa độ điểm Q sao cho tứ giác  $MNPQ$  là hình thang có  $MN \parallel PQ$  và  $PQ = 2MN$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Gọi  $A(a; b)$  là trung điểm  $PQ$ . Ta có:  $\overrightarrow{MN} = (2; 3)$ . Vì  $MN \parallel PQ$  và  $PQ = 2MN$  nên  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AP} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -1 - a \\ 3 = 2 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -1 \end{cases}$ . Suy ra  $A(-3; -1)$ .

Lại có  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{QA} \Rightarrow Q(-5; -4)$ .

**Ví dụ 8:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (-1; 2)$ ,  $\vec{b} = (3; 1)$ ,  $\vec{c} = (2; -3)$ .

a) Tìm tọa độ của vector  $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$ .

b) Tìm tọa độ của vector  $\vec{x}$  sao cho  $\vec{x} + 2\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

a) Ta có:  $2\vec{a} = (-2; 4)$  nên  $2\vec{a} + \vec{b} = (1; 5)$ . Mà  $3\vec{c} = (6; -9)$ ,

Suy ra  $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c} = (-5; 14)$ .

b) Ta có:  $\vec{x} + 2\vec{b} = \vec{a} + \vec{c} \Rightarrow \vec{x} = \vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b}$ . Mà  $\vec{a} + \vec{c} = (1; -1)$ ,  $2\vec{b} = (6; 2)$ .

Suy ra  $\vec{x} = \vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b} = (-5; -3)$ .

**Ví dụ 9:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $A(-1; 2)$ ,  $B(2; 3)$ ,  $C(-4; m)$ .

Tìm  $m$  để ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (3; 1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-3; m - 2)$ .

$A, B, C$  thẳng hàng  $\Leftrightarrow$  Tồn tại  $k \in \mathbb{R}$  sao cho  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ .

Từ  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$  ta có: 
$$\begin{cases} 3 = k \cdot (-3) \\ 1 = k(m - 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -1 \\ m = 1 \end{cases}$$

Suy ra với  $m = 1$  thì tồn tại  $k \in \mathbb{R}$  sao cho  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$  hay  $A, B, C$  thẳng hàng.

**Ví dụ 10:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(-2; 3)$ ,  $B(4; 5)$ ,  $C(2; -3)$ .

a) Chứng minh ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.

b) Tìm tọa độ trung điểm  $M$  của đoạn thẳng  $BC$ .

c) Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

a) Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (6; 2)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (4; -6)$

Do  $\frac{6}{4} \neq \frac{2}{-6}$  nên không tồn tại  $k \in \mathbb{R}$  để  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ . Vì vậy ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng

b) Do  $M(x_M; y_M)$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$  nên ta có:

$$x_M = \frac{4 + 2}{2} = 3; y_M = \frac{5 + (-3)}{2} = 1. \text{ Vậy } M(3; 1).$$

c) Do  $G(x_G; y_G)$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  nên ta có:

$$x_G = \frac{-2 + 4 + 2}{3} = \frac{4}{3}; y_G = \frac{3 + 5 + (-3)}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\text{Vậy } G\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right).$$

**Ví dụ 11:** Cho ba điểm không thẳng hàng  $A(1; 1)$ ,  $B(4; 3)$  và  $C(6; -2)$ .

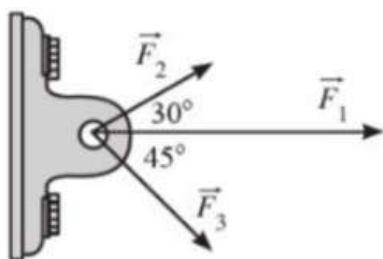
Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình thang có  $AB \parallel CD$  và  $CD = 2AB$ .

A.

B.

C.

D.



Hình 5

A.

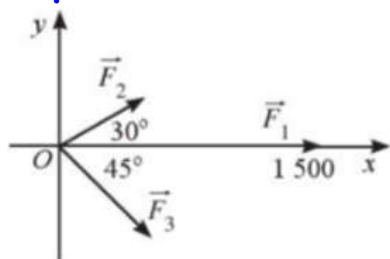
B.

C.

D.

Lời giải

Chọn



Hình 6

Chọn hệ trục  $Oxy$  như Hình 6,  $x$  và  $y$  tính bằng Newton.

Ta có:

$$\vec{F}_1 = (1\,500; 0);$$

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 30^\circ \text{ nên tọa độ } \vec{F}_2 \text{ là } \vec{F}_2 = (600 \cos 30^\circ; 600 \sin 30^\circ) \text{ hay } \vec{F}_2 = (300\sqrt{3}; 300).$$

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_3) = 45^\circ \text{ nên tọa độ } \vec{F}_3 \text{ là } \vec{F}_3 = (800 \cos 45^\circ; -800 \sin 45^\circ) \text{ hay } \vec{F}_3 = (400\sqrt{2}; -400\sqrt{2}).$$

Do đó, lực  $\vec{F}$  tổng hợp các lực tác động lên vật có tọa độ là:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (1\,500 + 300\sqrt{3} + 400\sqrt{2}; 300 - 400\sqrt{2})$$

Độ lớn lực tác dụng  $\vec{F}$  tác động lên vật là:

$$|\vec{F}| = \sqrt{(1\,500 + 300\sqrt{3} + 400\sqrt{2})^2 + (300 - 400\sqrt{2})^2} \approx 2\,599(\text{N}).$$

#### IV. BÀI TẬP

**Câu 12.** Cho hai vector  $\vec{u} = (-1; 3)$ ,  $\vec{v} = (2; -5)$ . Tọa độ của vector  $\vec{u} + \vec{v}$  là :

A.  $(1; -2)$ .

B.  $(-2; 1)$ .

C.  $(-3; 8)$ .

D.  $(3; -8)$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn A

**Câu 13.** Cho hai vector  $\vec{u} = (2; -3)$ ,  $\vec{v} = (1; 4)$ . Tọa độ của vector  $\vec{u} - 2\vec{v}$  là :

A.  $(0; 11)$ .

B.  $(0; -11)$ .

C.  $(-11; 0)$ .

D.  $(-3; 10)$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 14.** Cho hai điểm  $A(4; -1)$ ,  $B(-2; 5)$ . Tọa độ trung điểm  $M$  của đoạn thẳng  $AB$  là:

A.  $(2; 4)$ .

B.  $(-3; 3)$ .

C.  $(3; -3)$ .

D.  $(1; 2)$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

b)  $G\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$

c)  $D(5; 4)$

**Câu 21.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-2; 4), B(-5; -1), C(8, -2)$ . Giải tam giác  $ABC$  (làm tròn các kết quả số đo góc đến hàng đơn vị).

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

$$AB = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}, AC = \sqrt{10^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{34}.$$

$$BC = \sqrt{13^2 + (-1)^2} = \sqrt{170}.$$

$$\widehat{BAC} = 90^\circ, \widehat{ABC} \approx 63^\circ, \widehat{ACB} \approx 27^\circ.$$

**Câu 22.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(4; -2), B(10; 4)$  và điểm  $M$  nằm trên trục  $Ox$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  sao cho  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$  có giá trị nhỏ nhất.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Vì  $M$  nằm trên trục  $Ox$  nên có tọa độ  $(m; 0)$  ( $m$  là số thực). Khi đó,  $\overrightarrow{MA} = (4 - m; -2), \overrightarrow{MB} = (10 - m; 4)$  suy ra  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (14 - 2m; 2)$ .

Do đó  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = \sqrt{(14 - 2m)^2 + 2^2} \geq 2$  (vì  $(14 - 2m)^2 \geq 0$ ). Dấu bằng xảy ra khi  $m = 7$ .

Vậy  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$  có giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi  $M$  có tọa độ là  $(7; 0)$ .

**Câu 23.** Trên màn hình ra đa của đài kiểm soát không lưu (được coi như mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  với đơn vị trên các trục tính theo ki-lô-mét), một máy bay trực thăng chuyển động thẳng đều từ thành phố  $A$  có tọa độ  $(600; 200)$  đến thành phố  $B$  có tọa độ  $(200; 500)$  và thời gian bay quãng đường  $AB$  là 3 giờ. Hãy tìm tọa độ của máy bay trực thăng tại thời điểm sau khi xuất phát 1 giờ.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Giả sử  $M(x; y)$  là vị trí của máy bay trực thăng tại thời điểm sau khi xuất phát 1 giờ. Ta có:  $\overrightarrow{AM} = (x - 600; y - 200), \overrightarrow{AB} = (-400; 300)$ .

Vì máy bay trực thăng chuyển động thẳng đều nên  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ .

$$\text{Do đó: } \begin{cases} x - 600 = -\frac{400}{3} \\ y - 200 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1400}{3} \\ y = 300. \end{cases}$$

Vậy vị trí của máy bay trực thăng tại thời điểm sau khi xuất phát 1 giờ là  $M\left(\frac{1400}{3}; 300\right)$ .

-Tìm một vector pháp tuyến  $\vec{n}=(a;b)$  của đường thẳng  $\Delta$ .

-Tìm một điểm  $M_0=(x_0;y_0)$ . thuộc  $\Delta$ .

- Lập phương trình của  $\Delta: a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$  rồi biến đổi về dạng tổng quát  $ax+by+c=0$  ( $c=-ax_0-by_0$ ).

**Dạng 3. Tìm tọa độ thuộc đường thẳng thỏa mãn điều kiện cho trước**

**Dạng 4. Ứng dụng thực tế hoặc liên môn**

### III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 15:** Lập phương trình tham số của đường thẳng  $\Delta$  trong mỗi trường hợp sau

$\Delta$  đi qua điểm  $A(-1;3)$  và có vector chỉ phương  $\vec{u}=(2;-3)$ .

$\Delta$  đi qua điểm  $B(2;1)$  và có vector pháp tuyến  $\vec{n}=(-3;-4)$ .

$\Delta$  đi qua hai điểm  $A(3;-3)$  và  $B(-2;-1)$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Phương trình tham số của đường thẳng  $\Delta$  là:  $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=3-3t \end{cases}$  ( $t$  là tham số).

$\Delta$  có vector pháp tuyến  $\vec{n}=(-3;-4)$  nên có thể chọn một vector chỉ phương là  $\vec{u}=(4;-3)$ . Phương trình tham số của đường thẳng  $\Delta$  là:  $\begin{cases} x=2+4t \\ y=1-3t \end{cases}$  ( $t$  là tham số).

Phương trình tham số của đường thẳng  $\Delta$  là:  $\begin{cases} x=3+(-2-3)t \\ y=-3+[-1-(-3)]t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-5t \\ y=-3+2t \end{cases}$  ( $t$  là tham số).

**Ví dụ 16:** Cho đường thẳng  $d$  có phương trình tổng quát là  $x-2y-5=0$ . Lập phương trình tham số của đường thẳng  $d$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Từ phương trình tổng quát của  $d$ , ta lấy được một vector pháp tuyến  $\vec{n}=(1;-2)$  nên ta chọn được một vector chỉ phương của  $d$  là  $\vec{u}=(2;1)$ . Chọn điểm  $A(1;-2)$  thuộc  $d$ . Vậy phương trình tham số của đường thẳng  $d$  là:  $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+t \end{cases}$  ( $t$  là tham số).

**Ví dụ 17:** Lập phương trình tổng quát của đường thẳng  $\Delta$  trong mỗi trường hợp sau

$\Delta$  đi qua điểm  $A(-2;-1)$  và có vector pháp tuyến  $\vec{n}=(3;-4)$ .

$\Delta$  đi qua điểm  $B(3;-2)$  và có vector chỉ phương  $\vec{u}=(5;-3)$ .

$\Delta$  đi qua hai điểm  $C(5;0)$  và  $D(0;-2)$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Đường thẳng  $\Delta$  có phương trình  $3(x+2)-4(y+1)=0$ . Từ đó ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng  $\Delta$  là:  $3x-4y+2=0$ .

**Ví dụ 19:** Cho đường thẳng  $d$  có phương trình tham số là  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t. \end{cases}$

- a) Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc  $d$  sao cho  $OM = 5$  với  $O$  là gốc tọa độ.  
b) Tìm tọa độ điểm  $N$  thuộc  $d$  sao cho khoảng cách từ  $N$  đến trục hoành  $Ox$  là 3.

**A. B. C. D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Điểm  $M$  thuộc  $d$  nên ta có  $M(1 + 2m; -2 + m)$  với  $m \in \mathbb{R}$ .

$$OM = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(1 + 2m)^2 + (-2 + m)^2} = 5 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2. \end{cases}$$

Với  $m = 2$  ta có  $M(5; 0)$ .

Với  $m = -2$  ta có  $M(-3; -4)$ .

Vậy có hai điểm  $M$  thỏa mãn bài toán:  $M(5; 0)$  và  $M(-3; -4)$ .

b) Điểm  $N$  thuộc  $d$  nên ta có:  $N(1 + 2n; -2 + n)$ . Khoảng cách từ  $N$  đến trục hoành  $Ox$  bằng giá trị tuyệt đối của tung độ điểm  $N$ . Do đó, khoảng cách từ  $N$  đến trục hoành  $Ox$  bằng 3 khi và chỉ khi

$$|-2 + n| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 \\ n = -1. \end{cases}$$

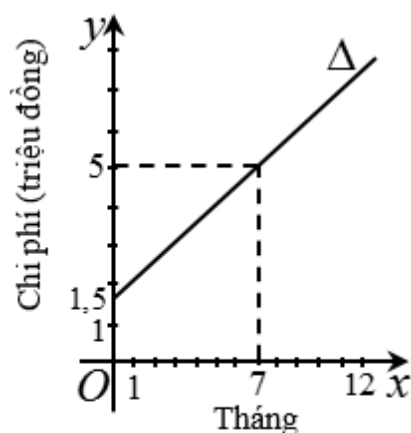
Với  $n = 5$  ta có:  $N(11; 3)$

Với  $n = -1$  ta có:  $N(-1; -3)$ .

Vậy có hai điểm  $N$  thỏa mãn bài toán:  $N(11; 3)$  và  $N(-1; -3)$ .

**Ví dụ 20:** Để tham gia một phòng tập thể dục người tập phải trả một khoản phí tham gia ban đầu và phí sử dụng phòng tập. Đường thẳng  $\Delta$  ở Hình 7 biểu thị tổng chi phí (đơn vị: triệu đồng) tham gia một phòng tập thể dục theo thời gian tập của một người (đơn vị: tháng)

- a) Viết phương trình của đường thẳng  $\Delta$ .  
b) Giao điểm của đường thẳng  $\Delta$  với trục tung trong tình huống này có ý nghĩa gì?  
c) Tính tổng chi phí mà người đó phải trả khi tham gia phòng tập thể dục với thời gian 12 tháng.



Hình 7

**A. B. C. D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Đường thẳng  $\Delta$  đi qua hai điểm lần lượt có tọa độ là  $(0; 1,5)$  và  $(7; 5)$  nên  $\Delta$  có phương trình là:

$$\frac{x - 0}{7 - 0} = \frac{y - 1,5}{5 - 1,5} \Leftrightarrow \frac{x}{7} = \frac{y - 1,5}{3,5} \Leftrightarrow x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

**Câu 29.** Cho tam giác  $ABC$ , biết toạ độ trung điểm các cạnh  $BC, CA, AB$  lần lượt là  $M(-1;1), N(3;4), P(5;6)$ .

- a) Viết phương trình tham số của các đường thẳng  $AB, BC, CA$ .  
b) Viết phương trình tổng quát của các đường trung trực của tam giác  $ABC$ .

**A.** **B.** **C.** **D.**  
**Lời giải**

**Chọn**

a) Do  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$  nên  $MN \parallel AB, NP \parallel BC, MP \parallel AC$ .

Ta có:  $\overrightarrow{MN} = (4;3)$  là vector chỉ phương của đường thẳng  $AB$ , mà  $P(5;6)$  thuộc  $AB$ .

Suy ra phương trình tham số của  $AB$  là: 
$$\begin{cases} x = 5 + 4t_1 \\ y = 6 + 3t_1 \end{cases}$$

Tương tự, phương trình tham số của  $BC$  và  $CA$  lần lượt là: 
$$\begin{cases} x = -1 + t_2 \\ y = 1 + t_2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = 3 - 6t_3 \\ y = 4 - 5t_3 \end{cases}$$

b) Gọi  $d$  là đường trung trực của  $AB$ . Ta có:  $\overrightarrow{MN} = (4;3)$  là vector pháp tuyến của  $d$  và  $P(5;6)$  thuộc  $d$ . Suy ra phương trình của  $d$  là  $4(x-5) + 3(y-6) = 0$ . Từ đó ta nhận được phương trình tổng quát của  $d$  là  $4x + 3y - 38 = 0$ .

Tương tự, phương trình tổng quát của đường trung trực cạnh  $BC$  và  $CA$  lần lượt là:  
 $x + y = 0$  và  $-6x - 5y + 38 = 0$ .

**Câu 30.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(3;7), B(-2;2), C(6;1)$ . Viết phương trình tổng quát của các đường cao của tam giác  $ABC$ .

**A.** **B.** **C.** **D.**  
**Lời giải**

**Chọn**

Đường cao kẻ từ  $A(3;7)$  nhận  $\overrightarrow{BC} = (8;-1)$  là vector pháp tuyến nên có phương trình là  $8(x-3) - (y-7) = 0$ .

Từ đó ta nhận được phương trình tổng quát của đường cao kẻ từ  $A$  là  $8x - y - 17 = 0$ .

Tương tự, phương trình tổng quát của đường cao kẻ từ  $B$  và  $C$  lần lượt là:  
 $-3x + 6y - 18 = 0$  và  $x + y - 7 = 0$ .

**Câu 31.** Cho đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$  và điểm  $A(2;1)$ . Hai điểm  $M, N$  nằm trên  $\Delta$ .

- a) Tìm toạ độ điểm  $M$  sao cho  $AM = \sqrt{17}$ .  
b) Tìm toạ độ điểm  $N$  sao cho đoạn thẳng  $AN$  ngắn nhất.  
a)  $M$  nằm trên  $\Delta$  nên ta lấy toạ độ của  $M$  là  $(4+m; -1+2m)$  ( $m$  là số thực).

**A.** **B.** **C.** **D.**  
**Lời giải**

**Chọn**

Ta có:  $AM = \sqrt{17} \Leftrightarrow (m+2)^2 + (2m-2)^2 = 17 \Leftrightarrow 5m^2 - 4m - 9 = 0$ . Giải phương trình trên ta có:  $m = \frac{9}{5}$  hoặc  $m = -1$ .

Vậy có 2 trường hợp là  $M\left(\frac{29}{5}; \frac{13}{5}\right)$  và  $M(3;-3)$ .

b)  $N$  nằm trên  $\Delta$  nên ta lấy toạ độ của  $N$  là  $(4+n; -1+2n)$  ( $n$  là số thực).

Ta có:  $\overrightarrow{AN} = (n+2; 2n-2)$  và  $\vec{u} = (1;2)$  là vector chỉ phương của  $\Delta$ .

## BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

### I. LÝ THUYẾT

#### 1. Phương trình tham số của đường thẳng

Vector  $\vec{u}$  được gọi là vector chỉ phương của đường thẳng  $\Delta$  nếu  $\vec{u} \neq \vec{0}$  và giá của  $\vec{u}$  song song hoặc trùng với  $\Delta$

Hệ  $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + at \end{cases}$  ( $a^2 + b^2 > 0$  và  $t$  là tham số) được gọi là phương trình tham số của đường thẳng  $\Delta$  đi

qua  $M_0(x_0; y_0)$  và nhận  $\vec{u} = (a; b)$  làm vector chỉ phương.

#### 2. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Vector  $\vec{n}$  được gọi là vector pháp tuyến của đường thẳng  $\Delta$  nếu  $\vec{n} \neq \vec{0}$  và giá của  $\vec{n}$  vuông góc với  $\Delta$ .

**Nhận xét:** Nếu đường thẳng  $\Delta$  có vector chỉ phương là  $\vec{u} = (a; b)$  thì vector  $\vec{n} = (-b; a)$  là một vector pháp tuyến của  $\Delta$  và ngược lại

Phương trình  $ax + by + c = 0$  ( $a$  và  $b$  không đồng thời bằng 0) được gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng.

#### 3. Lập phương trình đường thẳng

##### Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm và biết vector pháp tuyến

Phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0)$  và nhận  $\vec{n} = (a; b)$  ( $\vec{n} \neq \vec{0}$ ) làm vector pháp tuyến là  $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ .

##### Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm và biết vector chỉ phương

Phương trình tham số của đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0)$  và nhận  $\vec{u} = (a; b)$  ( $\vec{u} \neq \vec{0}$ ) làm vector chỉ phương là:  $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$  ( $t$  là tham số).

Nếu  $a \neq 0$  và  $b \neq 0$  thì ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng  $\Delta$  ở dạng:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

##### Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm

Phương trình tham số của đường thẳng  $\Delta$  đi qua hai điểm  $A(x_0; y_0), B(x_1; y_1)$  là:

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{cases} \quad (t \text{ là tham số}).$$

Nếu  $x_1 - x_0 \neq 0$  và  $y_1 - y_0 \neq 0$  thì ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng  $\Delta$  ở dạng:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

**Chú ý:** Đường thẳng  $\Delta$  đi qua hai điểm  $A(a; 0)$  và  $B(0; b)$  ( $ab \neq 0$ ) có phương trình  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ , gọi là

phương trình đường thẳng theo đoạn chắn

### II. CÁC DẠNG TOÁN

#### Dạng 1. Lập phương trình tham số của đường thẳng

**Phương pháp:** Để lập phương trình tham số của đường thẳng  $\Delta$  ta thực hiện các bước sau

- Tìm một vector chỉ phương  $\vec{u} = (a; b)$  của đường thẳng  $\Delta$ .

- Tìm một điểm  $M_0 = (x_0; y_0)$  thuộc  $\Delta$ .

- Phương trình tham số của đường thẳng  $\Delta$  là:  $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$  ( $t$  là tham số).

#### Dạng 2. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng

**Phương pháp:** Để lập phương trình tổng quát của đường thẳng  $\Delta$  ta thực hiện các bước sau

$\Delta$  có vector chỉ phương  $\vec{u} = (5; -3)$  nên có thể chọn một vector pháp tuyến là  $\vec{n} = (3; 5)$ . Đường thẳng  $\Delta$  có phương trình  $3(x-3) + 5(y+2) = 0$ . Từ đó ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng  $\Delta$  là:  $3x + 5y + 1 = 0$ .

Cách 1:  $\Delta$  có vector chỉ phương  $\vec{u} = \overrightarrow{CD} = (-5; -2)$  nên có thể chọn một vector pháp tuyến là  $\vec{n} = (2; -5)$ . Đường thẳng  $\Delta$  có phương trình là  $2(x-5) - 5(y-0) = 0$ . Từ đó ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng  $\Delta$  là:  $2x - 5y - 10 = 0$ .

Cách 2: Phương trình theo đoạn chắn của đường thẳng  $\Delta$  là:  $\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$ . Ta có:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1 \Leftrightarrow -2x + 5y + 10 = 0 \Leftrightarrow 2x - 5y - 10 = 0.$$

Từ đó ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng  $\Delta$  là:  $2x - 5y - 10 = 0$ .

**Ví dụ 24:** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $A(1;3)$ ,  $B(-1;-1)$ ,  $C(5;-3)$ . Lập phương trình tổng quát của Ba đường thẳng  $AB, BC, AC$ .

Đường trung trực cạnh  $AB$ .

Đường cao  $AH$  và đường trung tuyến  $AM$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-2; -4)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (6; -2)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (4; -6)$ .

$AB$  có vector chỉ phương  $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (-1; -2)$  nên có thể chọn một vector pháp tuyến  $\vec{n} = (2; -1)$ .

Phương trình của đường thẳng  $AB$  là  $2(x-1) - 1(y-3) = 0$ . Từ đó ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng  $AB$  là:  $2x - y + 1 = 0$ .

-  $BC$  có vector chỉ phương là  $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = (3; -1)$  nên có thể chọn một vector pháp tuyến  $\vec{m} = (1; 3)$ .

Phương trình của đường thẳng  $BC$  là  $1(x+1) + 3(y+1) = 0$ . Từ đó ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng  $BC$  là  $x + 3y + 4 = 0$ .

-  $AC$  có vector chỉ phương là  $\vec{t} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = (2; -3)$  nên ta có thể chọn một vector pháp tuyến  $\vec{p} = (3; 2)$ .

Phương trình của đường thẳng  $AC$  là  $3(x-1) + 2(y-3) = 0$ . Từ đó ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng  $AC$  là  $3x + 2y - 9 = 0$ .

b) Gọi  $d$  là đường trung trực cạnh  $AB$ . Lấy  $N$  là trung điểm  $AB$ , suy ra  $N(0;1)$ . Đường thẳng  $d$  có vector pháp tuyến  $\vec{q} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1; 2)$  và đi qua  $N$ . Phương trình của đường thẳng  $d$  là  $1(x-0) + 2(y-1) = 0$ . Từ đó ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng  $d$  là  $x + 2y - 2 = 0$ .

c)  $AH$  vuông góc với  $BC$  nên có vector pháp tuyến  $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = (3; -1)$ . Phương trình tổng quát của đường cao  $AH$  là  $3(x-1) - 1(y-3) = 0$ . Từ đó ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng  $AH$  là  $3x - y = 0$ .

$M$  là trung điểm  $BC$ , suy ra  $M(2; -2)$ . Ta có  $\overrightarrow{AM} = (1; -5)$ . Trung tuyến  $AM$  có vector chỉ phương là  $\vec{r} = \overrightarrow{AM} = (1; -5)$  nên ta có thể chọn một vector pháp tuyến  $\vec{s} = (5; 1)$ . Phương trình của đường thẳng  $AM$  là  $5(x-1) + 1(y-3) = 0$ . Từ đó ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng  $AM$  là  $5x + y - 8 = 0$ .

b) Giao điểm của đường thẳng  $\Delta$  với trục  $Oy$  ứng với  $x = 0$ . Thời điểm  $x = 0$  cho biết khoản phí tham gia ban đầu mà người tập phải trả. Khi  $x = 0$  thì  $y = 1,5$ , vì vậy khoản phí tham gia ban đầu mà người tập phải trả là 1 500 000 đồng.

c) 12 tháng đầu tiên ứng với  $x = 12$ . Do đó  $y = \frac{1}{2} \cdot 12 + \frac{3}{2} = 7,5$ .

Vậy tổng chi phí mà người đó phải trả khi tham gia phòng tập thể dục với thời gian 12 tháng là 7500000 đồng.

#### IV. BÀI TẬP

**Câu 33.** Cho đường thẳng  $\Delta: 2x - 3y + 5 = 0$ . Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của  $\Delta$  ?

- A.  $\vec{n}_1 = (2; -3)$ .      **B.**  $\vec{n}_2 = (-3; 2)$ .      **C.**  $\vec{n}_3 = (2; 3)$ .      **D.**  $\vec{n}_4 = (3; 2)$ .  
A.      B.      C.      D.

Lời giải

Chọn  
Chọn A

**Câu 34.** Cho đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$ . Vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của  $\Delta$  ?

- A.**  $\vec{u}_1 = (3; 4)$ .      **B.**  $\vec{u}_2 = (-2; 1)$ .      C.  $\vec{u}_3 = (-1; 2)$ .      **D.**  $\vec{u}_4 = (-2; -1)$ .  
A.      B.      C.      D.

Lời giải

Chọn  
Chọn C

**Câu 35.** Cho đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$ . Trong các điểm có tọa độ dưới đây, điểm nào nằm trên đường thẳng  $\Delta$  ?

- A.**  $(-3; -2)$ .      B.  $(2; -1)$ .      **C.**  $(-2; 1)$ .      **D.**  $(-5; 3)$ .  
A.      B.      C.      D.

Lời giải

Chọn  
Chọn B

**Câu 36.** Cho đường thẳng  $\Delta: x - 3y + 4 = 0$ . Phương trình nào dưới đây là phương trình tham số của  $\Delta$  ?

- A.**  $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -1 + t \end{cases}$ .      B.  $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 + t \end{cases}$ .      **C.**  $\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 1 + t \end{cases}$ .      **D.**  $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 - t \end{cases}$ .  
A.      B.      C.      D.

Lời giải

Chọn  
Chọn B

**Câu 37.** Cho đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$ . Phương trình nào dưới đây là phương trình tổng quát của  $\Delta$  ?

- A.**  $5x + 2y - 4 = 0$ .      **B.**  $2x - 5y + 19 = 0$ .      **C.**  $-5x + 2y - 16 = 0$ .      D.  $5x + 2y + 4 = 0$ .  
A.      B.      C.      D.

Lời giải

Chọn  
Chọn D

Đoạn thẳng  $AN$  ngắn nhất khi và chỉ khi  $N$  là hình chiếu của  $A$  lên  $\Delta$ .

Suy ra  $AN$  vuông góc với  $\Delta$  hay  $\vec{u} \cdot \vec{AN} = 0 \Leftrightarrow 1(n+2) + 2(2n-2) = 0 \Leftrightarrow n = \frac{2}{5}$ .

Vậy  $N\left(\frac{22}{5}; -\frac{1}{5}\right)$ .

**Câu 41.** Cho ba điểm  $A(-2; 2), B(7; 5), C(4; -5)$  và đường thẳng  $\Delta: 2x + y - 4 = 0$ .

a) Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc  $\Delta$  và cách đều hai điểm  $A$  và  $B$ .

b\*) Tìm tọa độ điểm  $N$  thuộc  $\Delta$  sao cho  $|\vec{NA} + \vec{NB} + \vec{NC}|$  có giá trị nhỏ nhất.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Cách 1:  $M$  thuộc đường thẳng  $\Delta$  nên  $M(m; 4-2m)$  ( $m$  là số thực). Ta có:

$$MA = \sqrt{(-2-m)^2 + (-2+2m)^2}, MB = \sqrt{(7-m)^2 + (1+2m)^2}.$$

$$MA = MB \Leftrightarrow \sqrt{(-2-m)^2 + (-2+2m)^2} = \sqrt{(7-m)^2 + (1+2m)^2} \Leftrightarrow m = 7.$$

Vậy  $M(7; -10)$ .

Cách 2: Điểm  $M$  là giao điểm của đường trung trực đoạn thẳng  $AB$  và đường thẳng  $\Delta$ .

b\*)  $N$  thuộc đường thẳng  $\Delta$  nên  $N(n; 4-2n)$  ( $n$  là số thực).

Ta có:  $\vec{NA} + \vec{NB} + \vec{NC} = (9-3n; -10+6n)$ .

$$|\vec{NA} + \vec{NB} + \vec{NC}| = \sqrt{(9-3n)^2 + (-10+6n)^2} = \sqrt{45n^2 - 174n + 181}$$

$$= \sqrt{45\left(n - \frac{29}{15}\right)^2 + \frac{64}{5}} \geq \sqrt{\frac{64}{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy  $|\vec{NA} + \vec{NB} + \vec{NC}|$  có giá trị nhỏ nhất bằng  $\frac{8\sqrt{5}}{5}$  khi  $N\left(\frac{29}{15}; \frac{2}{15}\right)$ .

### III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 27:** Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau:

a)  $d_1: 3x + 2y - 5 = 0$  và  $d_2: x - 4y + 1 = 0$ ;

b)  $d_3: x - 2y + 3 = 0$  và  $d_4: -2x + 4y + 10 = 0$ ;

c)  $d_5: 4x + 2y - 3 = 0$  và  $d_6: \begin{cases} x = -\frac{1}{2} + t \\ y = \frac{5}{2} - 2t \end{cases}$

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Cách 1:

a)  $d_1$  có véc tơ chỉ phương  $\vec{u}_1 = (-2; 3)$ ,  $d_2$  có véc tơ chỉ phương  $\vec{u}_2 = (4; 1)$ . Do  $\frac{-2}{4} \neq \frac{3}{1}$  nên  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  không cùng phương, suy ra  $d_1$  cắt  $d_2$ .

b)  $d_3$  có véc tơ chỉ phương  $\vec{u}_3 = (2; 1)$ ,  $d_4$  có véc tơ chỉ phương  $\vec{u}_4 = (-4; -2)$ , suy ra  $\vec{u}_3 = -\frac{1}{2}\vec{u}_4$ . Chọn điểm  $M(-1; 1) \in d_3$ . Do  $M(-1; 1) \notin d_4$  suy ra  $d_3$  song song với  $d_4$ .

c)  $d_5$  có véc tơ chỉ phương  $\vec{u}_1 = (-2; 4)$ ,  $d_6$  có véc tơ chỉ phương  $\vec{u}_6 = (1; -2)$ , suy ra  $\vec{u}_5 = -2\vec{u}_6$ . Chọn điểm  $N\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right) \in d_6$ . Do  $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right) \in d_5$  suy ra  $d_5$  trùng với  $d_6$ .

Cách 2:

a) Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5 = 0 \\ x - 4y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{7} \\ y = \frac{4}{7} \end{cases}$$

Hệ trên có một nghiệm duy nhất. Như vậy,  $d_1$  và  $d_2$  cắt nhau.

b) Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng  $d_3$  và  $d_4$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ -2x + 4y + 10 = 0 \end{cases}$$

Hệ trên vô nghiệm. Như vậy,  $d_3$  song song với  $d_4$ .

c) Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng  $d_5$  và  $d_6$  tương ứng với  $t$  thỏa mãn phương trình:

$$4\left(-\frac{1}{2} + t\right) + 2\left(\frac{5}{2} - 2t\right) - 3 = 0 \Leftrightarrow 0t = 0$$

Phương trình này có nghiệm với mọi  $t$ . Như vậy,  $d_5$  và  $d_6$  có vô số điểm chung, tức là  $d_5$  trùng với  $d_6$ .

$$\text{b) } \Delta_1: \sqrt{3}x - y + 7 = 0 \text{ và } \Delta_2: \begin{cases} x = -2 - t \\ y = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}t \end{cases}$$

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

a) Ta có  $\vec{n}_1 = (-2; 1), \vec{n}_2 = (3; 1)$  lần lượt là vector pháp tuyến của các đường thẳng  $\Delta_1, \Delta_2$  Suy ra

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|(-2) \cdot 3 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy  $(\Delta_1, \Delta_2) = 45^\circ$ .

b) Ta có  $\vec{u}_1 = (1; \sqrt{3}), \vec{u}_2 = \left(-1; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  lần lượt là vector chỉ phương của các đường thẳng  $\Delta_1, \Delta_2$ . Suy ra

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)| = \frac{\left|1 \cdot (-1) + \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right|}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy  $(\Delta_1, \Delta_2) = 30^\circ$ .

**Ví dụ 30:** Cho đường thẳng  $\Delta: x - 3y + 3 = 0$ .

a) Tính khoảng cách từ điểm  $A(4; -1)$  đến đường thẳng  $\Delta$ ;

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng song song  $\Delta$  và  $\Delta_1: x - 3y - 3 = 0$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

$$\text{a) Ta có: } d(A, \Delta) = \frac{|4 - 3 \cdot (-1) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \sqrt{10}.$$

b) Lấy  $M(-3; 0) \in \Delta$ . Ta có:

$$d(M, \Delta_1) = \frac{|(-3) - 3 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}.$$

Vì hai đường thẳng  $\Delta$  và  $\Delta_1$  song song nên khoảng cách giữa hai đường thẳng đó bằng

$$d(M, \Delta_1) = \frac{3\sqrt{10}}{5}.$$

**Ví dụ 31:** Cho ba điểm  $A(2; 4), B(-1; 2), C(3; -1)$ . Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $B$  đồng thời cách đều  $A$  và  $C$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Cách 1: Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1 (Hình 8):

c) Nếu tàu  $A$  đứng yên ở vị trí ban đầu, tàu  $B$  chạy thì khoảng cách ngắn nhất giữa hai tàu bằng bao nhiêu?

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

a) Tàu  $A$  di chuyển theo hướng cùng hướng với vector  $\vec{u}_1 = (-35; 25)$ ; tàu  $B$  di chuyển theo hướng cùng hướng với vector  $\vec{u}_2 = (-30; -40)$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai đường đi của hai tàu. Ta có:

$$\cos \alpha = \left| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \right| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|(-35) \cdot (-30) + 25 \cdot (-40)|}{\sqrt{(-35)^2 + 25^2} \cdot \sqrt{(-30)^2 + (-40)^2}} = \frac{1}{5\sqrt{74}}.$$

b) Vị trí của tàu  $A$  tại thời điểm sau khi xuất phát  $t$  (giờ) ( $t \geq 0$ ) là điểm  $M$  có tọa độ là  $(3 - 35t; -4 + 25t)$ .

Vị trí của tàu  $B$  tại thời điểm sau khi xuất phát  $t$  (giờ) ( $t \geq 0$ ) là điểm  $N$  có tọa độ là  $(4 - 30t; 3 - 40t)$ .

Do đó,  $\overrightarrow{MN} = (1 + 5t; 7 - 65t)$ . Suy ra

$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{(1 + 5t)^2 + (7 - 65t)^2} = \sqrt{4250t^2 - 900t + 50} \\ &= \sqrt{4250 \left( t - \frac{9}{85} \right)^2 + \frac{40}{17}} \geq \sqrt{\frac{40}{17}} \approx 1,53 \text{ (km)}. \end{aligned}$$

$MN$  nhỏ nhất xấp xỉ bằng 1,53 km khi  $t = \frac{9}{85}$  giờ.

Như vậy, sau  $\frac{9}{85}$  giờ kể từ thời điểm xuất phát thì hai tàu gần nhau nhất và cách nhau khoảng 1,53 km.

c) Cách 1: Vị trí ban đầu của tàu  $A$  tại  $M_0$  ứng với  $t = 0$ , khi đó  $M_0(3; -4)$ .

Tàu  $B$  di chuyển theo đường thẳng  $\Delta$  có vector pháp tuyến  $\vec{n} = (40; -30)$  và đi qua điểm  $K(4; 3)$ .

Phương trình tổng quát của  $\Delta$  là:  $40(x - 4) - 30(y - 3) = 0$  hay  $4x - 3y - 7 = 0$ .

$$\text{Ta có: } d(M_0, \Delta) = \frac{|4 \cdot 3 - 3 \cdot (-4) - 7|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{17}{5} = 3,4 \text{ (km)}.$$

Kiểm tra thấy khoảng cách này bằng khoảng cách giữa tàu  $A$  tại  $M_0$  và tàu  $B$  tại vị trí sau khi xuất phát  $t = \frac{31}{250}$  (giờ).

Vậy nếu tàu  $A$  đứng yên ở vị trí ban đầu, tàu  $B$  chạy thì khoảng cách ngắn nhất giữa hai tàu bằng 3,4 km.

Cách 2: Vị trí ban đầu của tàu  $A$  tại  $M_0$  ứng với  $t = 0$ , khi đó  $M_0(3; -4)$ .

Vị trí của tàu  $B$  sau khi xuất phát  $t$  (giờ) ( $t \geq 0$ ) có tọa độ là  $N(4 - 30t; 3 - 40t)$ .

Do đó  $\overrightarrow{M_0N} = (1 - 30t; 7 - 40t)$

$$\text{Suy ra } M_0N = \sqrt{(1 - 30t)^2 + (7 - 40t)^2} = \sqrt{2500t^2 - 620t + 50}.$$

Đặt  $f(t) = 2500t^2 - 620t + 50$ . Ta có  $f(t)$  đạt giá trị nhỏ nhất tại  $t = -\frac{b}{2a} = \frac{31}{250}$ , khi đó

$$f\left(\frac{31}{250}\right) = \frac{289}{25}.$$

Do  $t = \frac{31}{250} > 0$  và  $f\left(\frac{31}{250}\right) = \frac{289}{25} > 0$  nên suy ra  $M_0N$  nhỏ nhất bằng  $\frac{17}{5} = 3,4$  (km) khi  $t = \frac{31}{250}$  (giờ).

**Chọn**  
**Chọn D**

**Câu 48.** Khoảng cách từ điểm  $M(5; -2)$  đến đường thẳng  $\Delta: -3x + 2y + 6 = 0$  là

- A. 13                                      B.  $\sqrt{13}$ .                                      C.  $\frac{\sqrt{13}}{13}$ .                                      D.  $2\sqrt{13}$ .

A.                                      B.                                      C.                                      D.  
**Lời giải**

**Chọn**  
**Chọn B**

**Câu 49.** Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau:

a)  $d_1: 2x - 3y + 5 = 0$  và  $d_2: 2x + y - 1 = 0$ ;

b)  $d_3: \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 3 + t \end{cases}$  và  $d_4: x + 3y - 5 = 0$ ;

c)  $d_5: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \end{cases}$  và  $d_6: \begin{cases} x = -2 + 2t' \\ y = 1 - t' \end{cases}$ .

A.                                      B.                                      C.                                      D.  
**Lời giải**

**Chọn**

a)  $d_1$  cắt  $d_2$

b)  $d_3$  song song với  $d_4$

c)  $d_5$  trùng với  $d_6$

**Câu 50.** Tìm số đo góc giữa hai đường thẳng của mỗi cặp đường thẳng sau:

a)  $\Delta_1: 3x + y - 5 = 0$  và  $\Delta_2: x + 2y - 3 = 0$ ;

b)  $\Delta_3: \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3}t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$  và  $\Delta_4: \begin{cases} x = 3 - \sqrt{3}t' \\ y = -t' \end{cases}$

c)  $\Delta_5: -\sqrt{3}x + 3y + 2 = 0$  và  $\Delta_6: \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - \sqrt{3}t \end{cases}$

A.                                      B.                                      C.                                      D.  
**Lời giải**

**Chọn**

a)  $(\Delta_1, \Delta_2) = 45^\circ$

b)  $(\Delta_3, \Delta_4) = 30^\circ$

c)  $(\Delta_5, \Delta_6) = 60^\circ$

**Câu 51.** Tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng trong các trường hợp sau:

a)  $A(-3; 1)$  và  $\Delta_1: 2x + y - 4 = 0$ ; b)  $B(1; -3)$  và  $\Delta_2: \begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 1 - t \end{cases}$

A.                                      B.                                      C.                                      D.  
**Lời giải**

**Chọn**

a)  $d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|2 \cdot (-3) + 1 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$

b) Phương trình tổng quát của đường thẳng  $\Delta_2$  là:  $x + 3y = 0$

$$\text{Ta có: } \cos \varphi = \left| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \right| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|36 \cdot 8 + 8(-36)|}{\sqrt{36^2 + 8^2} \cdot \sqrt{8^2 + (-36)^2}} = 0$$

Trường hợp 2:  $A, C$  ở khác phía so với  $\Delta$ . Khi đó,  $\Delta$  đi qua trung điểm của  $AC$ , phương trình đường thẳng  $\Delta$  là:  $x + 2y - 8 = 0$

b) Vị trí của tàu  $A$  sau khi xuất phát  $t$  (giờ) là điểm  $M$  có tọa độ là  $(7 + 36t; -8 + 8t)$ .

Vị trí của tàu  $B$  sau khi xuất phát  $t$  (giờ) là điểm  $N$  có tọa độ là  $(9 + 8t; 5 - 36t)$

Do đó  $\overrightarrow{MN} = (2 - 28t; 13 - 44t)$ . Suy ra

$$MN = \sqrt{(2 - 28t)^2 + (13 - 44t)^2} = \sqrt{2720 \left( t - \frac{157}{680} \right)^2 + \frac{4761}{170}} \geq \sqrt{\frac{4761}{170}} \approx 5,29 (km)$$

$MN$  nhỏ nhất bằng xấp xỉ 5,29 khi  $t = \frac{157}{680}$  (giờ)

Như vậy, sau  $\frac{157}{680}$  giờ di chuyển thì hai tàu gần nhau nhất và cách nhau khoảng 5,29 km

Phương trình đường tròn là:

$$[x - (-1)]^2 + (y - 3)^2 = 5^2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25.$$

c) Gọi  $I(a; b)$  là tâm của đường tròn. Ta có  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ .

$$\text{Suy ra } a = \frac{3 + (-1)}{2} = 1, b = \frac{(-4) + (-6)}{2} = -5. \text{ Vậy } I(1; -5).$$

$$\text{Bán kính của đường tròn là: } R = IA = \sqrt{(3-1)^2 + [(-4) - (-5)]^2} = \sqrt{5}.$$

$$\text{Phương trình đường tròn là: } (x-1)^2 + [y - (-5)]^2 = (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+5)^2 = 5.$$

**Ví dụ 35:** Lập phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Đường tròn tâm  $I(-2; -2)$  và có một tiếp tuyến là  $\Delta: 4x + 3y + 4 = 0$ .

b) Đường tròn đi qua 3 điểm  $A(1; 2)$ ,  $B(5; 2)$ ,  $C(1; -3)$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Bán kính của đường tròn bằng khoảng cách từ điểm  $I$  đến đường thẳng  $\Delta$ .

$$\text{Ta có: } R = d(I, \Delta) = \frac{|4 \cdot (-2) + 3 \cdot (-2) + 4|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{5} = 2.$$

Phương trình đường tròn là:

$$[x - (-2)]^2 + [y - (-2)]^2 = 2^2 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4.$$

b) Giả sử tâm của đường tròn là điểm  $I(a; b)$ . Ta có  $IA = IB = IC \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 = IC^2$ .

Vì  $IA^2 = IB^2, IB^2 = IC^2$  nên

$$\begin{cases} (1-a)^2 + (2-b)^2 = (5-a)^2 + (2-b)^2 \\ (5-a)^2 + (2-b)^2 = (1-a)^2 + (-3-b)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 2a - 4b + 5 = a^2 + b^2 - 10a - 4b + 29 \\ a^2 + b^2 - 10a - 4b + 29 = a^2 + b^2 - 2a + 6b + 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8a = 24 \\ -8a - 10b = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \frac{-1}{2} \end{cases}.$$

Bán kính đường tròn là:

$$R = IA = \sqrt{(1-3)^2 + \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{41}}{2}.$$

Phương trình đường tròn là:

$$(x-3)^2 + \left[y - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{41}{4}.$$

**Ví dụ 36:** Lập phương trình đường thẳng  $\Delta$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$  trong mỗi trường hợp sau:

a)  $\Delta$  tiếp xúc  $(C)$  tại điểm có hoành độ bằng  $-2$ ;

b)  $\Delta$  song song với đường thẳng  $12x + 5y + 63 = 0$ ;

c)  $\Delta$  đi qua điểm  $A(6; -1)$ .

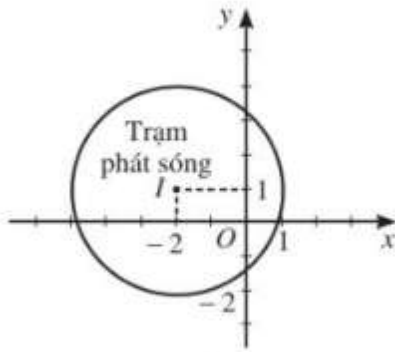
**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**



Hình 10

- a) Lập phương trình đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng, biết rằng trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng 3 km.
- b) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí  $A$  có tọa độ  $(-1; 3)$  thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này không?
- c) Tính theo đường chim bay, xác định khoảng cách ngắn nhất để một người ở vị trí  $B$  có tọa độ  $(-3; 4)$  di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Phương trình đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng là:

$$[x - (-2)]^2 + (y - 1)^2 = 3^2 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9.$$

b) Khoảng cách từ tâm  $I(-2; 1)$  đến điểm  $A(-1; 3)$  là:

$$IA = \sqrt{[-1 - (-2)]^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{5} \text{ (km)}$$

Vì  $IA < 3$  km nên điểm  $A$  nằm trong đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng, suy ra người dùng điện thoại ở vị trí  $A$  có thể sử dụng dịch vụ của trạm.

c) Khoảng cách từ tâm  $I(-2; 1)$  đến điểm  $B(-3; 4)$  là:

$$IB = \sqrt{[-2 - (-3)]^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{10} \text{ (km)}$$

Vì  $IB > 3$  km nên điểm  $B$  nằm ngoài đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng.

Xét  $M$  là điểm bất kì thuộc vùng phủ sóng, khi đó  $M$  nằm trong hoặc nằm trên đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng nên  $IM \geq 3$  km. Khoảng cách tính theo đường chim bay từ người ở vị trí  $B$  đến vùng phủ sóng là  $BM$ .

Ta có  $BM \geq IB - IM \geq \sqrt{10} - 3$  (vì  $IM \leq 3$ ). Suy ra  $BM$  nhỏ nhất bằng  $\sqrt{10} - 3$  (km) khi và chỉ khi  $M$  là giao điểm của đoạn thẳng  $IB$  với đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng.

Vậy khoảng cách ngắn nhất để một người ở vị trí  $B$  di chuyển được tới vùng phủ sóng tính theo đường chim bay là  $\sqrt{10} - 3 \approx 0,2 \text{ (km)}$

**Ví dụ 38:** Ném đĩa là một môn thể thao thi đấu trong Thế vận hội Olympic mùa hè. Khi thực hiện cú ném, vận động viên thường quay lưng lại với hướng ném, sau đó xoay ngược chiều kim đồng hồ một vòng rưỡi của đường tròn để lấy đà rồi thả tay ra khỏi đĩa. Giả sử đĩa chuyển động trên một đường tròn tâm  $I\left(0; \frac{3}{2}\right)$

bán kính 0,8 trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  (đơn vị trên hai trục là mét). Đến điểm  $M\left(\frac{\sqrt{39}}{10}; 2\right)$ , đĩa được

ném đi (Hình 11). Trong những giây đầu tiên ngay sau khi được ném đi, quỹ đạo chuyển động của chiếc đĩa có phương trình như thế nào?

**Câu 59.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , đường tròn tâm  $I(-4;2)$  bán kính  $R = 9$  có phương trình là:

- A.  $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 81$ . B.  $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 9$ .  
C.  $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 9$ . D.  $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 81$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn D

**Câu 60.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C): (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ . Tiếp tuyến tại điểm  $M(0;8)$  thuộc đường tròn có một vectơ pháp tuyến là:

- A.  $\vec{n} = (-3;4)$ . B.  $\vec{n} = (3;4)$ . C.  $\vec{n} = (4;-3)$ . D.  $\vec{n} = (4;3)$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn A

**Câu 61.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C): (x-6)^2 + (y-7)^2 = 16$ . Hai điểm  $M, N$  chuyển động trên đường tròn  $(C)$ . Khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm  $M$  và  $N$  bằng:

- A. 16. B. 8. C. 4. D. 256.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 62.** Tìm  $k$  sao cho phương trình  $x^2 + y^2 - 6x + 2ky + 2k + 12 = 0$  là phương trình đường tròn.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Ta có:

$$x^2 + y^2 - 6x + 2ky + 2k + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2.3x - 2(-k)y + 2k + 12 = 0$$

Phương trình trên là phương trình đường tròn khi và chỉ khi

$$3^2 + (-k)^2 - (2k + 12) > 0 \Leftrightarrow k^2 - 2k - 3 > 0$$

giải bất phương trình trên ta có:  $k < -1$  hoặc  $k > 3$

**Câu 63.** Viết phương trình đường tròn  $(C)$  trong mỗi trường hợp sau:

a)  $(C)$  có tâm  $I(-6;2)$  bán kính  $R = 7$ .

b)  $(C)$  có tâm  $I(3;-7)$  và đi qua điểm  $A(4;1)$ ;

c)  $(C)$  có tâm  $I(1;2)$  và tiếp xúc với đường thẳng  $3x + 4y + 19 = 0$ ;

d)  $(C)$  có đường kính  $AB$  với  $A(-2;3)$  và  $B(0;1)$ ;

e)  $(C)$  có tâm  $I$  thuộc đường thẳng  $\Delta_1: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \end{cases}$  và  $(C)$  tiếp xúc với hai đường thẳng

$$\Delta_2: 3x + 4y - 1 = 0, \Delta_3: 3x - 4y + 2 = 0.$$

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

$$a) (x+6)^2 + (y-2)^2 = 49 \quad b) (x-3)^2 + (y+7)^2 = 65$$

$$c) (x-1)^2 + (y-2)^2 = 36 \quad d) (x+1)^2 + (y-2)^2 = 2$$

e) Vì  $I$  thuộc  $\Delta_1$  nên  $I(1+t;1-t)$  ( $t$  là số thực). Ta có:

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

(C) có tâm  $I(-3;1)$  bán kính  $R=3$ .

**Câu 67.** Ta có:  $d(I, \Delta_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 3, d(I, \Delta_2) = 3, d(I, \Delta_3) = \frac{43\sqrt{5}}{5} > 3$  nên các đường thẳng  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  lần lượt cắt (C), tiếp xúc (C), không có điểm chung với (C). Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $M(1;1)$  và đường thẳng  $\Delta: 3x + 4y + 3 = 0$ . Viết phương trình đường tròn (C), biết (C) có tâm  $M$  và đường thẳng  $\Delta$  cắt (C) tại hai điểm  $N, P$  thỏa mãn tam giác  $MNP$  đều.

A.

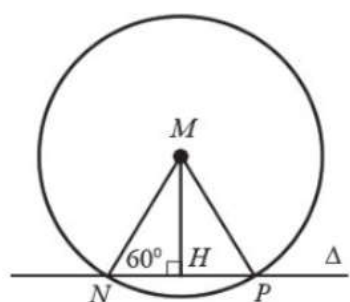
B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $M$  trên  $\Delta$  (Hình 16).

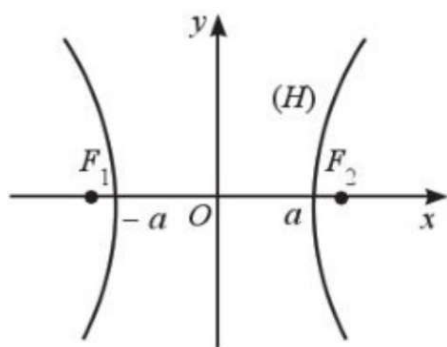
Hình 16

Ta có:  $MH = d(M, \Delta) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$ .

Xét tam giác  $MHN$  có  $MN = \frac{MH}{\sin 60^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ .

Vậy phương trình đường tròn (C) là:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{16}{3}$$



Hình 13

Khi chọn hệ trục tọa độ như Hình 14, phương trình chính tắc của đường parabol (P) là  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ).

$F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$  là tiêu điểm,  $x + \frac{p}{2} = 0$  là phương trình đường chuẩn  $\Delta$ .

## II. CÁC DẠNG TOÁN

**Dạng 1:** Xác định phương trình chính tắc của ba đường conic

**Dạng 2:** Viết phương trình chính tắc của ba đường conic

**Dạng 3:** Xác định một số yếu tố cơ bản của ba đường conic

**Dạng 4:** Tìm điểm thuộc đường conic thỏa mãn điều kiện cho trước

**Dạng 5:** Ứng dụng thực tế hoặc liên môn

## III. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 39:** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường elip? Đường hypebol? Đường parabol?

a)  $\frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{7^2} = 1$ ;

b)  $\frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$ ;

c)  $\frac{x^2}{6^2} - \frac{y^2}{7^2} = 1$ ;

d)  $y^2 = 5x$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

### Chọn

Dựa vào dạng phương trình chính tắc của mỗi đường conic, ta có trường hợp

b) là phương trình đường elip, trường hợp

c) là phương trình đường hypebol, trường hợp

d) là phương trình đường parabol.

**Ví dụ 40:** Lập phương trình chính tắc của mỗi đường conic trong các trường hợp sau:

a) Elip có một tiêu điểm là  $F_2(3;0)$  và đi qua điểm  $A(11;0)$ .

b) Elip đi qua hai điểm  $M(0;3), N\left(3; -\frac{12}{5}\right)$ .

c) Hypebol có một tiêu điểm là  $F_2(2;0)$  và đi qua điểm  $A(1;0)$ .

d) Parabol có tiêu điểm là  $F(8;0)$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

### Chọn

a) Gọi elip cần lập phương trình chính tắc là (

E). Elip (

E) có phương trình chính tắc là:

a) Tìm các giao điểm của  $(E)$  với trục tọa độ.

b) Tìm hai tiêu điểm  $F_1, F_2$  của  $(E)$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

a) Gọi  $A$  là giao điểm của  $(E)$  với trục  $Ox$ , suy ra  $A(x;0)$ . Vì  $A$  thuộc  $(E)$  nên  $\frac{x^2}{100} + \frac{0^2}{64} = 1 \Rightarrow x = \pm 10$ .

Vậy  $(E)$  giao với trục  $Ox$  tại hai điểm có tọa độ  $(10;0)$  và  $(-10;0)$ .

Gọi  $B$  là giao điểm của  $(E)$  với trục  $Oy$ , suy ra  $A(0;y)$ . Vì  $B$  thuộc  $(E)$  nên  $\frac{0^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1 \Rightarrow y = \pm 8$ .

Vậy  $(E)$  giao với trục  $Oy$  tại hai điểm có tọa độ  $(0;-8)$  và  $(0;8)$ .

b) Ta có:  $a^2 = 100, b^2 = 64$ , suy ra  $c^2 = a^2 - b^2 = 100 - 64 = 36$ .

Vậy hai tiêu điểm của  $(E)$  là  $F_1(-6;0), F_2(6;0)$ .

**Ví dụ 42:** Cho hypebol  $(H)$  có phương trình chính tắc  $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{33} = 1$ . Tìm tọa độ các tiêu điểm của  $(H)$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Ta có:  $a^2 = 49, b^2 = 33$ , suy ra  $c^2 = a^2 + b^2 = 49 + 33 = 82$ .

Vậy hai tiêu điểm của  $(H)$  là  $F_1(-\sqrt{82};0), F_2(\sqrt{82};0)$ .

**Ví dụ 43:** Cho parabol  $(P)$  có phương trình chính tắc  $y^2 = 14x$ . Tìm tọa độ tiêu điểm và viết phương trình đường chuẩn của  $(P)$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Ta có:  $2p = 14$ , suy ra  $p = 7$ .

Vậy tiêu điểm của  $(P)$  là  $F\left(\frac{7}{2};0\right)$  và phương trình đường chuẩn của  $(P)$  là  $x + \frac{7}{2} = 0$ .

**Ví dụ 44:** Tìm tọa độ điểm  $M$  trong mỗi trường hợp sau :

a) Điểm  $M$  thuộc elip  $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$  và có hoành độ bằng 2.

b) Điểm  $M$  thuộc hypebol  $(H): x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$  và có tung độ bằng 3.

c) Điểm  $M$  thuộc parabol  $(P): y^2 = 4x$  và đường thẳng  $d: x - 2y = 0$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

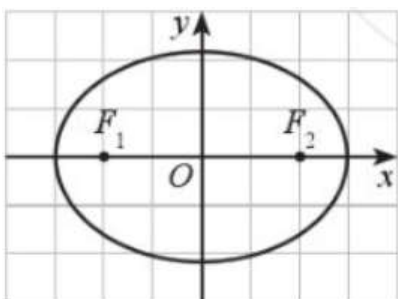
Gọi tọa độ điểm  $M$  là  $(m;n)$ .

a) Điểm  $M$  có hoành độ bằng 2 nên  $m = 2$ .

Vì  $M$  thuộc elip  $(E)$  nên  $\frac{2^2}{9} + \frac{n^2}{5} = 1 \Rightarrow n = \pm \frac{5}{3}$ .

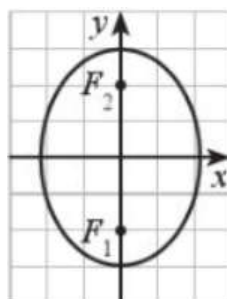
Vậy có hai trường hợp là  $M\left(2; \frac{5}{3}\right)$  và  $M\left(2; -\frac{5}{3}\right)$ .

b) Điểm  $M$  có tung độ bằng 3 nên  $n = 3$ .



C.  
A.

B.



D.  
C.

D.

Lời giải

Chọn  
Chọn C

**Câu 69.** Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của elip?

A.  $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$

B.  $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1.$

C.  $\frac{x^2}{6} + y^2 = 1.$

D.  $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$

A.

B.

C.

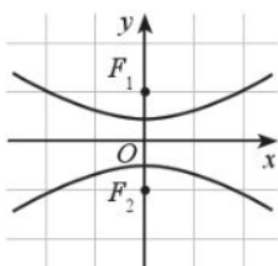
D.

Lời giải

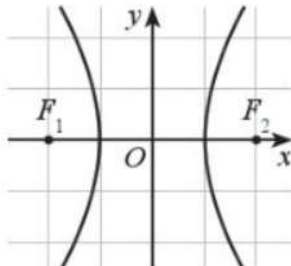
Chọn  
Chọn C

**Câu 70.** Hypebol trong hệ trục tọa độ  $Oxy$  nào dưới đây có phương trình chính tắc dạng

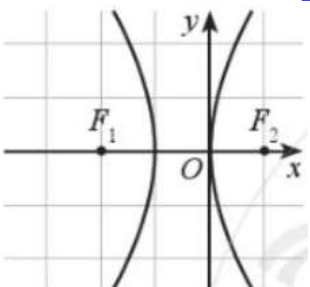
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)?$$



A.

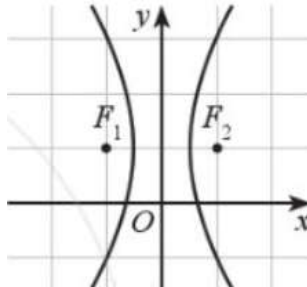


B.



C.  
A.

B.



D.  
C.

D.

Lời giải

Chọn  
Chọn B

**Câu 71.** Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của hepebol?

A.  $x^2 + \frac{y^2}{3^2} = 1.$

B.  $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1.$

C.  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = -1.$

D.  $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1.$

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn  
Chọn D

**Câu 72.** Parabol trong hệ trục tọa độ  $Oxy$  nào dưới đây có phương trình chính tắc dạng  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ )?

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

Giả sử  $P(p; q)$ . Ta có:  $OP = 2,5$  nên  $p^2 + q^2 = \frac{25}{4}$  (1)

Vì  $P$  thuộc  $(E)$  nên ta có:  $\frac{1}{9}p^2 + \frac{1}{4}q^2 = 1$  (2)

Từ (1) và (2) ta có:  $p^2 = \frac{81}{20}, q^2 = \frac{11}{5}$ . Suy ra có 4 trường hợp của điểm  $P$  có tọa độ là:

$$\left(\frac{9\sqrt{5}}{10}; \frac{\sqrt{55}}{5}\right), \left(-\frac{9\sqrt{5}}{10}; \frac{\sqrt{55}}{5}\right), \left(\frac{9\sqrt{5}}{10}; -\frac{\sqrt{55}}{5}\right), \left(-\frac{9\sqrt{5}}{10}; -\frac{\sqrt{55}}{5}\right).$$

**Câu 76.** Lập phương trình chính tắc của Hyperbol  $(H)$ , biết  $(H)$  đi qua hai điểm  $M(-1; 0)$  và  $N(2; 2\sqrt{3})$

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

$(H)$  có phương trình chính tắc là  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ).

Vì  $M$  thuộc  $(H)$  nên ta có:  $\frac{(-1)^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow a^2 = 1$ .

Vì  $N$  thuộc  $(H)$  nên ta có:  $\frac{2^2}{1} - \frac{(2\sqrt{3})^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 4$ .

Vậy phương trình chính tắc của hypebol  $(H)$  là:  $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$ .

**Câu 77.** Cho hyperbol  $(H)$  có phương trình chính tắc:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  với  $a > 0, b > 0$  và đường thẳng  $y = n$  cắt  $(H)$  tại hai điểm  $P, Q$  phân biệt. Chứng minh hai điểm  $P$  và  $Q$  đối xứng nhau qua trục  $Oy$

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

Thay  $y = n$  vào phương trình chính tắc của hypebol ta có:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2} = 1$ .

$$\text{Suy ra } x^2 = a^2 \left(1 + \frac{n^2}{b^2}\right) \Rightarrow x = a\sqrt{1 + \frac{n^2}{b^2}} \text{ hoặc } x = -a\sqrt{1 + \frac{n^2}{b^2}}.$$

Không mất tính tổng quát, ta lấy  $P\left(a\sqrt{1 + \frac{n^2}{b^2}}; n\right), Q\left(-a\sqrt{1 + \frac{n^2}{b^2}}; n\right)$ . Vì  $P, Q$  có cùng tung độ và hoành độ đối nhau nên  $P, Q$  đối xứng qua trục  $Oy$ .

**Câu 78.** Viết phương trình chính tắc của parabol  $(P)$ , biết:

a) Phương trình đường chuẩn của  $(P)$  là  $x + \frac{1}{8} = 0$ ;

b)  $(P)$  đi qua điểm  $M(1; -8)$ .

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

a) Gọi phương trình chính tắc của parabol  $(P)$  là  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ).

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

**Câu 80.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(-2;1), B(1;-3)$ . Tọa độ của vector  $\overrightarrow{AB}$  là:

- A.  $(1;-4)$ .                      B.  $(-3;4)$ .                      C.  $(3;-4)$ .                      D.  $(1;-2)$ .

- A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn C

**Câu 81.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1;-5), B(5;2)$  và trọng tâm là gốc tọa độ. Tọa độ điểm  $C$  là:

- A.  $(4;-3)$ .                      B.  $(-4;-3)$ .                      C.  $(-4;3)$ .                      D.  $(4;3)$ .

- A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn C

**Câu 82.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , vector nào sau đây có độ dài bằng 1?

- A.  $\vec{a} = (1;1)$ .                      B.  $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ .                      C.  $\vec{c} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2}{3}\right)$ .                      D.  $\vec{d} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

- A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn D

**Câu 83.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M(-2;0)$  và song song với đường thẳng  $d': 2x - y + 2 = 0$  có phương trình là:

- A.  $2x - y = 0$ .                      B.  $2x - y + 4 = 0$ .                      C.  $2x + y + 4 = 0$ .                      D.  $x + 2y + 2 = 0$ .

- A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 84.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai đường thẳng  $\Delta_1: \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3}t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$  và  $\Delta_2: \begin{cases} x = 3 - \sqrt{3}t' \\ y = -t' \end{cases}$

Số đo góc giữa hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  là:

- A.  $30^\circ$ .                      B.  $45^\circ$ .                      C.  $90^\circ$ .                      D.  $60^\circ$ .

- A.                      B.                      C.                      D.

Lời giải

**Chọn**

**Chọn A**

**Câu 90.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-3;-1)$ ,  $B(3;5)$ ,  $C(3;-4)$ . Gọi  $G, H, I$  lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

a) Lập phương trình các đường thẳng  $AB, BC, AC$ .

b) Tìm tọa độ các điểm  $G, H, I$ .

c) Tính diện tích tam giác  $ABC$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Ta có  $\overrightarrow{AB} = (6;6)$  nên có thể chọn  $\vec{n}_1 = (1;-1)$  là vector pháp tuyến của  $AB$ .

Mà  $A$  thuộc  $AB$  nên phương trình đường thẳng  $AB$  là:

$$1(x+3) - 1(y+1) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2 = 0.$$

Ta có:  $\overrightarrow{BC} = (0;-9)$  nên có thể chọn  $\vec{n}_2 = (1;0)$  là vector pháp tuyến của  $BC$ . Mà  $B$  thuộc  $BC$  nên phương trình đường thẳng  $BC$  là:

$$1(x-3) + 0(y-5) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0.$$

Ta có:  $\overrightarrow{CA} = (-6;3)$  nên có thể chọn  $\vec{n}_3 = (1;2)$  là vector pháp tuyến của  $CA$ . Mà  $C$  thuộc  $CA$  nên phương trình đường thẳng  $CA$  là:

$$1(x-3) + 2(y+4) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 5 = 0.$$

b)  $G(1;0)$

Phương trình đường cao  $AH$  là:  $y+1=0$ .

Phương trình đường cao  $CH$  là:  $x+y+1=0$ .

$H$  là giao điểm của  $AH$  và  $CH$  nên tọa độ của  $H$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y+1=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}. \text{ Vậy } H(0;-1).$$

$I(a;b)$  là tâm đường tròn đi qua ba điểm  $A, B, C$  nên  $IA^2 = IB^2 = IC^2$ .

Ta có:

$$\begin{cases} (-3-a)^2 + (-1-b)^2 = (3-a)^2 + (5-b)^2 \\ (-3-a)^2 + (-1-b)^2 = (3-a)^2 + (-4-b)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-2=0 \\ 4a-2b-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{2} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy  $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$

c) Diện tích tam giác  $ABC$  là:

Vì  $CK$  vuông góc với  $AB$  nên vectơ chỉ phương  $\vec{n} = (-3; 1)$  của  $CK$  là vectơ pháp tuyến của  $AB$ .

Suy ra phương trình đường thẳng  $AB$  là:

$$-3x + y - 1 = 0.$$

$B$  là giao điểm của  $AB$  và  $BM$  nên tọa độ của  $B$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} -3x + y - 1 = 0 \\ 5x + y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy  $B(1; 4)$ .  $C$  thuộc  $CK$  nên ta có  $C(5 - 3c; c)$  với  $c$  là số thực.

Vì  $M$  là trung điểm  $AC$  nên ta có  $M\left(\frac{4 - 3c}{2}; \frac{c - 2}{2}\right)$ .

Lại có  $M$  thuộc  $BM$  nên ta có:

$$5 \cdot \frac{4 - 3c}{2} + \frac{c - 2}{2} - 9 = 0 \Rightarrow c = 0$$

Vậy  $C(5; 0)$ .

**Câu 93.** \*Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(1; 0)$  và  $B(0; 3)$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $MA = 2MB$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

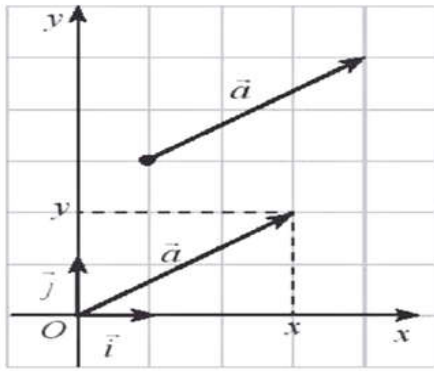
**Chọn**

Giả sử  $M(x; y)$ . Ta có:

$$\begin{aligned} MA = 2MB &\Leftrightarrow MA^2 = 4MB^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 4[x^2 + (y - 3)^2] \\ &\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 2x - 24y + 35 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x - 8y + \frac{35}{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (y - 4)^2 = \frac{40}{9}. \end{aligned}$$

Phương trình trên là phương trình đường tròn.

Vậy tập hợp điểm  $M$  là đường tròn tâm  $I\left(-\frac{1}{3}; 4\right)$  bán kính  $R = \frac{2\sqrt{10}}{3}$ .



Hình 3

Chú ý:  $\vec{a} = (x; y) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .

Nếu cho  $\vec{a} = (x; y)$  và  $\vec{b} = (x'; y')$  thì  $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

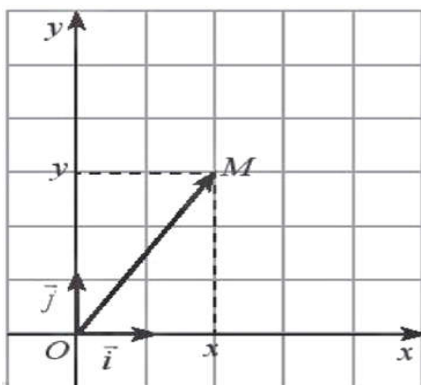
### Tọa độ của một điểm

Trong mặt phẳng tọa độ, cho một điểm  $M$  tùy ý. Tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{OM}$  được gọi là **tọa độ của điểm**  $M$ .

*Nhận xét:*

Nếu  $\overrightarrow{OM} = (x; y)$  thì cặp số  $(x; y)$  là tọa độ của điểm  $M$ , kí hiệu  $M(x; y)$ ,  $x$  gọi là **hoành độ**,  $y$  gọi **tung độ** của điểm  $M$ .

$$M = (x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$



Hình 4

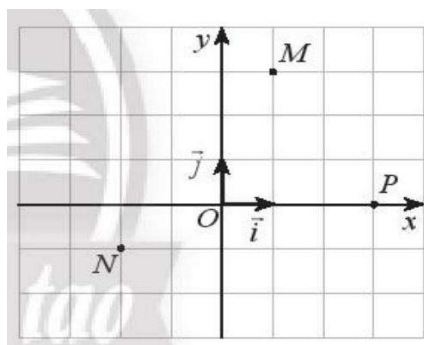
Hình 4

**Chú ý:** Hoành độ của điểm  $M$  còn được kí hiệu là  $x_M$  tung độ của điểm  $M$  còn được kí hiệu là  $y_M$ .

Khi đó ta viết  $M(x_M; y_M)$ .

## 2. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

c) Tìm tọa độ các vectơ  $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PO}, \overrightarrow{NM}$ .



Hình 5

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) Theo Hình 5 ta có tọa độ các điểm  $M, N, P$  lần lượt là:  $M(1; 3), P(3; 0), N(-2; -1)$ .

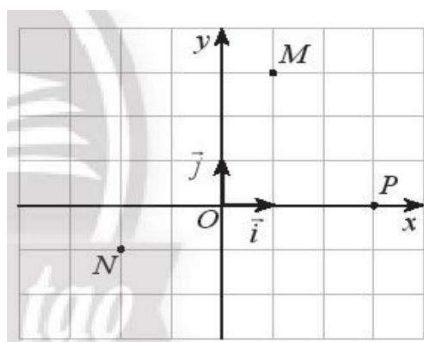
b) Ta có:  $\overrightarrow{OM} = \vec{i} + 3\vec{j}; \overrightarrow{ON} = -2\vec{i} - \vec{j}; \overrightarrow{OP} = 3\vec{i} + 0\vec{j}$ .

**Ví dụ 2:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho ba điểm  $M, N, P$  được biểu diễn như Hình 5.

a) Tìm tọa độ của các điểm  $M, N, P$ .

b) Hãy biểu thị các vectơ  $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}$  qua hai vectơ  $\vec{i}$  và  $\vec{j}$ .

c) Tìm tọa độ các vectơ  $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PO}, \overrightarrow{NM}$ .



Hình 5

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) Theo Hình 5 ta có tọa độ các điểm  $M, N, P$  lần lượt là:  $M(1; 3), P(3; 0), N(-2; -1)$ .

b) Ta có:  $\overrightarrow{OM} = \vec{i} + 3\vec{j}; \overrightarrow{ON} = -2\vec{i} - \vec{j}; \overrightarrow{OP} = 3\vec{i} + 0\vec{j}$ .

a) Ta có:  $\vec{m} + \vec{n} - \vec{p} = (-6 + 0 - 1; 1 + 2 - 1) = (-7; 2)$ .

b) Ta có:  $(\vec{m} \cdot \vec{n})\vec{p} = (-6 \cdot 0 + 1 \cdot 2)\vec{p} = 2\vec{p} = (2; 2)$ .

**Ví dụ 5:** Cho tam giác  $DEF$  có tọa độ  $D(2;2), E(6;2)$  và  $F(2;6)$ .

a) Tìm tọa độ trung điểm  $M$  của cạnh  $EF$ .

b) Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $DEF$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Ta có:  $x_M = \frac{x_E + x_F}{2} = \frac{6 + 2}{2} = 4, y_M = \frac{y_E + y_F}{2} = \frac{2 + 6}{2} = 4$ .

Vậy tọa độ trung điểm  $M$  của cạnh  $EF$  là  $M(4;4)$ .

b) Ta có:  $x_G = \frac{x_D + x_E + x_F}{3} = \frac{2 + 6 + 2}{3} = \frac{10}{3}, y_G = \frac{y_D + y_E + y_F}{3} = \frac{2 + 2 + 6}{3} = \frac{10}{3}$ .

Vậy tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $DEF$  là  $G\left(\frac{10}{3}; \frac{10}{3}\right)$ .

**Ví dụ 6:** Cho tam giác  $ABC$  có tọa độ các đỉnh là  $A(2;2), B(6;3)$  và  $C(5;5)$ .

a) Tìm tọa độ điểm  $H$  là chân đường cao của tam giác  $ABC$  kẻ từ  $A$ .

b) Tính độ dài ba cạnh của tam giác  $ABC$  và số đo của góc  $C$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Xét điểm  $H(x; y)$ , ta có  $\overrightarrow{AH} = (x - 2; y - 2), \overrightarrow{BH} = (x - 6; y - 3), \overrightarrow{BC} = (-1; 2)$

$H$  là chân đường cao của tam giác  $ABC$  kẻ từ  $A$  nên ta có:

$$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (x - 2) \cdot (-1) + (y - 2) \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 2 = 0 \quad (1).$$

$$\text{Hai vector } \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow (x - 6) \cdot 2 - (y - 3) \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 15 = 0 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta được hệ phương trình 
$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x + y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{28}{5} \\ y = \frac{19}{5} \end{cases}.$$

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

a) Ta có:  $x_E = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{3+7}{2} = 5, y_E = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{3+3}{2} = 3.$

Vậy  $E(5;3).$

b) Ta có:

$$x_G = \frac{x_M + x_N + x_P}{3} = \frac{3+7+3}{3} = \frac{13}{3}, y_G = \frac{y_M + y_N + y_P}{3} = \frac{3+3+7}{3} = \frac{13}{3}.$$

Vậy  $G\left(\frac{13}{3}; \frac{13}{3}\right).$

**Câu 4.** Cho tam giác  $ABC$  có tọa độ các đỉnh là  $A(1;3)$ ,  $B(3;1)$  và  $C(6;4).$

a) Tính độ dài ba cạnh của tam giác  $ABC$  và số đo của góc  $B.$

b) Tìm tọa độ tâm  $I$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC.$

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

a) Ta có  $\overrightarrow{BA} = (-2;2); \overrightarrow{BC} = (3;3); \overrightarrow{AC} = (5;1);$

$$AB = 2\sqrt{2}; BC = 3\sqrt{2}; AC = \sqrt{26}.$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -6 + 6 = 0 \Rightarrow \widehat{ABC} = 90^\circ.$$

b) Tâm  $I$  đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  là trung điểm  $AC.$

Vậy ta có  $I\left(\frac{7}{2}; \frac{7}{2}\right).$

**Câu 5.** Cho năm điểm  $A(2;0)$ ,  $B(0;-2)$ ,  $C(3;3)$ ,  $D(-2;2)$ ,  $E(1;-1)$ . Trong các điểm đã cho, hãy tìm điểm:

a) Thuộc trục hoành;

b) Thuộc trục tung;

c) Thuộc đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

a)  $A$  thuộc trục hoành;

b)  $B$  thuộc trục tung;

c)  $C, D$  thuộc đường phân giác góc phần tư thứ nhất.

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

a) Ta có  $\overrightarrow{AC} = (3; 6)$ ;  $\overrightarrow{AN} = (2; 4)$ ;  $\overrightarrow{AM} = (1; 2)$ ;

$\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AN}$ , suy ra bốn điểm  $A, M, N, C$  thẳng hàng

b) Gọi  $G$  và  $G'$  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  $ABC$  và  $MNB$ , ta có:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1 + 7 + 4}{3} = 4 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{1 + 3 + 7}{3} = \frac{11}{3} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_{G'} = \frac{x_M + x_N + x_B}{3} = \frac{2 + 3 + 7}{3} = 4 \\ y_{G'} = \frac{y_M + y_N + y_B}{3} = \frac{3 + 5 + 3}{3} = \frac{11}{3} \end{cases}$$

Suy ra  $G$  và  $G'$  trùng nhau.

**Câu 9.** Cho bốn điểm  $M(6; -4)$ ,  $N(7; 3)$ ,  $P(0; 4)$ ,  $Q(-1; -3)$ . Chứng minh rằng tứ giác  $MNPQ$  là hình vuông.

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

$\overrightarrow{MN} = (1; 7)$ ;  $\overrightarrow{QP} = (1; 7)$ ;  $\overrightarrow{NP} = (-7; 1)$ ; suy ra

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} = (1; 7) \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} = 1 \cdot (-7) + 7 \cdot 1 = 0 \Rightarrow MN \perp NP \\ MN = NP = \sqrt{50} \end{cases}$$

Tứ giác  $MNPQ$  có hai cạnh đối song song và bằng nhau, có một góc vuông và hai cạnh liên tiếp bằng nhau suy ra  $MNPQ$  là hình vuông.

**Câu 10.** Tính góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  trong các trường hợp sau:

a)  $\vec{a} = (1; -4)$ ,  $\vec{b} = (5; 3)$ ;

b)  $\vec{a} = (4; 3)$ ,  $\vec{b} = (6; 0)$ ;

c)  $\vec{a} = (2; 2\sqrt{3})$ ,  $\vec{b} = (-3; \sqrt{3})$ .

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

$$\text{a) } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1 \cdot 5 + (-4) \cdot 3}{\sqrt{1 + (-4)^2} \cdot \sqrt{5^2 + 3^2}} = \frac{-7\sqrt{2}}{34}.$$

$$\Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) \approx 106^\circ 56'.$$

## BÀI 2. ĐƯỜNG THẲNG TRONG MẶT PHẪNG TOẠ ĐỘ

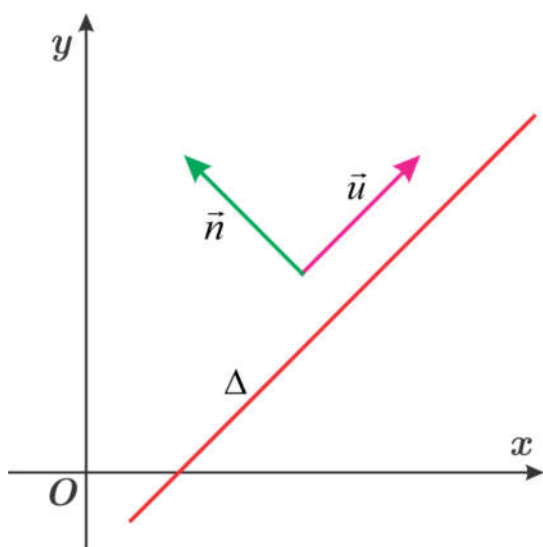
### I. LÝ THUYẾT

#### 1. Phương trình đường thẳng

##### *Vector chỉ phương và vector pháp tuyến của đường thẳng*

Vector  $\vec{u}$  được gọi là **vector chỉ phương** của đường thẳng  $\Delta$  nếu  $\vec{u} \neq \vec{0}$  và giá của  $\vec{u}$  song song hoặc trùng với  $\Delta$ .

Vector  $\vec{n}$  được gọi là **vector pháp tuyến** của đường thẳng  $\Delta$  nếu  $\vec{n} \neq \vec{0}$  và  $\vec{n}$  vuông góc với vector chỉ phương của  $\Delta$ .



##### **Chú ý:**

□ Nếu đường thẳng  $\Delta$  có vector pháp tuyến  $\vec{n} = (a; b)$  thì  $\Delta$  sẽ nhận  $\vec{u} = (b; -a)$  hoặc  $\vec{u} = (-b; a)$  là một vector chỉ phương.

□ Nếu  $\vec{u}$  là vector chỉ phương của đường thẳng  $\Delta$  thì  $k\vec{u} (k \neq 0)$  cũng là vector chỉ phương của  $\Delta$ .

□ Nếu  $\vec{n}$  là vector pháp tuyến của đường thẳng  $\Delta$  thì  $k\vec{n} (k \neq 0)$  cũng là vector pháp tuyến của  $\Delta$ .

##### **Phương trình tham số của đường thẳng**

Trong mặt phẳng  $Oxy$ , ta gọi:  $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$  (với  $u_1^2 + u_2^2 > 0, t \in \mathbb{R}$ ) là **phương trình tham số** của đường

thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0)$  có vector chỉ phương  $\vec{u} = (u_1, u_2)$ .

**Chú ý:** Cho  $t$  một giá trị cụ thể thì ta xác định được một điểm trên đường thẳng  $\Delta$  và ngược lại.

##### **Phương trình tổng quát của đường thẳng**

Trong mặt phẳng  $Oxy$ , mỗi đường thẳng đều có phương trình tổng quát dạng  $ax + by + c = 0$ , với  $a$  và  $b$  không đồng thời bằng 0.

##### **Chú ý:**

□ Nếu  $\Delta_1$  vuông góc với  $\Delta_2$  thì ta nói góc giữa  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  bằng  $90^\circ$ .

Công thức tính góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng  $\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$  ( $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ ),  $\Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$  ( $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ ) có véc tơ pháp tuyến lần lượt là  $\vec{n}_1$  và  $\vec{n}_2$ .

$$\text{Ta có công thức } \cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Chú ý;

Ta đã biết hai đường thẳng vuông góc khi và chỉ khi chúng có hi véc tơ pháp tuyến cùng vuông góc. Do đó:

□ Nếu  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  lần lượt có phương trình  $a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2 = 0$  thì ta có

$$(\Delta_1, \Delta_2) = 90^\circ \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

□ Nếu  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  lần lượt có phương trình  $y = k_1x + m_1, y = k_2x + m_2$  thì ta có

$$(\Delta_1, \Delta_2) = 90^\circ \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Nói cách khác, hai đường thẳng có tích hệ số góc bằng  $-1$  thì vuông góc với nhau.

#### 4. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $\Delta$  có phương trình  $ax + by + c = 0$  ( $a^2 + b^2 > 0$ ) và điểm  $M_0(x_0; y_0)$ . Khoảng cách từ điểm  $M_0$  đến đường thẳng  $\Delta$ , kí hiệu  $d(M_0, \Delta)$  được tính bởi công thức:

$$d(M_0, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

## II. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 7:** Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng  $d$  trong các trường hợp sau:

a) Đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $A(5; 4)$  và có véc tơ chỉ phương  $\vec{u} = (1; 3)$ ;

b) Đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $B(1; 2)$  và có véc tơ pháp tuyến  $\vec{n} = (-1; 4)$ ;

c) Đường thẳng  $d$  đi qua hai điểm  $C(2; 2), D(4; 6)$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Vậy phương trình tổng quát của  $d_3$  là  $x + y = 0$ .

**Ví dụ 9:** Cho đường thẳng  $d$  có phương trình  $4x + 2y + 1 = 0$ . Xét vị trí tương đối của  $d$  với mỗi đường thẳng sau:

a)  $\Delta_1 : x - 2y + 4 = 0$ ;

b)  $\Delta_2 : 2x + y - 9 = 0$ ;

c)  $\Delta_3 : \begin{cases} x = -\frac{1}{4} - t \\ y = 2t \end{cases}$

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $d$  và  $\Delta_1$  có vectơ pháp tuyến lần lượt là  $\vec{n}_1 = (4; 2)$  và  $\vec{n}_2 = (1; -2)$ .

Ta có:  $a_1b_2 - a_2b_1 = 4 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 = -10 \neq 0$ , suy ra  $\vec{n}_1$  và  $\vec{n}_2$  là hai vectơ không cùng phương. Vậy  $d$  và  $\Delta_1$  cắt nhau tại một điểm  $M$ .

Giải hệ phương trình  $\begin{cases} 4x + 2y + 1 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$  ta được  $M\left(-1; \frac{3}{2}\right)$ .

b)  $d$  và  $\Delta_2$  có vectơ pháp tuyến lần lượt là  $\vec{n}_1 = (4; 2)$  và  $\vec{n}_2 = (2; 1)$ .

Ta có:  $\frac{4}{2} = \frac{2}{1}$  suy ra  $\vec{n}_1$  và  $\vec{n}_2$  là hai vectơ cùng phương. Vậy  $d$  và  $\Delta_2$  song song hoặc trùng nhau. Lấy điểm  $N\left(0; -\frac{1}{2}\right)$  thuộc  $d$ , thay tọa độ của  $N$  vào phương trình  $\Delta_2$ , ta được  $2 \cdot 0 - \frac{1}{2} - 9 \neq 0$ , suy ra  $N$  không thuộc  $\Delta_2$ . Vậy  $d \parallel \Delta_2$ .

c) Ta có:  $\Delta_3 : \begin{cases} x = -\frac{1}{4} - t \\ y = 2t \end{cases}$

Suy ra: phương trình tổng quát của  $\Delta_3 : 2x + y + \frac{1}{2} = 0$ .

$d$  và  $\Delta_3$  có vectơ pháp tuyến lần lượt là  $\vec{n}_1 = (4; 2)$  và  $\vec{n}_2 = (2; 1)$ . Ta có  $\frac{4}{2} = \frac{2}{1}$  suy ra  $\vec{n}_1$  và  $\vec{n}_2$  là hai vectơ cùng phương. Vậy  $d$  và  $\Delta_3$  song song hoặc trùng nhau. Lấy điểm  $P\left(-\frac{1}{4}; 0\right)$  thuộc  $d$ , thay tọa độ của  $P$  vào phương trình tổng quát của  $\Delta_3$ , ta được  $2\left(-\frac{1}{4}\right) + 0 + \frac{1}{2} = 0$ , suy ra  $P \in \Delta_3$ . Vậy  $d \equiv \Delta_3$ .

### Lời giải

#### Chọn

- a)  $a = 2, b = -1, c = 3$ ;
- b)  $a = 1, b = 1, c = -1$ ;
- c)  $a = 0, b = 1, c = -3$ ;
- d)  $a = 1, b = 0, c = 2$ ;

**Câu 14.** Lập phương trình tổng quát và phương trình tham số của đường thẳng  $d$  trong mỗi trường hợp sau:

- a)  $d$  đi qua điểm  $M(2; 2)$  và có véc tơ chỉ phương  $\vec{u} = (4; 7)$ ;
- b)  $d$  đi qua điểm  $N(0; 1)$  và có véc tơ pháp tuyến  $\vec{n} = (-5; 3)$ ;
- c)  $d$  đi qua điểm  $A(-2; -3)$  và có hệ số góc  $k = 3$ ;
- d)  $d$  đi qua điểm hai điểm  $P(1; 1)$  và  $Q(3; 4)$ .

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

- a) Phương trình tham số của đường thẳng  $d$  là: 
$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 2 + 7t \end{cases}$$

Phương trình tổng quát của  $d$  là:  $7x - 4y - 6 = 0$ .

- b) Vector pháp tuyến là  $\vec{n} = (-5; 3)$  suy ra vector chỉ phương là  $\vec{u} = (3; 5)$

Phương trình tham số của  $d$  là: 
$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$$

Phương trình tổng quát của  $d$  là:  $5x - 3y + 3 = 0$

- c) Phương trình tổng quát của  $d$  là:  $y + 3 = 3(x + 2) \Leftrightarrow 3x - y + 3 = 0$

Phương trình tham số của  $d$  là: 
$$\begin{cases} x = t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$$

- d) Vector chỉ phương là  $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (2; 3) \Rightarrow$  vector pháp tuyến  $\vec{n} = (3; -2)$

Phương trình tổng quát của  $d$  là:  $3(x - 1) - 2(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y - 1 = 0$

Phương trình tham số của  $d$  là: 
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$$

**Câu 15.** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $A(1; 4)$ ,  $B(0; 1)$  và  $C(4; 3)$ .

- a) Lập phương trình tổng quát của đường thẳng  $BC$ .
- b) Lập phương trình tham số của đường trung tuyến  $AM$ .
- c) Lập phương trình tổng quát của đường thẳng cao  $AH$ .

A.

B.

C.

D.

**Câu 18.** Cho đường thẳng  $d$  có phương trình tham số:  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$ .

Tìm giao điểm của  $d$  và đường thẳng  $\Delta: x + y - 2 = 0$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Thay  $x = 1 + t$ ,  $y = 2 + 2t$  vào phương trình  $\Delta$  ta được  $1 + t + 2 + 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$

Vậy giao điểm của  $d$  với đường thẳng  $\Delta$  là  $M\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$ .

**Câu 19.** Tìm số đo của góc giữa hai đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$  trong các trường hợp sau:

a)  $d_1: 5x - 3y + 1 = 0$  và  $d_2: 10x - 6y - 7 = 0$ ;

b)  $d_1: 7x - 3y + 7 = 0$  và  $d_2: 3x + 7y - 10 = 0$ ;

c)  $d_1: 2x - 4y + 9 = 0$  và  $d_2: 6x - 2y - 2023 = 0$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $d_1 // d_2 \Rightarrow (d_1, d_2) = 0^\circ$ ;

b)  $d_1 \perp d_2 \Rightarrow (d_1, d_2) = 90^\circ$ ;

c)  $\cos(d_1, d_2) = \frac{|2 \cdot 6 + (-4) \cdot (-2)|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{6^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (d_1, d_2) = 45^\circ$ .

**Câu 20.** Tính khoảng cách từ điểm  $M$  đến đường thẳng  $\Delta$  trong các trường hợp sau:

a)  $M(2; 3)$  và  $\Delta: 8x - 6y + 7 = 0$ ; b)  $M(0; 1)$  và  $\Delta: 4x + 9y - 20 = 0$ ;

c)  $M(1; 1)$  và  $\Delta: 3y - 5 = 0$ ; d)  $M(4; 9)$  và  $\Delta: x - 25 = 0$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $d(M, \Delta) = \frac{|8 \cdot 2 - 6 \cdot 3 + 7|}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ;

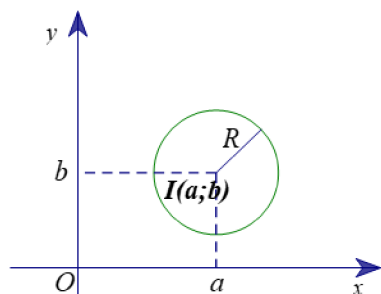
b)  $d(M, \Delta) = \frac{|4 \cdot 0 + 9 \cdot 1 - 20|}{\sqrt{4^2 + 9^2}} = \frac{11}{\sqrt{97}}$ ;

### BÀI 3. ĐƯỜNG TRÒN TRONG MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ

#### I. LÝ THUYẾT

##### 1. Phương trình đường tròn

Phương trình  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$  là **phương trình đường tròn** tâm  $I(a;b)$  bán kính  $R$ .



Hình 1

Nhận xét: Ta có  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - R^2) = 0.$$

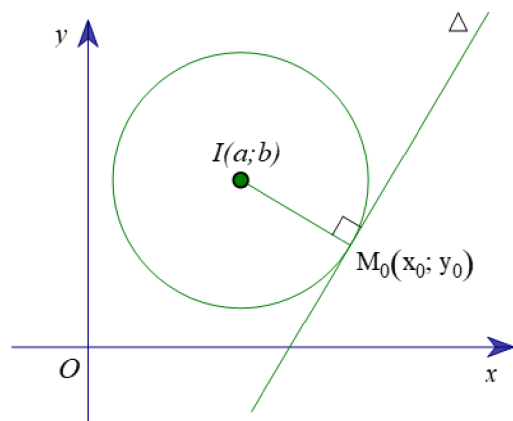
Vậy phương trình đường tròn  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$  có thể viết dưới dạng  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ , trong đó  $c = a^2 + b^2 - R^2$ .

Ngược lại, phương trình  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  là phương trình của đường tròn  $(C)$  khi và chỉ khi  $a^2 + b^2 - c > 0$ . Khi đó đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(a;b)$  bán kính  $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ .

##### 2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

**Phương trình tiếp tuyến của đường tròn** tâm  $I(a;b)$  tại điểm  $M_0(x_0; y_0)$  nằm trên đường tròn là:

$$(a-x_0)(x-x_0) + (b-y_0)(y-y_0) = 0.$$



Hình 2

c)  $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 5 = 0$  (3).

Phương trình (3) có dạng  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  với  $a = 2$ ;  $b = 4$ ;  $c = 5$ .

Ta có  $a^2 + b^2 - c = 4 + 16 - 5 = 15 > 0$ .

Vậy (3) là phương trình đường tròn tâm  $I(2;4)$ , bán kính  $R = \sqrt{15}$ .

d)  $2x^2 + 2y^2 + 6x + 8y - 2 = 0$  (4).

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3x + 4y - 1 = 0$  (\*).

Phương trình (\*) có dạng  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  với  $a = -\frac{3}{2}$ ;  $b = -2$ ;  $c = -1$ .

Ta có  $a^2 + b^2 - c = \frac{9}{4} + 4 + 1 = \frac{29}{4} > 0$ . Vậy (4) là phương trình đường tròn tâm  $I\left(-\frac{3}{2}; -2\right)$ , bán kính

$$R = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

**Ví dụ 14:** Viết phương trình tiếp tuyến  $d$  với đường tròn  $(C): (x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$  tại điểm  $M(5;6)$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Ta có:  $(5-1)^2 + (6-3)^2 = 25$ , nên điểm  $M$  thuộc đường tròn  $(C)$ .

Đường tròn  $(C): (x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$  có tâm  $I(1;3)$

Phương trình tiếp tuyến  $d$  với  $(C)$  tại  $M(5;6)$  là:

$$(1-5)(x-5) + (3-6)(y-6) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 3y - 38 = 0$$

**Ví dụ 15:** Một nông trại tưới nước theo phương pháp vòi phun xoay vòng trung tâm như Hình 3. Cho biết tâm một vòi phun được đặt tại tọa độ  $(12; -9)$  và vòi có thể phun xa tối đa  $36m$ . Hãy viết phương trình đường tròn biểu diễn tập hợp các điểm xa nhất mà vòi nước có thể phun tới.

Phương trình (2) có dạng  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

với  $a = 3; b = 1; c = 1$ .

Ta có  $a^2 + b^2 - c = 9 + 1 - 1 = 9 > 0$

Vậy (2) là phương trình đường tròn tâm  $I(3;1)$  bán kính  $R = 3$ .

**c)**  $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 2022 = 0$  (3).

Phương trình (3) có dạng  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

với  $a = -4; b = -2; c = 2022$ .

Ta có  $a^2 + b^2 - c = 16 + 4 - 2022 < 0$

Vậy (3) không phải là phương trình đường tròn.

**d)**  $3x^2 + 2y^2 + 5x + 7y - 1 = 0$ .

Phương trình (4) không thể đưa về dạng  $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ .

Vậy (4) không phải là phương trình đường tròn.

**Câu 25.** Lập phương trình đường tròn  $(C)$  trong các trường hợp sau :

- a)  $(C)$  có tâm  $O(0;0)$  và có bán kính  $R = 9$  ;
- b)  $(C)$  có đường kính  $AB$  với  $A(1;1)$  và  $B(3;5)$  ;
- c)  $(C)$  có tâm  $M(2;3)$  và tiếp xúc với đường thẳng  $3x - 4y + 9 = 0$  ;
- d)  $(C)$  có tâm  $I(3;2)$  và đi qua điểm  $B(7;4)$  .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

**a)**  $(C)$  có tâm  $O(0;0)$  và có bán kính  $r = 9$  nên có phương trình:  $x^2 + y^2 = 81$ .

**b)**  $(C)$  có tâm  $I(2;3)$  là trung điểm của  $AB$  và có bán kính  $R = IA = \sqrt{5}$  nên có phương trình:  
 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ .

**c)**  $(C)$  có tâm  $M(2;3)$  và tiếp xúc với đường thẳng  $d: 3x - 4y + 9 = 0$  suy ra

$(C)$  có bán kính  $R = d(M, d) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 + 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}$ .

Vậy  $(C)$  có phương trình:  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = \frac{9}{25}$ .

**d)**  $(C)$  có tâm  $I(3;2)$  và đi qua điểm  $B(7;4)$  suy ra  $(C)$  có bán kính

$R = IB = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$ .

Vậy  $(C)$  có phương trình:  $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 20$ .

c) Phương trình tiếp tuyến  $d$  với (C) song song với đường thẳng  $8x + 6y + 99 = 0$  có dạng  $8x + 6y + c = 0$ .

$$\text{Ta có: } d(I, d) = R \Leftrightarrow \frac{|8 \cdot 3 + 6 \cdot 1 + c|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = 5$$

$$\Leftrightarrow |30 + c| = 50 \Leftrightarrow c = 20 \text{ hay } c = -80.$$

Vậy  $d$  có phương trình  $4x + 3y + 10 = 0$  hoặc  $4x + 3y - 40 = 0$ .

**Câu 29.** Một cái cổng hình bán nguyệt rộng  $6,8m$  cao  $3,4m$ . Mặt đường dưới cổng được chia thành hai làn xe cho xe ra vào.

a) Viết phương trình mô phỏng cái cổng ;

b) Một chiếc xe tải rộng  $2,4m$  và cao  $2,5m$  đi đúng làn đường quy định có thể đi qua cổng được không?

**A.**

**B.**

**C.**

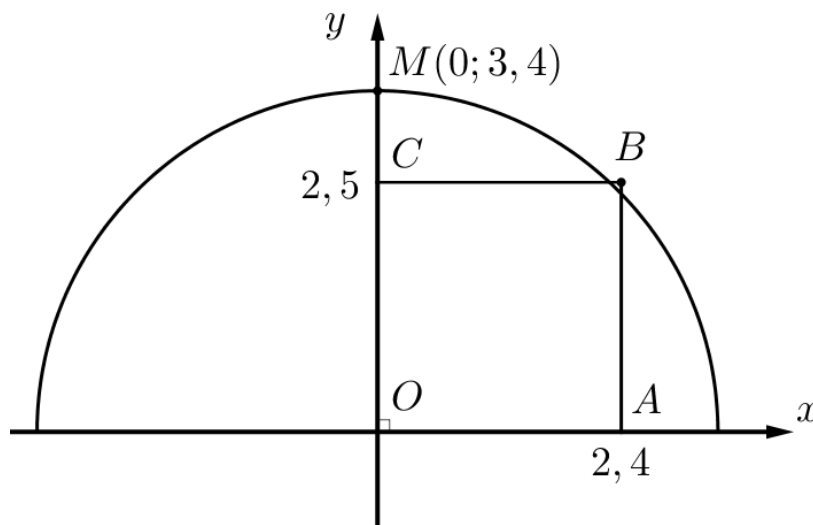
**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a) Chọn hệ toạ độ sao cho tâm của cái cổng hình bán nguyệt có toạ độ  $(0;0)$  và đỉnh của cổng có toạ độ  $M(0;3,4)$ .

Ta có phương trình mô phỏng của cổng là:  $x^2 + y^2 = 3,4^2 (y > 0)$ .

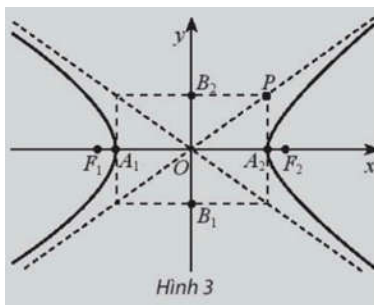


Hình 1

b) Gọi  $OABC$  là thiết diện của xe tải (Hình 1).

$$\text{Ta có: } OB = \sqrt{OA^2 + OC^2} = \sqrt{2,4^2 + 2,5^2} \approx 3,5(\text{m}) > R = 3,4(\text{m}).$$

Vậy nếu đi đúng làn đường quy định thì xe tải không thể đi qua cổng.



Các điểm  $F_1$  và  $F_2$  gọi là các **tiêu điểm** của hypebol.

Độ dài  $F_1F_2 = 2c$  gọi là **tiêu cự** của hypebol ( $c > a$ ).

### Phương trình chính tắc của Hypebol

Hypebol  $(H)$  có hai tiêu điểm là  $F_1, F_2$ . Chọn hệ trục tọa độ sao cho  $F_1(-c; 0)$  và  $F_2(c; 0)$ . Phương trình  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  trong đó  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$  là **phương trình chính tắc** của hypebol.

#### Chú ý:

□  $(H)$  cắt  $Ox$  tại hai điểm  $A_1(-a; 0)$  và  $A_2(a; 0)$ . Nếu vẽ hai điểm  $B_1(0; -b)$  và  $B_2(0; b)$  vào hình chữ nhật  $OA_2PB_2$  thì  $\sqrt{a^2 + b^2} = c$ .

□ Các điểm  $A_1, A_2$  gọi là các **đỉnh** của hypebol.

□ Đoạn thẳng  $A_1A_2$  gọi là **trục thực**, đoạn thẳng  $B_1B_2$  gọi là **trục ảo** của hypebol.

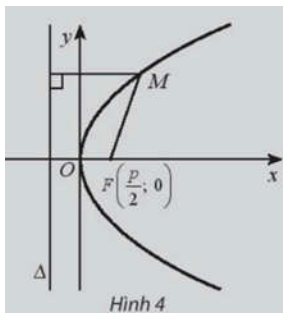
□ Giao điểm  $O$  của hai trục là **tâm đối xứng** của hypebol.

□ Nếu  $M(x; y) \in (H)$  thì  $x \leq -a$  hoặc  $x \geq a$ .

## 3. Parabol

### Nhận biết parabol

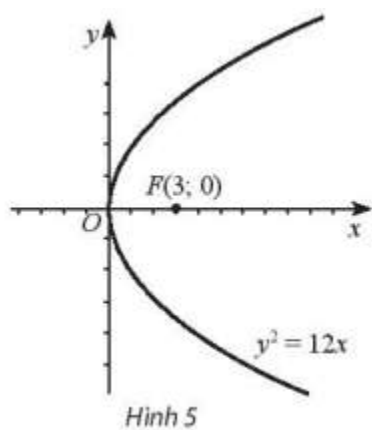
Cho một điểm cố định  $F$  và một đường thẳng  $\Delta$  cố định không đi qua  $F$ . Parabol  $(P)$  là tập hợp các điểm  $M$  cách đều  $F$  và  $\Delta$ .



$F$  gọi là **tiêu điểm** và  $\Delta$  gọi là **đường chuẩn** của parabol  $(P)$ .

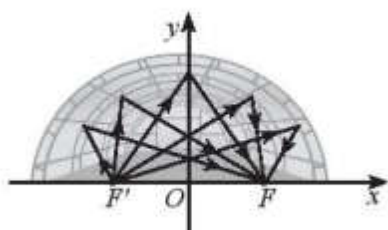
### Phương trình chính tắc của parabol

Vậy  $(P)$  có phương trình:  $y^2 = 12x$ .



Hình 5

**Ví dụ 19:** Một mái vòm nhà hát có mặt cắt là hình nửa elip. Cho biết khoảng cách giữa hai tiêu điểm là  $F'F = 50$  m và chiều dài của đường đi của một tia sáng từ  $F'$  đến mái vòm rồi phản chiếu về  $F$  là 100 m. Viết phương trình chính tắc của elip đó.



Hình 6

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Tổng khoảng cách  $F'M + FM = 2a = 100$ , suy ra  $a = 50$ .

Ta có:  $b^2 = a^2 - c^2 = 50^2 - 25^2 = 1875$ .

Vậy elip có phương trình  $\frac{x^2}{2500} + \frac{y^2}{1875} = 1$ .

**Ví dụ 20:** Một tháp triển lãm có mặt cắt là hình hypebol có phương trình  $\frac{x^2}{18^2} - \frac{y^2}{36^2} = 1$ . Cho biết chiều cao của tháp là 100m và khoảng cách từ nóc đến tâm đối xứng của hypebol bằng khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Tính bán kính đáy và bán kính nóc của tháp.

Ta có  $M(25;60)$  là tọa độ một điểm tại chân cổng chào. Thay tọa độ điểm  $M$  vào phương trình  $(P)$  ta có:

$$60^2 = 2p.25 \Rightarrow p = \frac{60^2}{50} = 72.$$

Vậy phương trình của  $(P)$  là  $y^2 = 144x$ .

### III. BÀI TẬP

**Câu 30.** Viết phương trình chính tắc của:

- a) Elip có trục lớn bằng 12 và trục nhỏ bằng 8;
- b) Hypebol có tiêu cự  $2c = 18$  và độ dài trục thực  $2a = 14$ ;
- c) Parabol có tiêu điểm  $F(5;0)$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $(E): \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

b)  $(H): \frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{32} = 1$

c)  $(P): y^2 = 20x$ .

**Câu 31.** Viết phương trình chính tắc của các đường conic dưới đây. Gọi tên và tìm tọa độ các tiêu điểm của chúng.

a)  $(C_1): 7x^2 + 13y^2 = 1$ ;

b)  $(C_2): 25x^2 - 9y^2 = 225$ ;

c)  $(C_3): x = 2y^2$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**



Hình 11

Phải ghim hai cái đỉnh cách các mép tấm ván ép bao nhiêu và lấy vòng dây có độ dài là bao nhiêu?

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Ta có  $2a = 1\text{m} = 100\text{ cm}; 2b = 0,6\text{ m} = 60\text{ cm}$ .

Suy ra  $c^2 = a^2 - b^2 = 50^2 - 30^2 = 1600 \Rightarrow c = 40$ .

Ta có  $a - c = 10(\text{cm})$  và  $2a + 2c = 180(\text{cm})$ .

Vậy phải ghim hai cái đỉnh cách các mép tấm ván ép  $10\text{ cm}$  và lấy vòng dây có độ dài là  $180\text{ cm}$  hay  $1,8\text{ m}$ .

**Câu 33.** Thang leo gợn sóng cho trẻ em trong công viên có hai khung thép cong hình nửa elip cao  $100\text{cm}$  và khoảng cách giữa hai chân là  $240\text{cm}$ .

a) Hãy chọn hệ toạ độ thích hợp và viết phương trình chính tắc của elip nói trên.

b) Tính khoảng cách thẳng đứng từ một điểm cách chân khung  $20\text{cm}$  lên đến khung thép.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) Phương trình chính tắc của elip là  $\frac{x^2}{120^2} + \frac{y^2}{100^2} = 1$ .

b) Thay  $x = 120 - 20 = 100$  vào phương trình elip ta có:

$$\frac{100^2}{120^2} + \frac{y^2}{100^2} = 1 \Rightarrow y^2 = 100^2 \left( 1 - \frac{100^2}{120^2} \right) \Rightarrow y \approx 55(\text{cm}).$$

**Câu 34.** Một tháp làm nguội của một nhà máy có mặt cắt là hình hypebol có phương trình  $\frac{x^2}{30^2} - \frac{y^2}{50^2} = 1$ .

Biết chiều cao của tháp là  $120\text{m}$  và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng  $\frac{1}{2}$

khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Tính bán kính nóc và bán kính đáy của tháp.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Gọi  $r$  và  $R$  lần lượt là bán kính nóc và bán kính đáy của tháp. Ta tính được khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng  $40\text{ m}$  và khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy bằng  $80\text{ m}$ .

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

**Câu 36.** Cho hai vector  $\vec{a} = (4; 3)$  và  $\vec{b} = (1; 7)$ . Góc giữa hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là:

- A.  $90^\circ$ .                      B.  $60^\circ$ .                      C.  $45^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .  
A.                                  B.                                  C.                                  D.

Lời giải

Chọn  
Chọn C

**Câu 37.** Cho hai điểm  $M = (1; -2)$  và  $N = (-3; 4)$ . Khoảng cách giữa hai điểm  $M$  và  $N$  là:

- A. 4.                              B. 6.                              C.  $3\sqrt{6}$ .                      D.  $2\sqrt{13}$ .  
A.                                  B.                                  C.                                  D.

Lời giải

Chọn  
Chọn D

**Câu 38.** Tam giác  $ABC$  có  $A = (-1; 1)$ ;  $B = (1; 3)$  và  $C = (1; -1)$ . Trong các phát biểu sau đây, phát biểu nào đúng?

- A.  $ABC$  là tam giác có ba cạnh bằng nhau.                      B.  $ABC$  là tam giác có ba góc đều nhọn.  
C.  $ABC$  là tam giác cân tại  $B$  (có  $BA = BC$ ).                      D.  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$ .  
A.                                  B.                                  C.                                  D.

Lời giải

Chọn  
Chọn D

**Câu 39.** Cho phương trình tham số của đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -9 - 2t \end{cases}$ .

Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình tổng quát của  $(d)$ ?

- A.  $2x + y - 1 = 0$ .                      B.  $2x + 3y + 1 = 0$ .                      C.  $x + 2y + 2 = 0$ .                      D.  $x + 2y - 2 = 0$ .  
A.                                  B.                                  C.                                  D.

Lời giải

Chọn  
Chọn A

**Câu 40.** Đường thẳng đi qua điểm  $M(1; 0)$  và song song với đường thẳng  $d: 4x + 2y + 1 = 0$  có phương trình tổng quát là:

- A.  $4x + 2y + 3 = 0$ .                      B.  $2x + y + 4 = 0$ .                      C.  $2x + y - 2 = 0$ .                      D.  $x - 2y + 3 = 0$ .  
A.                                  B.                                  C.                                  D.

Lời giải

Chọn  
Chọn C

**Câu 41.** Bán kính của đường tròn tâm  $I(0; -2)$  và tiếp xúc với đường thẳng  $\Delta: 3x - 4y - 23 = 0$  là:

- A. 7.                                  B. 8.                                  C.  $\frac{3}{5}$ .                                  D. 3.  
A.                                  B.                                  C.                                  D.

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn****Chọn C****Câu 48.** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho ba điểm  $A(2;2), B(1;3), C(-1;1)$ .

- a) Chứng minh  $OABC$  là một hình chữ nhật;  
 b) Tìm tọa độ tâm  $I$  của hình chữ nhật  $OABC$ .

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

a) Ta có:  $\overrightarrow{OA} = (2;2); \overrightarrow{CB} = (2;2); \overrightarrow{OC} = (-1;1); \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}; \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ .

Suy ra  $OABC$  là một hình chữ nhật.

b) Tâm  $I$  là trung điểm  $OB$ , ta có  $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ .

**Câu 49.** Tìm góc giữa hai đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$ .

a)  $d_1: 5x - 9y + 2019 = 0$  và  $d_2: 9x + 5y + 2020 = 0$ ;

b)  $d_1: \begin{cases} x = 9 + 9t \\ y = 7 + 18t \end{cases}$  và  $d_2: 4x - 12y + 13 = 0$ ;

c)  $d_1: \begin{cases} x = 11 - 5t \\ y = 13 + 9t \end{cases}$  và  $d_2: \begin{cases} x = 13 + 10t' \\ y = 11 - 18t' \end{cases}$

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

a)  $(d_1, d_2) = 90^\circ$ .

b)  $(d_1, d_2) = 45^\circ$ .

c)  $(d_1, d_2) = 0^\circ$

**Câu 50.** Cho tam giác  $ABC$  với tọa độ ba đỉnh là  $A(1;1); B(3;1); C(1;3)$ . Tính độ dài đường cao  $AH$ .**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

Phương trình tổng quát  $CB: x + y - 4 = 0$

$$AH = d(A, BC) = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

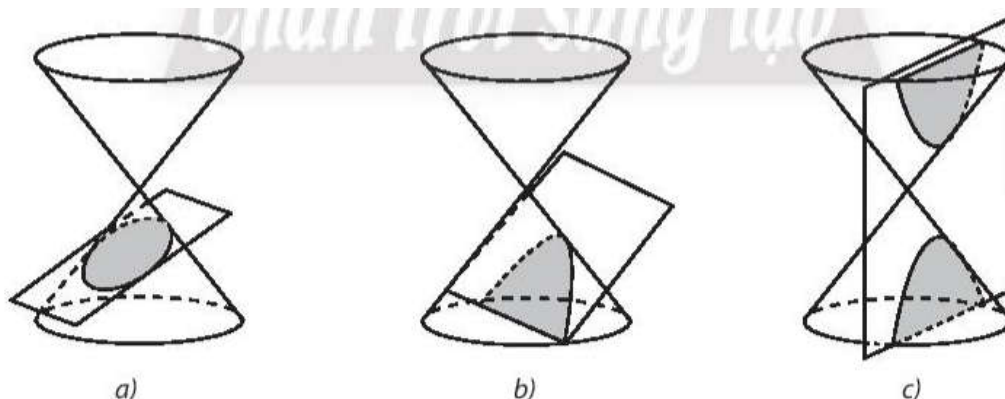
**Câu 51.** Tính bán kính của đường tròn tâm  $J(1;0)$  và tiếp xúc với đường thẳng  $d: 8x - 6y + 22 = 0$ **A.****B.****C.****D.**

### Lời giải

#### Chọn

$$(1-4)(x-4) + (1-5)(y-5) = 0 \text{ hay } 3x + 4y - 32 = 0.$$

**Câu 56.** Gọi tên các đường conic sau:



A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

a) Elip; b) Parabol; c) Hypebol.

**Câu 57.** Tìm tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh, độ dài trục lớn và trục nhỏ của các elip sau:

a)  $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ ;

b)  $x^2 + 4y^2 = 1$ .

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

a)  $(E): \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$  có  $a = 13; b = 5 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = 12$ .

Các tiêu điểm  $F_1(-12; 0); F_2(12; 0)$ .

Các đỉnh  $A_1(-13; 0); A_2(13; 0); B_1(0; -5); B_2(0; 5)$ .

Độ dài trục lớn  $A_1A_2 = 26$

Độ dài trục nhỏ  $B_1B_2 = 10$

b)  $x^2 + 4y^2 = 1$ . Suy ra  $(E): \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$  có  $a = 1; b = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Các tiêu điểm  $F_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right); F_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ .

Các đỉnh  $A_1(-1; 0); A_2(1; 0); B_1\left(0; -\frac{1}{2}\right); B_2\left(0; \frac{1}{2}\right)$

Độ dài trục lớn  $A_1A_2 = 2$

Độ dài trục nhỏ  $B_1B_2 = 1$

Phương trình hypebol là  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ .

b) Độ dài trục thực là 10, độ dài trục ảo 20 suy ra:

$$2a = 10 \Rightarrow a = 5; 2b = 20 \Rightarrow b = 10$$

Phương trình hypebol là  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{64} = 1$ .

**Câu 61.** Tìm tọa độ tiêu điểm, phương trình đường chuẩn của các parabol sau:

a)  $y^2 = 4x$ ;

b)  $y^2 = 2x$ ;

c)  $y^2 = -6x$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $y^2 = 4x$  suy ra  $2p = 4 \Rightarrow p = 2$ .

Tiêu điểm  $F(1;0)$

Phương trình đường chuẩn  $x + 1 = 0$ .

b)  $y^2 = 2x$  suy ra  $2p = 2 \Rightarrow p = 1$

Tiêu điểm  $F\left(\frac{1}{2};0\right)$

Phương trình đường chuẩn  $y + \frac{1}{2} = 0$ .

c)  $y^2 = -6x$  suy ra  $2p = -6 \Rightarrow p = -3$ .

Tiêu điểm  $F\left(-\frac{3}{2};0\right)$ .

Phương trình đường chuẩn  $x - \frac{3}{2} = 0$ .

**Câu 62.** Viết phương trình chính tắc của parabol thoả mãn các điều kiện:

a) Tiêu điểm  $(8;0)$ ;

b) Khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn bằng 4.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $y^2 = 32x$  b)  $y^2 = 8x$

**Câu 63.** Một nhà mái vòm có mặt cắt hình nửa elip cao 6m rộng 16m.

a) Hãy chọn hệ tọa độ thích hợp và viết phương trình của elip nói trên;

b) Tính khoảng cách thẳng đứng từ một điểm cách chân vách 4m lên đến mái vòm.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

### Chọn

a) Toạ độ máy bay lúc 9 giờ là  $(181; -179)$ .

b)  $OM = \sqrt{181^2 + 179^2} \approx 255(\text{km})$ .

c) Ta có  $600^2 = (1 + 180t)^2 + (1 - 180t)^2$

$$t = \sqrt{\frac{600^2 - 2}{2 \cdot 180^2}} \approx 2,36 \text{ (giờ)}.$$

2,36 giờ = 2 giờ 22 phút.

Vậy máy bay ra khỏi tầm hoạt động của radar từ lúc 10 giờ 22 phút.

b) Lập phương trình đường trung trực của đoạn  $AB$ .

c) Tìm điểm  $D$  thuộc đường thẳng  $AB$  sao cho  $CD = 5$ .

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

a) Đường thẳng  $AB$  nhận vector  $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$  là một vector chỉ phương. Khi đó đường thẳng  $AB$  đi qua điểm  $A$  và nhận  $\vec{u}(1; 1)$  là một vector chỉ phương nên đường thẳng  $AB$  có phương trình tham số là  $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = t. \end{cases}$

b) Trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  là  $M = \left( \frac{-1+1}{2}; \frac{0+2}{2} \right) = (0; 1)$ . Đường trung trực  $\Delta$  của  $AB$  vuông góc với  $AB$  nên nó nhận vector  $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$  là một vector pháp tuyến và đi qua trung điểm  $M(0; 1)$  của đoạn thẳng  $AB$ . Do đó phương trình đường thẳng  $\Delta$  là

$$2(x-0) + 2(y-1) = 0 \Leftrightarrow x + y - 1 = 0.$$

c) Do điểm  $D$  thuộc đường thẳng  $AB$  nên tọa độ của  $D$  có dạng  $D(-1+t; t)$ . Khi đó ta có

$$CD = \sqrt{(t-4)^2 + (t-3)^2} = 5 \Leftrightarrow (t-4)^2 + (t-3)^2 = 25 \Leftrightarrow 2t^2 - 14t = 0.$$

Giải phương trình ta có  $t_1 = 0, t_2 = 7$ . Vậy có hai điểm  $D$  thỏa mãn là  $D_1(-1; 0), D_2(6; 7)$ .

#### Lưu ý

Để tìm tọa độ của một điểm trên một đường thẳng, ta lập phương trình đường thẳng đó dưới dạng tham số và gọi tọa độ của điểm cần tìm theo một tham số. Khi đó, ta chỉ cần một điều kiện để tìm ra tham số, và từ đó suy ra điểm cần tìm.

**Ví dụ 3:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $MNP$  có  $M(2; 1), N(-3; 0)$  và  $P(1; 4)$ .

a) Lập phương trình tổng quát của đường cao kẻ từ  $M$  của tam giác  $MNP$ .

b) Lập phương trình tổng quát của đường thẳng  $MN$ .

c) Lập phương trình tổng quát của đường trung tuyến kẻ từ  $M$  của tam giác  $MNP$ .

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

Đường cao kẻ từ  $M$  của tam giác  $MNP$  là đường thẳng đi qua  $M$  và vuông góc với  $NP$  nên nhận vector  $\overrightarrow{NP}$  là một vector pháp tuyến. Ta có  $\overrightarrow{NP} = (4; 4)$  và  $M(2; 1)$ , vậy phương trình tổng quát của đường cao kẻ từ  $M$  là  $4(x-2) + 4(y-1) = 0 \Leftrightarrow x + y - 3 = 0$ .

b) Đường thẳng  $MN$  nhận vector  $\overrightarrow{MN}(-5; -1)$  là một vector chỉ phương nên nhận vector  $\vec{n}(1; -5)$  là một vector pháp tuyến. Phương trình tổng quát của đường thẳng  $MN$  đi qua điểm  $M(2; 1)$  và có một vector pháp tuyến  $\vec{n}(1; -5)$  là

$$1(x-2) - 5(y-1) = 0 \Leftrightarrow x - 5y + 3 = 0.$$

d) Đường trung tuyến kẻ từ  $M$  của tam giác  $MNP$  đi qua  $M(2; 1)$  và trung điểm của  $NP$  là  $I(-1; 2)$ , do đó  $\Delta$  nhận  $\overrightarrow{MI}(-3; 1)$  là một vector chỉ phương. Khi đó  $\Delta$  nhận vector  $\vec{n}(1; 3)$  là một vector pháp tuyến. Phương trình tổng quát của đường trung tuyến đó là

$$1(x-2) + 3(y-1) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 5 = 0.$$

#### Lưu ý:

• Để giải quyết được các bài toán về tam giác hay mở rộng hơn là đa giác trong mặt phẳng tọa độ, ta cần ghi nhớ các mối liên hệ giữa các yếu tố quen thuộc trong tam giác, chẳng hạn:

- Đường cao có yếu tố vuông góc.

- Đường trung tuyến có yếu tố trung điểm, trọng tâm.

**Lưu ý.** Một đường thẳng có vô số vector pháp tuyến và các vector đó cùng phương. Cụ thể, nếu  $\vec{n}$  là một vector pháp tuyến của đường thẳng  $d$  thì  $t\vec{n}$  cũng là vector pháp tuyến của đường thẳng  $d$  với mọi số thực  $t$  khác 0. Sai lầm của nhiều em nghĩ rằng đường thẳng chỉ có một vector pháp tuyến.

**Câu 5.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d$  có phương trình  $y = -2x + 3$ . Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng  $d$ .

A. B. C. D.

**Lời giải**

**Chọn**

Biến đổi tương đương phương trình ta có  $y = -2x + 3 \Leftrightarrow 2x + y - 3 = 0$  nên phương trình tổng quát của đường thẳng  $d$  là  $2x + y - 3 = 0$ .

Đường thẳng  $d$  có một vector pháp tuyến là  $\vec{n} = (2; 1)$  nên  $d$  nhận  $\vec{u} = (1; -2)$  là một vector chỉ phương. Thay  $x = 0$  vào phương trình tổng quát của đường thẳng  $d$  ta được  $y = 3$ . Do đó  $d$  đi qua điểm  $M(0; 3)$ .

Vậy phương trình tham số của đường thẳng  $d$  là:  $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$ .

**Câu 6.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho điểm  $M(2; 1)$  đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \end{cases}$ . Tìm điểm  $N$  thuộc đường thẳng  $\Delta$  sao cho  $MN = \sqrt{2}$ .

A. B. C. D.

**Lời giải**

**Chọn**

Do điểm  $N$  nằm trên đường thẳng  $a$  nên  $N(2 - t; 2t)$ , với  $t$  là tham số. Khi đó ta có  $\overline{MN} = (-t; 2t - 1)$ . Từ giả thiết ta suy ra  $MN = \sqrt{(-t)^2 + (2t - 1)^2} = \sqrt{2}$ . Giải phương trình trên ta được  $t_1 = 1; t_2 = -\frac{1}{5}$ .

Vậy các điểm cần tìm là  $N_1(1; 2); N_2\left(\frac{11}{5}; -\frac{2}{5}\right)$

**Câu 7.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có tọa độ ba đỉnh  $A(0; -1), B(2; 3), C(-4; 1)$ . Lập phương trình tham số của đường trung bình ứng với cạnh  $BC$  của tam giác  $ABC$ .

A. B. C. D.

**Lời giải**

**Chọn**

Gọi  $d$  là đường trung bình ứng với cạnh  $BC$ , khi đó  $d$  đi qua trung điểm  $M(1; 1)$  của cạnh  $AB$  và song song với  $BC$ . Suy ra  $d$  nhận  $\overline{BC} = (-6; -2)$  là một vector chỉ phương. Vậy phương trình tham số của  $d$  là:

$$\begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$$

**Câu 8.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hình vuông  $ABCD$  có  $A(-1; 0)$  và  $B(1; 2)$ .

- Lập phương trình đường thẳng  $BC$ .
- Tìm tọa độ điểm  $C$  biết rằng hoành độ của điểm  $C$  là số dương.

A. B. C. D.

**Lời giải**

Điểm  $E$  thuộc  $BC$  có hoành độ bằng 90 nên tung độ của  $E$  tính theo công thức  $2.90 + 3y_E - 750 = 0 \Rightarrow y_E = 190$

Do  $183\text{ cm} < 190\text{ cm}$  nên bố mẹ bạn Nam có thể kê chiếc tủ lạnh có bề ngang là  $90\text{ cm}$  và chiều cao  $183\text{ cm}$ .

$$d(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

## II. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 4:** Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

a)  $d: x + y + 1 = 0$  và  $k: 2x + y - 3 = 0$ ;

b)  $d: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 - 2t \end{cases}$  và  $k: \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2t' \end{cases}$ ;

c)  $d: \begin{cases} x = 6t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$  và  $k: x - 3y + 5 = 0$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

a) Do  $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{1}$  nên hai đường thẳng  $d$  và  $k$  cắt nhau.

b) Từ giả thiết ta có  $\overrightarrow{u_d} = (-1; -2), \overrightarrow{u_k} = (1; 2)$ . Khi đó  $\overrightarrow{u_d} = -\overrightarrow{u_k}$ , do đó hai vector chỉ phương của hai đường thẳng cùng phương. Mặt khác từ phương trình tham số của  $d$  ta nhận thấy  $d$  đi qua điểm  $M(3; 4)$ . Thay tọa độ điểm  $M$  vào phương trình đường thẳng  $k$  ta có

$$\begin{cases} 3 = 1 + t' \\ 4 = 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 2 \\ t' = 2 \end{cases} \Leftrightarrow t' = 2.$$

Vậy  $k$  cũng đi qua  $M$ . Từ đó suy ra hai đường thẳng trùng nhau.

c) Từ giả thiết ta có  $\overrightarrow{u_d} = (6; 2), \overrightarrow{n_k} = (1; -3)$ . Khi đó vector pháp tuyến của đường thẳng  $d$  là  $\overrightarrow{n_d} = (-2; 6)$ , do đó  $\overrightarrow{n_d} = -2\overrightarrow{n_k}$ . Vậy hai vector pháp tuyến của hai đường thẳng cùng phương. Mặt khác từ phương trình tham số của  $d$  ta nhận thấy  $d$  đi qua điểm  $N(0; 2)$ . Thay tọa độ điểm  $N$  vào phương trình đường thẳng  $k$  ta có  $0 - 3 \cdot 2 + 5 \neq 0$ . Do đó  $N$  không thuộc đường thẳng  $k$ . Vậy hai đường thẳng song song với nhau.

**Lưu ý**

- Khi xét vị trí tương đối của hai đường thẳng, ta có thể chuyển về tìm số điểm chung của hai đường thẳng.

- Một trong những sự lúng túng của nhiều em khi làm dạng bài này là ta cố gắng chuyển tất cả các phương trình của các đường thẳng về dạng tổng quát.

- Khi hai đường thẳng có các vector pháp tuyến (các vector chỉ phương tương ứng) cùng phương, nhiều em hay nhầm lẫn khi kết luận ngay rằng hai đường thẳng song song mà không kiểm tra xem hai đường thẳng đó có trùng nhau hay không. Trong tình huống này, để biết chính xác vị trí giữa hai đường thẳng ta cần xét thêm điểm chung của hai đường thẳng.

**Ví dụ 5:** Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau.

a)  $d: \sqrt{3}x - y + 2 = 0$  và  $k: x - \sqrt{3}y - 2 = 0$ .

b)  $a: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$  và  $b: \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 5 + 3t' \end{cases}$ .

c)  $p: \begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$  và  $q: 5x - 4y + 3 = 0$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

của đường thẳng  $d$  và  $\Delta$ . Do đó tọa độ của điểm  $H$  là nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$ . Giải hệ phương trình ta được  $x = \frac{1}{5}, y = \frac{7}{5}$ . Vậy  $H\left(\frac{1}{5}; \frac{7}{5}\right)$ .

c) Điểm  $C$  thuộc trục  $Oy$  nên tọa độ của  $C$  có dạng  $C(0; c)$ . Trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  tọa độ là  $G = \left(\frac{-1+4+0}{3}; \frac{2+0+c}{3}\right) = \left(1; \frac{2+c}{3}\right)$ . Do  $G$  thuộc đường thẳng  $d$  nên ta có  $2 \cdot 1 - \left(\frac{2+c}{3}\right) + 1 = 0 \Rightarrow c = 7$ . Vậy  $C(0; 7)$ .

Đường thẳng  $AB$  nhận vec tơ  $\overrightarrow{AB} = (5; -2)$  là một vec tơ chỉ phương nên  $AB$  nhận vec tơ  $\vec{n}(2; 5)$  là một vec tơ pháp tuyến. Phương trình của  $AB$  là  $2x + 5y - 8 = 0$ . Khi đó diện tích tam giác  $ABC$  là

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} d(C, AB) \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{|2 \cdot 0 + 5 \cdot 7 - 8|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} \cdot \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \frac{27}{2}.$$

### Lưu ý

- Khi tìm hình chiếu vuông góc  $H$  của  $A$  lên đường thẳng  $d$  ta có thể viết phương trình tham số của  $d$  và biểu diễn tọa độ của  $H$  tính theo một tham số. Sau đó dùng điều kiện  $AH \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}_d = 0$  để tính ra tham số. Từ đó các em tìm được tọa độ của điểm  $H$ .

- Diện tích tam giác  $ABC$  có thể tính theo công thức  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$ . Từ đó áp dụng các công thức tính diện tích tam giác để suy ra góc, độ dài các đường cao, bán kính đường tròn nội tiếp và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

## III. BÀI TẬP

**Câu 10.** Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

a)  $m: x + y - 2 = 0$  và  $k: 2x + 2y - 4 = 0$ .

b)  $a: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 \end{cases}$  và  $b: \begin{cases} x = 3t' \\ y = 1 + t' \end{cases}$ .

c)  $d_1: x - 2y - 1 = 0$  và  $d_2: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

### Lời giải

#### Chọn

a) Từ giả thiết ta có  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{-2}{-4}$  nên hai đường thẳng này trùng nhau.

b) Từ giả thiết ta có  $\vec{u}_a = (2; 0), \vec{u}_b = (3; 1)$ , Khi đó hai vector chỉ phương của hai đường thẳng không cùng phương với nhau nên hai đường thẳng cắt nhau.

c) Từ giả thiết ta có  $\vec{n}_{d_1} = (1; -2), \vec{u}_{d_2} = (-2; -1)$ . Khi đó vector pháp tuyến của đường thẳng  $d_2$  là  $\vec{n}_{d_2} = (1; -2) = \vec{n}_{d_1}$ , mà điểm  $M(1; 2)$  thuộc  $d_2$ , nhưng không thuộc  $d_1$  nên hai đường thẳng song song với nhau.

**Câu 11.** Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau:

a)  $d: y - 1 = 0$  và  $k: x - y + 4 = 0$ ;

$$\text{Do đó, } \tan^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1 = \frac{145}{81} - 1 = \frac{64}{81} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{8}{9}.$$

**Câu 13.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , tìm điểm  $M$  thuộc trục  $Ox$  sao cho khoảng cách từ  $M$  đến đường thẳng  $\Delta: 3x + y - 3 = 0$  bằng  $\sqrt{10}$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Do  $M$  thuộc  $Ox$  nên tọa độ của  $M$  có dạng  $M(m; 0)$ . Từ giả thiết ta có  $d(M, \Delta) = \frac{|3m + 0 - 3|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \sqrt{10}$ . Giải phương trình ta được  $m_1 = \frac{13}{3}; m_2 = -\frac{7}{3}$ . Vậy có hai điểm thỏa mãn là  $M_1\left(\frac{13}{3}; 0\right); M_2\left(-\frac{7}{3}; 0\right)$ .

**Câu 14.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $\Delta: 2x + y - 5 = 0$ .

- Viết phương trình đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $A(3; 1)$  và song song với đường thẳng  $\Delta$ .
- Viết phương trình đường thẳng  $k$  đi qua điểm  $B(-1; 0)$  và vuông góc với đường thẳng  $\Delta$ .
- Lập phương trình đường thẳng  $a$  song song với đường thẳng  $\Delta$  và cách điểm  $O$  một khoảng bằng  $\sqrt{5}$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

- $\Delta$  có một vector pháp tuyến là  $\vec{n}(2; 1)$ . Do  $d$  song song với  $\Delta$  nên  $\vec{n}(2; 1)$  là một vector pháp tuyến. Đường thẳng  $d$  đi qua  $A(3; 1)$  và có vector pháp tuyến  $\vec{n}(2; 1)$  nên có phương trình tổng quát là  $2x + y - 7 = 0$ .
- $\Delta$  có một vector chỉ phương là  $\vec{u}_\Delta(1; -2)$ . Do  $k$  vuông góc với  $\Delta$  nên  $k$  nhận  $\vec{u}_\Delta(1; -2)$  là một vector pháp tuyến. Đường thẳng  $k$  đi qua  $B(-1; 0)$  và có vector pháp tuyến  $\vec{n}_k = (1; -2)$  nên có phương trình tổng quát là  $x - 2y + 1 = 0$ .
- Đường thẳng  $a$  song song với đường thẳng  $\Delta$  nên phương trình đường thẳng  $a$  có dạng  $2x + y + c = 0$ , với  $c \neq -5$ . Theo công thức tính khoảng cách ta có  $d(O, a) = \frac{|2 \cdot 0 + 0 + c|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}$ .

Giải phương trình ta được  $c = \pm 5$ . Kết hợp điều kiện ta có  $c = 5$ . Vậy phương trình đường thẳng  $a$  là  $2x + y + 5 = 0$ .

**Lưu ý.** Trước khi viết phương trình đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước thì các em có thể gọi dạng của phương trình đó nhưng cần có điều kiện để hai phương trình không trùng nhau.

**Câu 15.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(2; -1), B(2; -2)$  và  $C(0; -1)$ .

- Tính độ dài đường cao của tam giác  $ABC$  kẻ từ  $A$ .
- Tính diện tích tam giác  $BC$
- Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

b) Do  $M \in d$  nên tọa độ điểm  $H$  có dạng  $M(t; 1-t)$ . Chu vi tam giác  $ABM$  nhỏ nhất khi và chỉ khi  $MA+MB$  nhỏ nhất.

Lấy  $A'$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $d$ . Khi đó ta có  $MA+MB=MA'+MB \geq A'B$ . Dấu bằng xảy ra khi  $M=A'B \cap d$ .

Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  trên đường thẳng  $d$ . Khi đó  $AH$  đi qua điểm  $A(-3;0)$  và nhận vectơ chỉ phương  $\vec{u_d}=(1;-1)$  của đường thẳng  $d$  làm vectơ pháp tuyến nên phương trình của  $AH$  là  $x-y+3=0$ . Vậy tọa độ  $H$  là nghiệm hệ phương trình  $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}$ . Giải hệ phương trình ta được  $x=-1; y=2$ . Suy ra  $H(-1;2)$ . Mặt khác,  $H$  là trung điểm của  $AA'$  nên  $A'(1;4)$ . Ta có  $\vec{A'B}=(0;-6)$  là một vectơ chỉ phương của đường thẳng  $A'B$ . Do đó  $A'B$  là đường thẳng đi qua điểm  $A'(1;4)$  và nhận  $\vec{n}=(1;0)$  là một vectơ pháp tuyến. Phương trình của đường thẳng  $A'B$  là  $x=1$ .

Vậy tọa độ điểm  $M$  là nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x=1 \end{cases}$

Do đó ta có  $M(1;0)$ .

**Câu 18.** Trong một hoạt động ngoại khóa của trường, lớp Việt định mở một gian hàng bán bánh mì và nước khoáng. Biết rằng giá gốc một bánh mì là 15000 đồng, một chai nước là 5000 đồng. Các bạn dự kiến bán bánh mì với giá 20000 đồng/1 bánh mì và nước giá 8000 đồng/1 chai. Dựa vào thống kê số người tham gia hoạt động và có nhu cầu thực tế các bạn dự kiến tổng số bánh mì và số chai nước không vượt quá 200. Theo quỹ lớp thì số tiền lớp Việt được dùng không quá 2000000 đồng. Hỏi lớp Việt có thể đạt được tối đa lợi nhuận là bao nhiêu?

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Gọi  $x, y$  lần lượt là số chiếc bánh mì và chai nước khoáng mà lớp Việt định mua để bán. Khi đó từ giả thiết ta có:  $x, y \in \mathbb{N}$ .

Mặt khác từ giả thiết ta có:  $\begin{cases} x+y \leq 200 \\ 15000x+5000y \leq 2000000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \leq 200 \\ 3x+y \leq 400 \end{cases}$

Nếu bán hết thì lợi nhuận lớp Việt có được là:  $T=5x+3y$  (nghìn đồng).

Để tìm lợi nhuận lớn nhất ta cần tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $d=5x+3y$ .

Trước hết, ta biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình:

$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 200 \\ 3x+y \leq 400 \end{cases}$  trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , là miền tứ giác  $OABC$ .

## BÀI 21. ĐƯỜNG TRÒN TRONG MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ

### I. LÝ THUYẾT

• Phương trình của đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(a;b)$ , bán kính  $R$  là

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

• Với các hằng số  $a, b, c$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 - c > 0$ , phương trình

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

là phương trình của một đường tròn có tâm  $I(a;b)$ , bán kính  $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ .

• Cho đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(a;b)$ , bán kính  $R$ . Phương trình tiếp tuyến  $\Delta$  của  $(C)$  tại  $M(x_0; y_0)$  là  $(a - x_0).(x - x_0) + (b - y_0).(y - y_0) = 0$ .

### II. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 7:** Cho hai điểm  $I(2;-1)$ ,  $A(-1;4)$  và đường thẳng  $\Delta: 3x - 4y - 20 = 0$

a) Viết phương trình đường tròn  $(C_1)$  có tâm  $I$  và đi qua  $A$ .

b) Viết phương trình đường tròn  $(C_2)$  có tâm  $I$  và tiếp xúc với đường thẳng  $\Delta$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

a) Vì đường tròn  $(C_1)$  có tâm  $I$  và đi qua  $A$  nên  $(C_1)$  có bán kính  $R$  bằng

$$R = IA = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{34}.$$

Vậy phương trình của  $(C_1)$  là  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 34$ .

b) Vì đường tròn  $(C_2)$  có tâm  $I$  và tiếp xúc với đường thẳng  $\Delta$  nên bán kính  $R$  của  $(C_2)$  được tính theo công thức

$$R = d(I, \Delta) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) - 20|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 2.$$

Vậy phương trình của  $(C_2)$  là  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ .

**Lưu ý**

Trong câu a, một số sai lầm có thể mắc phải khi viết phương trình của  $(C_1)$ :

•  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = \sqrt{34}$  (nhầm vế phải là  $R$ );

•  $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 34$  (nhầm dấu ở vế trái).

**Ví dụ 8:** Cho bốn điểm  $A(2;6)$ ,  $B(-6;2)$ ,  $C(-1;-3)$  và  $M(3;5)$ .

a) Viết phương trình đường tròn  $(C)$  đi qua ba điểm  $A, B, C$ .

b) Chứng minh rằng điểm  $M$  thuộc đường tròn  $(C)$ .

c) Viết phương trình tiếp tuyến  $\Delta$  của  $(C)$  tại điểm  $M$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

**Câu 20.** Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường tròn của một đường tròn? Khi đó hãy tìm tâm và bán kính của nó.

- a)  $x^2 + 2y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$
- b)  $x^2 + y^2 - 4x + 3y + 2xy = 0$
- c)  $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 26 = 0$
- d)  $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 13 = 0$
- e)  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

- a) Phương trình đã cho không là phương trình của đường tròn (hệ số của  $x^2$  và  $y^2$  không bằng nhau).
- b) Phương trình đã cho không là phương trình của đường tròn (trong phương trình của đường tròn không có phần tích  $x.y$ )
- c) Phương trình đã cho có các hệ số  $a = 4$ ,  $b = 3$ ,  $c = 26$ . Suy ra  $a^2 + b^2 - c = 3^2 + 4^2 - 26 = -1 < 0$ , do đó nó không là phương trình đường tròn.
- d) Phương trình đã cho có các hệ số  $a = -3$ ,  $b = 2$ ,  $c = 13$ . Suy ra  $a^2 + b^2 - c = (-3)^2 + 2^2 - 13 = 0$ , do đó nó không là phương trình đường tròn.
- e) Phương trình đã cho có các hệ số  $a = 2$ ,  $b = -1$ ,  $c = 1$ . Thỏa mãn  $a^2 + b^2 - c = 2^2 + (-1)^2 - 1 = 4 > 0$ , nên là phương trình đường tròn có tâm  $I(2; -1)$  và bán kính  $R = \sqrt{4} = 2$ .

**Câu 21.** Viết phương trình của đường tròn  $(C)$  trong các trường hợp sau:

- a) Có tâm  $I(3; 1)$  và có bán kính  $R = 2$ .
- b) Có tâm  $I(3; 1)$  và đi qua điểm  $M(-1; 7)$ .
- c) Có tâm  $I(2; -4)$  và tiếp xúc với đường thẳng  $\Delta: 3x - 2y - 1 = 0$ .
- d) Có đường kính  $AB$  với  $A(4; 1), B(-2; -5)$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

a)  $(x-3)^2 + (y-1)^2 = R^2 = 4$ .

b) Bán kính của  $(C)$  bằng  $R = IM = \sqrt{(-1-3)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{52}$

Mặt khác  $(C)$  có tâm  $I(3; 1)$ . Suy ra  $(C)$  có phương trình là  $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 52$ .

c) Vì  $\Delta$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(C)$  nên bán kính của  $(C)$  bằng

$$R = d(I, \Delta) = \frac{|3 \cdot 2 - 2 \cdot (-4) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \sqrt{13}.$$

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

a) Ta có  $\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{n_d} = (3; 4) \Rightarrow \overrightarrow{n_\Delta} = (4; -3)$ . Phương trình của  $\Delta$  là

$$4(x-4) - 3(y-2) = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y - 10 = 0.$$

b) Gọi  $I$  là tâm của đường tròn  $(C)$ . Vì  $d$  tiếp xúc với  $(C)$  tại điểm  $A$  nên ta có  $IA \perp d$ , do đó  $I$  thuộc  $\Delta$ . Mặt khác  $I$  thuộc đường thẳng  $d'$ . Suy ra tọa độ của  $I$  thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x - 3y - 10 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow I(1; -2).$$

Bán kính của  $(C)$  bằng  $R = IA = \sqrt{(4-1)^2 + (2-(-2))^2} = 5$ .

Vậy phương trình của  $(C)$  là  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$ .

**Lưu ý**

- Khi viết phương trình đường tròn, thông thường ta nên tìm tâm của đường tròn trước, sau đó tìm bán kính của nó.

- Ở câu b, sau khi tìm được tâm  $I$ , ta có thể tính bán kính  $R$  như sau

$$R = d(I, d) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) - 20|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5.$$

- Tâm  $I$ , bán kính  $R$  có thể tìm dựa theo hệ điều kiện sau đây

$$\begin{cases} I \in d' \\ d(I, d) = R = IA \end{cases}.$$

**Câu 25.** Cho đường tròn  $(C)$ , đường thẳng  $\Delta$  có phương trình lần lượt là:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2, x + y + 2 = 0.$$

a) Chứng minh rằng  $\Delta$  là một tiếp tuyến của đường tròn  $(C)$ .

b) Viết phương trình tiếp tuyến  $d$  của  $(C)$ , biết rằng  $d$  song song với đường thẳng  $\Delta$ .

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(1; -1)$  và có bán kính  $R = \sqrt{2}$ .

a) Khoảng cách từ  $I$  đến đường thẳng  $\Delta$  là

$$d(I, \Delta) = \frac{|1 - 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}.$$

Ta có  $d(I, \Delta) = R$ , do đó  $\Delta$  là một tiếp tuyến của  $(C)$ .

$$\begin{cases} x_M = 2x_I - x_O = 6 \\ y_M = 2y_I - y_O = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t^\circ = \frac{3}{5} \\ \cos t^\circ = \frac{4}{5} \end{cases} \text{ (có } t \in (0; 180) \text{ thỏa mãn hệ)}$$

Vậy  $M(6; 8)$ .

Theo giả thiết ta có  $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ$ , kết hợp với  $O$  là trung điểm của  $F_1F_2$  nên ta suy ra  $OM = \frac{F_1F_2}{2} = c = 4$ .

Điều này tương đương với

$$x_0^2 + y_0^2 = 4^2 = 16 \Leftrightarrow y_0^2 = 16 - x_0^2 \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$\frac{x_0^2}{25} + \frac{16 - x_0^2}{9} = 1 \Leftrightarrow 9x_0^2 + 25(16 - x_0^2) = 225 \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{175}{16} \Leftrightarrow x_0 = \pm \frac{5\sqrt{7}}{4}$$

Thay  $x_0$  vào (2) ta được

$$y_0^2 = 16 - x_0^2 = 16 - \frac{175}{16} = \frac{81}{16} \Leftrightarrow y_0 = \pm \frac{9}{4}.$$

Vậy  $OM = 4$  và có bốn điểm  $M$  thỏa mãn đề bài, các điểm này có tọa độ là

$$M_1\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}; \frac{9}{4}\right), M_2\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}; -\frac{9}{4}\right), M_3\left(-\frac{5\sqrt{7}}{4}; \frac{9}{4}\right), M_4\left(-\frac{5\sqrt{7}}{4}; -\frac{9}{4}\right).$$

**Lưu ý:** Trong câu c, để tìm tọa độ điểm  $M$  ta có thể giải hệ  $\begin{cases} M \in (E) \\ \overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0 \end{cases}$ .

**Ví dụ 10:** Lập phương trình chính tắc của hypebol  $(H)$ , biết rằng  $(H)$  có một tiêu điểm là  $F_1(5;0)$  và  $(H)$  đi qua điểm  $A(-3;0)$ . Tìm điểm  $M$  thuộc  $(H)$  có hoành độ dương sao cho khoảng cách từ  $M$  đến gốc tọa độ là nhỏ nhất.

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

Phương trình chính tắc của  $(H)$  có dạng  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , trong đó  $a, b > 0$ .

Vì  $(H)$  đi qua điểm  $A(-3;0)$  nên ta có  $\frac{(-3)^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow a = 3$ .

Do  $(H)$  có một tiêu điểm là  $F_2(5;0)$  nên ta có  $c = 5 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 3^2 = 16$ .

Vậy phương trình chính tắc của  $(H)$  là  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ .

Gọi  $M(x_0; y_0)$ , điều kiện  $x_0 > 0$ . Do  $M$  thuộc  $(H)$  nên ta có

$$\frac{x_0^2}{9} - \frac{y_0^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{x_0^2}{9} = 1 + \frac{y_0^2}{16} \geq 1 \Rightarrow x_0^2 \geq 9.$$

Kết hợp với  $x_0 > 0$  ta được  $x_0 \geq 3$ .

Từ đó suy ra  $OM = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \geq \sqrt{x_0^2} = x_0 \geq 3$ .

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $\begin{cases} y_0 = 0 \\ x_0 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow M(3;0)$ .

Vậy  $M(3;0)$ .

**Nhận xét**

**Câu 29.** Cho hypebol  $(H)$  có phương trình  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ . Tìm tiêu điểm và tiêu cự của hypebol.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Trong phương trình chính tắc của  $(H)$  ta có

$$\begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = 6.$$

Vậy  $(H)$  có hai tiêu điểm là  $F_1(-6;0), F_2(6;0)$  và có tiêu cự là  $2c = 12$ .

**Câu 30.** Cho parabol  $(P)$  có phương trình  $y^2 = 4x$ . Tìm tiêu điểm và đường chuẩn của parabol.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Trong phương trình chính tắc của  $(P)$  ta có

$$2p = 4 \Rightarrow p = 2$$

Vậy  $(P)$  có tiêu điểm là  $F(1;0)$  và có đường chuẩn là  $\Delta: x = -1$ .

**Câu 31.** Viết phương trình chính tắc của elip  $(E)$ , biết  $(E)$  đi qua điểm  $A(6;0)$  và có tiêu cự bằng 8.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Phương trình chính tắc của  $(E)$  có dạng  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , trong đó  $a > b > 0$ .

Vì  $(E)$  đi qua điểm  $A(6;0)$  nên ta có  $\frac{6^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow a = 6$ .

Do  $(E)$  có tiêu cự là  $2c = 8$  nên ta có  $c = 4 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 4^2 = 20$ .

Vậy phương trình chính tắc của  $(E)$  là  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ .

**Câu 32.** Viết phương trình chính tắc của hypebol  $(H)$ , biết  $(H)$  đi qua điểm  $M(3\sqrt{2}; -4)$  và có một tiêu điểm là  $F_2(5;0)$ .

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Phương trình chính tắc của  $(H)$  có dạng  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , trong đó  $a, b > 0$ .

Do  $(H)$  có một tiêu điểm là  $F_2(5;0)$  nên ta có

$$c = 5 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 = 25 - b^2.$$

**Câu 34.** Cho parabol  $(P)$  có phương trình là  $y^2 = 16x$ . Gọi  $\Delta$  là đường thẳng bất kì luôn đi qua tiêu điểm  $F$  của  $(P)$  và không trùng với trục hoành. Chứng minh rằng  $\Delta$  luôn cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$ , đồng thời tích các khoảng cách từ  $A$  và  $B$  đến trục hoành không đổi.

A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Gọi vectơ chỉ phương của  $\Delta$  là  $\vec{u}_\Delta = (a; b)$ . Vì  $\Delta$  đi qua điểm  $F(4; 0)$  và  $\Delta$  không trùng với trục  $Ox$  nên ta có  $b \neq 0$ . Phương trình tham số của  $\Delta$  là

$$\begin{cases} x = 4 + at \\ y = 0 + bt = bt. \end{cases}$$

Toạ độ giao điểm của  $\Delta$  và  $(P)$  ứng với  $t$  thoả mãn phương trình

$$(bt)^2 = 16(4 + at) \Leftrightarrow b^2 t^2 - 16at - 64 = 0. (1)$$

Phương trình (1) có  $\Delta' = 64a^2 + 64b^2 > 0$  (do  $b \neq 0$ ), suy ra phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt. Vậy  $\Delta$  luôn cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$ .

Gọi  $A(4 + at_1; bt_1), B(4 + at_2; bt_2)$ , trong đó  $t_1, t_2$  là hai nghiệm của phương trình (1). Ta có

$$d(A, Ox) \cdot d(B, Ox) = \frac{|bt_1|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \cdot \frac{|bt_2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = |b^2 \cdot t_1 t_2|.$$

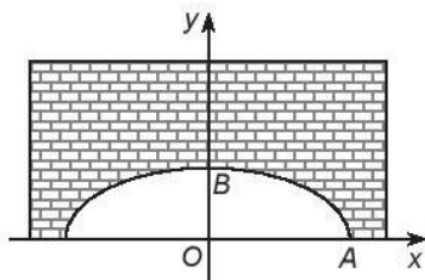
Theo định lý Vi-et ta có  $t_1 t_2 = \frac{-64}{b^2}$ . Từ đó suy ra

$$d(A, Ox) \cdot d(B, Ox) = \left| b^2 \cdot \frac{-64}{b^2} \right| = 64.$$

Vậy tích các khoảng cách từ  $A$  và  $B$  đến trục hoành không đổi.

**Lưu ý.** Để tìm giao điểm của đường thẳng với các đường conic một cách thuận lợi, ta nên viết phương trình đường thẳng ở dạng tham số.

**Câu 35.** Một người kỹ sư thiết kế một đường hầm một chiều có mặt cắt là một nửa hình elip, chiều rộng của hầm là 12m, khoảng cách từ điểm cao nhất của elip đến mặt đường là 3m. Người kỹ sư này muốn đưa ra cảnh báo cho các loại xe có thể đi qua hầm. Biết rằng những loại xe tải có chiều cao 2,8m thì có chiều rộng không quá 3m. Hỏi chiếc xe tải có chiều cao 2,8m có thể đi qua hầm được không?



A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

$$\frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{1} = 1 \Leftrightarrow y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{2} = 1 - \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}{2} = \frac{7}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \frac{\sqrt{7}}{3} \\ y_0 = -\frac{\sqrt{7}}{3} \end{cases}$$

Vậy  $M\left(-\frac{2}{3}; \frac{\sqrt{7}}{3}\right)$  hoặc  $M\left(-\frac{2}{3}; -\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$ .

c) Áp dụng định lí Côsin trong tam giác  $MF_1F_2$  ta có

$$\begin{aligned} \cos \widehat{F_1MF_2} &= \frac{MF_1^2 + MF_2^2 - F_1F_2^2}{2.MF_1.MF_2} \\ &= \frac{\left(\sqrt{2} + \frac{x_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{x_0}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2^2}{2.\left(\sqrt{2} + \frac{x_0}{\sqrt{2}}\right).\left(\sqrt{2} - \frac{x_0}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{x_0^2}{4 - x_0^2} \end{aligned}$$

Ta có  $\frac{x_0^2}{2} = 1 - y_0^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x_0^2 \leq 2$ .

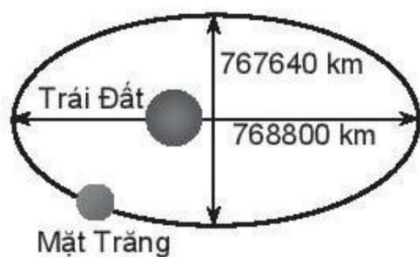
Suy ra  $\cos \widehat{F_1MF_2} \geq 0 \Rightarrow \widehat{F_1MF_2} \leq 90^\circ$ .

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = \pm 1$ .

Vậy  $M(0; \pm 1)$  thì nhìn hai tiêu điểm dưới góc nhìn lớn nhất chính là hai giao điểm của elip với trục tung.

**Nhận xét.** Điểm  $M$  (thuộc elip) nhìn hai tiêu điểm dưới góc nhìn lớn nhất chính là hai giao điểm của elip với trục tung.

**Câu 37.** Mặt Trăng chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là một đường elip với tâm Trái Đất là một tiêu điểm. Độ dài trục lớn, độ dài trục nhỏ của quỹ đạo lần lượt là 768800 km và 767640 km. Tìm khoảng cách lớn nhất và bé nhất từ tâm của Trái Đất đến Mặt Trăng.



A.

B.

C.

D.

**Lời giải**

**Chọn**

Vì  $2a = 768\,800$  và  $2b = 767\,640$  nên ta có  $a = 384\,400, b = 383\,820$ .

Từ đó suy ra  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{384\,400^2 - 383\,820^2} \approx 21\,108$ .

Vì vậy, khoảng cách lớn nhất từ tâm của trái đất đến mặt trăng là

$$a + c \approx 384\,400 + 21\,108 = 405\,508 \text{ (km)};$$

và khoảng cách nhỏ nhất là

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

### A. TRẮC NGHIỆM

**Câu 38.** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường hypebol?

**A.**  $16x^2 - 5y^2 = -80$ .

**B.**  $x^2 = 4y$ .

**C.**  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ .

**D.**  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn C**

**Câu 39.** Cho hai điểm  $A(-1;0)$  và  $B(-2;3)$ . Phương trình đường thẳng đi qua  $B$  và vuông góc với  $AB$  là

**A.**  $x - 3y + 11 = 0$ .

**B.**  $x - 3y + 1 = 0$ .

**C.**  $-x - 3y + 7 = 0$ .

**D.**  $3x + y + 3 = 0$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn A**

**Câu 40.** Cho điểm  $A(2;3)$  và đường thẳng  $d: x + y + 3 = 0$ . Khoảng cách từ điểm  $A$  đến đường thẳng  $d$  là

**A.**  $\frac{8}{\sqrt{13}}$ .

**B.**  $4\sqrt{2}$ .

**C.** 8.

**D.**  $2\sqrt{2}$ .

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Lời giải**

**Chọn**

**Chọn B**

**Câu 41.** Cho hai đường thẳng  $d: x - 2y - 5 = 0$  và  $k: x + 3y + 3 = 0$ . Góc giữa hai đường thẳng  $d$  và  $k$  là

**A.**  $30^\circ$ .

**B.**  $135^\circ$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn D

**Câu 45.** Cho hypebol  $(H)$  có phương trình chính tắc  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{13} = 1$ . Tiêu cự của hypebol là

A. 7.

B. 14.

C.  $2\sqrt{23}$ .

D.  $\sqrt{23}$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn B

**Câu 46.** Cho hai điểm  $A(0; -2), B(2; 4)$ . Phương trình đường tròn tâm  $A$  đi qua điểm  $B$  là

A.  $x^2 + (y + 2)^2 = 40$ .

B.  $x^2 + (y + 2)^2 = 10$ .

C.  $x^2 + (y - 2)^2 = 40$ .

D.  $x^2 + (y - 2)^2 = 10$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn A

**Câu 47.** Phương trình chính tắc của parabol  $(P)$  đi qua điểm  $E(2; 2)$  là

A.  $x^2 = 2y$ .

B.  $x^2 = 4y$ .

C.  $x^2 = y$ .

D.  $y = 2x^2$ .

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Chọn

Chọn A

**Câu 48.** Cho đường tròn  $(C)$  có phương trình  $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$  và điểm  $M(1; -1)$  thuộc đường tròn. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại điểm  $M$  là

A.  $y + 1 = 0$ .

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn****Chọn C**

**Câu 52.** Cho đường thẳng  $d: x - y + 3 = 0$ . Phương trình đường thẳng song song với  $d$  và cách  $d$  một khoảng là  $\sqrt{2}$  là

**A.**  $x + y + 1 = 0$  và  $x + y + 3 = 0$ .**B.**  $x - y - 1 = 0$ .**C.**  $x - y + 3 = 0$ .**D.**  $x - y + 3 = 0$  và  $x - y - 1 = 0$ .**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn****Chọn B****B. TỰ LUẬN**

**Câu 53.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho điểm  $M(-3; 2)$  và vector  $\vec{u} = (2; -5)$ . Viết phương trình tham số của đường thẳng  $d$  đi qua  $M$  và nhận  $\vec{u}$  là một vector chỉ phương.

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

Phương trình tham số của đường thẳng  $d$  đi qua  $M(-3; 2)$  và nhận  $\vec{u} = (2; -5)$  là một vector chỉ phương là

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 - 5t \end{cases}$$

**Câu 54.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho điểm  $N(2; -1)$  và vector  $\vec{n} = (3; -1)$ . Viết phương trình tổng quát của đường thẳng  $d$  đi qua  $N$  và nhận  $\vec{n}$  là một vector pháp tuyến.

**A.****B.****C.****D.****Lời giải****Chọn**

Phương trình tổng quát của đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $N(2; -1)$  và nhận  $\vec{n} = (3; -1)$  là một vector pháp tuyến là  $3x - y - 7 = 0$ .

**Câu 55.** Cho tam giác  $ABC$  với  $A(1; -1), B(3; 5), C(-2; 4)$ .

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng  $AB$ .b) Viết phương trình đường cao  $AH$  của tam giác  $ABC$ .c) Tính khoảng cách từ điểm  $A$  đến đường thẳng  $BC$ .d) Tính sin của góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $AC$ .**A.****B.****C.****D.**

### Lời giải

#### Chọn

a) Ta có  $I(2;-3), R = \sqrt{2^2 + (-3)^2 - (-12)} = 5$ .

b) Thay toạ độ điểm  $M$  vào phương trình của đường tròn  $(C)$  ta có  $5^2 + 1^2 - 4.5 + 6.1 - 12 = 0$  nên điểm  $M$  thuộc đường tròn  $(C)$ .

Tiếp tuyến của  $(C)$  tại điểm  $M$  là đường thẳng đi qua  $M$  và vuông góc với  $IM$  nên có vectơ pháp tuyến là  $\overrightarrow{IM} = (3;4)$ . Vậy phương trình của tiếp tuyến đó là  $3x + 4y - 19 = 0$ .

**Câu 58.** Các phương trình dưới đây là phương trình chính tắc của đường nào? Khi đó hãy tìm các tiêu điểm, tiêu cự, đường chuẩn (nếu là đường parabol).

a)  $y^2 = 10x$ .

b)  $x^2 - y^2 = 1$ . c)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

a)  $y^2 = 10x$  là phương trình chính tắc của parabol.

Ta có  $y^2 = 10x = 2px \Rightarrow p = 5$ .

Parabol trên có tiêu điểm là  $F\left(\frac{5}{2}; 0\right)$ , phương trình đường chuẩn là  $x + \frac{5}{2} = 0$ .

b)  $x^2 - y^2 = 1$  là phương trình chính tắc của hypebol với  $a = b = 1$  nên  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$ .

Tiêu điểm là  $F_1(-\sqrt{2}; 0), F_2(\sqrt{2}; 0)$ , tiêu cự  $F_1F_2 = 2\sqrt{2}$ .

c)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  là phương trình chính tắc của elip với  $a = 5, b = 4, c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$ .

Tiêu điểm là  $F_1(-3; 0), F_2(3; 0)$ , tiêu cự  $F_1F_2 = 6$ .

**Câu 59.** Cho elip  $(E)$  có phương trình là  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Tìm toạ độ các điểm  $M$  thuộc  $(E)$ , biết rằng  $M$  nhìn hai tiêu điểm của  $(E)$  dưới một góc vuông.

A.

B.

C.

D.

### Lời giải

#### Chọn

Elip  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  có  $a = 5, b = 3, c = 4$  nên hai tiêu điểm là  $F_1(-4; 0), F_2(4; 0)$ .

Do  $M$  nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông nên  $M$  nằm trên đường tròn  $(C)$  đường kính  $F_1F_2 = 8$ .

Phương trình đường tròn  $(C)$  là  $x^2 + y^2 = 16$ . Khi đó toạ độ của  $M$  là nghiệm của hệ phương trình