KỶ YẾU

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN-HỌC SINH LẦN THỨ 26

Quảng Bình, 9-15/4/2018

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUẢNG BÌNH

HỘI TOÁN HỌC
VIỆT NAM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
QUẢNG BÌNH

KỶ YẾU

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC
SINH VIÊN-HỌC SINH LẦN THỨ 26

BIÊN TẬP

Nguyễn Thành Chung
Trường Đại học Quảng Bình

Đoàn Trung Cường
Hội Toán học Việt Nam & Viện Toán học

Nguyễn Văn Quý
Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne

Trần Văn Thành
Viện Toán học

Dương Việt Thông
Trường Đại học Kinh tế Quốc dân

Vũ Tiến Việt
Học viện An ninh Nhân dân

QUẢNG BÌNH, 9-15/4/2018

GIỚI THIỆU

Kỳ thi Olympic Toán học lần thứ 26 dành cho sinh viên các trường đại học, cao đẳng, học viện và học sinh phổ thông các trường chuyên trong cả nước đã diễn ra tại Trường đại học Quảng Bình từ 9-15/4/2018. Quyển kỷ yếu này chủ yếu dành để tập hợp lại một số bài đề xuất của các trường tham dự kỳ thi với mong muốn cung cấp thêm một tài liệu tham khảo cho những người quan tâm. Do thời gian biên tập khá ngắn nên ngoài một số bài được biên tập tương đối kỹ càng, có một số bài chúng tôi giữ nguyên cách trình bày như đề xuất, công tác biên tập trong trường hợp đó là đánh máy lại, kiểm tra tính chính xác về nội dung và chính tả.

Nhóm biên tập

Mục lục

Phần I

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN-HỌC SINH LẦN THỨ 26

MỘT SỐ THÔNG TIN VỀ KỲ THI

Các đoàn tham dự Lễ khai mạc và nhận cơ lưu niệm. *Nguồn: ĐH Quảng Bình*

1 Thông tin chung

Kỳ thi Olympic Toán Sinh viên - Học sinh lần thứ 26 do Hội Toán học Việt Nam phối hợp với Trường Đại học Quảng Bình cùng các cơ quan khác tổ chức. Kỳ thi đã diễn ra từ 9-14/4/2018 tại Trường Đại học Quảng Bình, Tỉnh Quảng Bình.

Tham gia kỳ thi năm nay có 79 đoàn các trường đại học, học viện, cao đẳng trong cả nước và 10 đoàn học sinh từ các trường chuyên. Tổng số sinh viên đã tham dự thi các môn Đại số và Giải tích lần lượt là 342 (180 Bảng A và 162 Bảng B) và 345 em (175 Bảng A và 170 Bảng B). Tổng số học sinh tham dự Bảng Phổ thông là 51 em.

Bên cạnh hoạt động chính là việc tổ chức thi, chấm thi và trao giải, Ban tổ chức địa phương đã tổ chức giải bóng đá sôi động cũng như cuộc thi văn nghệ rất vui giữa các đoàn tham dự kỳ thi.

Cơ quan tổ chức

- Bộ Giáo dục và Đào tạo
- Liên hiệp các Hội Khoa học và Kỹ thuật Việt Nam
- Trung ương Hội Sinh viên Việt Nam
- Hội Toán học Việt Nam
- Trường đại học Quảng Bình

Ban tổ chức

Trưởng ban: GS. TSKH. Phùng Hồ Hải (Hội Toán học Việt Nam), PGS. TS. Hoàng Dương Hùng (Đại học Quảng Bình).

Phó trưởng ban: GS. TSKH. Phạm Thế Long (Hội Toán học Việt Nam), TS. Bùi Khắc Sơn (Đại học Quảng Bình).

Ủy viên: TS. Nguyễn Thành Chung (Đại học Quảng Bình), TS. Đoàn Trung Cường (Hội Toán học Việt Nam), TS. Lê Cường (Viện Công nghệ Thông tin-Đại học Quốc gia Hà Nội), PGS. TS. Trần Ngọc (Đại học Quảng Bình), TS. Nguyễn Duy Thái Sơn (ĐH Sư phạm - ĐH Đà Nẵng), TS. Dương Việt Thông (ĐH Kinh tế Quốc dân), TS. Nguyễn Chu Gia Vượng (Viện Toán học).

2 Kết quả

Với kết quả thi của thí sinh, Ban Tổ chức đã thống nhất cơ cấu và mức trao giải. Số lượng giải được trao cụ thể như sau:

a. **Môn Đại số**
   - Giải nhất: 33 giải.
   - Giải nhì: 61 giải.
   - Giải ba: 86 giải.
   - Khuyến khích: 10 giải.

b. **Môn Giải tích**
   - Giải nhất: 29 giải.
   - Giải nhì: 57 giải.
   - Giải ba: 94 giải.
   - Khuyến khích: 12 giải.

c. **Bảng Phổ thông**
   - Giải nhất: 6 giải.
   - Giải nhì: 9 giải.
   - Giải ba: 14 giải.
   - Khuyến khích: 5 giải.

d. **Giải đặc biệt**
   Ban tổ chức kỳ thi đã quyết định trao 9 giải đặc biệt cho các sinh viên hoặc đạt điểm cao nhất của một môn (7 sinh viên) hoặc đạt hai giải nhất của cả hai môn (2 sinh viên). Chín sinh viên đạt giải đặc biệt đã được trao bằng khen của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo.

e. **Giải toàn đoàn**

   Đoàn Olympic của trường Đại học Bách khoa Hà Nội là đoàn đạt kết quả cao nhất với 7 giải nhất và 3 giải nhì.

Năm nay, các cá nhân đoạt giải Nhất, Nhì, Ba cũng được trao các huy chương Vàng, Bạc, Đồng tương ứng.
Ban Tổ chức cũng đã trao 7 phần thưởng của Quỹ Lê Văn Thiêm cho các học sinh đạt thành tích cao nhất và các học sinh thuộc các khu vực khó khăn những đã cố gắng để đạt thành tích cao trong kỳ thi.
Nhân dịp kỳ thi Olympic Toán học 2018, Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo đã trao bằng khen cho Trường Đại học Quảng Bình và 15 nhà giáo của các trường đại học, học viện, cao đẳng đã có đóng góp lớn cho phong trào thi Olympic Toán trong thời gian qua.

MỘT SỐ HÌNH ẢNH

Lễ khai mạc Kỳ thi Olympic Toán Sinh viên-Học sinh thứ 26 (2018). *Nguồn: ĐH Quảng Bình*

Đội tuyển Olympic của ĐH Quảng Bình. *Nguồn: ĐH Quảng Bình*

Giải bóng đá Olympic Toán Sinh viên-Học sinh 2018. *Nguồn: ĐH Quảng Bình*

Bóng đá. *Nguồn: ĐH Quảng Bình*

Trao giải Tiếng hát Olympic Toán Sinh viên-Học sinh 2018. *Nguồn: ĐH Quảng Bình*

Buổi liên hoan tại sân trường. *Nguồn: ĐH Quảng Bình*

Liên hoan. *Nguồn: ĐH Quảng Bình*

Chụp hình lưu niệm. *Nguồn: ĐH Quảng Bình*

Các thầy cô là trưởng các đoàn chụp ảnh cùng Ban Tổ chức. *Nguồn: ĐH Quảng Bình*

Lễ bế mạc và trao thưởng diễn ra trang trọng tại Trung tâm hội nghị tỉnh Quảng Bình. *Nguồn: ĐH Quảng Bình*

Đại diện Liên hiệp Hội KHKT và Hội Toán học Việt Nam phát biểu. *Nguồn: ĐH Quảng Bình*

Trao huy chương cho các sinh viên đoạt giải. *Nguồn: ĐH Quảng Bình*

Các sinh viên đoạt giải nhất. *Nguồn: ĐH Quảng Bình*

Trao phần thưởng cho các học sinh đoạt giải. *Nguồn: ĐH Quảng Bình*

Ảnh trái: Bằng khen của Bộ trưởng Giáo dục và Đào tạo được trao cho ĐH Quảng Bình.
Ảnh phải: Lãnh đạo tỉnh Quảng Bình & cán bộ hỗ trợ tổ chức kỳ thi. *Nguồn: ĐH Quảng Bình*

Ban Tổ chức chụp ảnh cùng các đoàn. *Nguồn: ĐH Quảng Bình*

Bộ huy chương (Vàng, Bạc, Đồng) cho học sinh phổ thông. *Nguồn: Hội Toán học*

Bộ huy chương (Vàng, Bạc, Đồng) cho sinh viên. *Nguồn: Hội Toán học*

Phần II

ĐỀ THI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

1 ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút.

1.1 BẢNG A

Bài 1. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 4 & 6 & -5 \\ 8 & 12 & -10 \end{pmatrix}.$$

(a) Tính A^4;

(b) Tìm số nguyên dương N nhỏ nhất sao cho $\operatorname{rank}(A^k) = \operatorname{rank}(A^{k+1})$ với mọi $k \geq N$, trong đó $\operatorname{rank}(M)$ là hạng của một ma trận M (có giải thích rõ các lập luận và tính toán).

Bài 2. Người ta khảo sát một mô hình di cư dân số giữa hai vùng đô thị và nông thôn với quy luật như sau: Hằng năm, có 50% dân số vùng nông thôn chuyển về vùng đô thị và đồng thời có 25% dân số vùng đô thị chuyển về vùng nông thôn sinh sống. Giả sử x, y tương ứng là số dân vùng nông thôn và vùng đô thị ở thời điểm ban đầu $(x, y > 0)$.

(a) Hỏi sau k năm dân số của vùng nông thôn và vùng đô thị là bao nhiêu?

(b) Giả sử ban đầu số người sống ở nông thôn và đô thị là bằng nhau. Có thể đến lúc nào đó dân số của vùng đô thị vượt quá 80% tổng dân số của cả hai vùng không? Giải thích câu trả lời.

Bài 3. (a) Giả sử X, A là các ma trận vuông với hệ số thực thoả mãn $X^2 = A$. Chứng minh rằng $AX = XA$;

(b) Tìm số các ma trận vuông X với hệ số thực thỏa mãn

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Bài 4. Một ma trận vuông được gọi là dương nếu tất cả hệ số của nó là các số thực dương.

(a) Chứng minh rằng mỗi ma trận dương cấp 2 đều có hai giá trị riêng là các số thực khác nhau và giá trị riêng có giá trị tuyệt đối lớn nhất là một số dương;

(b) Cho A là một ma trận dương cấp 2. Giả sử $v \in \mathbb{R}^2$ là một véc tơ riêng ứng với giá trị riêng lớn nhất của A. Chứng minh rằng hai thành phần của véc tơ v có cùng dấu;

(c) Cho A là một ma trận dương cấp 3. Xét tập các giá trị riêng của A (kể cả các giá trị phức), chứng minh rằng giá trị riêng có mô đun lớn nhất của A là một số thực dương.

Bài 5. Cho trước 6 điểm phân biệt trên một đường tròn.

(a) Chia 6 điểm đó thành ba cặp và nối hai điểm trong mỗi cặp bởi một dây cung. Hỏi có bao nhiêu cách chia sao cho không có hai dây cung nào cắt nhau?

(b) Đánh số một cách ngẫu nhiên các điểm đó từ $1, 2, \ldots, 6$. Mỗi dây cung nối hai điểm bất kỳ được gán với giá trị tuyệt đối của hiệu các số ở hai đầu mút. Chứng minh rằng luôn tìm được ba dây cung, đôi một không có điểm chung, sao cho tổng của các số gán với ba dây cung đó bằng 9.

1.2 BẢNG B

Bài 1. Cho một số thực a và một số nguyên $n > 0$. Xét ma trận vuông cấp n sau

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \ldots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ldots & 0 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a & 1 \\ n-1 & n-2 & \ldots & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Tính định thức của A trong các trường hợp

(a) (2 điểm) $n = 4$;

(b) (4 điểm) $n = 2018$.

Bài 2. Người ta khảo sát một mô hình di cư dân số giữa hai vùng đô thị và nông thôn với quy luật như sau: Hằng năm, có 50% dân số vùng nông thôn chuyển về vùng đô thị và đồng thời có 25% dân số vùng đô thị chuyển về vùng nông thôn sinh sống. Giả sử x, y tương ứng là số dân vùng nông thôn và vùng đô thị ở thời điểm ban đầu $(x, y > 0)$.

(a) Hỏi sau k năm dân số của vùng nông thôn và vùng đô thị là bao nhiêu?

(b) Giả sử ban đầu số người sống ở nông thôn và đô thị là bằng nhau. Có thể đến lúc nào đó dân số của vùng đô thị vượt quá 80% tổng dân số của cả hai vùng không? Giải thích câu trả lời.

Bài 3. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 6 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) Tính A^4;

(b) Chứng minh rằng hai hệ phương trình sau có cùng tập hợp nghiệm trong $\mathbb{R}^4$,

$$Ax = 0, \tag{1}$$

$$(A + A^2 + A^3 + A^4)x = 0. \tag{2}$$

Bài 4. Một ma trận vuông được gọi là dương nếu tất cả hệ số của nó là các số thực dương.

(a) Chứng minh rằng mỗi ma trận dương cấp 2 đều có hai giá trị riêng là các số thực khác nhau và giá trị riêng có giá trị tuyệt đối lớn nhất là một số dương;

(b) Cho A là một ma trận dương cấp 2. Giả sử $v \in \mathbb{R}^2$ là một véc tơ riêng ứng với giá trị riêng lớn nhất của A. Chứng minh rằng hai thành phần của véc tơ v có cùng dấu;

(c) Cho A là một ma trận dương cấp 3. Xét tập các giá trị riêng của A (kể cả các giá trị phức), chứng minh rằng giá trị riêng có mô đun lớn nhất của A là một số thực dương.

Bài 5. Cho trước 6 điểm phân biệt trên một đường tròn.

(a) Chia 6 điểm đó thành ba cặp và nối hai điểm trong mỗi cặp bởi một dây cung. Hỏi có bao nhiêu cách chia sao cho không có hai dây cung nào cắt nhau?

(b) Đánh số các điểm đó lần lượt từ $1, 2, \ldots, 6$. Mỗi dây cung nối hai điểm bất kỳ được gán với giá trị tuyệt đối của hiệu các số ở hai đầu mút. Chọn ra 3 dây cung, đôi một không có đầu mút chung, rồi lấy tổng của các số gán với các dây cung đó. Hỏi giá trị lớn nhất của tổng nhận được bằng bao nhiêu?

2 GIẢI TÍCH

Thời gian làm bài: 180 phút.

2.1 BẢNG A

Bài 1. Cho $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi các điều kiện

$$x_1 = 2019, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2018}x_n^2 + \frac{2017}{2018}x_n \quad \forall n \geqslant 1.$$

1. Chứng minh rằng $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số tăng ngặt và không bị chặn trên.
2. Chứng minh rằng

$$\frac{x_n}{x_{n+1}-1} = 2018\left(\frac{1}{x_n-1} - \frac{1}{x_{n+1}-1}\right) \quad \forall n \geqslant 1.$$

3. Tìm

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1}{x_2-1} + \frac{x_2}{x_3-1} + \ldots + \frac{x_n}{x_{n+1}-1}\right).$$

Bài 2. Giả sử $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là một hàm số khả vi sao cho

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx.$$

Chứng minh rằng tồn tại số thực $c \in (0,1)$ sao cho

$$f(c) = 2018f'(c)\int_0^c f(x)dx.$$

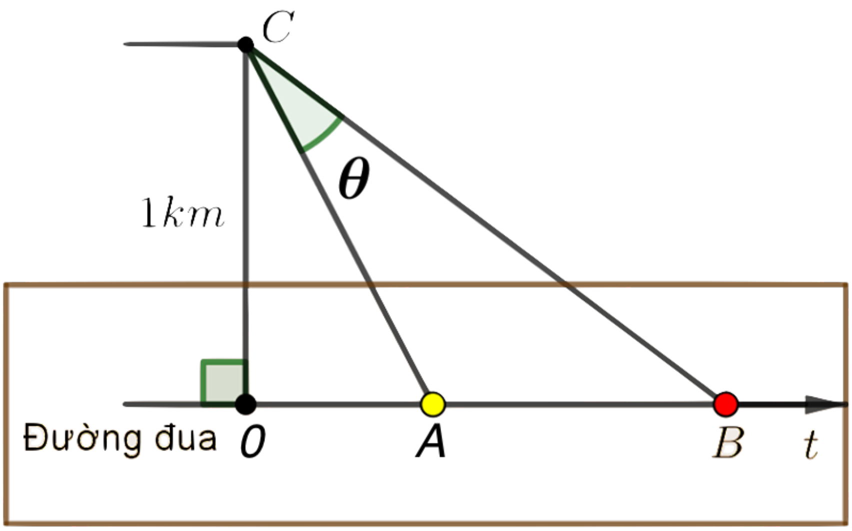
Bài 3. Cho hai số thực $a < b$. Giả sử $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ là một hàm số khả vi liên tục sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Chứng minh rằng

$$\max_{x\in[a,b]}\left|\int_a^x f(t)dt\right| \leq \frac{(b-a)^2}{8}\max_{x\in[a,b]}|f'(x)|.$$

Bài 4. Một quan sát viên C đứng cách đường đua Ot một khoảng $OC = 1$ km ($OC \perp Ot$). Hai vận động viên điền kinh A, B xuất phát tại O và chạy cùng lúc (sang phải, như hình vẽ) trên đường đua. Góc $\theta = \angle(CA, CB)$ được gọi là *góc nhìn* từ C đến hai vận động viên. Giả sử B luôn chạy nhanh gấp bốn lần A.



1. Tính $\tan\theta$ theo $x = OA$ (km).
2. Xác định vị trí của hai vận động viên trên đường đua để góc nhìn θ từ C đến họ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 5. Giả sử $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ là một hàm số khả vi, với f' dương và liên tục, sao cho

$$f(0) = 0 \text{ và } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f'(x)(1 + x^2 + f(x))} = +\infty.$$

1. Chứng minh rằng hàm f bị chặn trên.
2. Hãy tìm ví dụ về một hàm $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ khả vi và bị chặn trên, với g' dương và liên tục, $g(0) = 0$, sao cho giới hạn

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{g'(x)(1 + x^2 + g(x))}$$

tồn tại và hữu hạn.
3. Hãy tìm ví dụ về một hàm f thỏa mãn tất cả các điều kiện của đề bài.

2.2 BẢNG B

Bài 1. Cho $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi các điều kiện

$$x_1 = 2019, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2018}x_n^2 + \frac{2017}{2018}x_n \quad \forall n \geqslant 1.$$

1. Chứng minh rằng $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số tăng ngặt và không bị chặn trên.
2. Chứng minh rằng

$$\frac{x_n}{x_{n+1}-1} = 2018\left(\frac{1}{x_n-1} - \frac{1}{x_{n+1}-1}\right) \quad \forall n \geqslant 1.$$

3. Tìm

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1}{x_2-1} + \frac{x_2}{x_3-1} + \ldots + \frac{x_n}{x_{n+1}-1}\right).$$

Bài 2. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

1. Tính $f'(x)$ nếu $x \neq 0$.
2. Tính $f'(0)$.
3. Hàm f có đạo hàm cấp hai tại điểm $x = 0$ hay không?

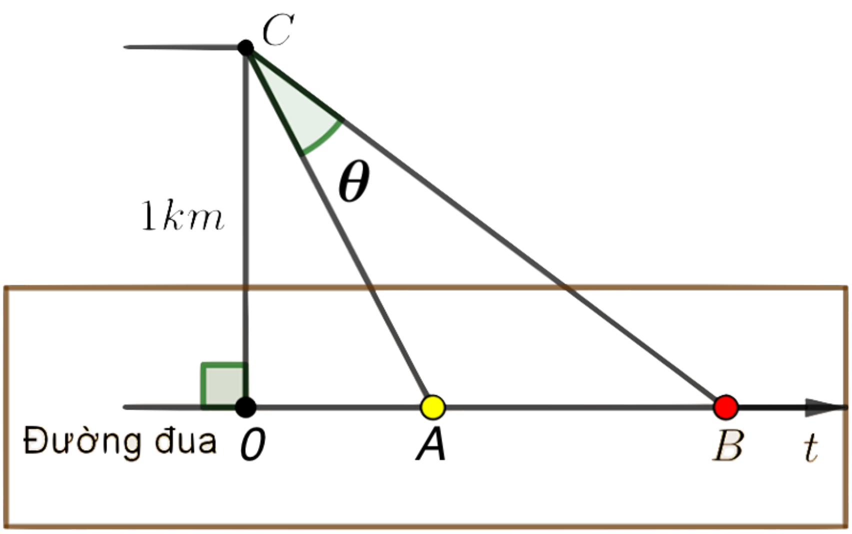
Bài 3. Giả sử $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục sao cho

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx.$$

Chứng minh rằng tồn tại số thực $c \in (0,1)$ sao cho

$$f(c) = 2018\int_0^c f(x)dx.$$

Bài 4. Một quan sát viên C đứng cách đường đua Ot một khoảng $OC = 1$ km ($OC \perp Ot$). Hai vận động viên điền kinh A, B xuất phát tại O và chạy cùng lúc (sang phải, như hình vẽ) trên đường đua. Góc $\theta = \angle(CA, CB)$ được gọi là *góc nhìn* từ C đến hai vận động viên. Giả sử B luôn chạy nhanh gấp bốn lần A.



1. Tính $\tan\theta$ theo $x = OA$ (km).
2. Xác định vị trí của hai vận động viên trên đường đua để góc nhìn θ từ C đến họ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 5. Giả sử $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ là một hàm số khả vi, với f' dương và liên tục, sao cho

$$f(0) = 0 \text{ và } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f'(x)(1 + x^2 + f(x))} = +\infty.$$

1. Chứng minh rằng hàm f bị chặn trên.
2. Hãy tìm ví dụ về một hàm $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ khả vi và bị chặn trên, với g' dương và liên tục, $g(0) = 0$, sao cho giới hạn

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{g'(x)(1 + x^2 + g(x))}$$

tồn tại và hữu hạn.
3. Hãy tìm ví dụ về một hàm f thỏa mãn tất cả các điều kiện của đề bài.

3 PHỔ THÔNG [1]

Thời gian làm bài: 180 phút.

3.1 NGÀY 1 - Biến đổi Abel và một số ứng dụng

Thí sinh được sử dụng kết quả của các câu trước trong chứng minh của câu sau. Nếu một câu được chứng minh không dựa vào kết quả của các câu trước thì có thể dùng để chứng minh các câu trước.

A. Biến đổi Abel và bất đẳng thức Abel

Trong các bài toán sau đây, ta cho 2 dãy số thực: $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n$ $(n \geq 1)$. Đặt $X_k = x_1 + \cdots + x_k, Y_k = y_1 + \cdots + y_k$ $(1 \leq k \leq n)$.

Bài 1. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_n Y_n - \left(\sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) Y_k\right) = X_n y_n - \left(\sum_{k=1}^{n-1} (y_{k+1} - y_k) X_k\right).$$

(Tổng trên một tập rỗng được quy ước là có giá trị bằng 0, chẳng hạn khi $n = 0$, biểu thức trong các dấu ngoặc trên đây bằng 0.)

Bài 2. Giả sử $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$. Đặt $m = \min_{1 \leq k \leq n} Y_k$ và $M = \max_{1 \leq k \leq n} Y_k$. Chứng minh rằng

$$x_1 m \leq \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq x_1 M.$$

Bài 3. Cho dãy số thực $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Kí hiệu m, M như trong PT.2. Chứng minh rằng

$$m \leq y_1 + \frac{1}{2} y_2 + \cdots + \frac{1}{n} y_n \leq M.$$

B. Ứng dụng vào việc tính một số tổng và thiết lập một số đẳng thức

1. Xem thêm thông tin về nội dung của đề thi trong các bài viết đăng tại Tạp chí Pi, Tập 2 Số 7 (Tháng 7/2018), 31-35, và Bản tin Thông tin Toán học của Hội Toán học Việt Nam, Tập 22 Số 2 (tháng 6/2018), 23-28.

Đặt $H_0 = 0$ và với mỗi số nguyên dương k, đặt $H_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}$.

Bài 4. Chứng minh rằng, với mọi số nguyên không âm n, ta có

a) $\sum_{k=0}^{n} H_k = (n+1)H_n - n$.

b) $\sum_{k=0}^{n} kH_k = \frac{n(n+1)}{2}H_n - \frac{n(n-1)}{4}$.

Bài 5. Cho các số nguyên dương $n \geq m$. Đặt $T_{m,n} = \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} H_k$; trong đó, $\binom{k}{m}$ là số tổ hợp chập m của k phần tử. Hãy tìm một công thức tính $T_{m,n}$ theo và chỉ theo m, n và H_n.

C. Một số ứng dụng khác

Bài 6. Cho dãy số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thoả mãn tính chất $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k} \geq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ với mọi $1 \leq k \leq n$. Chứng minh rằng với mọi dãy số thực $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ ta có

$$n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right).$$

Bài 7. a) Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực dương sao cho $a_1 a_2 \ldots a_n \geq 1$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương p ta có

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{p+1} \geq \sum_{k=1}^{n} a_k^{p}.$$

b) Chứng minh rằng với mọi số thực dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ta có

$$\sqrt{\frac{x_2^3}{x_1^3}} + \sqrt{\frac{x_3^3}{x_2^3}} + \cdots + \sqrt{\frac{x_1^3}{x_n^3}} \geq \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \cdots + \frac{x_1}{x_n}.$$

Bài 8. Xét các số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sao cho $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leq \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$ với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$. Tìm giá trị lớn nhất của $\sqrt[3]{a_1} + \sqrt[3]{a_2} + \cdots + \sqrt[3]{a_n}$.

3.2 NGÀY 2 - Bài toán về đàn gà

Thí sinh được sử dụng kết quả của các câu trước trong chứng minh của câu sau. Nếu một câu được chứng minh không dựa vào kết quả của các câu trước thì có thể dùng để chứng minh các câu trước.

Mô tả bài toán. Người ta nhận thấy rằng giữa hai con gà G_1, G_2 khác nhau trong một đàn gà bất kì luôn có một quan hệ thắng-thua xác định: hoặc là G_1 thắng G_2, hoặc là G_2 thắng G_1 (chỉ một trong hai khả năng). Một con gà K trong đàn được gọi là **vua** nếu, với mọi con gà G khác của đàn, hoặc là K thắng G, hoặc là K thua G nhưng có một con gà G' trong đàn sao cho K thắng G' và G' thắng G. Một con gà được gọi là **hoàng đế** nếu nó thắng mọi con gà khác trong đàn. Các bài toán sau đây quan tâm đến số vua có thể có trong một đàn gà.

A. Sự tồn tại của gà vua

Bài 1. a) Chứng minh rằng không có đàn gà nào có nhiều hơn một hoàng đế.
b) Nêu ví dụ về một đàn gà có một hoàng đế.
c) Nêu ví dụ về một đàn gà không có hoàng đế.

Bài 2. Xét một đàn gà bất kì và một con gà G của nó.
a) Giả sử G thắng nhiều con gà nhất trong đàn. Chứng minh rằng G là một vua của đàn. (Nói riêng mọi đàn gà không rỗng đều có ít nhất một vua.)
b) Giả sử G thua một con gà nào đó trong đàn. Chứng minh rằng G thua một vua nào đó trong đàn.

Bài 3. Chứng minh rằng nếu một đàn gà (≥ 3 con) không có hoàng đế thì phải có ít nhất ba vua.

B. Một đàn gà có thể có bao nhiêu vua?

Bài 4. Chứng minh rằng không có đàn gà nào có đúng hai vua.

Bài 5. Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng nếu tồn tại một đàn gà n con mà tất cả đều là vua thì cũng tồn tại một đàn gà $n+2$ con mà tất cả đều là vua.

Bài 6. Chứng minh rằng không có đàn gà 4 con nào mà tất cả đều là vua.

Bài 7. Hãy đưa ra ví dụ về một đàn gà 6 con mà tất cả đều là vua.

Bài 8. Cho các số nguyên dương $k \leq n$. Chứng minh rằng tồn tại một đàn gà n con, trong đó có đúng k vua, trừ hai trường hợp: $k = 2, n \geq 2$ (bất kì) và $k = n = 4$.

C. Sắp thứ tự đàn gà

Bài 9. Cho một đàn gà có $n \geq 2$ con. Chứng minh rằng có thể đánh số các con gà từ 1 đến n sao cho với mọi $k = 1, 2, \ldots, n-1$ thì con số k thắng con số $k+1$ và hơn nữa, nếu bỏ các con số $1, 2, \ldots, k$ ra khỏi đàn gà thì con số $k+1$ là một vua trong đàn gà còn lại.

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: ĐẠI SỐ

1 MA TRẬN

Bài 1.1 (HV An ninh Nhân dân). Cho các ma trận $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $A^2 + B^2 = 2AB$.

1) Chứng minh rằng ma trận $AB - BA$ không khả nghịch.

2) Giả sử $\operatorname{rank}(A - B) = 1$, chứng tỏ rằng $AB - BA = O_n$.

Bài 1.2 (HV An ninh Nhân dân). Cho các ma trận $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ và các số $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha\beta \neq 0$.
Biết rằng $\alpha A + \beta B = AB$. Chứng minh rằng $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.

Bài 1.3 (ĐH Giao thông Vận Tải). a) Chứng minh rằng nếu $U, V; A, B$ là các ma trận vuông cấp hai sao cho $UV = A$ và $VU = B$ thì $AU = UB$ và $BV = VA$.

b) Hãy xác định tất cả các cặp ma trận vuông cấp hai (X, Y) với phần tử nguyên thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} X^2 - Y^2 = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \\ XY - YX = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Bài 1.4 (ĐH Kỹ thuật Hậu cần Công an Nhân dân). Cho các ma trận $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ và các số $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$P^2 + (2\alpha - 1)P + \alpha(\alpha - 1)I_n = O_n,\ Q^2 + (2\beta - 1)Q + \beta(\beta - 1)I_n = O_n$$

và ma trận $P + Q + (\alpha + \beta - 1)I_n$ khả nghịch.
Chứng minh rằng $\operatorname{rank}(P + \alpha I_n) = \operatorname{rank}(Q + \beta I_n)$.

Bài 1.5 (ĐH Kỹ thuật Hậu cần Công an Nhân dân). Cho các ma trận $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $A^2B + BA^2 = 2ABA$.

Chứng minh rằng $(AB - BA)$ là ma trận lũy linh.

Bài 1.6 (ĐH Kỹ thuật Hậu cần Công an Nhân dân)**.** Cho các ma trận $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $AB^2 = A - B$.

1) Chứng minh rằng các ma trận $I_n \pm B$ khả nghịch và tìm $(I_n \pm B)^{-1}$.

2) Chứng minh rằng $AB = BA$.

Bài 1.7 (HV Kỹ thuật Quân sự)**.** a) Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R}), (n \in \mathbb{N}^*)$ là ma trận phản đối xứng (tức là $A^t = -A$). Tìm ma trận X sao cho $(E + A)\, X = 0$.
b) Cho $A \in M_n(\mathbb{C}), (n \in \mathbb{N}^*)$ sao cho $A^k = A^{k-1}$ với mội số nguyên dương k nào đó. Chứng minh rằng $\mathrm{Trace}(A^k) = \mathrm{Trace}(A)$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$.

Bài 1.8 (ĐH Mỏ địa chất)**.** Cho hai số thực dương $a > 0$, $b > 0$ và

$$A = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}.$$

Tìm ma trận vuông B sao cho

$$B^8 = A.$$

Bài 1.9 (ĐH Ngoại thương Hà Nội)**.** a) Cho X là ma trận vuông cấp 2017. Chứng minh rằng: $\left|X - X^T\right| = 0$

b) Khẳng định trên còn đúng hay không với X là ma trận vuông cấp 2018?

c) Cho A, B là các ma trận vuông cấp 2017 thỏa mãn $A \cdot A^T = B \cdot B^T = 2018 I_{2017}$ và $AB = BA$. Chứng minh rằng: $|A^2 - B^2| = 0$.

Bài 1.10 (ĐH Quy Nhơn)**.** Tìm hai ma trận A, B có cỡ lần lượt là 4×2 và 2×4 thỏa mãn:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bài 1.11 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Cho $A = [a_{ij}] \in Mat(n, K)$ là ma trận vuông cấp n hệ số trong trường K. Phần bù đại số của phần tử a_{ij} của A là $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, trong đó M_{ij} là định thức của ma trận thu được từ A bằng cách xóa đi dòng i cột j. Ma trận $A' = [A_{ij}]$ được gọi là ma trận phụ hợp của ma trận A. Chứng minh rằng:

$$rank(A') = \begin{cases} n & \textbf{nếu} \quad rankA = n; \\ 1 & \textbf{nếu} \quad rankA = n-1; \\ 0 & \textbf{nếu} \quad rankA \le n-2. \end{cases}$$

Bài 1.12 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Cho dãy số U_n xác định bởi

$$U_0 = 0, U_1 = 1, U_2 = -1, U_{n+3} = 6U_n + 5U_{n+1} - 2U_{n+2}, \forall n \geq 0$$

Hãy tính U_{2018}.

Bài 1.13 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên). Cho ma trận $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $A^3 = 2I_n$.

Chứng minh rằng ma trận $B = A^2 - 2A + 2I_n$ khả nghịch.

Bài 1.14 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên). Cho các ma trận $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ và đặt

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}, \ N = \begin{bmatrix} A+B & O_n \\ O_n & A-B \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}, \ Q = \begin{bmatrix} A+iB & O_n \\ O_n & A-iB \end{bmatrix}, \ (i^2 = -1)$$

Chứng minh rằng các ma trận M, N đồng dạng và các ma trận P, Q đồng dạng.

Bài 1.15 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên). Cho các ma trận $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ thỏa mãn

$$A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Chứng minh rằng $AB \neq BA$.

Bài 1.16 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long). Tồn tại hay không các ma trân A, B vuông cấp n ($n \geq 2$), trong đó A khả nghịch với $AB - BA = A$?

Bài 1.17 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long). Cho A, B là các ma trận cấp n. Chứng minh rằng: Tồn tại số nguyên dương N sao cho $\mathrm{rank} A^k = \mathrm{rank} A^{k+1}$, với mọi $k \geq N$.

Bài 1.18 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long). Cho A là ma trận tam giác trên cấp n

a/ Khi $n = 2$. Chứng minh rằng nếu $A^{2018} = O$ thì $A^2 = O$.

b/ Khi $n = 3$. Mệnh đề sau đây đúng hay sai: "Nếu $A^{2018} = O$ thì $A^3 = O$"? Vì sao?

Bài 1.19 (ĐH Tây Bắc). Giả sử A và B là các ma trận vuông cấp $n > 1$ thoả mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} B^6 &= 0 \\ AB &= BA \end{cases}$$

Chứng minh rằng: A không suy biến khi và chỉ khi $A + B$ không suy biến.

2 ĐỊNH THỨC

Bài 2.1 (HV An ninh Nhân dân). Cho các ma trận $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ lũy linh và thỏa mãn $P + Q + PQ = O_n$.
Tính $\det(I_n + \alpha P + \beta Q)$, với $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

Bài 2.2 (HV An ninh Nhân dân). Cho ma trận $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ và 2 vector $u_{1\times n}, v_{n\times 1}$.
Đặt $A = \begin{bmatrix} B & -Bv \\ -uB & uBv \end{bmatrix}$. Chứng minh rằng
1) $\det(A) = 0$.
2) Nếu $\det(B) = 0$ thì $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_{n+1})$ chia hết cho λ^2.
Hỏi điều ngược lại của 2) có đúng không?

Bài 2.3 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội). Cho số tự nhiên $n \geq 3$ và cho n số thực $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Tính định thức sau

$$D = \begin{vmatrix} \sin x_1 & \sin x_2 & \cdots & \sin x_n \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - x_1\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4} - x_2\right) & \cdots & \cos\left(\frac{\pi}{4} - x_n\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{8} - x_1\right) & \cos\left(\frac{\pi}{8} - x_2\right) & \cdots & \cos\left(\frac{\pi}{8} - x_n\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos\left(\frac{\pi}{2^n} - x_1\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2^n} - x_2\right) & \cdots & \cos\left(\frac{\pi}{2^n} - x_n\right) \end{vmatrix}.$$

Bài 2.4 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội). Cho n là một số nguyên dương lẻ. Cho A là một ma trận thực vuông cấp n thỏa mãn $\det A = 1$ hoặc $\det A = -1$. Gọi A' là ma trận nhận được từ A bằng cách thay mỗi phần tử bằng phần bù đại số của nó. Tính $\det A'$.

Bài 2.5 (HV Kỹ thuật Quân sự). Giả sử $A \in M_{2018}(\mathbb{Z})$.
a) Tìm điều kiện cần và đủ để tồn tại $A^{-1} \in M_{2018}(\mathbb{Z})$.
b) Chứng minh rằng $\det(2018A + E) \neq 0$.

Bài 2.6 (ĐH Mỏ địa chất). Tính

$$\lim_{n\to\infty} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/n! \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 1/n! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1/n! \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 1/n! \end{vmatrix}.$$

Bài 2.7 (ĐH Ngoại thương Hà Nội). Hãy tính định thức của ma trận vuông $A = (a_{ij})$ cấp $n \times n$ với

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|}, & \forall i \neq j \\ 2, & \forall i = j \end{cases}$$

Bài 2.8 (ĐH Ngoại thương Hà Nội). Gọi Δ_n là định thức của ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ thỏa mãn: $a_{ij} = \begin{cases} x & , \text{ nếu } i = j \\ (-1)^{i+j} a & , \text{ nếu } i < j \\ (-1)^{i+j} b & , \text{ nếu } i > j \end{cases}$

a. Tính Δ_3.

b. Tính Δ_n.

Bài 2.9 (Trường sĩ quan Không quân). Đặt $x_n = det(A)$, trong đó A là ma trận cấp n cho bởi,

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & 0\dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0\dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1\dots & 0 & 0 \\ . & . & . & .... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0\dots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0\dots & 1 & 2\cos\alpha \end{pmatrix}_{n\times n}$$

a. Tính x_2 và x_3.

b. Tính x_n.

3 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bài 3.1 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội). Cho n là một số tự nhiên lớn hơn 1 và cho các số nguyên $\{a_{ij} : 1 \le i, j \le n\}$. Hãy giải hệ phương trình tuyến tính sau

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{1}{2^2}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{1}{2^n}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}.$$

Bài 3.2 (HV Kỹ thuật Quân sự). Cho $A \in M_n(\mathbb{R}), (n \in \mathbb{N}^*)$ thỏa mãn $A^{2017} \neq O,\ A^{2018} = O$.
a) Chứng minh rằng hai hệ phương trình sau có cùng tập hợp nghiệm

$$\begin{array}{l} Ax = 0 \ \ (1) \\ (A + A^2 + ... + A^{2017})x = 0. \ (2) \end{array}$$

b) Chứng minh rằng $rank\,(A) = rank\,(A + A^2 + ... + A^{2017})$.

Bài 3.3 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 20172017x & + & 20172017y & + & 20182018z & + & 20172017t & = & 0 \\ 20172017x & + & 20162016y & + & 20192019z & + & 20162016t & = & 0 \\ 20192019x & + & 20152015y & + & 20182018z & + & 20172017t & = & 0 \\ 20202020x & + & 20162016y & + & 20202020z & + & 20192019t & = & 0 \end{cases}$$

Bài 3.4 (ĐH Tây Bắc). Cho a_i; $(i = 1, 2, 3, 4)$ là các số thực thuộc khoảng $(0; 1)$. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a_1x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\ x_1 + a_2x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\ x_1 + x_2 + a_3x_3 + x_4 & = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + a_4x_4 & = 0 \end{cases}$$

4 KHÔNG GIAN VÉC TƠ VÀ ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Bài 4.1 (ĐH Giao thông Vận Tải). Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ với

$$f(x) = (x_3, 2x_1 + x_2 - 2x_3, x_1)$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Cho dãy $\{u_0, u_1, \ldots, u_{2018}\}$ xác định bởi

$$u_0 = (1, 2, 3), \quad f(u_{k+1} - u_k) = 3u_k, \quad k \geqslant 1.$$

Hãy tính u_{2018}.

Bài 4.2 (ĐH Quy Nhơn). Cho $c_1, \ldots, c_n, c_{n+1}$ là các số khác 0. Đặt

$$T = \begin{bmatrix} 0 & & & & c_{n+1} \\ c_1 & 0 & & & \\ & c_2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & c_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Gọi $\phi : \mathcal{F}[x]_n \to \mathcal{F}[x]_n$ là ánh xạ tuyến tính có ma trận đối với cơ sở $\{1, x, \ldots, x^n\}$ là T.

a) Tính $\det T$ và T^{n+1};

b) Xác định ảnh và hạt nhân của ϕ.

Bài 4.3 (Trường sĩ quan Không quân). Cho φ và ψ là hai toán tử tuyến tính của không gian V. Chứng minh rằng $\varphi\psi$ và $\psi\varphi$ có cùng giá trị riêng.

Bài 4.4 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Cho S là không gian con của không gian véc tơ $\mathrm{Mat}(n, K)$ được sinh bởi tập tất cả các ma trận có dạng $AB - BA$, với các $A, B \in \mathrm{Mat}(n, K)$. Chứng minh rằng: $\dim S = n^2 - 1$. Từ đó hãy chứng tỏ rằng S chính là tập các ma trận có vết bằng không.

Bài 4.5 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Trong không gian $\mathbb{R}$[x], với mỗi $n \in \mathbb{N}$ ta chọn một đa thức $f_n \neq 0$ có bậc đúng bằng n. Tập $f_0, f_1, f_2, ...$ có độc lập tuyến tính không?

5 GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ VÉC TƠ RIÊNG

Bài 5.1 (HV Kỹ thuật Quân sự). Cho $A \in M_n(\mathbb{R}), (n \in \mathbb{N}^*)$, λ là nghiệm đơn của đa thức đặc trưng. Chứng minh rằng $\mathrm{rank}(A - \lambda E) = n - 1$.

Bài 5.2 (ĐH Mỏ địa chất). Ma trận vuông đối xứng cấp n có tất cả các phần tử dương. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một giá trị riêng dương.

Bài 5.3 (ĐH Quy Nhơn). Cho $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Chứng minh rằng nếu tồn tại một ma trận unita U sao cho $U^H AU = D$ là ma trận đường chéo thì tồn tại một đa thức p sao cho $A^H = p(A)$.

Bài 5.4 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên). Cho ma trận $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ với $a_{ii} = 2,\ a_{ii-1} = a_{ii+1} = -1$, còn lại các phần tử khác đều bằng 0. Tức là

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Chứng minh rằng các giá trị riêng của A là số dương.

Bài 5.5 (ĐH Tây Bắc). Cho ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Tìm các giá trị riêng của ma trận A.

b) Chứng minh rằng: Nếu λ là giá trị riêng của A thì λ^n là giá trị riêng của A^n; với mọi n nguyên dương.

c) Tính định thức của ma trận $(A^4 + A^{2017})$.

6 ĐA THỨC

Bài 6.1 (ĐH Giao thông Vận Tải). Cho $P(x)$ là đa thức bậc n có n nghiệm phân biệt là $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Gọi b là số thực thỏa mãn

$$2b < a_1 + a_2$$

Chứng minh rằng

$$2^{n-1}|P(b)| \geqslant |P'(a_1)(b - a_1)|.$$

Bài 6.2 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội). Cho n là một số nguyên dương. Gọi $\mathbf{P}_n[x]$ là không gian véctơ các đa thức ẩn x với hệ số thực có bậc không vượt quá n và đa thức 0. Với mỗi số thực a, ta kí hiệu: $B_a = \{1, x - a, \cdots, (x - a)^n\}$.

a) Chứng minh rằng B_a là một cơ sở của $P_n[x]$.

b) Cho hai số thực phân biệt a, b. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B_a sang cơ sở B_b.

Bài 6.3 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội). Cho a là một số thực. Xét đa thức

$$P(x) = \frac{x^{2018}}{a^2 - 2a + 2} + a.x^{2017} + (a - 1).x^{2012} - (a - 1).x^6 - a.x - \frac{1}{2018}.$$

Chứng minh rằng phương trình $P(P(x)) = x$ có ít nhất 2 nghiệm thực (kể cả bội).

Bài 6.4 (ĐH Kỹ thuật Hậu cần Công an Nhân dân). Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số thực, bậc n, có n nghiệm thực phân biệt $x_1, x_2, ..., x_n$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0.$$

Bài 6.5 (HV Kỹ thuật Quân sự). Tìm tất cả các đa thức $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ với các hệ số $a_k \in \{1, -1\}, \forall k \in \{0, 1, ..., n\}, n \geq 0$ sao cho đa thức có tất cả các nghiệm đều thực.

Bài 6.6 (ĐH Mỏ địa chất). Một đường thẳng cắt đồ thị hàm

$$y = 2x^4 + 7x^3 + 3x - 5$$

tại bốn điểm phân biệt (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4$.
Hãy tính tổng

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}.$$

Bài 6.7 (ĐH Mỏ địa chất)**.** Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_5$ là nghiệm của phương trình bậc 5 sau:

$$x^5 - x - 1 = 0.$$

Hãy tính tổng

$$x_1^6 + x_2^6 + \ldots + x_5^6.$$

Bài 6.8 (ĐH Quy Nhơn)**.** Chứng minh rằng với mọi đa thức hệ số thực bậc $n > 1$ có n nghiệm thực đôi một phân biệt $x_1, \ldots, x_n$ ta đều có

$$\frac{1}{p'(x_1)} + \frac{1}{p'(x_2)} + \ldots + \frac{1}{p'(x_n)} = 0.$$

Bài 6.9 (ĐH Quy Nhơn)**.** Chứng minh rằng không tồn tại một đa thức $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$, thỏa mãn hai điều kiện:

(i) $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ là một hoán vị của $(0, 1, \ldots, n)$;

(ii) mọi nghiệm của f đều hữu tỷ;

và không âm trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.

Bài 6.10 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Cho đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ bậc $n \geq 1$ thỏa mãn:

$$P(x).P(2x^2) = P(2x^3 + x), \tag{3}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $P(x)$ không có nghiệm thực.

Bài 6.11 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long)**.** Giả sử $x = \dfrac{2017}{2019}$ là nghiệm của đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên. Hỏi tổng các hệ số của $P(x)$ có thể bằng 2019 được không?

Bài 6.12 (ĐH Tây Bắc)**.** a) Cho các đa thức $f(x) = x^5 - 4x^2 + 2$ và $g(x) = 16x^5 + 8x^2 - 1$. Gọi a là nghiệm lớn nhất trong các nghiệm thực của $f(x)$ và b là nghiệm nhỏ nhất trong các nghiệm thực của $g(x)$. Chứng minh rằng: $a + 2b = 0$.

b) Cho đa thức $f(x) = (2x^5 - 2x^4 - 23x^3 - 7x^2 + 49x + 30)^5$ và $\alpha = \sqrt[3]{7 + \sqrt{\dfrac{49}{8}}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{\dfrac{49}{8}}}$. Hãy tính giá trị $f(\alpha)$.

7 TỔ HỢP

Bài 7.1 (ĐH Giao thông Vận Tải)**.** Một kỹ sư có một cuộn dây điện có độ dài 2018m. Người đó cần phải chia nhỏ cuộn dây thành 351 đoạn với 100 đoạn dài 10m, 250 đoạn dài 4m và một đoạn dài 18m. Hãy cho biết kỹ sư đó có bao nhiêu cách để chia cuộn dây điện theo đúng yêu cầu trên.

Bài 7.2 (ĐH Giao thông Vận Tải). Bốn xí nghiệp nước sạch có nhiệm vụ cung cấp nước sinh hoạt cho một thành phố. Nếu hoạt động bình thường thì tổng sản lượng hàng ngày của 4 xí nghiệp đúng bằng nhu cầu hàng ngày của cả thành phố. Nếu một ngày nào đấy, một xí nghiệp cần thực hiện công tác bảo dưỡng sửa chữa hệ thống sản xuất theo định kỳ thì sản lượng của xí nghiệp đó được hạ xuống mức 50% sản lượng hàng ngày và nếu ba xí nghiệp còn lại được sắp xếp theo sản lượng hàng ngày từ cao đến thấp thì phải tăng sản lượng tương ứng theo các mức 20%, 15%, 10% . Trong những ngày như vậy, nếu tổng sản lượng bị thiếu hụt thì lượng thiếu hụt (tính theo 1000m^3) là 14 hoặc 56; nếu tổng sản lượng là dư thừa thì lượng dư thừa (tính theo 1000m^3) là 12 hoặc 36. Hãy xác định sản lượng hàng ngày của từng xí nghiệp và nhu cầu nước sinh hoạt hàng ngày của toàn thành phố.

Bài 7.3 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội). Trong một hộp có 50 viên bi được đánh số từ 1 đến 50. Bốc ngẫu nhiên đồng thời 3 viên bi trong hộp. Hỏi có bao nhiêu cách bốc để được 3 viên bi có tổng ba số trên 3 viên bi là một số chia hết cho 3.

Bài 7.4 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội). Có rất nhiều các quả của các loại quả lê, chuối, ổi, bưởi, hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp một giỏ gồm n trái cây thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau
i) Số quả lê phải chẵn;
ii) Số quả chuối phải chia hết cho 6;
iii) Có nhiều nhất 5 quả ổi;
iv) Có nhiều nhất 1 quả bưởi.

Bài 7.5 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội). Trong không gian cho tập $A = \{A_1; A_2; \cdots; A_{64}\}$ gồm 64 điểm phân biệt sao cho khi lấy 4 điểm bất kì của tập A luôn tồn tại 2 điểm có khoảng cách nhỏ hoặc bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại một tập con E có ít nhất 22 điểm phân biệt của tập A sao cho khoảng cách giữa 2 điểm bất kì của tập E đều nhỏ hơn hoặc bằng 2.

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: GIẢI TÍCH

1 DÃY SỐ

Bài 1.1 (ĐH Giao thông vận tải). Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} 0 < u_1 < 1, \\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, \text{ với } n = 1, 2, ... \end{cases}$$

Tìm

$$\lim_{n\to\infty} u_1 u_2 ... u_n.$$

Bài 1.2 (ĐH Hàng hải Việt Nam). Cho dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ thỏa mãn $\lim\limits_{n\to\infty}(2018x_{n+2018} - x_n) = a \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ và tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Bài 1.3 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội). Cho số thực bất kỳ $a > 0$. Xét dãy số $\{x_n\}$ được xác định như sau

$$x_1 = a, \; x_{n+1} = x_n + \frac{2}{\sqrt{x_n}} + \frac{5}{\sqrt[5]{x_n}}, \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Chứng minh dãy số $\left\{\dfrac{x_n}{\sqrt[6]{n^5}}\right\}$ hội tụ và tính giới hạn của nó.

b) Chứng minh rằng dãy số $\left\{\dfrac{x_n}{n^m}\right\}_{n\geq 1}$ hội tụ khi và chỉ khi $m \geq \dfrac{5}{6}$.

Bài 1.4 (ĐH Quảng Bình). Cho dãy số $(x_n)_n$ với

$$x_1 = 2; \;\; x_{n+1} = \sqrt{2018x_n - 2017}, \;\; n \geq 1.$$

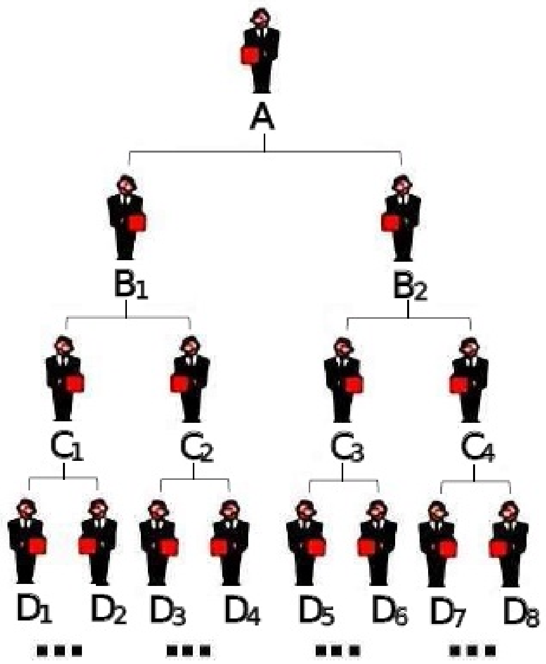
Chứng minh $(x_n)_n$ hội tụ và tìm giới hạn.

Bài 1.5 (ĐH Quốc tế). Cho số thực $a > 0$. Xét dãy số $(x_n)_n$ được xác định bởi:

$$x_1 = 0, x_{n+1} = a + x_n^2, n \geq 1.$$

Tìm tất cả giá trị của $a > 0$ để dãy đã cho hội tụ và tính $\lim_{n\to\infty} x_n$ nếu có.

Bài 1.6 (Trường Sĩ quan Không quân). Cho dãy số $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{k}{n})$. Chứng minh rằng tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{n\to\infty} u_n$ và tìm giới hạn đó.



Hình 1 –

Bài 1.7 (Trường Sĩ quan Không quân). Hãng X chuyên kinh doanh đa cấp theo mô hình bên dưới. Trong đó $A, B_i, C_j, D_k, \ldots 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 4, 1 \leq k \leq 8, ..$ tương ứng là các nhà phân phối cấp 1 đến cấp 4, ... Mỗi một nhà phân phối khi tham gia hệ thống phải đầu tư đúng N đồng và nộp cho Hãng X. Mỗi một nhà phân phối chỉ được phép có nhiều nhất 2 nhà phân phối cấp dưới trực tiếp (chẳng hạn, xem Hình 1, C_3, C_4 là cấp dưới trực tiếp của B_2). Nguyên tắc chia thưởng như sau: Khi một nhà phân phối Y cấp n mời được một nhà phân phối làm cấp dưới trực tiếp cho mình thì Y được Hãng X chia thưởng bằng $r\%N$. Và mỗi khi nhà phân phối cấp dưới được chia thưởng, thì cấp trên trực tiếp của họ cũng được Hãng X chia thưởng với số tiền bằng $r\%$ so với số tiền mà cấp dưới trực tiếp của họ được nhận.

1) Với $r = 40\%, N = 10$ triệu đồng, khi hệ thống phát triển đầy đủ đến cấp 10 thì nhà phân phối A có lãi bao nhiêu? Số tiền mà Hãng X thu được, sau khi trừ chi phí chia thưởng, là bao nhiêu?
2) Tìm r để khi hệ thống phát triển đầy đủ đến cấp 3 thì nhà phân phối A bắt đầu có lãi.
3) Tìm r để A không bao giờ có lãi.

Bài 1.8 (CĐ Sư phạm Nam Định). Cho dãy (u_n) thỏa mãn $u_1 = a$, $u_n = \sqrt{3u_{n-1} - 2}$ với $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Tìm giới hạn của dãy khi $a = 3$.

b) Tìm điều kiện của a để dãy (u_n) có giới hạn.

Bài 1.9 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long). Cho dãy $\{u_n\}$ được xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2018} + u_n \ ; \ n = 1, 2, ... \end{cases}$$

Tính giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \cdots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right).$$

Bài 1.10 (ĐH Tây Bắc). *Cho* $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *là dãy số dương hội tụ về 0 và* $\alpha \geq 0$ *cố định. Tính giới hạn* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+n}{n} + \alpha\varepsilon_n\right)$ *trong các trường hợp sau:*

a) $\alpha = 0$.

b) $\alpha > 0$.

2 CHUỖI SỐ

Bài 2.1 (ĐH Giao thông vận tải). Cho chuỗi hội tụ

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Chứng minh rằng

$$S = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - ...\right).$$

Bài 2.2 (ĐH Hàng hải Việt Nam). Tính tổng của chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n-2)}.$$

Bài 2.3 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên). Cho số thực $\alpha \geqslant 0$.
Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$.

Bài 2.4 (ĐH Tây Bắc). Dãy $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cho bởi

$$u_0 = u_1 = 2018, u_{n+1} = \frac{nu_n^2}{1+(n+1)u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Chứng minh chuỗi số $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ hội tụ.

b) Từ đó tính tổng của chuỗi số nói trên.

3 HÀM SỐ

Bài 3.1 (ĐH Bách khoa Thành phố HCM)**.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[1, +\infty)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $f(1) = a > 0$

ii) $f(x+1) = 2018(f(x))^2 + f(x), \forall x \in [1, +\infty)$.

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{f(1)}{f(2)} + \dfrac{f(2)}{f(3)} + \ldots + \dfrac{f(n)}{f(n+1)}\right]$

Bài 3.2 (ĐH Hàng hải Việt Nam)**.** Đặt $P(x) = \left(\sum\limits_{i=0}^{9} x^i\right)^6$. Giả sử ta có khai triển $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{54} a_i x^i$. Tính a_{27}.

Bài 3.3 (ĐH Ngoại thương Hà Nội)**.** Cho hàm $f : [0,1] \to R$ khả vi tại 0 sao cho $f(0) = 0$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$

Bài 3.4 (Học viện Phòng không Không quân)**.** a) Thế nào là tập compact? Cho ví dụ về hai tập A và B là các tập đóng trong $\mathbb{R}$ nhưng $A+B$ không phải là tập đóng?

b) Cho $A \subset \mathbb{R}^n$ và $f : A \to \mathbb{R}^p$ là hàm liên tục trên A. Nếu A là tập compact thì $f(A)$ cũng là tập compact không? Nếu có hãy làm sáng tỏ khẳng định trên? Nếu không hãy đưa ra phản ví dụ minh họa?

Bài 3.5 (Học viện Phòng không Không quân)**.** Cho a và b là hai số thực thỏa mãn điều kiện

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a+n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{b+n}.$$

Tìm $\min|a-b|$?

Bài 3.6 (ĐH Quảng Bình)**.** Giả sử f là hàm khả vi trên $[a;b]$ thỏa mãn điều kiện $f(a) = f(b) = 0; f(x) \neq 0, \forall x \in (a;b)$. Chứng minh rằng tồn tại dãy $(x_n) \subset (a;b)$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f'(x_n)}{e^{2018nx_n} f(x_n)} = 2018.$$

Bài 3.7 (ĐH Quốc tế)**.** Cho hàm f liên tục trên $[0,1]$, khả vi trên $(0,1)$. Giả sử

$$f(0) \le f(1); \quad f(x) + f'(x) < 2018, \forall x \in (0,1).$$

Chứng minh rằng $f(x) < 2018, \forall x \in (0,1)$.

Bài 3.8 (ĐH Quốc tế). Xét phương trình $x^2 + bx + c = 0$. Giả sử

$$\frac{1}{2018} + \frac{b}{2017} + \frac{c}{2016} = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình bậc hai đã cho có một nghiệm thuộc khoảng $(0, 1)$.

Bài 3.9 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Cho $f : [a, b] \to [a, b]$ thoả mãn

$$|f(x) - f(y)| \le |x - y|, \forall x, y \in [a, b].$$

1) Đặt $\mathcal{S} = \{x \in [a, b] : f(x) = x\}$. Chứng minh rằng $\mathcal{S} \neq \emptyset$.
2) Xét dãy số (x_n) cho bởi $x_1 \in [a, b]$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n + f(x_n)}{2}$. Chứng minh rằng dãy (x_n) hội tụ tới phần tử thuộc $\mathcal{S}$.

Bài 3.10 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). a) Cho $f : [a, b] \to [a, b]$ là hàm liên tục sao cho $f(a) = a$, $f(b) = b$ và $f(f(x)) = x$, $\forall\, x \in [a, b]$. Chứng minh rằng $f(x) = x$, $\forall\, x \in [a, b]$.

b) Cho f, $g : [0, 1] \to [0, +\infty)$ là các hàm liên tục và $\sup\limits_{[0,1]} f(x) = \sup\limits_{[0,1]} g(x)$.

Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho

$$f^2(x_0) + 3f(x_0) = g^2(x_0) + 3g(x_0).$$

Bài 3.11 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là hàm số khả vi và $f(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại số $c \in (0, 1)$ sao cho $|f(c)| \le 2018|f'(c)|$.

Bài 3.12 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên). Chứng minh rằng, nếu $x > 0$ thì

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Bài 3.13 (ĐH Tây Bắc). *Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Các khẳng định sau đây là đúng hay sai, tại sao*
a) Nếu f là hàm liên tục và có miền giá trị $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ thì f là hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}$;
b) Nếu f là hàm đơn điệu và có miền giá trị $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ thì f liên tục trên $\mathbb{R}$;
c) Nếu f là hàm đơn điệu và liên tục trên $\mathbb{R}$ thì miền giá trị $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Bài 3.14 (ĐH Thủy Lợi). Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta luôn có

$$f'(x) - xf(x) = 1,$$

trong đó

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}.$$

4 PHÉP TÍNH VI PHÂN

Bài 4.1 (Học viện An ninh Nhân dân). Cho hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ khả vi với $f(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}, \forall x \in [a, b]$.
Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{2}{a-c} < f'(c).\cot(f(c)) < \frac{2}{b-c}.$$

Bài 4.2 (Học viện An ninh Nhân dân). Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi và không phải là hàm tuyến tinh (đường thẳng).
Chứng tỏ rằng tồn tại $p, q \in (a, b), p \neq q$ sao cho

$$f'(p) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(q).$$

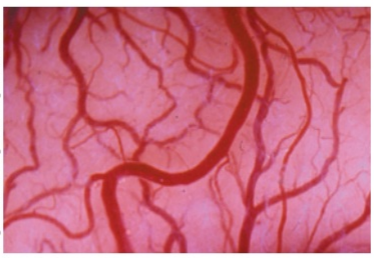
Bài 4.3 (ĐH Bách khoa Thành phố HCM). Một chất điểm xuất phát từ trạng thái đứng yên, chuyển động trên đường thẳng với gia tốc giảm dần. Khi đi được quãng đường d nó đạt vận tốc v. Tìm thời gian chuyển động cực đại.

Bài 4.4 (ĐH Bách khoa Thành phố HCM). Cho $f(x)$ khả vi trên (a, b); $f(a) = 0$ và tồn tại $A > 0, \alpha \geqslant 1$ sao cho $|f'(x)| \leqslant A|f(x)|^{\alpha}, \forall x \in [a, b]$. Chứng minh rằng $f(x) \equiv 0$ trên $[a, b]$.

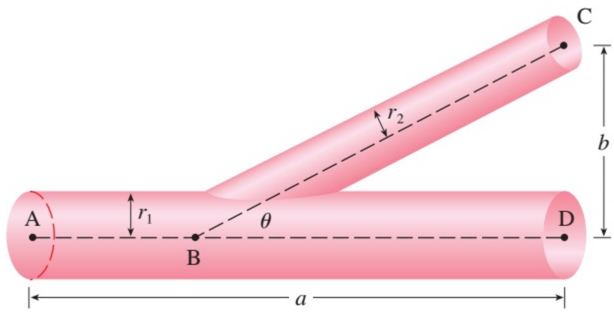
Bài 4.5 (ĐH Bách khoa Thành phố HCM). Hệ mạch máu bao gồm những mạch máu (động mạch, tiểu động mạch, mao mạch và tĩnh mạch) giúp vận chuyển máu từ tim đến các cơ quan và ngược trở về tim. Hệ này sẽ hoạt động tốt nếu như năng lượng tim dùng để đẩy máu là nhỏ nhất. Cụ thể, năng lượng này sẽ giảm khi kháng lực của máu thấp. Một trong những định luật của Poiseuille chỉ ra công thức để tính kháng lực R này là

$$R = C\frac{L}{r^4}$$

với L là độ dài của mạch máu, r là bán kính và C là hằng số dương được xác định theo độ nhớt của máu. Hình ảnh dưới đây cho thấy mạch máu chính với bán kính r_1 rẽ nhánh một góc θ $(0 < \theta < \pi)$ sang một mạch máu nhỏ hơn với bán kính r_2



Kage-Mikrofotografie / Agefotostock



i) Hãy biểu diễn tổng kháng lực R của máu dọc theo đường ABC như là một hàm số phụ thuộc góc θ.

ii) Chứng minh rằng R đạt giá trị nhỏ nhất khi $\cos\theta = \dfrac{r_2^4}{r_1^4}$

iii) Tìm góc rẽ θ tối ưu khi bán kính của mạch máu nhỏ bằng hai phần ba bán kính của mạch máu chính.

Bài 4.6 (ĐH Giao thông vận tải)**.** Cho $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$, $a > 0$. Giả sử f liên tục tại 0 và tồn tại giới hạn

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(\kappa x)}{x} = l,$$

trong đó $0 < \kappa < 1$. Chứng minh rằng tồn tại $f'(0)$.

Bài 4.7 (ĐH Hàng hải Việt Nam)**.** Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên $(-\infty, +\infty)$. Chứng minh rằng tồn tại số thực c thỏa mãn:

$$f(2017) + f(2019) + f(2021) - f(2016) - f(2018) - f(2020) = 3f^{'}(c).$$

Bài 4.8 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội)**.** Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = f(1)$ và $f'(0) = f'(1)$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho

$$f''(c) + (f'(c))^2 = 2018f^{2017}(c)(f'(c))^2.$$

Bài 4.9 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội)**.** Giả sử có một chiếc tàu du lịch đậu cố định trên vịnh Hạ Long và cách điểm gần nhất B trên đường bờ biển thẳng là $4\ km$, và điểm B cách khách sạn trên bờ biển là $3\ km$. Một người đàn ông muốn tự về khách sạn trước mà không cần tàu du lịch quay lại bờ. Để tự về được anh ta chỉ có duy nhất một cách là thực hiện một hành trình như sau: trước tiên anh ta chèo thuyền thẳng vào một vị trí nằm giữa vị trí B và khách sạn ở trên bờ biển với vận tốc không đổi $v_1\ km/h$, sau đó anh ta có thể phải chạy bộ dọc bờ biển với vận tốc không đổi $v_2\ km/h$ về khách sạn. Với tinh thần kiên cường và sức khỏe tốt, người đàn ông đã quyết định tự về khách sạn bằng cách duy nhất đó.

a) Giả sử $v_1 = 2\ km/h$ và $v_2 = 4\ km/h$. Xác định vị trí trên bờ biển sao cho thời gian hoàn thành hành trình này là ít nhất so với thời gian hoàn thành các hành trình có cùng các vận tốc đã cho.

b) Giả sử $v_2 = 5\ km/h$. Xác định giá trị tối thiểu của v_1 sao cho thời gian mà anh ta chèo thẳng trực tiếp tới khách sạn là ít nhất so với thời gian hoàn thành các hành trình có cùng các vận tốc đã cho.

c) Giả sử θ là góc lệch giữa phương chèo thuyền và phương thẳng nối từ tàu du lịch đến B. Xác định khoảng giá trị của θ khi tỉ lệ $\dfrac{v_2}{v_1}$ thay đổi trong $(1, 2]$, biết rằng với mỗi cặp v_1, v_2 cho trước, anh ta luôn chọn hành trình về đến được khách sạn với tổng thời gian ít nhất.

Bài 4.10 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội). Cho hàm số $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ là hàm có đạo hàm đến cấp 2 thỏa mãn

$$\lim_{x\to+\infty}((x^2+1)f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x)) = a,$$

với a là hữu hạn. Hãy xác định $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) f'(x)$.

Bài 4.11 (ĐH Kỹ thuật Hậu cần Công an Nhân dân). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trong khoảng (a, b).
Chứng minh tồn tại điểm $c, \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{2}{a-c} < f'(c).\cos(f(c)) < \frac{2}{b-c}.$$

Bài 4.12 (ĐH Kỹ thuật Hậu cần Công an Nhân dân). Cho hàm f khả vi tới cấp 4 trên $\mathbb{R}$ và $f^{(4)}$ liên tục trên $[0, 1]$. Giả sử

$$\int_0^1 f(x)dx + 3f(\frac{1}{2}) = 8\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x)dx.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $f^{(4)}(c) = 0$.

Bài 4.13 (ĐH Kỹ thuật Hậu cần Công an Nhân dân). Cho $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ là các hàm khả vi thỏa mãn $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$.
Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$f'(c)\int_c^b f(x)dx + g'(c)\int_c^b g(x)dx = 2f(c)g(c).$$

Bài 4.14 (ĐH Ngoại thương Hà Nội). Tìm giá trị lớn nhất của a và giá trị nhỏ nhất của b sao cho với mọi số tự nhiên n thì bất đẳng thức $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+a} \leq e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+b}$ luôn đúng.

Bài 4.15 (Học viện Phòng không Không quân). Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ khả vi hai lần sao cho mọi $x \in [0,1]$ thì $f''(x) \leq 1$. Chứng minh rằng $f(0) - 2f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f(1) \leq \dfrac{1}{4}$.

Bài 4.16 (ĐH Quảng Bình). Cho hàm $g(x)$ khả vi trên $[0;1]$ thỏa mãn $g'(0) < 0; g'(1) > 2018$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0;1)$ sao cho $g'(c) = 2018c^{2017}$.

Bài 4.17 (ĐH Quốc tế). Cho hàm f khả vi đến cấp hai trên $[0,\infty)$. Giả sử

$$f(0) > 0,\ f'(0) < 0, f''(x) \leq 0, \forall x \in (0,\infty).$$

Chứng minh rằng tồn tại duy nhất số $c \in (0,\infty)$ sao cho $f(c) = 0$.

Bài 4.18 (ĐH Quốc tế). Giả sử hàm f bị chặn và khả vi đến cấp hai trên $(-\infty,\infty)$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (-\infty,\infty)$ sao cho $f''(c) = 0$.

Bài 4.19 (ĐH Quốc tế). Cho hàm f liên tục, không âm trên $[0,1]$. Giả sử

$$(f(x))^2 \leq 1 + 2\int_0^x f(t)dt, \quad \forall x \in (0,1).$$

Chứng minh rằng $f(x) \leq 1 + x, \quad \forall x \in [0,1]$.

Bài 4.20 (Trường Sĩ quan Không quân). Cho $f(x)$ là một hàm số thực khả vi trên $[a;b]$ và có đạo hàm $f''(x)$ trên $(a;b)$. Chứng minh rằng với mọi $x \in (a;b)$ có thể tìm được ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = \frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(c).$$

Bài 4.21 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$, khả vi trong khoảng (a,b).
Chứng minh tồn tại điểm $c, \in (a,b)$ sao cho

$$\frac{2}{a-c} < f'(c) < \frac{2}{b-c}.$$

Bài 4.22 (CĐ Sư phạm Nam Định). Cho hàm $f(x) = \begin{cases} x^2.\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right| & \text{Nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{Nếu } x = 0 \end{cases}$.

a) Chứng minh rằng $f(x)$ khả vi tại $x = 0$.

b) Chứng minh rằng $f(x)$ không khả vi tại $x = \dfrac{2}{2017}$.

Bài 4.23 (CĐ Sư phạm Nam Định). Để sản suất vỏ hộp sữa Ông Thọ dạng hình trụ tròn với thể tích cố định là $500ml$. Vỏ ngoài hộp được sản suất bằng sắt không gỉ với chi phí 5 đồng/cm^2. Vỏ ngoài ở hông được dán thêm nhãn hiệu ở xung quanh với chi phí 1 đồng/cm^2. Tìm chi phí nhỏ nhất để sản suất ra vỏ hộp sữa Ông Thọ.

Bài 4.24 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long). Cho $f : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$ có đạo hàm cấp 2 liên tục, thỏa mãn

$$\left| f^{''}(x) + 4xf^{'}(x) + 2\left(2x^2 + 1\right) f(x) \right| \leq 2018, \ \forall x \geq 0$$

Chứng minh rằng: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Bài 4.25 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long). Cho hàm f khả vi, liên tục trên $[2018, 2019]$, thỏa mãn $f(2019) = 0$. Chứng minh rằng phương trình $(x - 2018)f'(x) = (x - 2019)f(x)$ có nghiệm.

Bài 4.26 (ĐH Thủy Lợi). Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm có đạo hàm đến cấp hai và $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0; \pi)$ sao cho:

$$f(c) - f''(c) = 2f'(c)\cot(c).$$

Bài 4.27 (ĐH Thủy Lợi). Xét tính khả vi tại $x_0 = 0$ của hàm số sau:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x + 1][nx + 1]}.$$

5 PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Bài 5.1 (Học viện An ninh Nhân dân). Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục và $\max\limits_{t \in [0,1]} |f'(x)| = M < \infty$.
Khi đó $\forall x \in [0, 1]$ ta có

$$\left| f(x) - \int_0^1 f(t)dt \right| \leqslant \frac{1}{4}\left[(2x-1)^2 + 1\right] M$$

và hằng số $\dfrac{1}{4}$ là tốt nhất có thể (không thể thay bởi số nhỏ hơn).

Bài 5.2 (Học viện An ninh Nhân dân). Cho $0 < a < b$ và hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục.
Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$2f(c) = \frac{1}{\sqrt{c}}\Big[\frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{a-c} + \frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{b-c}\Big]\int_a^c f(x)dx.$$

Bài 5.3 (ĐH Bách khoa Thành phố HCM). Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $[0, 2]$, có đạo hàm trên $(0, 2)$ và thỏa mãn $f(0) = f(2) = 1$, $|f'(x)| \leqslant 1, \forall x \in [0, 2]$. Chứng minh rằng $\int_0^2 f(x)dx > 1$.

Bài 5.4 (ĐH Giao thông vận tải). Cho $f : [1, 13] \to \mathbb{R}$ là hàm lồi khả tích. Chứng minh rằng

$$\int_1^3 f(x)dx + \int_{11}^{13} f(x)dx \geq \int_5^9 f(x)dx.$$

Bài 5.5 (ĐH Hàng hải Việt Nam). Giả sử hàm f xác định trên $\mathbb{R}$, tuần hoàn chu kỳ $T, T > 0$, khả tích trên đoạn $[0, T]$. Tính giới hạn

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int\limits_0^x f(t)dt}{x}.$$

Bài 5.6 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên). Cho hàm $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ liên tục với $\int_0^1 [f(x)]^3 dx = 0$. Chứng tỏ rằng

$$\int_0^1 [f(x)]^4 dx \geqslant \frac{27}{4}\Big[\int_0^1 f(x)dx\Big]^4.$$

Bài 5.7 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên). Cho hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn $\int_a^b f(x)dx = 0$.
Chứng minh rằng tồn tại $\alpha \in (0, \frac{b-a}{2})$ sao cho

$$f(\frac{a+b}{2} - \alpha) + f(\frac{a+b}{2} + \alpha) = 0.$$

Bài 5.8 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội). Gọi $\mathcal{M}$ là tập hợp các hàm số liên tục $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau

a) $\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$, với mọi số thực a, b thỏa mãn $0 \leq a < b \leq 1$;

b) $f(x)$ luôn có nghiệm trong $[0,1]$ và tập hợp các nghiệm của $f(x)$ trong $[0,1]$ là hữu hạn.
Chứng minh rằng:

1) Mọi đa thức bậc ba luôn thỏa mãn điều kiện $a)$.

2) $\int\limits_0^1 |f(x)|dx \le \frac{5}{6} \max\limits_{[0,1]} |f(x)|$ với mọi hàm số $f(x) \in \mathcal{M}$.

3) Với mỗi $C \in \left(0, \frac{5}{6}\right)$, tồn tại ít nhất một hàm số $f(x) \in \mathcal{M}$ sao cho

$$\int\limits_0^1 |f(x)|dx > C \max_{[0,1]} |f(x)|.$$

Bài 5.9 (ĐH Kỹ thuật Hậu cần Công an Nhân dân)**.** Cho hàm f khả vi liên tục trên $[a,b]$ với $\int_a^b f(x)dx = 0$.
Đặt $M = \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$. Chứng minh rằng

$$\left| \int_a^b xf(x)dx \right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12} M.$$

Bài 5.10 (Học viện Phòng không Không quân)**.** Cho x là số thực bất kỳ và dãy số $\{a_n\}$ được xác định như sau

$$a_n = \int_0^n \frac{\ln x}{1+x^2} dx, \ n = 1, 2, \dots .$$

1. (3 điểm) Tìm giá trị của x để dãy số $\{a_n\}$ hội tụ.
2. (3 điểm) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ với giá trị x vừa xác định.

Bài 5.11 (Học viện Phòng không Không quân)**.**

1. Cho hàm số
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in \mathbb{I} \\ 1 & \text{nếu } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$
Ở đây, $\mathbb{Q}$ và $\mathbb{I}$ lần lượt là tập các số hữu tỉ và tập các số vô tỉ. Hỏi có tồn tại tích phân $\int_0^1 f(x)dx$. Nếu có hãy tính tích phân? Nếu không hãy giải thích?
2. Cho hàm số $f(x)$ khả vi liên tục cấp 2 trên $\mathbb{R}$. Giả sử $f(1) = 0$ và $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in (0,1)$, ta có
$$\frac{1}{4} \max_{0\le x\le 1} |f''(x)| \ge 10 \left| \int_0^\alpha f(x)dx \right|$$

Bài 5.12 (ĐH Quảng Bình)**.** Cho hàm $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và

$$\int_0^1 x^3 f(x)dx = -\frac{1}{4}; \int_0^1 (f'(x))^2 dx = 9.$$

Tính

$$\int_0^1 f(x)dx$$

Bài 5.13 (Trường Sĩ quan Không quân)**.** Cho $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}, n \in \mathbb{N}$. Tính I_0, I_1, I_2 và lập công thức truy hồi để tính I_n.

Bài 5.14 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Cho hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn các tính chất:

(i) $f(0) = 0$.

(ii) f khả vi liên tục và tăng ngặt trên $J = [0, c]$, $c > 0$.

Với $a \in J$ và $b \in f^{-1}(J)$, chứng minh rằng

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx \geq ab$$

Mô tả ý nghĩa hình học của bất đẳng thức này.

Bài 5.15 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x) = 2018(1+x^2)\Big(1 + \int_0^x \frac{f(s)ds}{1+s^2}\Big), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 5.16 (CĐ Sư phạm Nam Định)**.** Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0,1]$, $f(0) = 2018$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f(x^n)\, dx$

Bài 5.17 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên)**.** Cho hàm $f(x)$ khả vi, liên tục trên $[0,1]$, thỏa mãn

$$f(1) = 5, \int\limits_0^1 xf(x)dx = 1, \int\limits_0^1 (f'(x))^2\, dx = 45.$$

Tính $\int\limits_0^1 f(x)e^{x^4} dx$

Bài 5.18 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên)**.** Tìm hàm $f(x)$ khả vi, liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(0) = 0,\ f(1) = \ln 3 \\ \int\limits_0^1 \left(e^{f(x)} f'(x)\right)^2 dx \leq 4 \end{cases}$

Bài 5.19 (ĐH Tây Bắc)**.** *Cho* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *là hàm khả vi liên tục đến cấp hai trên* $(0,1)$ *thỏa mãn các điều kiện* $f(0) = f(1) = 0$ *và* $x^2 f''(x) + x^4 f'(x) - f(x) = 0, \forall x \in (0,1)$. *Chứng minh rằng*
a) Nếu f *đạt giá trị lớn nhất* M *tại điểm* $x_0 \in (0,1)$ *thì* $M = 0$*;*
b) Hàm $f \equiv 0$ *trên* $[0,1]$.

Bài 5.20 (ĐH Tây Bắc)**.** *Cho* $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ *là hàm liên tục và* $f_n : (0,1] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$ *là dãy hàm số xác định bởi*

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_n(t)dt, \forall x \in (0,1], n \in \mathbb{N}.$$

Hãy xác định giới hạn của dãy hàm $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *trên tập* $(0,1]$ *trong các trường hợp sau:*
a) Hàm f_0 *đơn điệu.*
b) Hàm f_0 *biến thiên tùy ý.*

Bài 5.21 (ĐH Thủy Lợi)**.** Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi

$$u_n = \int_n^{n+2018} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Bài 5.22 (ĐH Thủy Lợi)**.** Tìm hàm số liên tục $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) = \begin{cases} 2018\ , & \text{nếu } x = 0 \\ \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\ , & \text{nếu } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Bài 5.23 (ĐH Thủy Lợi)**.** Xác định nguyên hàm

$$I = \int \frac{x^2 e^{\arctan x}}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

6 PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Bài 6.1 (ĐH Giao thông vận tải)**.** Tìm tất cả các hàm liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho

$$f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(x)f(y)\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Bài 6.2 (ĐH Quảng Bình)**.** Cho dãy số $(x_n)_n$ với
Tìm hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) = f(\sin x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài 6.3 (CĐ Sư phạm Nam Định)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ sao cho

$$P(2x-x^2) = (P(x))^2.$$

Bài 6.4 (ĐH Tây Bắc)**.** Hãy tìm đa thức f có hệ số thực, hệ số của lũy thừa bậc cao nhất bằng 1, thỏa mãn các điều kiện $\lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ và $f(x)\geq f(2018), \forall x\in\mathbb{R}$.

Phần III

HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

1 ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút.

1.1 BẢNG A

Bài 1. (a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ -8 & -8 & 8 \\ -16 & -16 & 16 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} -16 & -16 & 16 \\ -32 & -32 & 32 \\ -64 & -64 & 64 \end{pmatrix}.$$

(b)
Cách 1: Tính trực tiếp.
- Tính $\mathrm{rank}(A) = 2$.
- Tính

$$A^2 = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ -8 & -8 & 8 \\ -16 & -16 & 16 \end{pmatrix}.$$

và do đó $\mathrm{rank}(A^2) = 1$.
- Tổng quát, với $k > 1$ thì

$$A^k = \begin{pmatrix} -(-2)^k & -(-2)^k & (-2)^k \\ (-2)^{k+1} & (-2)^{k+1} & -(-2)^{k+1} \\ -(-2)^{k+2} & -(-2)^{k+2} & (-2)^{k+2} \end{pmatrix} = (-2)^k \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

và $\mathrm{rank}(A^k) = 1$.
Vậy $N = 2$.

Cách 2: Sử dụng dạng chuẩn Jordan.

- Tính dạng chuẩn Jordan của A, có

$$A \sim B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- Do đó

$$A^k \sim B^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{pmatrix}$$

với mọi $k > 1$. Nói riêng, $\operatorname{rank}(A^k) = 1$ với mọi $k > 1$.
Vậy số nhỏ nhất cần tìm là $N = 2$.

Bài 2. (a)
Cách 1:
- Gọi x_k, y_k tương ứng là số dân tại các vùng nông thôn và vùng đô thị sau k năm. Ví dụ, $x_0 = x, y_0 = y$. Ta có $x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{4}y_k, y_{k+1} = \frac{3}{4}y_k + \frac{1}{2}x_k$. Nói cách khác

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}.$$

- Từ đó suy ra,

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = A^n \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

trong đó $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$.
- Đa thức đặc trưng của A là $x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4} = (x-1)(x-\frac{1}{4})$. Từ đây, ta suy ra A có các véctơ riêng $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ tương ứng với các giá trị riêng $1, 1/4$. Vậy, nếu ta đặt $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, thì $P^{-1}AP = D$, trong đó D là ma trận đường chéo với các hệ số trên đường chéo lần lượt là 1 và $1/4$. Ta dễ dàng tính được $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.
- Suy ra $A = PDP^{-1}$ và

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 4^k} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^k} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3 \cdot 4^k} & \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4^k} \end{bmatrix}.$$

- Từ đó,

$$x_k = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 4^k}\right) x + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^k}\right) y,$$

$$y_k = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3 \cdot 4^k}\right) x + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4^k}\right) y.$$

Lưu ý: Để tính A^k cũng có thể dùng quy nạp theo n.

Cách 2: Lập luận tương tự trên, ta có $x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{4}y_k, y_{k+1} = \frac{3}{4}y_k + \frac{1}{2}x_k$. Thay $y_k = 4x_{k+1} - 2x_k$ vào phương trình thứ hai, ta được

$$4x_k - 5x_{k-1} + x_{k-2} = 0.$$

Từ đó dẫn đến $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{4^k}y - 2\frac{1}{4^k}x$. Vậy

$$x_k = x_0 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{4^i}y - 2\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{4^i}x.$$

Từ đó suy ra

$$x_k = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 4^k}\right)x + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^k}\right)y,$$

Tương tự

$$y_k = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3 \cdot 4^k}\right)x + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4^k}\right)y.$$

(b) Câu trả lời là không. Nếu $y_k = 4x_k$ thì thay vào phương trình trên ta được

$$(2 + 10/4^k)x + (2 - 5/4^k)y = 0.$$

Vì $x, y > 0$ nên điều này chỉ có thể xảy ra $k = 0$ và $y = 4x$, trái với giả thiết.

Bài 3. (a) Ta có $XA = X^3 = AX$.

(b) Gọi ma trận bên phải là A, như vậy $X^2 = A$. Dưới đây là hai cách giải
Cách 1: Giải hai hệ $AX = XA$ và $X^2 = A$.
- Giả sử $X = (x_{ij})_{3\times3}$. Từ $AX = XA$, ta được hệ phương trình của x_{ij}, rút gọn lại là

$$\begin{cases} x_{21} = x_{31} = x_{32} = x_{12} = 0, \\ x_{22} + 6x_{23} - x_{33} = 0 \\ x_{11} + 15x_{13} - x_{33} = 0. \end{cases}$$

- Kết hợp với $X^2 = A$, ta được $x_{11}^2 = 1$, $x_{22}^2 = 4$, $x_{33}^2 = 16$. Từ đó tính được x_{13}, x_{23}, các giá trị nhận được đều thỏa mãn $X^2 = A$. Vậy có tất cả $2^3 = 8$ ma trận thỏa mãn đề bài.

Cách 2: - Đa thức đặc trưng của A là $\Pi_A(x) = \det(xI_3 - A) = (x-1)(x-4)(x-16)$.
- Đa thức có 3 nghiệm đơn nên A có thể chéo hoá được với các hệ số trên đường chéo bằng $1, 4, 16$. Như vậy, ta có thể viết $A = P^{-1}DP$, trong đó D là

ma trận vuông với các hệ số trên đường chéo lần lượt là $1, 4, 16$ và P là một ma trận khả nghịch. Ta suy ra $PX^2P^{-1} = D$.
- Như vậy, nếu ta đặt $PXP^{-1} = Y$ thì phương trình ban đầu trở thành

$$Y^2 = D. \quad (*)$$

Theo câu (a), ta suy ra $YD = DY$. Từ đây, dễ thấy Y phải là một ma trận đường chéo. Gọi y_1, y_2, y_3 tương ứng là các hệ số trên đường chéo của Y. Thế thì (*) tương đương với $y_1^2 = 1, y_2^2 = 4, y_3^2 = 16$. Từ đây, ta suy ra 8 nghiệm là $(y_1, y_2, y_3) = (\pm 1, \pm 2, \pm 4)$. Ta kết luận rằng (*) có 8 nghiệm và vì thế phương trình ban đầu có 8 nghiệm.

Bài 4. (a) Đặt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ với $a, b, c, d > 0$. Đa thức đặc trưng của A có dạng $x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$. Biệt thức của đa thức này $\Delta = (a-d)^2 + 4bc > 0$. Vậy A có 2 giá trị riêng phân biệt và đều là số thực.
Vì tổng hai nghiệm bằng $a + d > 0$ nên trị riêng có giá trị tuyệt đối lớn nhất phải là số dương.
(b) Gọi t là trị riêng lớn nhất và $v = (x, y)$ là véc tơ riêng ứng với t. Ta có

$$(a-t)x + by = cx + (d-t)y = 0.$$

Nếu x và y không cùng dấu thì $a - t$ và b cùng dấu, $d - t$ và c cùng dấu. Do đó $a - t$ và $d - t$ đều > 0. Hay $t < \frac{1}{2}(a+d)$. Điều này mâu thuẫn với việc t là giá trị riêng lớn nhất (vì tổng các trị riêng bằng $a + d$).

(c) A có ít nhất một giá trị riêng khác 0. Thật vậy, nếu tất cả các trị riêng của A đều bằng 0 thì theo định lý Cayley-Hamilton, $A^3 = 0$. Điều này mâu thuẫn với việc A là ma trận dương.
Đặt t là trị riêng của A mà có mô đun lớn nhất (t có thể là số phức). Sau đây ta ký hiệu $|x|$ là véc tơ mà thành phần là mô đun của các thành phần của véc tơ x. Ta viết $x \geq y$ nếu các tọa độ của x đều $\geq$ tọa độ tương ứng của y. Giả sử x là véc tơ riêng của A ứng với t. Ta có (theo bất đẳng thức tam giác $|a + b| \leq |a| + |b|$),

$$|Ax| \leq A|x|.$$

Từ đó

$$|t||x| = |tx| = \leq A|x|.$$

Ta cần chứng minh dấu bằng xảy ra. Giả sử trái lại. Đặt $B = A/|t|$. Thì $B|x| - |x| = y > 0$. Nghĩa là véc tơ y khác 0 và có các thành phần không âm. Từ đó By có tất cả các thành phần > 0. Đặt $z := B|x|$ thì ta có

$$Bz - z = By.$$

Từ tính chất của By nói trên, tồn tại $\lambda > 1$ sao cho

$$Bz > \lambda z.$$

Theo trên thì z là véc tơ có các thành phần đều dương, B có các trị riêng đều có mô đun ≤ 1. Tác động B nhiều lần vào bất đẳng thức cuối cùng ta suy ra vô lý.

Bài 5. (a) Kí hiệu các điểm được đánh dấu, theo chiều kim đồng hồ, lần lượt là $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Dễ thấy rằng A_1 phải được nối với A_2, A_6 hoặc A_4.
- Nếu A_1 nối với A_4 thì ta phải nối A_2 với A_3 và A_5 với A_6.
- Nếu A_1 nối với A_2 thì hoặc là A_6 nối với A_5 còn A_3 nối với A_4, hoặc là A_6 nối với A_3 và A_5 nối với A_4.
- Tương tự, nếu A_1 nối với A_6 thì hoặc là A_2 nối với A_3 và A_4 với A_5 hoặc là A_2 nối với A_5 và A_3 với A_4.
Như vậy, có cả thảy 5 cách nối.

(b) Gọi X là tập 3 điểm được gán các số $1, 2, 3$ và Y là tập 3 điểm còn lại. Ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại 3 dây cung không có điểm chung, mỗi dây cung nối một điểm của X và một điểm của Y. Một cách nối như vậy thoả mãn yêu cầu bài toán vì tổng các số tương ứng với 3 dây cung này bằng $4+5+6-1-2-3 = 9$.
- Dễ thấy rằng có một điểm của X nằm kề một điểm của Y (đó là hai điểm liên tiếp nếu ta đi theo chiều kim đồng hồ). Kẻ dây cung nối 2 điểm này rồi loại bỏ 2 điểm đánh dấu này lẫn dây cung đi, ta còn lại 4 điểm được đánh dấu trên đường tròn và 2 tập con X', Y' tương ứng, mỗi tập gồm 2 điểm được đánh dấu.
- Bây giờ, lập luận tương tự, ta cũng suy ra có một điểm của X' kề nhau với một điểm Y' trên đường tròn đã bỏ đi 2 điểm trước đó. Kẻ dây cung nối 2 điểm này cũng như dây cung nối 2 điểm còn lại. Bây giờ, khôi phục lại dây cung ban đầu. Dễ thấy, 3 dây cung được kẻ đôi một không có điểm chung. Bài toán được giải quyết.

1.2 BẢNG B

Bài 1. Ký hiệu ma trận cần tính định thức là

$$A_n = \begin{pmatrix} a & 0 & \ldots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ldots & 0 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a & 1 \\ n-1 & n-2 & \ldots & 1 & a \end{pmatrix}$$

(a) Tính trực tiếp ta được $|A_4| = a^4 - 14a^2$;

(b) Khai triển theo cột thứ nhất, ta được

$$|A_n| = a|A_{n-1}| + (-1)^{n-1}(n-1)|B|,$$

với

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & n-1 \\ a & \dots & 0 & n-2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a & 1 \end{vmatrix}_{n-1 \times n-1} = (-1)^{n-2}(n-1)a^{n-2}.$$

Do đó

$$|A_n| = a|A_{n-1}| - (n-1)^2 a^{n-2} = a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = a^n - \frac{1}{6}a^{n-2}(n-1)n(2n-1).$$

Vậy $A_{2018} = a^{2018} - 1009.1345.2017.a^{2016} = a^{2018} - 2,737,280,785.a^{2016}$.

Bài 2. (a)
<u>Cách 1:</u>
- Gọi x_k, y_k tương ứng là số dân tại các vùng nông thôn và vùng đô thị sau k năm. Ví dụ, $x_0 = x, y_0 = y$. Ta có $x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{4}y_k, y_{k+1} = \frac{3}{4}y_k + \frac{1}{2}x_k$. Nói cách khác

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}.$$

- Từ đó suy ra,

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = A^n \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

trong đó $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$.

- Đa thức đặc trưng của A là $x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4} = (x-1)(x-\frac{1}{4})$. Từ đây, ta suy ra A có các véctơ riêng $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ tương ứng với các giá trị riêng $1, 1/4$. Vậy, nếu ta đặt $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, thì $P^{-1}AP = D$, trong đó D là ma trận đường chéo với các hệ số trên đường chéo lần lượt là 1 và $1/4$. Ta dễ dàng tính được $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

- Suy ra $A = PDP^{-1}$ và

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 4^k} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^k} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3 \cdot 4^k} & \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4^k} \end{bmatrix}.$$

- Từ đó,

$$x_k = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3\cdot 4^k}\right)x + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 4^k}\right)y,$$

$$y_k = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3\cdot 4^k}\right)x + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3\cdot 4^k}\right)y.$$

Lưu ý: Để tính A^k cũng có thể dùng quy nạp theo n.

<u>Cách 2:</u> Lập luận tương tự trên, ta có $x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{4}y_k, y_{k+1} = \frac{3}{4}y_k + \frac{1}{2}x_k$. Thay $y_k = 4x_{k+1} - 2x_k$ vào phương trình thứ hai, ta được

$$4x_k - 5x_{k-1} + x_{k-2} = 0.$$

Từ đó dẫn đến $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{4^k}y - 2\frac{1}{4^k}x$. Vậy

$$x_k = x_0 + \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{4^i}y - 2\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{4^i}x.$$

Từ đó suy ra

$$x_k = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3\cdot 4^k}\right)x + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 4^k}\right)y,$$

Tương tự

$$y_k = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3\cdot 4^k}\right)x + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3\cdot 4^k}\right)y.$$

(b) Câu trả lời là không. Nếu $y_k = 4x_k$ thì thay vào phương trình trên ta được

$$(2 + 10/4^k)x + (2 - 5/4^k)y = 0.$$

Vì $x, y > 0$ nên điều này chỉ có thể xảy ra $k = 0$ và $y = 4x$, trái với giả thiết.

Bài 3. (a) Ta có

$$A^2 = \begin{pmatrix} 15 & 15 & -10 & -10 \\ 15 & 15 & -10 & -10 \\ 35 & 10 & -15 & -15 \\ 10 & 35 & -15 & -15 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 100 & -25 & -25 & -25 \\ 100 & -25 & -25 & -25 \\ 100 & -25 & -25 & -25 \\ 200 & -50 & -50 & -50 \end{pmatrix}$$

Từ đó tính được $A^4 = 0$;
(b)
<u>Cách 1:</u>
- Dễ thấy nghiệm của hệ $Ax = 0$ cũng là nghiệm của hệ còn lại.

- Ngược lại, giả sử véc tơ x là một nghiệm của hệ phương trình (2), ta có

$$\left(A + A^2 + A^3\right) x = \left(E + A + A^2\right) Ax = 0,$$

trong đó E là ma trận đơn vị.
- Chứng minh $E + A + A^2 = (E - A)^{-1}$ là ma trận khả nghịch.
- Vì vậy $Ax = 0$.

Lưu ý: Cũng có thể chứng minh $A + A^2$ là lũy linh để suy ra $E + A + A^2$ là khả nghịch.

Cách 2:
- Tính trực tiếp ma trận

$$A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 117 & -8 & -33 & -38 \\ 121 & -9 & -34 & -39 \\ 136 & -9 & -39 & -44 \\ 211 & -14 & -59 & -69 \end{pmatrix}$$

- Giải hệ phương trình ta được nghiệm $(\frac{1}{2}x_4, \frac{1}{2}x_4, \frac{1}{2}x_4, x_4)$.
- Mặt khác, giải hệ $Ax = 0$ ta cũng được nghiệm $(\frac{1}{2}x_4, \frac{1}{2}x_4, \frac{1}{2}x_4, x_4)$.

Bài 4. (a) Đặt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ với $a, b, c, d > 0$. Đa thức đặc trưng của A có dạng $x^2 - (a + d)x + (ad - bc)$. Biệt thức của đa thức này $\Delta = (a - d)^2 + 4bc > 0$. Vậy A có 2 giá trị riêng phân biệt và đều là số thực.
Vì tổng hai nghiệm bằng $a + d > 0$ nên trị riêng có giá trị tuyệt đối lớn nhất phải là số dương.
(b) Gọi t là trị riêng lớn nhất và $v = (x, y)$ là véc tơ riêng ứng với t. Ta có

$$(a - t)x + by = cx + (d - t)y = 0.$$

Nếu x và y không cùng dấu thì $a - t$ và b cùng dấu, $d - t$ và c cùng dấu. Do đó $a - t$ và $d - t$ đều > 0. Hay $t < \frac{1}{2}(a + d)$. Điều này mâu thuẫn với việc t là giá trị riêng lớn nhất (vì tổng các trị riêng bằng $a + d$).
(c) A có ít nhất một giá trị riêng khác 0. Thật vậy, nếu tất cả các trị riêng của A đều bằng 0 thì theo định lý Cayley-Hamilton, $A^3 = 0$. Điều này mâu thuẫn với việc A là ma trận dương.
Đặt t là trị riêng của A mà có mô đun lớn nhất (t có thể là số phức). Sau đây ta ký hiệu $|x|$ là véc tơ mà thành phần là mô đun của các thành phần của véc tơ x. Ta viết $x \geq y$ nếu các tọa độ của x đều $\geq$ tọa độ tương ứng của y. Giả sử x là véc tơ riêng của A ứng với t. Ta có (theo bất đẳng thức tam giác $|a + b| \leq |a| + |b|$),

$$|Ax| \leq A|x|.$$

Từ đó

$$|t||x| = |tx| =\leq A|x|.$$

Ta cần chứng minh dấu bằng xảy ra. Giả sử trái lại. Đặt $B = A/|t|$. Thì $B|x| - |x| = y > 0$. Nghĩa là véc tơ y khác 0 và có các thành phần không âm. Từ đó By có tất cả các thành phần > 0. Đặt $z := B|x|$ thì ta có

$$Bz - z = By.$$

Từ tính chất của By nói trên, tồn tại $\lambda > 1$ sao cho

$$Bz > \lambda z.$$

Theo trên thì z là véc tơ có các thành phần đều dương, B có các trị riêng đều có mô đun ≤ 1. Tác động B nhiều lần vào bất đẳng thức cuối cùng ta suy ra vô lý.

Bài 5. (a) Kí hiệu các điểm được đánh dấu, theo chiều kim đồng hồ, lần lượt là $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Dễ thấy rằng A_1 phải được nối với A_2, A_6 hoặc A_4.
- Nếu A_1 nối với A_4 thì ta phải nối A_2 với A_3 và A_5 với A_6.
- Nếu A_1 nối với A_2 thì hoặc là A_6 nối với A_5 còn A_3 nối với A_4, hoặc là A_6 nối với A_3 và A_5 nối với A_4.
- Tương tự, nếu A_1 nối với A_6 thì hoặc là A_2 nối với A_3 và A_4 với A_5 hoặc là A_2 nối với A_5 và A_3 với A_4.
Như vậy, có cả thảy 5 cách nối.

(b) Tổng của các số gán cho các dây cung là

$$S = |a - x| + |b - y| + |c - z|,$$

với a, b, c, x, y, z là các số từ $1, 2, \ldots, 6$. Tổng này lớn nhất khi a, b, c lớn nhất và x, y, z nhỏ nhất.
Kết luận: $\max(S) = 9$, đạt được nếu $x = 1, y = 2, z = 3$, $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$.

2 GIẢI TÍCH

Thời gian làm bài: 180 phút.

2.1 BẢNG A

Bài 1. Dễ thấy $x_n > 1$ với mọi $n \geqslant 1$. Hơn nữa, $2018(x_{n+1} - x_n) = x_n^2 - x_n > 0$ (vì $x_n > 1$) với mọi $n \geqslant 1$. Từ đây suy ra $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ là một dãy tăng ngặt.
Giả sử dãy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ bị chặn trên; tức là (do tính tăng của dãy), tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{n\to\infty} x_n = a > 1$.
Chuyển $2018x_{n+1} = x_n^2 + 2017x_n$ qua giới hạn ta được $2018a = a^2 + 2017a$; suy ra $a = 0$ hoặc $a = 1$, mâu thuẫn! Vậy, dãy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ không bị chặn trên.
Với mọi $n \geqslant 1$, ta có:

$$
\begin{aligned}
&2018(x_{n+1} - 1) = x_n^2 + 2017x_n - 2018 = (x_n + 2018)(x_n - 1)\\
\Rightarrow &\frac{1}{x_n - 1} = \frac{x_n + 2018}{2018(x_{n+1} - 1)} = \frac{x_n}{2018(x_{n+1} - 1)} + \frac{1}{x_{n+1} - 1}\\
\Rightarrow &\frac{x_n}{x_{n+1} - 1} = 2018\left(\frac{1}{x_n - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}\right).
\end{aligned}
$$

Suy ra: $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{x_{i+1} - 1} = 2018\left(\dfrac{1}{x_1 - 1} - \dfrac{1}{x_{n+1} - 1}\right)$.
Vì dãy $\{x_n\}$ tăng và không bị chặn trên nên $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.
Vậy, $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{x_{i+1} - 1} = \dfrac{2018}{x_1 - 1} = 1$.

Bài 2. Cách 1:

— Đặt $F(x) = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$, ta có hàm F khả vi trên $[0,1]$ với $F(0) = F(1) = 0$. Theo định lý Rolle, tồn tại $x_0 \in (0,1)$ sao cho $F'(x_0) = 0$, tức là $\int_0^{x_0} f(t)dt = 0$.

— Đặt $G(x) = e^{-2018f(x)}\int_0^x f(t)dt$, ta có hàm G khả vi trên $[0,1]$ với $G(0) = G(x_0) = 0$. Vẫn theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (0, x_0)$ sao cho $G'(c) = 0$. Từ đây ta được $f(c) = 2018f'(c)\int_0^c f(t)dt$.

Cách 2:

— Đặt $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, ta có $F'(x) = f(x)$ và $\int_0^x F(t)dt = xF(x) - \int_0^x tf(t)dt = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$. Do đó, $\int_0^1 F(t)dt = 0$. Theo định lý giá trị trung bình cho tích phân, tồn tại $x_0 \in (0,1)$ sao cho $F(x_0) = 0$ hay $\int_0^{x_0} f(t)dt = 0$.

— Đặt $G(x) = e^{-2018f(x)} \int_0^x f(t)dt$, ta có hàm G khả vi trên $[0,1]$ với $G(0) = G(x_0) = 0$. Theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (0, x_0)$ sao cho $G'(c) = 0$. Từ đây ta được $f(c) = 2018f'(c) \int_0^c f(t)dt$.

Bài 3. Cách 1:

- Đặt $M = \max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$ $(0 \le M < +\infty$ do f' liên tục) và

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + M\frac{(x-a)(x-b)}{2} \quad (\forall x \in [a,b]).$$

Ta có: $F(a) = F(b) = 0$ và $F''(x) = f'(x) + M \ge 0 \quad \forall x \in [a,b]$.

- Do F là hàm lồi trên $[a,b]$ và $F(a) = F(b) = 0$ nên $F(x) \le 0 \quad \forall x \in [a,b]$; vậy,

$$\int_a^x f(t)dt \le M\frac{(x-a)(b-x)}{2} \le \frac{M}{2}\left(\frac{(x-a)+(b-x)}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{8}M$$

với mọi $x \in [a,b]$.

- Đặt $G(x) = \int_a^x f(t)dt - M\dfrac{(x-a)(x-b)}{2}$ $(\forall x \in [a,b])$, ta có hàm G lõm trên $[a,b]$ và đi đến bất đẳng thức (đối ngẫu):

$$\int_a^x f(t)dt \ge -\frac{(b-a)^2}{8}M$$

với mọi $x \in [a,b]$.

Cách 2 (SV. Phạm Bảo Trung - ĐH Bách Khoa Hà Nội):
Đặt $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, khi đó $F(x)$ là hàm số khả vi cấp 2, liên tục trên đoạn $[a,b]$. Từ giả thiết bài toán $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, ta có:

$$F(a) = F(b) = 0$$

Lấy x bất kỳ thuộc đoạn $[a,b]$, ta chỉ cần chứng minh:

$$|F(x)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{8} \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng với $x = a$ hoặc $x = b$. Xét trường hợp $x \in (a,b)$, áp dụng khai triển Taylor tại x, ta có, $\forall y \in [a,b]$

$$F(y) = F(x) + F'(x)(y-x) + \frac{1}{2}F''(\theta)(y-x)^2$$

trong đó, θ là số thực nằm giữa x và y.
Sử dụng khai triển trên lần lượt với $y = a$ và $y = b$, ta có:

$$0 = F(a) = F(x) + F'(x)(a-x) + \frac{1}{2}F''(\theta_1)(a-x)^2 \quad (4)$$

$$0 = F(b) = F(x) + F'(x)(b-x) + \frac{1}{2}F''(\theta_2)(b-x)^2 \quad (5)$$

Nhân hai vế của (4) với $b - x$, hai vế của (5) với $a - x$, sau đó, trừ theo vế các kết quả thu được rồi rút gọn, ta có:

$$(b-a)F(x) = (b-x)(a-x)\frac{(b-x)F''(\theta_2) + (a-x)F''(\theta_1)}{2} \quad (6)$$

Lấy giá trị tuyệt đối hai vế của (6) với chú ý

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(b-x)F''(\theta_2) + (a-x)F''(\theta_1)}{2}\right| \\
&\leqslant \frac{(b-x)\left|F''(\theta_2)\right| + (x-a)\left|F''(\theta_1)\right|}{2} \\
&\leqslant \frac{(b-x)\max_{x\in[a,b]}\left|F''(x)\right| + (x-a)\max_{x\in[a,b]}\left|F''(x)\right|}{2} \\
&= \frac{b-a}{2}\max_{x\in[a,b]}\left|F''(x)\right|
\end{aligned}$$

và

$$\left|(b-x)(a-x)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$$

Ta có

$$(b-a)\left|F(x)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{8}\max_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|$$

Rút gọn cả 2 vế cho $b - a$, ta có đpcm.

Cách 3 (SV. Phạm Thành Nam - ĐH Kinh tế Quốc dân):

Lấy $c \in [a,b]$, đặt $t = \dfrac{c-a}{b-a}x + \dfrac{ab-ac}{b-a}$. Ta có $dt = \dfrac{c-a}{b-a}dx$ và

$$\begin{aligned}
I = \int_a^c f(t)dt =& \frac{c-a}{b-a}\int_a^b f(\frac{c-a}{b-a}x + \frac{ab-ac}{b-a})dx\\
=& \frac{c-a}{b-a}\int_b^a [f(\frac{c-a}{b-a}x + \frac{ab-ac}{b-a}) - f(x)]dx\\
=& \frac{c-a}{b-a}\int_b^a [\frac{c-a}{b-a}x + \frac{ab-ac}{b-a} - x]f'(c_x)dx\\
& (c_x \text{ nằm giữa } x \text{ và } \frac{c-a}{b-a}x + \frac{ab-ac}{b-a})\\
=& \frac{c-a}{b-a}\int_b^a [\frac{c-b}{b-a}x + \frac{ab-ac}{b-a}]f'(c_x)dx.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
|I| &\leq \frac{c-a}{b-a}\int_b^a |[\frac{c-b}{b-a}x + \frac{ab-ac}{b-a}]f'(c_x)|dx\\
&\leq \frac{c-a}{b-a}.M\int_b^a |\frac{c-b}{b-a}x + \frac{ab-ac}{b-a}|dx \;\text{ với } M = \max_{x\in[a,b]}|f'(x)|\\
&= -\frac{c-a}{b-a}.M\int_b^a [\frac{c-b}{b-a}x + \frac{ab-ac}{b-a}]dx \;\text{ do } \frac{c-b}{b-a}x + \frac{ab-ac}{b-a} \leq 0\\
&= -[\frac{c-b}{b-a}.\frac{b^2-a^2}{2} + \frac{ab-ac}{b-a}.(b-a)].\frac{c-a}{b-a}.M\\
&= \frac{(b-c)(b-a)}{2}.\frac{c-a}{b-a}.M\\
&= \frac{(c-a)(b-c)}{2}.M\\
&\leq \frac{(b-a)^2}{8}.M
\end{aligned}$$

Do đó

$$|\int_a^c f(t)dt| \leq \frac{(b-a)^2}{8}\max_{x\in[a,b]}|f'(x)| \;\; \forall c \in [a,b].$$

Vậy

$$\max_{x\in[a,b]}|\int_a^x f(t)dt| \leq \frac{(b-a)^2}{8}\max_{x\in[a,b]}|f'(x)|.$$

Bài 4. Theo giả thiết, $OA = x\ (\geq 0)$, $OB = 4x$. Ta có

$$4x = \frac{OB}{OC} = \tan(O\hat{C}A + \theta) = \frac{\tan O\hat{C}A + \tan\theta}{1 - \tan O\hat{C}A \cdot \tan\theta} = \frac{x + \tan\theta}{1 - x\tan\theta}.$$

Vậy, $\tan\theta = \dfrac{3x}{1+4x^2}$.
Góc θ lớn nhất khi $\tan\theta$ lớn nhất. Và ta cần tìm x sao cho $\tan\theta$ đạt giá trị lớn nhất.
Đặt $f(x) = \dfrac{3x}{1+4x^2}$. Ta có $f'(x) = \dfrac{3(1-4x^2)}{(1+4x^2)^2}$. Do đó $f'(x) = 0$ khi và chỉ khi $x = \dfrac{1}{2}$. Ta dễ thấy $f'(x) > 0$ khi $0 \leq x < \dfrac{1}{2}$ và $f'(x) < 0$ khi $x > \dfrac{1}{2}$.
Vậy, hàm số f đạt giá trị lớn nhất tại $x = \dfrac{1}{2}$. Vị trí của hai vận động viên trên đường đua để góc nhìn θ lớn nhất được cho bởi $OA = \dfrac{1}{2}$ (km) và $OB = 2$ (km).

Bài 5. Từ giả thiết, f tăng trên $[0,+\infty)$; do đó, $f(x) \geq f(0) = 0$ với mọi $x \geq 0$.
Vì

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f'(x)(1+x^2+f(x))} = +\infty,$$

nên tồn tại $x_0 > 0$ sao cho

$$\frac{1}{f'(x)(1+x^2+f(x))} \geq 1 \text{ với mọi } x \geq x_0.$$

Suy ra $f'(x) \leq \dfrac{1}{1+x^2+f(x)} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ với mọi $x \geq x_0$.
Có $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt \leq \int_{x_0}^{x} \dfrac{dt}{1+t^2} = \arctan x - \arctan x_0 \quad \forall x \geq x_0$.
Do đó $f(x) \leq \dfrac{\pi}{2} - \arctan x_0 + f(x_0) \quad \forall x \geq x_0$.
Xét hàm số $f(x) = \arctan x$ (bị chặn trên!). Ta có $f(0) = 0$ và $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} > 0$ trên $[0,+\infty)$. Ngoài ra,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f'(x)(1+x^2+f(x))} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^2+\arctan x} = 1.$$

Cách 1: Xét hàm số $g(x) = \arctan(x^2+x)$. Ta có $g(0) = 0$ và $g'(x) = \dfrac{2x+1}{1+(x^2+x)^2} > 0$ trên $[0,+\infty)$. Ngoài ra,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{g'(x)(1+x^2+g(x))} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+(x^2+x)^2}{(2x+1)\,(1+x^2+\arctan(x^2+x))} = +\infty.$$

Cách 2: Xét hàm số $g(x) = 1 - e^{-x}$. Ta có $g(0) = 0$ và $g'(x) = e^{-x} > 0$ trên $[0,+\infty)$. Ngoài ra,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{g'(x)(1+x^2+g(x))} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2+x^2-\dfrac{1}{e^x}} = +\infty.$$

2.2 BẢNG B

Bài 1. Dễ thấy $x_n > 1$ với mọi $n \geqslant 1$. Hơn nữa, $2018(x_{n+1} - x_n) = x_n^2 - x_n > 0$ (vì $x_n > 1$) với mọi $n \geqslant 1$. Từ đây suy ra $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ là một dãy tăng ngặt.
Giả sử dãy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ bị chặn trên; tức là (do tính tăng của dãy), tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{n\to\infty} x_n = a > 1$.
Chuyển $2018x_{n+1} = x_n^2 + 2017x_n$ qua giới hạn ta được $2018a = a^2 + 2017a$; suy ra $a = 0$ hoặc $a = 1$, mâu thuẫn! Vậy, dãy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ không bị chặn trên.
Với mọi $n \geqslant 1$, ta có:

$$\begin{aligned}
&2018(x_{n+1} - 1) = x_n^2 + 2017x_n - 2018 = (x_n + 2018)(x_n - 1)\\
\Rightarrow &\frac{1}{x_n - 1} = \frac{x_n + 2018}{2018(x_{n+1} - 1)} = \frac{x_n}{2018(x_{n+1} - 1)} + \frac{1}{x_{n+1} - 1}\\
\Rightarrow &\frac{x_n}{x_{n+1} - 1} = 2018\left(\frac{1}{x_n - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}\right).
\end{aligned}$$

Suy ra: $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{x_{i+1} - 1} = 2018\left(\dfrac{1}{x_1 - 1} - \dfrac{1}{x_{n+1} - 1}\right)$.
Vì dãy $\{x_n\}$ tăng và không bị chặn trên nên $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.
Vậy, $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{x_{i+1} - 1} = \dfrac{2018}{x_1 - 1} = 1$.

Bài 2. Khi $x \neq 0$, ta có $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ và $f'(x) = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$. Xét giới hạn $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$. Vì $x \to 0$ và $\sin\dfrac{1}{x}$ bị chặn (bởi 1) nên $\lim_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$. Vậy, $f'(0) = 0$.
Xét giới hạn $\lim_{x\to 0} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} g(x)$ với $g(x) = 2\sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$.
Chọn dãy $x_n = \dfrac{1}{2n\pi} \to 0$ khi $n \to \infty$. Ta có $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty}(2\sin(2n\pi) - 2n\pi\cos(2n\pi)) = \lim_{n\to\infty}(-2n\pi) = -\infty$.
(Cũng có thể chọn dãy $y_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi} \to 0$ khi $n \to \infty$. Ta có $\lim_{n\to\infty} g(y_n) = \lim_{n\to\infty}(2n+1)\pi = +\infty$.)
Từ đó, $g(x)$ không có giới hạn (hữu hạn) khi $x \to 0$; vì thế, hàm f không có đạo hàm cấp hai tại $x = 0$.

Bài 3. Cách 1:

— Đặt $F(x) = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$, ta có hàm F khả vi trên $[0, 1]$ với $F(0) = F(1) = 0$. Theo định lý Rolle, tồn tại $x_0 \in (0, 1)$ sao cho $F'(x_0) = 0$, tức là $\int_0^{x_0} f(t)dt = 0$.

— Đặt $G(x) = e^{-2018x} \int_0^x f(t)dt$, ta có hàm G khả vi trên $[0,1]$ với $G(0) = G(x_0) = 0$. Cũng theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (0, x_0)$ sao cho $G'(c) = 0$. Từ đây ta được $f(c) = 2018 \int_0^c f(t)dt$.

Cách 2:

— Đặt $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, ta có $F'(x) = f(x)$ và $\int_0^x F(t)dt = xF(x) - \int_0^x tf(t)dt = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$. Do đó $\int_0^1 F(t)dt = 0$. Theo định lý giá trị trung bình cho tích phân, tồn tại $x_0 \in (0,1)$ sao cho $F(x_0) = 0$ hay $\int_0^{x_0} f(t)dt = 0$.

— Đặt $G(x) = e^{-2018x} \int_0^x f(t)dt$, ta có hàm G khả vi trên $[0,1]$ với $G(0) = G(x_0) = 0$. Theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (0, x_0)$ sao cho $G'(c) = 0$. Từ đó $f(c) = 2018 \int_0^c f(t)dt$.

Bài 4. Theo giả thiết, $OA = x$ (≥ 0), $OB = 4x$. Ta có

$$4x = \frac{OB}{OC} = \tan(O\hat{C}A + \theta) = \frac{\tan O\hat{C}A + \tan\theta}{1 - \tan O\hat{C}A \cdot \tan\theta} = \frac{x + \tan\theta}{1 - x\tan\theta}.$$

Vậy, $\tan\theta = \dfrac{3x}{1+4x^2}$.

Góc θ lớn nhất khi $\tan\theta$ lớn nhất. Và ta cần tìm x sao cho $\tan\theta$ đạt giá trị lớn nhất.

Đặt $f(x) = \dfrac{3x}{1+4x^2}$. Ta có $f'(x) = \dfrac{3(1-4x^2)}{(1+4x^2)^2}$. Do đó $f'(x) = 0$ khi và chỉ khi $x = \dfrac{1}{2}$. Ta dễ thấy $f'(x) > 0$ khi $0 \leq x < \dfrac{1}{2}$ và $f'(x) < 0$ khi $x > \dfrac{1}{2}$.

Vậy, hàm số f đạt giá trị lớn nhất tại $x = \dfrac{1}{2}$. Vị trí của hai vận động viên trên đường đua để góc nhìn θ lớn nhất được cho bởi $OA = \dfrac{1}{2}$ (km) và $OB = 2$ (km).

Bài 5. Từ giả thiết, f tăng trên $[0, +\infty)$; do đó, $f(x) \geq f(0) = 0$ với mọi $x \geq 0$.

Vì

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f'(x)(1+x^2+f(x))} = +\infty,$$

nên tồn tại $x_0 > 0$ sao cho

$$\frac{1}{f'(x)(1+x^2+f(x))} \geq 1 \text{ với mọi } x \geq x_0.$$

Suy ra $f'(x) \leq \dfrac{1}{1+x^2+f(x)} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ với mọi $x \geq x_0$.

Có $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt \leq \int_{x_0}^{x} \dfrac{dt}{1+t^2} = \arctan x - \arctan x_0 \quad \forall x \geq x_0$.
Do đó $f(x) \leq \dfrac{\pi}{2} - \arctan x_0 + f(x_0) \quad \forall x \geq x_0$.
Xét hàm số $f(x) = \arctan x$ (bị chặn trên!). Ta có $f(0) = 0$ và $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} > 0$ trên $[0, +\infty)$. Ngoài ra,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f'(x)(1+x^2+f(x))} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^2+\arctan x} = 1.$$

Cách 1: Xét hàm số $g(x) = \arctan(x^2+x)$. Ta có $g(0) = 0$ và $g'(x) = \dfrac{2x+1}{1+(x^2+x)^2} > 0$ trên $[0, +\infty)$. Ngoài ra,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{g'(x)(1+x^2+g(x))} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+(x^2+x)^2}{(2x+1)\,(1+x^2+\arctan(x^2+x))} = +\infty.$$

Cách 2: Xét hàm số $g(x) = 1 - e^{-x}$. Ta có $g(0) = 0$ và $g'(x) = e^{-x} > 0$ trên $[0, +\infty)$. Ngoài ra,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{g'(x)(1+x^2+g(x))} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2+x^2-\dfrac{1}{e^x}} = +\infty.$$

3 PHỔ THÔNG

Thời gian làm bài: 180 phút.

3.1 NGÀY 1 - Biến đổi Abel và một số ứng dụng

A. Biến đổi Abel và bất đẳng thức Abel

Bài 1. Ta sẽ chỉ chứng minh đẳng thức đầu tiên, đẳng thức thứ hai nhận được bằng cách hoán đổi vai trò của hai dãy. Do $y_1 = Y_1$ và $y_k = Y_k - Y_{k-1}$ với mọi $k = 2, \dots, n$ nên

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k &= x_1 y_1 + \sum_{k=2}^{n} x_k (Y_k - Y_{k-1}) = x_1 Y_1 + \sum_{k=2}^{n} x_k Y_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_{k+1} Y_k \\ &= x_n Y_n + \sum_{k=1}^{n-1} x_k Y_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_{k+1} Y_k = x_n Y_n - \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) Y_k.\end{aligned}$$

Bài 2. Theo Bài 1 ta có

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_n Y_n + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(x_k - x_{k+1})}_{\geq 0} \underbrace{Y_k}_{\geq m} \right) \geq x_n m + \left(\sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) m \right) = x_1 m.$$

Bất đẳng thức còn lại là hoàn toàn tương tự.

Bài 3. Ta chỉ cần áp dụng Bài 2 cho $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, \dots, x_n = \frac{1}{n}$.

B. Ứng dụng vào việc tính một số tổng và thiết lập một số đẳng thức

Bài 4. a) Áp dụng Bài 1, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} H_k &= \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot H_k = \left(\sum_{k=0}^{n} 1 \right) H_n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{k} 1 \right) (H_{k+1} - H_k) \\ &= (n+1) H_n - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \frac{1}{k+1} = (n+1) H_n - \sum_{k=0}^{n-1} 1 = (n+1) H_n - n.\end{aligned}$$

b) Theo Bài 1, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kH_k &= \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) H_n - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{k} i\right)(H_{k+1}-H_k)\\ &= \frac{n(n+1)}{2}H_n - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k(k+1)}{2}\frac{1}{k+1}\\ &= \frac{n(n+1)}{2}H_n - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k\\ &= \frac{n(n+1)}{2}H_n - \frac{(n-1)n}{4}.\end{aligned}$$

Bài 5. Nhận xét rằng, với mọi $k \geq m$, ta có đẳng thức

$$\sum_{i=m}^{k}\binom{i}{m} = \binom{k+1}{m+1}. \tag{7}$$

Thật vậy, (7) được suy ra từ việc cộng, vế theo vế, các đồng nhất thức $\binom{i}{m} = \binom{i+1}{m+1} - \binom{i}{m+1}$, với $i = m, m+1, \ldots, k$ (chú ý quy ước $\binom{i}{j} = 0$ khi $i < j$). Từ đó, theo PT.1 thì

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}H_k &= \left(\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}\right)H_n - \sum_{k=m}^{n-1}\left(\sum_{i=m}^{k}\binom{i}{m}\right)(H_{k+1}-H_k)\\ &= \binom{n+1}{m+1}H_n - \sum_{k=m}^{n-1}\binom{k+1}{m+1}\frac{1}{k+1}.\end{aligned}$$

Bây giờ, để ý rằng $\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{m+1} = \frac{1}{m+1}\binom{k}{m}$. Suy ra

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n-1}\binom{k+1}{m+1}\frac{1}{k+1} &= \frac{1}{m+1}\sum_{k=m}^{n-1}\binom{k}{m}\\ &\underbrace{=}_{\text{do (7)}} \frac{1}{m+1}\binom{n}{m+1}.\end{aligned}$$

Từ đó,

$$T_{m,n} = \sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}H_k = \binom{n+1}{m+1}\left(H_n - \frac{n-m}{(n+1)(m+1)}\right).$$

C. Một số ứng dụng khác

Bài 6. Ta có, theo Bài 1,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = (a_1 + \cdots + a_n) b_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_1 + \cdots + a_k)(b_k - b_{k+1}).$$

Do $a_1 + \cdots + a_k \geq \frac{k}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$ và $b_k - b_{k+1} \geq 0$ nên

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &\geq (a_1 + \cdots + a_n) b_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n}(a_1 + \cdots + a_n)(b_k - b_{k+1}) \\ &= \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)(n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} k(b_k - b_{k+1})) \\ &= \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n).\end{aligned}$$

(Đẳng thức cuối cùng đến từ Bài 1, áp dụng cho hai dãy $x_1 = \ldots = x_n = 1$ và $y_1 = b_1, y_2 = b_2, \ldots, y_n = b_n$.)

Bài 7. a) Không giảm tổng quát, ta có thể giả sử $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$. Thế thì ta có

$$a_1 \geq \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \cdots \geq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Mặt khác, $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq 1$. Từ đó suy ra $a_1 + \cdots + a_k \geq k$ với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$.
Cuối cùng, từ Bài 2 ta có: nếu $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$ và $y_1 \geq 0, y_1 + y_2 \geq 0, \ldots, y_1 + \cdots + y_n \geq 0$ thì $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geq 0$. Áp dụng cho $x_k = a_k^p, y_k = a_k - 1$ ta nhận được

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^p (a_k - 1) \geq 0.$$

Từ đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh.
b) Áp dụng câu a) cho $a_k = \sqrt{\frac{x_{k+1}}{x_k}}$ (với quy ước $x_{n+1} = x_1$) và $p = 2$.

Bài 8. Đặt $b_k = k^3$. Thế thì $0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ và $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_k$ với mọi $1 \leq k \leq n$. Ta sẽ chỉ ra

$$\sqrt[3]{a_1} + \cdots + \sqrt[3]{a_n} \leq \sqrt[3]{b_1} + \cdots + \sqrt[3]{b_n} \tag{8}$$

Nhắc lại rằng, từ Bài 2 ta có: nếu $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$ và $y_1 \geq 0, y_1 + y_2 \geq 0, \ldots, y_1 + \cdots + y_n \geq 0$ thì $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geq 0$. Áp dụng cho $x_k = \frac{1}{\sqrt[3]{b_k^2}}, y_k = b_k - a_k$ $(1 \leq k \leq n)$, ta thu được

$$\frac{b_1 - a_1}{\sqrt[3]{b_1^2}} + \cdots + \frac{b_n - a_n}{\sqrt[3]{b_n^2}} \geq 0,$$

hay

$$\frac{a_1}{\sqrt[3]{b_1^2}} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt[3]{b_n^2}} \leq \sqrt[3]{b_1} + \cdots + \sqrt[3]{b_n}. \tag{9}$$

Bây giờ, ta nhắc lại bất đẳng thức Hölder: Cho $2n$ số thực dương $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_n$ và hai số thực dương p, q thoả mãn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Thế thì, $x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \leq (x_1^p + \cdots + x_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (y_1^q + \cdots + y_n^q)^{\frac{1}{q}}$. Áp dụng bất đẳng thức này cho $x_k = \frac{\sqrt[3]{a_k}}{\sqrt[9]{b_k^2}}, y_k = \sqrt[9]{b_k^2}$ $(1 \leq k \leq n)$, $p = 3, q = \frac{3}{2}$ ta suy ra

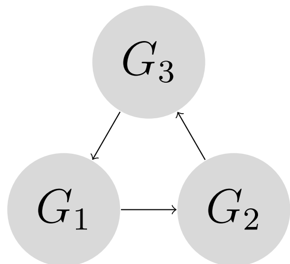
$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt[3]{a_k} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt[3]{b_k^2}} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt[3]{b_k} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Kết hợp bất đẳng thức này với (9) ta thu được (8).
Như vậy, ta có $\sqrt[3]{a_1} + \cdots + \sqrt[3]{a_n} \leq 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $a_k = k^3$ $(1 \leq k \leq n)$ nên $\frac{n(n+1)}{2}$ chính là giá trị lớn nhất cần tìm.

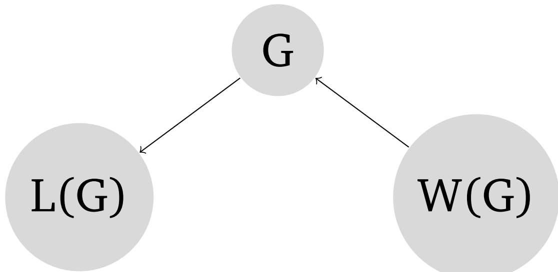
3.2 NGÀY 2 - Bài toán về đàn gà

A. Sự tồn tại của gà vua

Bài 1. a) Hiển nhiên, vì nếu K_1, K_2 là 2 hoàng đế thì K_1 thắng K_2 (do K_1 là hoàng đế) và K_2 thắng K_1 (do K_2 là hoàng đế), mâu thuẫn.
b) Một đàn gà có 2 con là một ví dụ về đàn gà có 1 hoàng đế.
c) Một đàn gà 3 con thắng vòng tròn lẫn nhau là một ví dụ về đàn gà không có hoàng đế.
Trong sơ đồ sau và các sơ đồ khác trong đáp án, mũi tên từ A hướng đến B nói rằng A thắng B.



Bài 2. a) Nếu G thắng G' và G' thắng G'' thì ta nói G thắng gián tiếp G''. Xét các tập $W(G), L(G)$ tương ứng là tập các con gà thắng, thua G.

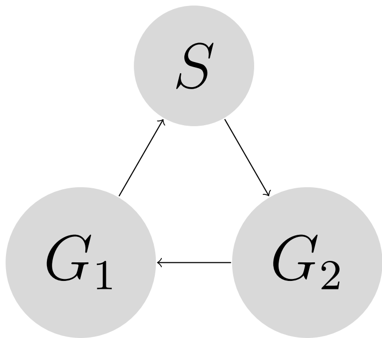


Giả sử G không phải là vua. Khi đó, $W(G) \neq \emptyset$ và hơn nữa, phải tồn tại một con gà $G' \in W(G)$ sao cho G không thắng gián tiếp G'. Ta suy ra không có con gà nào trong $L(G)$ thắng G'. Như vậy, G' thắng mọi con gà trong $L(G)$ nên G' thắng nhiều con gà hơn G (do ngoài $L(G)$ ra, G' còn thắng G), mâu thuẫn.
b) Theo giả thiết, $W(G) \neq \emptyset$. Xét đàn gà $W(G)$ (loại tạm thời các con gà khác khỏi đàn). Theo a), có một con gà K là vua trong $W(G)$: với mọi $G' \in W(G)$, hoặc là K thắng G', hoặc là K thắng gián tiếp G'. Thế nhưng, K thắng G, và rõ ràng, với mọi $G'' \in L(G)$ thì K cũng thắng gián tiếp G'' (qua G). Điều này chứng tỏ K là một vua trong đàn gà ban đầu (và G thua K).

Bài 3. Theo Bài 2(a), đàn gà phải có ít nhất một vua K_1 nào đó. Vẫn theo Bài 2, do K_1 không phải là hoàng đế, K_1 thua ít nhất môt con gà nào đó và vì thế thua một vua K_2 nào đó. Lại tiếp tục lập luận tương tự với K_2, ta suy ra K_2 thua một vua K_3 nào đó. Chú ý rằng $K_3 \neq K_1$ vì K_1 thua K_2 còn K_3 thắng K_2. Vậy đàn gà có ít nhất ba vua là K_1, K_2, K_3.
Cách lập luận trực tiếp. Theo Bài 2(a), đàn gà phải có ít nhất một vua K_1 nào đó. Do K_1 không phải là hoàng đế, $W(K_1) \neq \emptyset$.
Xét đàn gà $W(K_1)$. Theo Bài 2(a), có một con gà K_2 là vua trong $W(K_1)$: với mọi $G' \in W(K_1)$, hoặc là K_2 thắng G', hoặc là K_2 thắng gián tiếp G'. Thế nhưng, K_2 thắng K_1, và rõ ràng, với mọi $G'' \in L(K_1)$ thì K_2 cũng thắng gián tiếp G'' (qua K_1). Điều này chứng tỏ K_2 cũng là một vua trong đàn gà ban đầu. (Lập luận này hoàn toàn giống lập luận đã được dùng khi giải Bài 2(b).)
Ta vẫn lập luận tương tự như trên, do K_2 không phải là hoàng đế, K_2 phải thua ít nhất một con gà nào đó, nghĩa là $W(K_2) \neq \emptyset$. Theo Bài 2(a), có một con gà K_3 là vua trong $W(K_2)$: với mọi $G' \in W(K_2)$, hoặc là K_3 thắng G', hoặc là K_3 thắng gián tiếp G'. Thế nhưng, K_3 thắng K_2, và rõ ràng, với mọi $G'' \in L(K_2)$ thì K_3 cũng thắng gián tiếp G'' (qua K_2). Điều này chứng tỏ K_3 cũng là một vua trong đàn gà ban đầu. Lưu ý rằng $K_1 \notin W(K_2)$, $K_3 \in W(K_2)$ nên K_1, K_2, K_3 là đôi một phân biệt.

B. Một đàn gà có thể có bao nhiêu vua?

Bài 4. Thật vậy, giả sử một đàn gà có đúng 2 con vua là K_1, K_2. Để ý rằng mọi hoàng đế là vua. Do K_1 là vua, hoặc là K_1 thắng K_2, hoặc là K_1 thắng gián tiếp K_2. Nói riêng, K_2 phải thua ít nhất một con gà nào đó. Nhưng theo Bài 2(b) thì K_2 phải thua một vua nào đó. Do chỉ có 2 vua, ta suy ra K_2 thua K_1. Lập luận tương tự ta cũng có K_1 thua K_2. Như vậy, K_1, K_2 thắng lẫn nhau, mâu thuẫn.



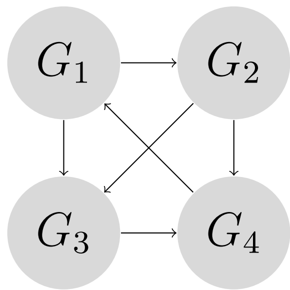
Bài 5. Giả sử S là một đàn gà n con mà mỗi con đều là vua. Thêm vào S hai con gà G_1, G_2 sao cho G_1 thắng mọi con gà của S nhưng thua G_2 và G_2 thua mọi con gà của S. Ta sẽ chỉ ra rằng đàn gà T mới cũng có tất cả các con gà là vua.

— Theo xây dựng thì G_1 thắng mọi con gà trong S. Hơn nữa, G_1 thắng gián tiếp G_2 qua một con gà bất kì của S. Do đó G_1 là một vua trong đàn gà T.
— Cũng theo xây dựng thì G_2 thắng G_1. Ngoài ra, G_2 thắng gián tiếp mọi con gà trong S thông qua G_1. Do đó G_2 là một vua trong đàn gà T.
— Theo giả thiết, mọi con gà G trong S thắng hoặc thắng gián tiếp mọi con gà khác trong S. Hơn nữa, theo xây dựng, G thắng G_2 và do đó thắng gián tiếp G_1 thông qua G_2. Chính vì vậy, G vẫn còn là vua trong T.

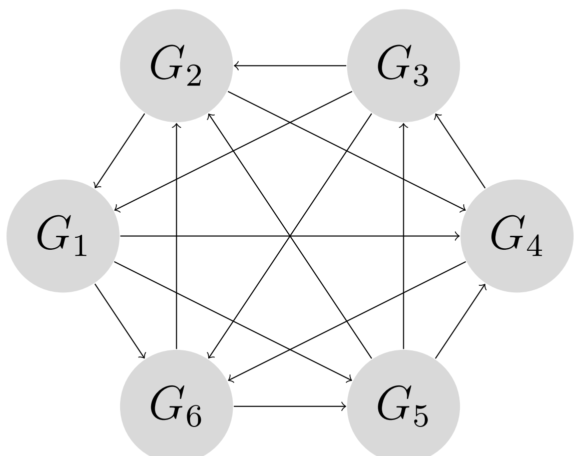
Như vậy, T là một đàn gà gồm $n+2$ con mà mỗi một con trong đàn là vua.

Bài 6. Giả sử một đàn gà như vậy tồn tại. Rõ ràng không có con nào thắng mọi con khác: nếu có một con (hoàng đế) như vậy, không con nào trong số các con còn lại có thể thắng hoặc thắng gián tiếp con này, do đó 3 con còn lại không thể là vua. Ta cũng nhận xét rằng không có con nào thua mọi con khác vì một con như vậy không thể là vua được. Từ đó, mỗi con gà trong đàn thắng 1 hoặc 2 con gà khác. Chính vì thế, nếu ta gọi a (tương ứng, b) là số con gà trong đàn thắng đúng 1 (tương ứng, 2) con gà khác thì $a+b=4$. Hơn nữa, giữa 2 con gà khác nhau bất kì phải có đúng 1 con thắng con còn lại (nói cách khác, số cặp (G, G') mà G thắng G' bằng $\binom{4}{2}=6$) nên $a+2b=6$.

Suy ra $a = b = 2$. Vậy, có đúng 2 con thắng đúng 2 con gà và có đúng 2 con thắng đúng 1 con gà. Giả sử G_1, G_2 thắng đúng 2 con gà và G_3, G_4 thắng đúng 1 con gà. Không mất tổng quát, ta có thể giả sử G_1 thắng G_2 và G_3 thắng G_4. Do G_3 chỉ thắng đúng 1 con gà, ta suy ra G_3 thua G_1, G_2. Lại do G_1 thắng đúng 2 con gà, ta suy ra G_1 thua G_4. Bây giờ, vì G_4 thắng đúng 1 con gà nên G_4 thua G_2 (và G_3).
Thế nhưng, G_3 không phải là vua, vì G_3 không thắng G_2 và cũng không thắng gián tiếp G_2 qua bất kì con gà nào. Như vậy, ta có điều mâu thuẫn và do đó không tồn tại đàn gà 4 con nào mà tất cả đều là vua.

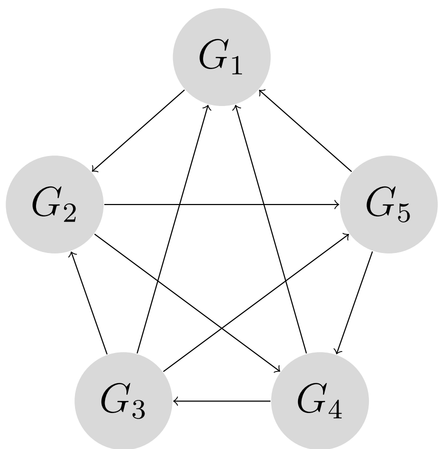


Bài 7. Đàn gà sau đây thoả mãn. Việc kiểm tra là dễ dàng dựa vào các mũi tên. Chẳng hạn G_1 là vua vì thắng G_4, G_5, G_6 và thắng gián tiếp G_2, G_3 (thông qua G_5).



Bài 8. Trước hết, xét trường hợp $k \neq 2, k \neq 4$ ($n \geq k$ bất kì). Trước hết, dễ thấy đàn gà 3 con thắng vòng tròn lẫn nhau có cả 3 con là vua. Từ đó, theo Bài 5 thì tồn tại đàn gà 5 con mà tất cả các con là vua. Bằng quy nạp, ta suy ra với mọi k lẻ tồn tại đàn gà k con mà tất cả đều là vua (trường hợp $k = 1$ có thể được xem là quy ước). Cũng lập luận bằng quy nạp, dựa vào Bài 7 và Bài 5, ta suy ra với mọi số nguyên dương chẵn k, tồn tại đàn gà k con mà tất cả đều là vua. Từ đó suy ra với mọi số nguyên dương k mà $k \neq 2, k \neq 4$, tồn tại đàn gà k con mà tất cả đều là vua.

Bây giờ, để xây dựng một đàn gà n con với đúng k vua, ta bắt đầu với một đàn gà S gồm k con mà tất cả đều là vua. Ta sẽ thêm $n-k$ con gà bất kì vào S sao cho chúng thua mọi con gà của S (thứ tự thắng thua giữa $n-k$ con gà mới là bất kì) để có một đàn gà T gồm n con. Khi đó rõ ràng k con gà của S vẫn còn là vua trong T, trong khi đó mọi con gà mới không thể là vua trong T vì chúng thua mọi con gà trong S và cũng không thể thắng gián tiếp bất kì con nào trong S. Do đó T là một đàn gà gồm n con, trong đó có đúng k vua.
Để kết thúc, ta còn phải xét trường hợp $k = 4$, $n \geq 5$. Tương tự như trên, ta chỉ cần xây dựng một đàn gà gồm 5 con, trong đó có đúng 4 con vua. Sau đó, tương tự như trên, để xây dựng một đàn gà gồm $n \geq 5$ con, trong đó có đúng 4 vua, ta chỉ cần thêm vào $n-5$ con gà mới mà mỗi con gà mới thua cả 5 con trong đàn gà ban đầu.
Một ví dụ về đàn gà 5 con với đúng 4 vua được mô tả qua hình vẽ sau.



Ta kiểm tra được rằng G_2, G_3, G_4, G_5 là vua còn G_1 thì không. Với G_1: G_1 không thắng G_3 cũng như không thắng gián tiếp G_3. Chẳng hạn, với G_2: G_2 thắng G_4, G_5 và thắng gián tiếp G_1, G_3 (thông qua G_4).

C. Sắp thứ tự đàn gà

Bài 9. Ta lập luận bằng qui nạp theo n khẳng định mạnh hơn: với mọi đàn gà n con, tồn tại một cách đánh số các con gà $G_1, \ldots, G_n$ thoả mãn điều kiện của bài toán, và hơn thế nữa G_1 là vua của đàn gà. Trường hợp $n = 2$ là khá hiển nhiên. Giả sử $n \geq 3$ và khẳng định của bài toán đã được chứng minh là đúng với $n-1$, ta sẽ chỉ ra khẳng định là đúng với n. Xét một đàn gà S gồm n con gà. Gọi G là một vua của S (tồn tại theo Bài 2(a)). Tạm loại bỏ G ra khỏi S và gọi đàn gà còn lại là T. Theo giả thiết, ta có thể đánh số các con gà của T là $G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}$ sao cho, với mọi $i \geq 2$, G_{i-1} thắng G_i và G_i là vua của đàn gà chỉ gồm $G_i, G_{i+1}, \ldots, G_{n-1}$. Ta bỏ lại G vào đàn gà. Gọi $1 \leq j \leq n-1$ là chỉ số nhỏ nhất sao cho G thắng G_j (một chỉ số như vậy tồn tại do G là vua của S) và đánh số lại các con gà dựa vào thứ tự: $G_1, G_2, \ldots, G_{j-1}, G, G_j, G_{j+1}, \ldots, G_{n-1}$. Ta sẽ chỉ ra rằng cách đánh số, hay sắp thứ tự này, thoả mãn yêu cầu của bài toán. Muốn vậy, ta chỉ cần chỉ ra rằng:

(1) Với mọi $1 \leq i \leq j-1$, G_i là vua trong đàn gà gồm $G_i, \ldots, G_{j-1}$, G, G_j, ..., G_{n-1};

(2) G là vua trong đàn gà gồm $G, G_j, G_{j+1}, \ldots, G_{n-1}$;

(3) Với mọi $i \geq j$, G_i là vua trong đàn gồm $G_i, G_{i+1}, \ldots, G_{n-1}$.

(3) là hiển nhiên theo cách xây dựng. Ta hãy chứng minh (1). Do G_i là vua trong đàn gồm $G_i, G_{i+1}, \ldots, G_{n-1}$ và do $i \leq j-1$, nên G_i thắng G và do đó G_i thắng hoặc thắng gián tiếp mọi con gà *còn lại* trong đàn $\{G_i, \ldots, G_{j-1}, G, G_j,$ ..., $G_{n-1}\}$. Vậy (1) được chứng minh.

Cuối cùng ta chứng minh (2). Theo cách chọn G là vua của S nên với mọi $j \leq k \leq n-1$, G thắng G_k hoặc thắng gián tiếp G_k thông qua một con gà khác trong S. Tuy nhiên, cũng theo cách chọn, G thua toàn bộ $G_1, \ldots, G_{j-1}$ nên nếu G thắng gián tiếp G_k thì nó phải thắng gián tiếp G_k thông qua một con gà nào đó trong $\{G_j, G_{j+1}, \ldots, G_{n-1}\} \setminus \{G_k\}$. Từ đó ta có (2).

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: ĐẠI SỐ

1 MA TRẬN

Bài 1.1 (HV An ninh Nhân dân)**.** 1) Từ giả thiết $A^2 + B^2 = 2AB$ ta có

$$\begin{aligned}(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2 + B^2 - AB - BA = AB - BA \quad (1),\\ A^2 - AB = AB - B^2 \quad \text{hay} \quad A(A-B) = (A-B)B \quad (2).\end{aligned}$$

Giả sử $AB - BA$ khả nghịch, khi đó $\det(AB-BA) \neq 0$, từ (1) suy ra $\det(A-B) \neq 0$ nên $A - B$ khả nghịch, tức là có $(A-B)^{-1}$.

Lúc đó từ (2) ta có $B = (A-B)^{-1}(A-B)B = (A-B)^{-1}A(A-B)$, do đó

$$\begin{aligned}A - B &= A - (A-B)^{-1}A(A-B),\\ I_n &= (A-B)(A-B)^{-1} = [A - (A-B)^{-1}A(A-B)](A-B)^{-1}\\ &= A(A-B)^{-1} - (A-B)^{-1}A.\end{aligned}$$

Chú ý rằng $\operatorname{trace}(MN) = \operatorname{trace}(NM)$, nên áp dụng vào hệ thức trên ta được

$$\begin{aligned}n = \operatorname{trace}(I_n) &= \operatorname{trace}[A(A-B)^{-1} - (A-B)^{-1}A]\\ &= \operatorname{trace}[A(A-B)^{-1}] - \operatorname{trace}[(A-B)^{-1}A] = 0.\end{aligned}$$

Điều này vô lý, nên $AB - BA$ không khả nghịch.

2) Dễ dàng chứng tỏ rằng nếu ma trận M có $\operatorname{rank}(M) = 1$, thì $M^2 = \operatorname{trace}(M).M$.

Đến đây sử dụng hệ thức (1) ta được

$$\begin{aligned}AB - BA = (A-B)^2 = \operatorname{trace}(A-B).(A-B),\\ 0 = \operatorname{trace}(AB-BA) = \operatorname{trace}[\operatorname{trace}(A-B).(A-B)] = [\operatorname{trace}(A-B)]^2.\end{aligned}$$

Suy ra $\operatorname{trace}(A-B) = 0$, dẫn tới $AB - BA = \operatorname{trace}(A-B).(A-B) = O_n$, hay là $AB = BA$.

Bài 1.2 (HV An ninh Nhân dân)**.** Từ điều kiện đề bài ta suy ra

$$(A - \beta I_n)(B - \alpha I_n) = \alpha\beta I_n \;\Leftrightarrow\; (\frac{1}{\beta}A - I_n)(\frac{1}{\alpha}B - I_n) = I_n.$$

Như thế $(\frac{1}{\beta}A - I_n)$ và $(\frac{1}{\alpha}B - I_n)$ là nghịch đảo của nhau.
Xét hệ phương trình thuần nhất $Ax = \theta$, giả sử u là nghiệm của hệ này thì $Au = \theta$, nên $(\frac{1}{\beta}A - I_n)u = -u$, dẫn tới

$$(\frac{1}{\alpha}B - I_n)(\frac{1}{\beta}A - I_n)u = -(\frac{1}{\alpha}B - I_n)u \quad \text{hay} \quad u = -\frac{1}{\alpha}Bu + u.$$

Như vậy $Bu = \theta$, hay u cũng là nghiệm của hệ phương trình thuần nhất $Bx = \theta$.
Tương tự giả sử v là nghiệm của hệ phương trình thuần nhất $Bx = \theta$ thì ta cũng chứng tỏ được v cũng là nghiệm của hệ phương trình thuần nhất $Ax = \theta$.
Vậy phải có $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.

Bài 1.3 (ĐH Giao thông Vận tải). a) Ta có $AU = (UV)U = U(VU) = UB$ và $BV = (VU)V = V(UV) = VA$. b) Đặt $U = X + Y, V = X - Y$ ta có

$$UV = (X+Y)(X-Y) = (X^2 - Y^2) - (XY - YX) = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix},$$
$$UV = (X-Y)(X+Y) = (X^2 - Y^2) + (XY - YX) = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Đặt $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Sử dụng câu (a) ta có $AU = UB$ hay là

$$\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9a - 6c & 9b - 6d \\ 6a - 3c & 6b - 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a + 2b & -2a + b \\ 5c + 2d & -2c + d \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b - 6c = 0 \\ 2a + 8b - 6d = 0 \\ 6a - 8c - 2d = 0 \\ 6b + 2c - 4d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{b + 3c}{2} \\ d = \dfrac{3b + c}{2} \\ b, c \text{ tùy ý} \end{cases}$$

Từ đó ta thu được

$$U = \begin{pmatrix} \frac{b+3c}{2} & b \\ c & \frac{3b+c}{2} \end{pmatrix} \quad \text{và } \det U = \frac{3}{4}(b+c)^2.$$

Vì U có các phần tử nguyên nên $\dfrac{3b + c}{2} = \dfrac{b + c}{2} + b$ nguyên và ta suy ra $b + c$ chẵn. Ta có $\det U \det V = \det A$ hay là

$$\frac{3}{4}(b+c)^2 \det V = 9 \quad \Leftrightarrow \quad (b+c)^2 \det V = 12.$$

Như vậy $(b+c)^2$ là ước chẵn chính phương của 12 nên $(b+c)^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; b+c = \pm 2$.
TH1: $b+c=2$, ta có $U = \begin{pmatrix} 3-b & b \\ 2-b & 1+b \end{pmatrix}$. Khi đó $\det U = 3$, $U^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+b & -b \\ -2+b & 3-b \end{pmatrix}$ và

$$V = U^{-1}A = \begin{pmatrix} 1+b & -b \\ -2+b & 3-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+b & -2-b \\ b & 1-b \end{pmatrix}.$$

Như vậy ta thu được

$$X = \frac{1}{2}(U+V) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{1}{2}(U-V) = \begin{pmatrix} -b & 1+b \\ 1-b & b \end{pmatrix}$$

với $b \in \mathbb{Z}$ tùy ý.
TH1: $b+c=-2$. Tính toán tương tự ta nhận được

$$X = -\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = -\begin{pmatrix} -b & 1+b \\ 1-b & b \end{pmatrix}.$$

Bài 1.4 (ĐH Kỹ thuật Hậu cần Công an Nhân dân)**.** Từ điều kiện đề bài ta suy ra

$$(P+\alpha I_n)^2 = P+\alpha I_n, \; (Q+\beta I_n)^2 = Q+\beta I_n$$

và ma trận $(P+\alpha I_n)+(Q+\beta I_n)-I_n$ khả nghịch.
Khi đó

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank}(P+\alpha I_n) &= \operatorname{rank}\Big((P+\alpha I_n)[(P+\alpha I_n)+(Q+\beta I_n)-I_n]\Big) \\
&= \operatorname{rank}[(P+\alpha I_n)(Q+\beta I_n)], \\
\operatorname{rank}(Q+\beta I_n) &= \operatorname{rank}\Big([(P+\alpha I_n)+(Q+\beta I_n)-I_n](Q+\beta I_n)\Big] \\
&= \operatorname{rank}[(P+\alpha I_n)(Q+\beta I_n)].
\end{aligned}$$

Vậy $\operatorname{rank}(P+\alpha I_n) = \operatorname{rank}(Q+\beta I_n)$.

Bài 1.5 (ĐH Kỹ thuật Hậu cần Công an Nhân dân)**.** Gọi $X = (AB-BA)$, ta thấy $\operatorname{trace}(X) = 0$ và

$$AX - XA = A(AB-BA) - (AB-BA)A = A^2B + BA^2 - 2ABA = O_n,$$

tức là X giao hoán với A.

Từ đó với $m \in \mathbb{N}$ thì $X^{m+1} = X^m(AB-BA) = X^mAB - X^mBA = AX^mB - X^mBA$.

Suy ra $\operatorname{trace}(X^{m+1}) = \operatorname{trace}(A(X^m B)) - \operatorname{trace}((X^m B)A) = 0.$

Vết của ma trận là tổng các giá trị riêng của nó.

Nếu giá trị riêng của ma trận M là λ thì giá trị riêng của ma trận M^k là λ^k.

Gọi các giá trị riêng của X là $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ (tính cả bội).

Ta có $\lambda_1^m + \lambda_2^m + \cdots + \lambda_n^m = 0, \forall m \in \mathbb{N}$. Suy ra $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Đa thức đặc trưng của X sẽ là $(-1)^n \lambda^n$, do đó $X^n = O_n$ theo định lý Cayley-Hamilton.

Bài 1.6 (ĐH Kỹ thuật Hậu cần Công an Nhân dân). 1) Do giải thiết $AB^2 = A - B$ ta có

$$I_n = I_n + A - B - AB^2 = I_n + A + AB - B - AB - AB^2 = (I_n + A + AB)(I_n - B),$$
$$I_n = I_n - A + AB^2 + B = I_n - A + AB + B - AB + AB^2 = (I_n - A + AB)(I_n + B).$$

Do đó $I_n \pm B$ khả nghịch và $(I_n - B)^{-1} = I_n + A + AB$ và $(I_n + B)^{-1} = I_n - A + AB$.

2) Từ kết quả trên ta có

$$\begin{aligned} &I_n = (I_n - B)(I_n + A + AB) = I_n + A + AB - B - BA - BAB,\\ &\quad \text{hay} \quad BAB - AB + BA = A - B = AB^2, \text{ nên } (AB - BA)(B + I_n) = O_n \quad (1),\\ &I_n = (I_n + B)(I_n - A + AB) = I_n - A + AB + B - BA + BAB,\\ &\quad \text{hay} \quad BAB + AB - BA = A - B = AB^2, \text{ nên } (AB - BA)(B - I_n) = O_n \quad (2). \end{aligned}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được $2(AB - BA)I_n = O_n$, suy ra $AB - BA = O_n$, hay $AB = BA$.

Bài 1.7 (HV Kỹ thuật Quân sự). a) A ma trận phản đối xứng tức là $A^t = -A$ và AX $= -X$. Chuyển vị $X^t A = -X^t$ do đó X^t (AX) $= -X^t X,\ (X^t$A) X=X$^t X$. Tức là $X = 0$.

b) Gọi λ là trị riêng của A suy ra $\lambda^k = \lambda^{k-1}$, từ đó

$$Trace\left(A^k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i^k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i = Trace\left(A\right).$$

Bài 1.8 (ĐH Mỏ địa chất). Viết lại ma trận A dưới dạng sau:

$$A = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chúng ta sẽ tìm ma trận B dạng

$$B = x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Khi đó

$$B^2 = x^2\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} + y^2\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix} = 2x^2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + 2y^2\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$B^4 = 8x^4\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + 8y^4\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \text{ và } B^8 = 128x^8\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + 128y^8\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Vì $A = B^8$ nên $a = 128x^8$ và $b = 128y^8$. Từ đó ta có

$$\begin{cases} x = \sqrt[8]{a/128}, \\ y = \sqrt[8]{b/128}. \end{cases}$$

Bài 1.9 (ĐH Ngoại thương Hà Nội). a. Ta có $\left|X - X^T\right| = \left|\left(X - X^T\right)^T\right| = \left|X^T - X\right| = (-1)^{2017}\left|X - X^T\right| = -\left|X - X^T\right|$ Suy ra: $\left|X - X^T\right| = 0$.

b) Chọn ma trận vuông cấp 2018

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Khi đó:

$$X - X^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

nên

$$\left|X - X^T\right| \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \pmod 2$$

Lại có:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2017 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2017 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2017 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 2017 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2017 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 2017 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2017 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 2017$$

Suy ra: $\left|X - X^T\right|$ lẻ, hay $\left|X - X^T\right| \neq 0$. Vậy khẳng định trên không đúng với X là ma trận vuông cấp 2018.

c. Ta có:

$$\begin{aligned} \left|A^2 - B^2\right| &= \left|(A - B)(A + B)\right| = |A - B| \cdot |A + B| \\ &= |A - B| \cdot \left|(A + B)^T\right| = \left|(A - B)\left(A^T + B^T\right)\right| \\ &= \left|A \cdot A^T + A \cdot B^T - B \cdot A^T - B \cdot B^T\right| \\ &= \left|A \cdot B^T - \left(A \cdot B^T\right)^T\right| = 0 \end{aligned}$$

Bài 1.10 (ĐH Quy Nhơn)**.** Viết $A = [A_1^T \;\; A_2^T]^T$ và $B = [B_1 \;\; B_2]$. Từ giả thiết suy ra $A_1B_1 = I_2 = A_2B_2$. Suy ra $BA = B_1A_1 + B_2A_2 = 2I_2$. Mặt khác, gọi $M = AB$, ta có

$$MA = ABA = A(BA) = 2A.$$

Suy ra hai cột của A là các véctơ riêng độc lập tuyến tính của ma trận M ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$ (do A_1 khả nghịch). Dễ kiểm tra M có hai giá trị riêng là 0 và 2, và số chiều của không gian con riêng của M ứng với $\lambda = 2$ có số chiều bằng 2 với hai véctơ cơ sở là $u = (x, 0, -x, 0)$, $v = (0, y, 0, -y)$ với $xy \neq 0$. Suy ra hai ma trận sau thỏa mãn bài toán

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \\ -x & 0 \\ 0 & -y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \\ -\frac{1}{x} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y} \end{bmatrix}^T.$$

Bài 1.11 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Theo dịnh nghĩa của ma trận phụ hợp nói trên ta có:

$$A.A'^T = detA.I_n.$$

Do đó:

— Nếu $rankA = n$. tức là $detA \neq 0$ kéo theo $det(A') \neq 0$.

— Nếu $rankA = n-1$ thì từ $A.A'^T = 0$ ta thấy ngay rằng mỗi dòng của A' là một nghiệm của phương trình $Ax = 0$, mà không gian nghiệm này có số chiều $n-(n-1) = 1$. Do đó $rank(A') = 1$.

— Nếu $rankA \leq n-2$ thì các $A_{ij} = 0$ với mọi i, j nên ta có $A' = 0$.

Bài 1.12 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Ta đặt ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ và $X_n = \begin{bmatrix} U_n \\ U_{n+1} \\ U_{n+2} \end{bmatrix}$.

Khi đó dãy số U_n được viết dưới dạng $$X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$X_{n+1} = AX_n, \forall n \geq 0$$

Do đó $X_n = A^n X_0, \forall n \geq 1$. Ta tính A^n.

Lập đa thức đặc trưng

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 6 & 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda+3).$$

Vậy A có 3 véc tơ riêng phân biệt $\lambda = 2, \lambda = -1, \lambda = -3$ nên A chéo hóa được

+Với $\lambda = 2$, A có một véc tơ riêng $\overrightarrow{v_1} = (1,2,4)$.

+Với $\lambda = -1$, A có một véc tơ riêng $\overrightarrow{v_2} = (1,-1,1)$.

+Với $\lambda = -3$, A có một véc tơ riêng $\overrightarrow{v_3} = (1,-3,9)$.

Ta đặt các ma trận $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

Do đó

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{15} & \frac{1}{15} \\ 1 & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{5} & \frac{-1}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \text{ và } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Ta có $A = CDC^{-1}$.

Suy ra $A^n = CD^nC^{-1}$ và tính toán cụ thể ta có:

$$X_n = A^n X_0 = \begin{bmatrix} \frac{2^n}{5} \\ \frac{2^{n+1}}{5} \\ \frac{2^{n+2}}{5} \end{bmatrix}$$

Đặc biệt, ta có $X_{2018} = \begin{bmatrix} \frac{2^{2018}}{5} \\ \frac{2^{2019}}{5} \\ \frac{2^{2020}}{5} \end{bmatrix}$ và suy ra $U_{2018} = \frac{2^{2018}}{5}$.

Bài 1.13 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên). Ta có

$$\begin{aligned} I_n &= 2I_n - I_n = A^3 - I_n = (A - I_n)(A^2 + A + I_n), \\ 10I_n &= 2I_n + 8I_n = A^3 + 8I_n = (A + 2I_n)(A^2 - 2A + 4I_n). \end{aligned}$$

Suy ra $\det(A - I_n) \neq 0$ và $\det(A + 2I_n) \neq 0$.

Rõ ràng do $A^3 = 2I_n$ nên $\det(A) \neq 0$ và lại có

$$\begin{aligned} B &= A^2 - 2A + 2I_n = A^2 - 2A + A^3 = A(A^2 + A - 2I_n) \\ &= A(A - I_n)(A + 2I_n). \end{aligned}$$

Từ đây $\det(B) = \det(A)\det(A - I_n)\det(A + 2I_n) \neq 0$, dó đó B khả nghịch.

Bài 1.14 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên). Lấy các ma trận

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{bmatrix}, \; T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_n & iI_n \\ -iI_n & -I_n \end{bmatrix}$$

ta kiểm tra được $M = S^{-1}NS$ và $P = T^{-1}QT$.
Vậy ta có các ma trận M, N đồng dạng và các ma trận P, Q đồng dạng.

Bài 1.15 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên). Giả sử ngược lại $AB = BA$ thì $A^2 + B^2 = (A - iB)(A + iB), (i^2 = -1)$.
Từ đó

$$\begin{aligned} \det(A^2 + B^2) &= \det(A - iB)\det(A + iB) = \det(A - iB)\det(\overline{A - iB}) \\ &= \det(A - iB)\overline{\det(A - iB)} = |\det(A - iB)|^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Tuy nhiên với giả thiết đã cho thì $\det(A^2 + B^2) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = -7 < 0$,

mâu thuẫn!
Vậy $AB \neq BA$.

Bài 1.16 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long)**.** Giả sử $AB - BA = A$.
Khi đó $B - A^{-1}BA = I$, suy ra $(BA)A^{-1} - A^{-1}(BA) = I$. Từ đó ta có

$$0 = \mathrm{tr}((BA)A^{-1} - A^{-1}(BA)) = \mathrm{tr}(I) = n.$$

Vô lý!

Bài 1.17 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long)**.** Ta có

$$\mathrm{rank}AB \leq \min\{\mathrm{rank}A,\ \mathrm{rank}B\}.$$

Suy ra

$$\mathrm{rank}A \geq \mathrm{rank}A^2 \geq \ldots \geq \mathrm{rank}A^n \geq \ldots \geq 0.$$

Dãy $\{\mathrm{rank}A^i\}$ giảm và bị chặn dưới nên hội tụ, tức là tồn tại số nguyên dương N sao cho

$$\mathrm{rank}A^k = \mathrm{rank}A^{k+1},\ \forall k \geq N.$$

Bài 1.18 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long)**.** a/ Giả sử $A = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix}$.

Chứng minh bằng quy nạp $A^n = \begin{bmatrix} a^n & x_n \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$, với $n \geq 2$, x_n là một số thực nào đó.

Do đó, $A^{2018} = \begin{bmatrix} a^{2018} & x_{2018} \\ 0 & b^{2018} \end{bmatrix} = O$.

Suy ra $a = 0$ và $b = 0$. Thấy ngay $A^2 = O$.

b/ Giả sử $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$.

Chứng minh bằng quy nạp $A^n = \begin{bmatrix} a^n & x_n & y_n \\ 0 & d^n & z_n \\ 0 & 0 & f^n \end{bmatrix}$, với $n \geq 2$, $x_n,\ y_n,\ z_n$ là những số thực nào đó. Do đó,

$$A^{2018} = \begin{bmatrix} a^{2018} & x_{2018} & y_{2018} \\ 0 & d^{2018} & z_{2018} \\ 0 & 0 & f^{2018} \end{bmatrix} = O.$$

Suy ra $a = 0, d = 0$ và $f = 0$. Thấy ngay $A^3 = O$.

Bài 1.19 (ĐH Tây Bắc)**.** Giả sử A là ma trận không suy biến khi đó $\det A \neq 0$.
Mặt khác từ giả thiết $B^6 = 0; AB = BA$ suy ra

$$A^6 = A^6 - B^6 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)(A^3 - B^3).$$

Từ đó ta có

$$\det(A+B)\det\big((A^2-AB+B^2)(A^3-B^3)\big)=(\det A)^6\neq 0\Rightarrow \det(A+B)\neq 0.$$

Vậy $A+B$ không suy biến.
Ngược lại giả sử $A+B$ không suy biến, đặt $C=A+B; D=-B$ ta sẽ có C không suy biến đồng thời $CD=DC; D^6=B^6=0$. Theo chứng minh trên thì $C+D=A$ không suy biến.

2 ĐỊNH THỨC

Bài 2.1 (HV An ninh Nhân dân). Từ giả thiết $P+Q+PQ=O_n$ ta có $I_n=(I_n+P)(I_n+Q)$. Như thế I_n+P và I_n+Q là nghịch đảo của nhau, dẫn đến $I_n=(I_n+Q)(I_n+P)$. Suy ra $PQ=QP$.
Giả sử $P^k=Q^m=O_n$. Khi đó

$$\begin{aligned}(\alpha P+\beta Q)^{k+m}&=\sum_{i=0}^{k+m}C_{m+k}^i(\alpha P)^i(\beta Q)^{k+m-i}\\&=\sum_{i=0}^{k}C_n^i\alpha^i\beta^{k+m-i}P^iQ^{k+m-i}+\sum_{i=k+1}^{k+m-i}C_n^i\alpha^i\beta^{k+m-i}P^iQ^{k+m-i}\\&=O_n+O_n=O_n.\end{aligned}$$

Như vậy $\alpha P+\beta Q$ là ma trận lũy linh.
Bây giờ với ma trận A lũy linh ($A^k=O_n$), ta chứng tỏ nó chỉ có giá trị riêng bằng 0.
Thật vậy, gọi λ là giá trị riêng của A và $v\neq\theta$ là vector riêng tương ứng. Khi đó

$$\begin{gathered}Av=\lambda v,\ A^2v=A(Av)=A(\lambda v)=\lambda Av=\lambda^2v,...\\ \theta=A^kv=A^{k-1}(Av)=A^{k-1}(\lambda v)=\lambda A^{k-1}v=\lambda^kv.\end{gathered}$$

Suy ra $\lambda=0$.
Tiếp theo ta dễ dàng chứng tỏ được với ma trận A có giá trị riêng λ thì ma trận $q(A)$, với $q(x)$ là đa thức nào đó, sẽ có giá trị riêng $q(\lambda)$.
Như vậy với ma trận lũy linh $\alpha P+\beta Q$ có giá trị riêng $\lambda=0$ thì ma trận $I_n+\alpha P+\beta Q=q(\alpha P+\beta Q)$, với $q(x)=1+x$, sẽ có giá trị riêng $1+\lambda=1$.
Định thức của ma trận bằng tích các giá trị riêng của nó.
Vậy $\det(I_n+\alpha P+\beta Q)=1^n=1$.

Bài 2.2 (HV An ninh Nhân dân). 1) Ta thấy

$$\begin{bmatrix}I_n&0\\u&1\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}I_n&0\\u&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B&-Bv\\-uB&uBv\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B&-Bv\\O_{1\times n}&0\end{bmatrix}.$$

Từ đây $0 = \det \begin{bmatrix} B & -Bv \\ O_{1\times n} & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ u & 1 \end{bmatrix} \det(A)$, suy ra $\det(A) = 0$.

2) Ta chứng tỏ A có giá trị riêng $\lambda = 0$ với bội 2, suy ra $P_A(\lambda)$ chia hết cho λ^2. Thật vậy, lấy 2 vector $v_1 = \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix}$ và $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ thì

$$Av_1 = A\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B & -Bv \\ -uB & uBv \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \theta = 0.v_1,$$
$$Av_2 = A\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B & -Bv \\ -uB & uBv \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bx \\ -uBx \end{pmatrix}.$$

Do $\det(B) = 0$ nên $Bx = 0$ có nghiệm $x \neq 0$, từ đó $Av_2 = 0 = 0.v_2$ với $v_2 \neq 0$. Như vậy giá trị riêng $\lambda = 0$ của A có 2 vector riêng độc lập tuyến tính v_1, v_2 nên nó phải có bội 2.

Điều ngược lại của 2) không luôn luôn đúng!

Ta thấy $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ u & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -u & 1 \end{bmatrix}$ và $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ u & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ u & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B(I_n + vu) & -Bv \\ O_{1\times n} & 0 \end{bmatrix}$,
nên $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_{n+1}) = -\lambda \det[B(I_n + vu) - \lambda I_n]$.

Nếu $P_A(\lambda)$ chia hết cho λ^2 thì $\lambda = 0$ là nghiệm của $\det[B(I_n + vu) - \lambda I_n]$, tức là $\det[B(I_n + vu)] = 0$, hay là $\det(B) = 0$ hoặc $\det(I_n + vu) = 0$.

Như vậy chỉ cần $\det(I_n + vu) = 0$ thì $P_A(\lambda)$ chia hết cho λ^2 mà không cần $\det(B) = 0$.

Bài 2.3 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội). Ta có

$$D = \begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cos\frac{\pi}{2^2} & \sin\frac{\pi}{2^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos\frac{\pi}{2^n} & \sin\frac{\pi}{2^n} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \cos x_1 & \cos x_2 & \cdots & \cos x_n \\ \sin x_1 & \sin x_2 & \cdots & \sin x_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Bài 2.4 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội). Theo khai triển Laplace theo hàng, ta có

$$A.\,(A')^t = \det(A).I.$$

Suy ra

$$\det(A.(A')^t) = (\det A)^n.$$

Mặt khác ta có $\det(A')^t = \det A'$ và $\det(A.(A')^t) = \det A.\det(A')^t$. Do đó kết hợp với $\det A = \pm 1$, ta thu được

$$\det A' = (\det A)^{n-1} = 1.$$

Bài 2.5 (HV Kỹ thuật Quân sự). a) Ta có

$$\det\left(\mathrm{AA}^{-1}\right) = 1, \det(A) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \det(A) = \pm 1.$$

Ngược lại

$$\det(A) = \pm 1 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \overline{A}^T \in \mathbb{Z}.$$

b) Giả sử ngược lại, ta có $\det\left(A + \frac{1}{2018}E\right) = 0$ hay $-\frac{1}{2018}$ là trị riêng, tức là nghiệm PT

$$\det(A - xE) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} Tr(A) x^{n-1} + ... + \det(A) = 0$$

Mặt khác đa thức hệ số nguyên, nếu có nghiệm hữu tỉ thì nghiệm đó phải nguyên, do đó vô lý.

Bài 2.6 (ĐH Mỏ địa chất).

$$\lim_{n\to\infty} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/n! \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 1/n! \\ 0 & -2 & x & \dots & 0 & 1/n! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1/n! \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 1/n! \end{vmatrix} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -2 & x & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 1 \end{vmatrix} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} I_n.$$

Cộng vào dòng đầu tất cả các dòng còn lại, trước đó dòng thứ i nhân với $\frac{1}{(i-1)!}.x^{i-1}$ $(i = 2, 3 \dots, n+1)$. Khi đó ta có

$$I_n = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & R_n(x) \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -2 & x & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 1 \end{vmatrix},$$

ở đó $R_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$.
Từ đó suy ra

$$I_n = R_n(x) \cdot (-1)^{n+1+1} (-1)^n \cdot n!.$$

Kết quả thu được:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} I_n = \lim_{n\to\infty} R_n(x) = e^x.$$

Bài 2.7 (ĐH Ngoại thương Hà Nội). Bằng cách cộng thêm dòng 2 vào dòng 1; dòng 3 vào dòng 2; ...; dòng n vào dòng $n-1$ thì định thức đã cho không đổi. Do đó ta có:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & +1 & \cdots & \pm 1 & \mp 1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \mp 1 & \pm 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \cdots & 2 & -1 \\ \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Bây giờ bằng cách lấy cột 2 trừ cột 1, kết quả nhận được lại tiếp lấy cột 3 trừ cột 2,... cứ như vậy chúng ta nhận được:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \pm 1 & \mp 2 & \pm 3 & \cdots & -n+1 & n+1 \end{vmatrix} = n+1$$

Bài 2.8 (ĐH Ngoại thương Hà Nội). a. Ta có: $\Delta_3 = \begin{vmatrix} x & -a & a \\ -b & x & -a \\ b & -b & x \end{vmatrix} = x^3 - 3abx + a^2b + ab^2$

b. Ta có:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & -a & a & \cdots & (-1)^n a & (-1)^{n+1} a \\ -b & x & -a & \cdots & (-1)^{n+1} a & (-1)^{n+2} a \\ b & -b & x & \cdots & (-1)^{n+2} a & (-1)^{n+3} a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n b & (-1)^{n+1} b & (-1)^{n+2} b & \cdots & x & -a \\ (-1)^{n+1} b & (-1)^{n+2} b & (-1)^{n+3} b & \cdots & -b & x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & x-a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -b & x-b & x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & 0 & x-b & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n b & 0 & 0 & 0 & \cdots & x-b & x-a \\ (-1)^{n+1} b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-b \end{vmatrix}$$

$$= (x-b)\,\Delta_{n-1} + b\,(x-a)^{n-1}$$

Với $\Delta_1 = x$ nên $\Delta_n = (x-b)^n + b\sum\limits_{k=0}^{n-1} (x-b)^{n-1-k}\,(x-a)^k,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Rút gọn biểu thức ta được:

Với $a \neq b$ thì $\Delta_n = \dfrac{a\left(x-b\right)^n - b\left(x-a\right)^n}{a-b}$

Với $a = b$ thì $\Delta_n = \left(x-a\right)^{n-1}\left(x+\left(n-1\right)a\right)$

Bài 2.9 (Trường sĩ quan Không quân). Đặt $D_n = det(B)$ trong đó

$$B = \begin{pmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & 0\dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0\dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1\dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots. & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0\dots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0\dots & 1 & 2\cos\alpha \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Tính D_n bằng cách khai triển theo hàng 1 ta được $D_n = 2\cos\alpha D_{n-1} - D_{n-2}$. Từ đó ta suy ra $D_n = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$. Bây giờ, tính x_n bằng cách khai triển theo hàng 1, ta được $x_n = \cos\alpha D_{n-1} - D_{n-2}$. Do đó,

$$x_n = \cos\alpha\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin(n-1)\alpha}{\sin\alpha} = \cos n\alpha.$$

3 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bài 3.1 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội). Hệ phương trình được viết lại như sau:

$$\begin{cases} (2a_{11}-1)x_1 + 2a_{12}x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_n = 0 \\ 2^2a_{21}x_1 + (2^2a_{22}-1)x_2 + \cdots + 2^2a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2^na_{n1}x_1 + 2^na_{n2}x_2 + \cdots + (2^na_{nn}-1)x_n = 0 \end{cases}.$$

Gọi A_n là ma trận hệ số của hệ phương trình.

Do các phần tử trên đường chéo chính của ma trận A_n đều chia 2 dư 1, các phần tử nằm ngoài đường chéo chính của A_n đều chia hết cho 2 nên ta suy ra định thức của ma trận A_n cùng tính chẵn lẻ với định thức của ma trận đơn vị I_n. Mặt khác ta có $\det(I_n) = 1$ là số lẻ, do đó $\det(A_n)$ cũng là một số nguyên lẻ, do vậy $\det(A_n) \neq 0$. Từ đó suy ra hệ phương trình đã cho chỉ có nghiệm tầm thường.

Bài 3.2 (HV Kỹ thuật Quân sự). a) Dễ thấy nghiệm (1) là nghiệm (2). Ngược lại, giả sử x là nghiệm (2), ta có $\left(A + A^2 + \dots + A^{2017} + A^{2018}\right)x = \left(E + A + \dots + A^{2017}\right)Ax = 0$, nhưng dễ thấy $E + A + \dots + A^{2017} = \left(E-A\right)^{-1}$

là ma trận khả nghịch nên $Ax = 0$.
b) Ta có hệ (1) và (2) có cùng không gian nghiệm. Giả sử $dim(N) = r$ thì $rank(A) = rank(A + A^2 + ... + A^{2017}) = n - r$

Bài 3.3 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long). Ta có

$$\det\begin{bmatrix} 20172017 & 20172017 & 20182018 & 20172017 \\ 20172017 & 20162016 & 20192019 & 20162016 \\ 20192019 & 20152015 & 20182018 & 20172017 \\ 20202020 & 20162016 & 20202020 & 20192019 \end{bmatrix} \overset{\text{mod5}}{\equiv} \det\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= 46 \overset{\text{mod5}}{\equiv} 1.$$

Suy ra

$$\det\begin{bmatrix} 20172017 & 20172017 & 20182018 & 20172017 \\ 20172017 & 20162016 & 20192019 & 20162016 \\ 20192019 & 20152015 & 20182018 & 20172017 \\ 20202020 & 20162016 & 20202020 & 20192019 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm tầm thường $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$.

Bài 3.4 (ĐH Tây Bắc). Gọi D là định thức của ma trận hệ số của hệ phương trình đã cho. Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a_4 \end{vmatrix}$$

Lấy các dòng $i(i = 2, 3, 4)$ trừ đi dòng 1 rồi đưa các nhân tử chung $(1 - a_i)$ ở cột thứ $i(i = 1, 2, 3, 4)$ ra ngoài thì được:

$$D = \prod_{i=1}^{4}(1 - a_i)\begin{vmatrix} \frac{a_1}{1-a_1} & \frac{1}{1-a_2} & \frac{1}{1-a_3} & \frac{1}{1-a_4} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Cộng tất cả các cột vào cột 1 thì được:

$$D = \prod_{i=1}^{4}(1 - a_i)\begin{vmatrix} \frac{a_1}{1-a_1} + \sum\limits_{i=2}^{4}\frac{1}{1-a_i} & \frac{1}{1-a_2} & \frac{1}{1-a_3} & \frac{1}{1-a_4} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= -\prod_{i=1}^{4}(1 - a_i)\left(\frac{a_1}{1 - a_1} + \sum_{i=2}^{4}\frac{1}{1 - a_i}\right)$$
$$< 0$$

Vậy hệ phương trình đã cho có duy nhất nghiệm tầm thường.

4 KHÔNG GIAN VÉC TƠ VÀ ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Bài 4.1 (ĐH Giao thông Vận tải)**.** Ánh xạ f đã cho có thể mô tả dưới dạng ma trận $f(x) = Ax$ với x ở dạng cột và

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tính toán trực tiếp chúng ta có

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hay là $A^2 = I$.
Sử dụng $A^2 = I$ ta có biến đổi

$$f(-u_k + u_{k+1}) = 3u_k \quad \Leftrightarrow \quad A(-u_k + u_{k+1}) = 3u_k \quad \Leftrightarrow \quad -u_k + u_{k+1} = 3Au_k.$$

Như vậy $u_{k+1} = (I + 3A)u_k$ và ta suy ra $u_{2018} = (I + 3A)^{2018}u_0$.
Ta có

$$\begin{aligned}
(I + 3A)^{2018} &= \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k 3^k A^k \\
&= (C_{2018}^0 + 3^2 C_{2018}^2 + \ldots + 3^{2018} C_{2018}^{2018})I \\
&\quad + (3C_{2018}^1 + 3^3 C_{2018}^3 + \ldots + 3^{2017} C_{2018}^{2017})A \\
&= \frac{(1+3)^{2018} + (1-3)^{2018}}{2} I + \frac{(1+3)^{2018} - (1-3)^{2018}}{2} A \\
&= \frac{4^{2018} + 2^{2018}}{2} I + \frac{4^{2018} - 2^{2018}}{2} A \\
&= 2^{2017} \begin{pmatrix} k+1 & 0 & k-1 \\ 2k-2 & 2k & -2k+2 \\ k-1 & 0 & k+1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

với $k = 2^{2018}$. Từ đó ta thu được

$$u_{2018} = (I+3A)^{2018}u_0 = 2^{2017} \begin{pmatrix} k+1 & 0 & k-1 \\ 2k-2 & 2k & -2k+2 \\ k-1 & 0 & k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2^{2018} \begin{pmatrix} 2k-1 \\ 2 \\ 2k+1 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.2 (ĐH Quy Nhơn). a) Ta có $\det T = (-1)^n c_1 \dots c_{n+1}$ và $T^n = c_1 \dots c_n I$.
b) Theo Câu a), Φ là đẳng cấu.

Bài 4.3 (Trường sĩ quan Không quân). Giả sử λ là giá trị riêng của $\varphi\psi$, tức là tồn tại véc tơ $v \neq 0$ sao cho $\varphi\psi(v) = \lambda v$. Khi đó, ta có $\psi\varphi(\psi(v)) = \psi(\varphi\psi(v)) = \lambda\psi(v)$. Do đó, nếu $\psi(v) \neq 0$ thì λ là giá trị riêng của $\psi\varphi$. Trong trường hợp $\psi(v) = 0$ thì $\varphi\psi(v) = \varphi(\psi(v)) = 0$. Do vậy, từ $\varphi\psi(v) = \lambda v$ và $v \neq 0$, ta thu được $\lambda = 0$. Điều này nói lên rằng $det(BA) = 0$ trong đó A, B là ma trận biểu diễn của φ và ψ. Mặt khác $0 = det(BA) = det(B).det(A) = det(AB)$. Do vậy $\lambda = 0$ cũng là giá trị riêng của AB và suy ra $\lambda = 0$ là giá trị riêng của $\psi\varphi$. Điều ngược lại được lập luận tương tự.

Bài 4.4 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Xét các ma trận có dạng

— Các ma trận dạng $E_{11} - E_{ii}, i = 2, ..., n$ có $E_{11} - E_{ii} = E_{1i}E_{i1} - E_{i1}E_{1i}$. Do đó $E_{11} - E_{ii}, i = 2, ..., n$ nằm trong S.

— Các ma trận dạng $E_{ik}, i \neq k$ có $E_{ik} = E_{i1}E_{1k} - E_{1k}E_{i1}$. Do đó $E_{ik}, i \neq k$ nằm trong S.

Do đó S chứa hệ gồm $(n-1) + n(n-1) = n^2 - 1$ ma trận độc lập tuyến tính (cần chứng minh tính chất độc lập tuyến tính).

Mặt khác mọi ma trận M thuộc S được sinh bởi các ma trận dạng $AB - BA$, với các $A, B \in \mathrm{Mat}(n, K)$ nên $\mathrm{tr}(M) = 0$. Do đó I_n không nằm trong S, vì vậy $\dim S \leq n^2 - 1$. Kết hợp trên ta có $\dim S = n^2 - 1$.

Kí hiệu ZT(n) là tập các ma trận vuông cấp n có vết bằng không. Từ nhận xét trên ta có $S \subset ZT(n)$, kết hợp với $\dim(ZT(n)) \leq n^2 - 1$ ta có ngay rằng S chính là tập các ma trận có vết bằng không.

Bài 4.5 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Xét một quan hệ tuyến tính giữa hữu hạn các phần tử của tập $f_0, f_1, f_2, ...$, chẳng hạn:

$$\alpha_1 f_{n_1} + ... + \alpha_p f_{n_p} = 0, \alpha_1, ..., \alpha_p \in \mathbb{R}.$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $n_1 < n_2 < ... < n_p$.Ta chứng minh quy nạp theo p là $\alpha_1 = ... = \alpha_p = 0$.

Khi $p = 1$, nếu $\alpha_1 \neq 0$ thì vế trái là một đa thức bậc đúng bằng n_1, nên nó không thể bằng đa thức 0. Vô lí. Vậy $\alpha_1 = 0$.

Giả sử khẳng định đúng với $p - 1$. Xét trường hợp p đa thức. Nếu $\alpha_p \neq 0$ thì $\alpha_1 f_{n_1} + ... + \alpha_p f_{n_p}$ là đa thức bậc đúng bằng n_p. Do đó nó khác 0. Vô lí. Vậy $\alpha_p = 0$.

Theo giả thiết quy nạp, ta có $\alpha_1 f_{n_1} + ... + \alpha_p f_{n_p} = 0$ thì $\alpha_1 = ... = \alpha_p = 0$.

Vậy hệ đã cho độc lập tuyến tính.

5 GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ VÉC TƠ RIÊNG

Bài 5.1 (HV Kỹ thuật Quân sự). Gọi A là ma trận của một toán tử trong cơ sở nào đó. Dễ thấy λ_0 là nghiệm đơn đa thức đặc trưng thì ứng với nó có đúng 1 vector riêng e_1, bổ sung $e_2, .., e_n$ thành cơ sở mới không gian. Trong cơ sở mới này ta có

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & b_{12} & ... & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & b_{n2} & ... & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Khi đó

$$rank\,(A - \lambda_0 E) = rank\left(\overline{A} - \lambda_0 E\right) = n - 1$$

vì

$$\begin{vmatrix} b_{22} - \lambda_0 & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... \\ b_{n2} & ... & b_{nn-\lambda_0} \end{vmatrix} \neq 0$$

do λ_0 là nghiệm đơn phương trình đặc trưng.

Bài 5.2 (ĐH Mỏ địa chất). Vì ma trận đối xứng nên tất cả các giá trị riêng của nó đều là thực. Tổng tất cả các phần tử trên đường chéo của ma trận là số dương và bằng tổng tất cả các giá trị riêng của nó – vết của ma trận. Vì vết bất biến qua phép biến đổi cơ sở nên tổng tất cả các giá trị riêng là số dương. Vì vậy trong tất cả các giá trị riêng của ma trận đã cho có ít nhất một giá trị riêng là dương.

Bài 5.3 (ĐH Quy Nhơn). Giả sử A có k giá trị riêng phân biệt $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Áp dụng phép nội suy Lagrange, tồn tại một đa thức p sao cho $p(\lambda_i) = \bar{\lambda}_i$ với mọi $i = 1, \ldots, k$. Suy ra $U^H p(A) U = p(D)$, với $p(D)$ là ma trận dường chéo với các phần tử chéo là một trong các $p(\lambda_i) = \bar{\lambda}_i$. Do đó $p(D) = D^H$. Suy ra $p(A) = A^H$.

Bài 5.4 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên). Giả sử λ là giá trị riêng và $v = (v_1, v_2, ..., v_n)^t \neq (0, 0, ..., 0)^t$ là vector riêng tương ứng. Ta có

$$Av = \begin{pmatrix} 2v_1 - v_2 \\ -v_1 + 2v_2 - v_3 \\ -v_2 + 2v_3 - v_4 \\ \cdots \\ -v_{n-2} + 2v_{n-1} - v_n \\ -v_{n-1} + 2v_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \left\langle Av, v \right\rangle &= (2v_1^2 - v_1 v_2) + (-v_1 v_2 + 2v_2^2 - v_2 v_3) + \cdots \\ &\quad + (-v_{n-2} v_{n-1} + 2v_{n-1}^2 - v_{n-1} v_n) + (-v_{n-1} v_n + 2v_n^2) \\ &= v_1^2 + (v_1 - v_2)^2 + (v_2 - v_3)^2 + \cdots + (v_{n-1} - v_n)^2 + v_n^2 > 0. \end{aligned}$$

Mặt khác $\left\langle Av, v\right\rangle = \left\langle \lambda v, v\right\rangle = \lambda\left\langle v, v\right\rangle = \lambda\|v\|^2$, mà $\|v\|^2 = (v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)^{\frac{1}{2}} > 0$.
Do đó suy ra $\lambda > 0$

Bài 5.5 (ĐH Tây Bắc). a) Ta có:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)(3+\lambda)(4-\lambda).$$

Suy ra A có 3 giá trị riêng là $\lambda = -1; \lambda = -3; \lambda = 4$.
b) Nếu λ là trị riêng của A thì $|A - \lambda I| = 0$ suy ra:

$$\begin{aligned} |A^n - \lambda^n I| &= \left|(A - \lambda I)(A^{n-1} + \lambda A^{n-2} + ... + \lambda^{n-1} I)\right| \\ &= |A - \lambda I| \left|A^{n-1} + \lambda A^{n-2} + ... + \lambda^{n-1} I\right| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vậy λ^n là trị riêng của A^n.
c) Do -1 là trị riêng của A nên $(-1)^{2013}$ là trị riêng của A^{2013} vậy

$$\left|A^{2013} + I\right| = \left|A^{2013} - (-1)^{2013} I\right| = 0$$

Suy ra

$$\left|A^4 + A^{2017}\right| = \left|A^4\right| . \left|A^{2013} + I\right| = 0.$$

6 ĐA THỨC

Bài 6.1 (ĐH Giao thông Vận tải). Từ giả thiết ta suy ra $P(x)$ có biểu diễn dưới dạng $P(x) = \alpha \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$. Từ đó ta có $P'(a_1) = \alpha \prod_{i=2}^{n}(a_i - a_1)$. Theo giả thiết ta có với mỗi $i \geqslant 2$

$$0 < a_i - a_1 = 2a_i - 2b - (a_i - a_2) - (a_1 + a_2 - 2b) < 2(a_i - b).$$

Như vậy

$$\begin{aligned} |P(b)| &= |b - a_1| \prod_{i=2}^{n} |b - a_i| \\ &\geqslant |b - a_1| \prod_{i=2}^{n} \frac{1}{2}(a_i - a_1) = 2^{-(n-1)}|b - a_1||P'(a_i)| \end{aligned}$$

Từ đó ta thu được điều phải chứng minh.

Bài 6.2 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội)**.** a) Bước 1: Chứng minh hệ B_a độc lập tuyến tính.
Bước 2: Hệ B_a có $n+1$ phần tử bằng với số chiều của không gian $P_n[x]$.
Từ đó suy ra B_a là một cơ sở của $P_n[x]$.
b) Ta có:

$$(x-b)^k = ((a-b)+(x-a))^k = \sum_{m=0}^{k} C_k^m (a-b)^{k-m}(x-a)^m.$$

Do đó: ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B_a sang cơ sở B_b là:

$$\begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^0(a-b) & C_2^0(a-b)^2 & \cdots & C_n^0(a-b)^n \\ 0 & C_1^1 & C_2^1(a-b) & \cdots & C_n^1(a-b)^{n-1} \\ 0 & 0 & C_2^2 & \cdots & C_n^2(a-b)^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n^n \end{pmatrix}$$

Bài 6.3 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội)**.** Xét đa thức $Q(x) = P(x) - x$ có bậc 2018. Ta có:

$$Q(0) = -\frac{1}{2018} < 0,\ Q(-1) = \frac{1}{a^2-2a+2} + \frac{2017}{2018} > 0.$$

Suy ra: $Q(-1).Q(0) < 0$. Mặt khác $Q(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[-1;0]$ nên theo định lý Rolle, phương trình $Q(x) = 0$ có nghiệm $x_1 \in (-1;0)$.
Ta có: $Q(x) = (x-x_1).H(x)$, trong đó $H(x)$ là một đa thức có bậc 2017 là một số lẻ.
Chứng minh: $H(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm x_2.
Với $i = 1;2$, ta có: $Q(x_i) = 0$, suy ra: $P(x_i) = x_i$. Do đó:

$$P(P(x_i)) = P(x_i) = x_i.$$

Vậy phương trình $P(P(x)) = x$ có ít nhất 2 nghiệm là $x_1; x_2$.

Bài 6.4 (ĐH Kỹ thuật Hậu cần Công an Nhân dân)**.** Đặt $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n), a \neq 0$. Ta có

$$P'(x) = P(x)\Big[\frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \cdots + \frac{1}{x-x_n}\Big], (x \neq x_1, x_2, ..., x_n).$$

Theo định lý Rolle tồn tại $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$
mà $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < ... < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$
để $P'(y_1) = P'(y_2) = \cdots = P'(y_{n-1}) = 0$.
Nhưng $P(y_i) \neq 0, (i = 1, 2, ..., n-1)$ nên

$$\frac{1}{y_i-x_1} + \frac{1}{y_i-x_2} + \cdots + \frac{1}{y_i-x_n} = 0, (i = 1, 2, ..., n-1),$$

suy ra

$$\sum_{i=1}^{n-1}\Big[\frac{1}{y_i-x_1}+\frac{1}{y_i-x_2}+\cdots+\frac{1}{y_i-x_n}\Big]=0,\quad \text{hay}\quad \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{y_i-x_k}=0.$$

Ta lại có $P'(x)=na(x-y_1)(x-y_2)...(x-y_{n-1})$, nên

$$P''(x)=P'(x)\Big[\frac{1}{x-y_1}+\frac{1}{x-y_2}+\cdots+\frac{1}{x-y_{n-1}}\Big],(x\neq y_1,y_2,...,y_{n-1}).$$

Do đó

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{P''(x_k)}{P'(x_k)}=\sum_{k=1}^{n}\Big[\frac{1}{x_k-y_1}+\frac{1}{x_k-y_2}+\cdots+\frac{1}{x_k-y_{n-1}}\Big]=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{x_k-y_i}=0.$$

Bài 6.5 (HV Kỹ thuật Quân sự). — Không giảm tính tổng quát, giả sử $a_n=1$.

— Áp dụng định lý Viet ta có $(x_1+x_2+...+x_n)^2=a_{n-1}^2=1$, $\sum\limits_{i<j}x_ix_j=a_{n-2}$.
Do đó $0\le x_1^2+...+x_n^2=(x_1+x_2+...+x_n)^2-2\sum\limits_{i<j}x_ix_j=1-2a_{n-2}$, nhận được $a_{n-2}=-1$ và $x_1^2+...+x_n^2=3$.

— Từ $3=x_1^2+...+x_n^2\ge n\sqrt[n]{(x_1...x_n)^2}=n$, nhận được $n\le 3$.
 — $n=1$, $P(x)=x\pm 1$.
 — $n=2$, $P(x)=\pm(x^2\pm x-1)$.
 — $n=3$, $P(x)=\pm(x^3-x^2-x+1)$, $P(x)=\pm(x^3+x^2-x-1)$.

Bài 6.6 (ĐH Mỏ địa chất). Giả sử phương trình của đường thẳng là $y=ax+b$. Khi đó x_i là nghiệm của phương trình

$$2x^4+7x^3+(3-a)x-(5+b)=0.$$

Theo định lý Viet tổng các nghiệm bằng $-\frac{7}{2}$, và trung bình cộng của chúng bằng $-\frac{7}{8}$. Vậy đáp án là $-\frac{7}{8}$.

Bài 6.7 (ĐH Mỏ địa chất). Để ý là

$$x^6=x^2+x.$$

Từ đó áp dụng định lý Viet có

$$\sum x_i^6=\Big(\sum x_i\Big)^2-2\sum x_ix_j+\sum x_i=0+0-0=0.$$

Bài 6.8 (ĐH Quy Nhơn)**.** Viết $p(x) = a\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$, $a \in \mathbb{R}$ và đặt

$$p_k(x) = a\prod_{j\neq k}(x - x_j), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Khi đó $p'(x) = \sum_{k=1}^{n} p_k(x)$ và $(x - x_k)p_k(x) = p(x)$ với mọi $k = 1, \ldots, n$. Suy ra $p'(x_j) = p_j(x_j)(\neq 0)$ với mọi j.
Cuối cùng, xét đa thức

$$F(x) = -1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j(x)}{p'(x_j)}$$

có bậc $n - 1$ với hệ số cao nhất là $a\left(\frac{1}{p'(x_1)} + \ldots \frac{1}{p'(x_n)}\right)$. Hơn nữa ta có thể kiểm tra các $x_1, \ldots, x_n$ là nghiệm của $F(x)$ và do đó $F(x) \equiv 0$. Suy ra kết quả.

Bài 6.9 (ĐH Quy Nhơn)**.** Viết $f(x) = \prod_{k=1}^{n}(b_k x + c_k)$ với giả sử $b_k > 0$ (do $a_n > 0$) và $c_k > 0$ (do đa thức có các hệ số không âm nên không thể có nghiệm dương) và có nhiều nhất một c_k bằng 0.
Tính

$$f(1) = 0 + 1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \prod_{k=1}^{n}(b_k + c_k) \geq 2^{n-1}.$$

Suy ra $n \leq 4$. Do f là không âm trên $\mathbb{R}$ nên nó có bậc chẵn, $n = 2, 4$.
Trường hợp $n = 4$ không thể xảy ra vì $f(1) = 10$ không thể viết thành tích của 4 nhân tử như vế phải đồng nhất thức trên đây.
Với $n = 2$: từ phân tích trên, f chỉ có hai dạng $f(x) = x(x + 2)$ và $f(x) = x(2x + 1)$. Cả hai dạng này đều không thể không âm trên toàn bộ $\mathbb{R}$.

Bài 6.10 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Từ giả thiết (1) suy ra nếu x_0 là một nghiệm thực của $P(x)$ thì ta có tất cả phần tử của dãy $\{x_n\}$ thỏa mãn: $x_n = 2x_{n-1}^3 + x_{n-1}, n = 1, 2, 3, ...$ cũng là nghiệm của $P(x)$.
Hơn nữa, ta thấy nếu $x_0 > 0$ thì $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots x_n < x_{n+1} \cdots$ và nếu $x_0 > 0$ thì $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots x_n > x_{n+1} \cdots$
Do đó nếu $P(x)$ có một nghiệm thực khác 0 thì nó sẽ có vô số nghiệm thực phân biệt. Mà theo giả thiết $P(x)$ có bậc $n \geq 1$ dẫn đến mâu thuẫn. Vậy $P(x)$ không có nghiệm thực khác 0.
Tiếp theo ta đi chứng minh $P(0) \neq 0$ với $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots a_{n-1}x + a_n, a_0 \neq 0$.
Thật vậy, giả sử $P(0) = 0 \Leftrightarrow a_n = 0$. Gọi k là chỉ số lớn nhất thỏa mãn $a_k \neq 0$. Khi đó $P(x).P(2x^2) = a_0^2 2^n.x^{3n} + \cdots + a_k^2 2^{n-k}.x^{3(n-k)}$ và $P(2x^3 + x) = a_0 2^n.x^{3n} + \cdots + a_k.x^{n-k}$. Từ $n - k > 0 \Rightarrow 3(n - k) > n - k$ nên theo (1) đồng nhất hệ số ta có $a_k = 0$(mâu thuẫn). Vậy $P(x)$ không có nghiệm thực.

Bài 6.11 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long)**.** Giả sử $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ (a_i nguyên, $a_n \neq 0$). Đặt

$$Q(x) = P(x+1) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n \text{ } (b_i \text{ nguyên}).$$

Bởi vì $P(\dfrac{2017}{2019}) = 0$ nên $Q(\dfrac{-2}{2019}) = P(\dfrac{2017}{2019}) = 0$. Suy ra

$$b_0 + b_1(\frac{-2}{2019}) + \ldots + b_n(\frac{-2}{2019})^n = 0,$$

tương đương

$$b_0.(2019)^n + b_1.(-2)(2019)^{n-1} + \ldots + b_n(-2)^n = 0.$$

Từ đó suy ra b_0 là số chẵn. Mặt khác $b_0 = Q(0) = P(1) = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$. Vậy tổng các hệ số của $P(x)$ không thể bằng 2019.

Bài 6.12 (ĐH Tây Bắc)**.** Ta có $f'(x) = 5x^4 - 8x$ có đúng 2 nghiệm thực là $x = 0; x = \sqrt[3]{8/5}$ nên $f(x)$ có hai cực trị là

$$f(0) = 2 > 0; f(\sqrt[3]{8/5}) = \frac{10 - 12\sqrt[3]{64/25}}{5} < 0.$$

Từ đó do tính liên tục của $f(x)$ suy ra $f(x)$ có đúng 3 nghiệm thực. Hơn nữa $f(-1) = -3; f(0) = 2; f(1) = -1; f(2) = 18$ nên 3 nghiệm thực của $f(x)$ tương ứng thuộc các khoảng $(-1, 0); (0, 1); (1, 2)$.
Mặt khác ta có

$$f(-2x) = -32x^5 - 16x^2 + 2 = -2(16x^5 + 8x^2 - 1) = -2g(x) \quad (*)$$

Suy ra $g(x)$ cũng có đúng 3 nghiệm thực tương ứng thuộc các khoảng $(-1, -1/2)$; $(-1/2, 0)$; $(0, 1/2)$.
Nếu gọi b là nghiệm thực nhỏ nhất của $g(x)$ thì $b \in (-1, -1/2)$ và $g(b) = 0$ suy ra $a = -2b \in (1, 2)$ hơn nữa từ đẳng thức (*) ta có $f(a) = f(-2b) = -2g(b) = 0$ vậy a là nghiệm lớn nhất của $f(x)$ và $a + 2b = 0$.
b) Ta có:

$$\begin{aligned}
\alpha^3 &= \left(\sqrt[3]{7+\sqrt{\frac{49}{8}}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{\frac{49}{8}}}\right)^3 \\
&= 14 + 3\sqrt[3]{\left(7+\sqrt{\frac{49}{8}}\right)\left(7-\sqrt{\frac{49}{8}}\right)}\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{\frac{49}{8}}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{\frac{49}{8}}}\right) \\
&= 14 + \frac{21}{2}\alpha
\end{aligned}$$

Suy ra α là nghiệm của đa thức $g(x) = 2x^3 - 21x - 28$.
Chia đa thức $2x^5 - 2x^4 - 23x^3 - 7x^2 + 49x + 30$ cho $g(x)$ ta được:

$$2x^5 - 2x^4 - 23x^3 - 7x^2 + 49x + 30 = g(x)(x^2 - x - 1) + 2.$$

Suy ra $f(\alpha) = 2^5 = 32$.

7 TỔ HỢP

Bài 7.1 (ĐH Giao thông Vận tải). Ứng với một cách cắt ta đánh số các đoạn từ 1 đến 351. Ký hiệu số thứ tự của các đoạn 10m là $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$, số thứ tự của đoạn 18m là a. Để thực hiện một cách cắt theo đúng yêu cầu ta thực hiện theo các bước.
Bước 1: chọn giá trị của a trong tập $\{1, 2, \ldots, 351\}$.
Bước 2: chọn một tập con $\{a_1, a_2, \ldots, a_{100}\}$ của 350 số còn lại.
Bước 3: cắt cuộn dây theo thứ tự đã chọn. Như vậy số cách cắt cuộn dây là $n = 351C_{350}^{100}$.

Bài 7.2 (ĐH Giao thông Vận tải). Ký hiệu sản lượng của các xí nghiệp là x_1, x_2, x_3, x_4 và không mất tính tổng quát ta giả sử $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant x_4$. Ký hiệu x_5 là nhu cầu nước sinh hoạt hàng ngày của toàn thành phố. Nếu xí nghiệp thứ nhất được bảo dưỡng theo định kỳ thì lượng nước bị thiếu hụt là $\alpha_1 = 0,5x_1 - 0,2x_2 - 0,15x_3 - 0,1x_4$. Tương tự các xí nghiệp thứ $2, 3, 4$ được bảo dưỡng theo định kỳ thì lượng nước bị thiếu hụt tương ứng là $\alpha_2 = 0,5x_2 - 0,2x_1 - 0,15x_3 - 0,1x_4$; $\alpha_3 = 0,5x_3 - 0,2x_1 - 0,15x_2 - 0,1x_4$; $\alpha_4 = 0,5x_4 - 0,2x_1 - 0,15x_2 - 0,1x_3$. Từ $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant x_4$ ta suy ra được $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_3 \geqslant \alpha_4$. Đối chiếu với giả thiết ta thu được dãy $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ chính là $\{56, 14, -12, -36\}$. Từ đó ta lập được hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 0,5x_1 - 0,2x_2 - 0,15x_3 - 0,1x_4 = 56 \\ -0,2x_1 + 0,5x_2 - 0,15x_3 - 0,1x_4 = 14 \\ -0,2x_1 - 0,15x_2 + 0,5x_3 - 0,1x_4 = -12 \\ -0,2x_1 - 0,15x_2 - 0,1x_3 + 0,5x_4 = -36 \end{cases}$$

Giải hệ theo phép khử Gauss ta thu được kết quả: $x_1 = 300, x_2 = 240, x_3 = 200, x_4 = 160$. Từ đó ta tính được $x_5 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 900$.

Ghi chú. Ta có thể giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 0,5x_1 + 1,2x_2 + 1,15x_3 + 1,1x_4 - x_5 = -56 \\ 1,2x_1 + 0,5x_2 + 1,15x_3 + 1,1x_4 - x_5 = -14 \\ 1,2x_1 + 1,15x_2 + 0,5x_3 + 1,1x_4 - x_5 = 12 \\ 1,2x_1 + 1,15x_2 + 1,1x_3 + 0,5x_4 - x_5 = 36 \end{cases}$$

Giải hệ theo phép khử Gauss ta thu được kết quả: $x_1 = 300, x_2 = 240, x_3 = 200, x_4 = 160, x_5 = 900$.

Bài 7.3 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội)**.** 50 viên bi được chia làm ba loại gồm: 16 viên bi có số chia hết cho 3; 17 viên bi có số chia 3 dư 1 và 17 viên bi còn lại có số chia 3 dư 2.
Có hai trường hợp xảy ra:
• 3 viên bi được chọn cùng một loại, trong trường hợp này có: $C_{16}^3 + C_{17}^3 + C_{17}^3 = 1920$ (cách).
• 3 viên bi được chọn thuộc ba loại khác nhau, trong trường hợp này có: $C_{16}^1.C_{17}^1.C_{17}^1 = 4624$ (cách).
Vậy có tất cả: $1920 + 4624 = 6544$ (cách).

Bài 7.4 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội)**.** Gọi a_n là cách sắp xếp giỏ trái cây thỏa mãn đề bài và $F(x)$ là hàm sinh của dãy a_n. Ta có

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n = f(x).g(x).h(x).k(x)$$

trong đó $f(x), g(x), h(x), k(x)$ tương ứng là hàm sinh cho số cách chọn các loại quả lê, quả chuối, quả ổi, quả bưởi.
Ta có: hàm sinh cho số cách chọn quả lê là:

$$f(x) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Hàm sinh cho số cách chọn quả chuối là:

$$g(x) = 1 + x^6 + x^{12} + \cdots = \frac{1}{1 - x^6}.$$

Hàm sinh cho số cách chọn quả ổi là:

$$h(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = \frac{1 - x^6}{1 - x}.$$

Hàm sinh cho số cách chọn quả bưởi là:

$$k(x) = 1 + x.$$

Do đó:

$$F(x) = \frac{1}{1 - x^2}.\frac{1}{1 - x^6}.\frac{1 - x^6}{1 - x}.(1 + x) = \frac{1}{(1 - x)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}(k + 1).x^k.$$

Đẳng thức cuối cùng nhận được bằng cách lấy đạo hàm hai vế đẳng thức

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k.$$

Suy ra $a_n = n + 1$. Vậy số cách sắp xếp giỏ trái cây thỏa mãn đề bài là $n + 1$.

Bài 7.5 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội). Ta chỉ cần chứng tỏ tồn tại một khối cầu có bán kính là 1 chứa ít nhất 22 điểm của tập A.
Gọi (S_1) là khối cầu có tâm là điểm A_1, bán kính $R = 1$ (kể cả biên).
Nếu tất cả các điểm $A_i (i = 2; 3; \cdots ; 64)$ đều thuộc (S_1) thì ta có ngay điều phải chứng minh.
Xét trường hợp tồn tại điểm của tập hợp $\{A_2; A_3; \cdots ; A_{64}\}$ không thuộc khối cầu (S_1), không mất tính tổng quát ta có thể giả sử điểm đó là A_2. Ta có

$$A_1A_2 > 1.$$

Gọi (S_2) là khối cầu có tâm là điểm A_2 và có bán kính bằng 1 (kể cả biên).
Nếu tất cả các điểm $A_i (i = 3; 4; \cdots ; 64)$ đều thuộc khối cầu (S_1) hoặc khối cầu (S_2) thì theo nguyên lý Dirichle, tồn tại một trong hai khối cầu (S_1) hoặc (S_2) chứa ít nhất 31 điểm của tập A. Từ đó ta thu được điều phải chứng minh.
Xét trường hợp tồn tại điểm của tập hợp $\{A_3; A_4; \cdots ; A_{64}\}$ không thuộc cả hai khối cầu $(S_1); (S_2)$. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử điểm đó là A_3. Khi đó hiển nhiên ta có:

$$A_3A_1 > 1; A_3A_2 > 1.$$

Gọi (S_3) là khối cầu có tâm là điểm A_3 và có bán kính bằng 1 (kể cả biên).
Với bất kì $i = 4; 5; \cdots ; 64$, xét 4 điểm $A_1; A_2; A_3; A_i$. Theo giả thiết tồn tại 2 điểm trong 4 điểm đó có khoảng cách không vượt quá 1. Mặt khác do $A_1A_2; A_1A_3; A_2A_3 > 1$ nên ta suy ra: hoặc $A_iA_1 \le 1$, hoặc $A_iA_2 \le 1$, hoặc $A_iA_3 \le 1$. Nghĩa là bất kì các điểm $A_4; A_5; \cdots ; A_{64}$ đều thuộc ít nhất một trong ba khối cầu $(S_1); (S_2); (S_3)$. Theo nguyên lý Dirichle, tồn tại một trong ba khối cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$ chứa ít nhất 21 điểm của tập $\{A_4; A_5; \cdots ; A_{64}\}$, và do đó khối cầu này sẽ chứa ít nhất 22 điểm (bao gồm cả tâm của khối cầu đó) của tập A.

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: GIẢI TÍCH

1 DÃY SỐ

Bài 1.1 (ĐH Giao thông vận tải). Ta có $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)^2 \geq 0$, $\forall n \geq 1$. Do đó $\{u_n\}$ là dãy số tăng. Theo giả thiết $0 < u_1 < 1$. Giả sử $0 < u_k < 1$. Khi đó $-1 < u_k(u_k - 1) < 0$ và $0 < u_{k+1} = 1 + u_k(u_k - 1) < 1$. Vậy theo quy nạp ta có $0 < u_n < 1$ với mọi $n \geq 1$. Dãy số $\{u_n\}$ tăng và bị chặn trên nên tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \alpha$. Chuyển qua giới hạn ta được $\alpha^2 - \alpha + 1 = \alpha \iff \alpha = 1$. Mặt khác ta có $1 - u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$, $n = 1, 2, ...,$ Truy hồi ta được $1 - u_{n+1} = u_1u_2...u_n(1 - u_1)$. Vì vậy

$$\lim_{n\to\infty}(u_1u_2...u_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1 - u_{n+1}}{1 - u_1} = 0.$$

Bài 1.2 (ĐH Hàng hải Việt Nam). Đặt $y_n = \dfrac{1}{2017}(2018x_{n+2018} - x_n)$. Từ giả thiết ta suy ra dãy $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ tới giới hạn $\dfrac{a}{2017}$, do đó dãy $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ bị chặn. Vậy tồn tại số dương A sao cho $|x_n| < A$ với mọi $n = 1, 2, ..., 2018$ và $|y_n| < A$ với mọi $n \geq 1$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng " $|x_n| < A$ với mọi $n \geq 1$ " (*). Khẳng định (*) rõ ràng đã đúng với $n = 1, 2, ..., 2018$ do cách chọn số A. Giả sử khẳng định (*) đã đúng với mọi số nguyên dương n thỏa mãn $2018k + 1 \leq n \leq 2018(k + 1)(k \geq 0)$. Khi đó ta có:

$$|x_{n+2018}| = |\frac{x_n + 2017y_n}{2018}| \leq \frac{1}{2018}\left(|x_n| + 2017|y_n|\right) < \frac{A + 2017A}{2018} = A$$

với mọi số nguyên dương n thỏa mãn $2018k + 1 \leq n \leq 2018(k + 1)(k \geq 0)$. Nghĩa là, nếu khẳng định (*) đã đúng với mọi số nguyên dương n thỏa mãn $2018k + 1 \leq n \leq 2018(k + 1)(k \geq 0)$ thì khẳng định đó cũng sẽ đúng với mọi số nguyên dương n thỏa mãn :

$$2018(k + 1) + 1 \leq n \leq 2018(k + 2).$$

Vậy khẳng định (*) được chứng minh bằng phép quy nạp theo khối.
Đặt $\overline{lim}(x_n) = L, \underline{lim}(x_n) = l$. Từ chứng minh trên ta suy ra các số L, l là các số thực hữu hạn. Lấy giới hạn trên và giới hạn dưới của đẳng thức:

$$x_{n+2018} = \frac{x_n + 2017y_n}{2018}$$

ta thu được các bất đẳng thức sau:

$$L \leq \frac{L+a}{2018} \Leftrightarrow L \leq \frac{a}{2017}; \qquad l \geq \frac{l+a}{2018} \Leftrightarrow l \geq \frac{a}{2017}.(**)$$

Bởi vì $l \leq L$ nên từ các bất đẳng thức (**) ta suy ra $L = l = \frac{a}{2017}$. Vậy dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{a}{2017}$.

Bài 1.3 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội). Ta thấy $x_n \geq a$ với mọi $n \geq 1$ và dãy số tăng $\{x_n\}$ là tăng ngặt có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.
Nếu $m \leq 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^m} = +\infty$ hay dãy số $\left\{\frac{x_n}{n^m}\right\}$ phân kỳ.

Xét $m > 0$. Ta thấy, để dãy số $\left\{\frac{x_n}{n^m}\right\}$ có giới hạn hữu hạn thì dãy số $\frac{x_n^{\frac{1}{m}}}{n}$ có giới hạn hữu hạn. Đặt $k = \frac{1}{m}$. Ta có $A = \lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}^k - x_n^k) = \lim\limits_{n\to\infty} k(\frac{2}{x_n^{\frac{3}{2}-k}} + \frac{5}{x_n^{\frac{6}{5}-k}})$.
Khi đó, ta có

$$A = \begin{cases} 0 & \text{nếu } 0 < k < \frac{6}{5} \\ 6 & \text{nếu } k = \frac{6}{5} \\ +\infty & \text{nếu } k > \frac{6}{5} \end{cases}.$$

Theo định lý Stolz, ta có

— Với $0 < m < \frac{5}{6}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^{\frac{1}{m}}}{n} = +\infty$

— Với $m = \frac{5}{6}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^{\frac{1}{m}}}{n} = 6$.

— Với $m > \frac{5}{6}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^{\frac{1}{m}}}{n} = 0$.

Suy ra các kết quả đến ý a) và b).

Bài 1.4 (ĐH Quảng Bình). Ta thấy $x_2 > x_1$ và hàm $f(x) = \sqrt{2018x - 2017}$ tăng trên $[1; +\infty)$ do đó dãy (x_n) tăng. Mặt khác, $x_1 \leq 2017$, giả sử $x_n \leq 2017$ thì ta có

$$\sqrt{2018x_n - 2017} \leq \sqrt{2018.2017 - 2017} = 2017$$

hay $x_{n+1} \leq 2017$ tức là dãy (x_n) bị chặn. Do đó tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha \in (1; 2017]$.
Qua giới hạn đẳng thức $x_{n+1} = \sqrt{2018x_n - 2017}$ ta có $\alpha = \sqrt{2018\alpha - 2017}$, dẫn đến $\alpha = 2017$.
Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2017$.

Bài 1.5 (ĐH Quốc tế). Nếu dãy đã cho và hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ thì $l^2 - l + a = 0$. Suy ra $1 - 4a \geq 0$ hay $a \leq \dfrac{1}{4}$. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$$

Vậy $0 < a \leq \dfrac{1}{4}$.

Ngược lại, giả sử rằng $0 < a < \dfrac{1}{4}$. Để ý rằng $x_n \geq a, \forall n \geq 2$.

Ta có $x_1 = 0, x_2 = a, x_3 = a + a^2$. Vậy

$$0 < x_1, x_2, x_3 < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Giả sử $x_n < \dfrac{1}{2}$, khi đó $x_{n+1} = a + x_n^2 < a + \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Vậy $a \leq x_n < \dfrac{1}{2}$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

Hơn nữa,

$$x_{n+1} - x_n = a + x_n^2 - (a + x_{n-1}^2) = (x_n - x_{n-1})(x_n + x_{n-1})$$

Do $x_2 > x_1$, bằng quy nạp $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Dãy đã cho hội tụ.

Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$$

Bài 1.6 (Trường Sĩ quan Không quân). Xét hàm số $f(x) = \ln(1+x)$ là hàm liên tục trên $[0;1]$ do đó f khả tích trên $[0;1]$, tức là tồn tại giới hạn hữu hạn:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \ln(1+\delta_k)$$

với mọi hệ phân điểm $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1$ và mọi cách chọn $\delta_k \in [x_{k-1}; x_k], 1 \leq k \leq n$. Do đó, bằng cách chọn $x_k = \frac{k}{n}, \delta_k = x_{k+1}, 0 \leq k \leq n$, ta suy ra dãy $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{k}{n})$ hội tụ và

$$\lim u_n = \int_0^1 \ln(1+x)dx = 2\ln 2 - 1$$

Bài 1.7 (Trường Sĩ quan Không quân). Gọi S_n là tổng số tiền thưởng mà nhà đầu tư A được hưởng, T_n là tổng số tiền thưởng mà Hãng X phải trả khi hệ thống phát triển đầy đủ đến cấp n. Khi đó:

$$S_1 = 0, S_n = N\sum_{k=1}^{n-1}(2r)^k, n > 1.$$

Tổng số tiền mà Hãng X thu được của các nhà phân phối là: $N\sum_{k=0}^{n-1}2^k = (2^n-1)N$

Tổng số tiền thưởng mà Hãng X phải trả khi hệ thống phát triển đầy đủ đến cấp n là:

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1}2^k S_{n-k} = \frac{2rN}{1-2r}\left[2^{n-1}-1-\frac{2r}{2r-1}\left((2r)^{n-1}-1\right)\right]$$

1) Khi $r = 40\%, N = 10$ triệu đồng, hệ thống đầy đủ đến cấp 10 thì:
   - Số tiền thưởng mà nhà phân phối A được chia là:

   $$S_{10} = 10\sum_{k=1}^{9}(2r)^k = 40.\left[1-(2r)^9\right] \approx 34,63 \text{ triệu đồng.}$$

   Tức là nhà phân phối A có lãi khoảng 24.630.000 đồng.
   - Tổng số tiền mà các nhà phân phối nộp cho Hãng X là:
   $(2^{10}-1).10 = 10$ tỷ 230 triệu đồng.
   - Tổng số tiền mà Hãng X phải trả thưởng là:

   $$T_{10} = \frac{2rN}{1-2r}\left[2^9-1-\frac{2r}{2r-1}\left((2r)^9-1\right)\right] \approx 5 \text{ tỷ } 75,4 \text{ triệu đồng.}$$

   Vậy số tiền mà Hãng X thu được sau khi trừ chi phí hoa hồng xấp xỉ: 5 tỷ 154,6 triệu đồng.
2) Khi hệ thống phát triển đầy đủ đến cấp 3 thì:
   - Số tiền thưởng mà A được chia là: $S_3 = N\sum_{k=1}^{2}(2r)^k$.
   - Nhà phân phối A bắt đầu có lãi khi $\frac{2r}{1-2r}\left(1-(2r)^2)\right) > 1$. Từ đó, ta tìm ra $r > \frac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 31\%$.

3) Nhà phân phối A sẽ không bao giờ có lãi khi:

   $$\lim_{n\to\infty} S_n \le N \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{2r}{1-2r}\left(1-(2r)^{n-1}\right) \le 1$$

   .
   Ta có:

   $$\lim_{n\to\infty}\frac{2r}{1-2r}\left(1-(2r)^{n-1}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{nếu r>50\%} \\ \frac{2r}{1-2r} & \text{nếu r<50\%} \end{cases}$$

   Ta đó, xét trường hợp $r < 50\%$ suy ra $r \le 25\%$.

Bài 1.8 (CĐ Sư phạm Nam Định). (a) Ta chứng minh $u_n \geq 2 \quad (1)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng quy nạp.
+ Với $n = 1$, $u_1 = 3 \geq 2$ (thỏa mãn)
+ Giả sử (1) đúng với $n = k$ tức là $u_k \geq 2$.
Do đó $3u_k - 2 \geq 4$. Vậy $u_{k+1} = \sqrt{3u_k - 2} \geq 2$.
Vậy (1) đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
Ta chứng minh $u_{n+1} < u_n \quad (2)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng quy nạp.
+ Với $n = 1$: $u_2 = \sqrt{7} < 3 = u_1$ (thỏa mãn)
+ Giả sử (2) đúng với $n = k$ tức là $u_{k+1} < u_k$.
Do đó $3u_{k+1} - 2 < 3u_k - 2 \Rightarrow u_{k+2} = \sqrt{3u_{k+1} - 2} < \sqrt{3u_k - 2} = u_{k+1}$
Vậy (2) đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, (2) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
Vậy dãy (u_n) giảm và bị chặn dưới bởi 2. Do đó tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x \geq 2$.
Vì $u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}$. Cho $n \to +\infty$ 2 vế ta được:
$x = \sqrt{3x - 2} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$.
Vì $x \geq 2$ nên $x = 2$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

(b) Ta có $u_2 = \sqrt{3a - 2}$, do đó $a \geq \dfrac{2}{3}$. Vậy $u_n \geq 0$ với mọi n. Giả sử dãy $\{u_n\}$ có giới hạn hữu hạn là α. Dễ thấy $\alpha = 1$ hoặc $\alpha = 2$. Ta có:

$$u_n^2 - u_{n-1}^2 = -(u_{n-1} - 1)(u_{n-1} - 2), \tag{10}$$

$$u_n^2 - 1 = 3(u_{n-1} - 1) \tag{11}$$

và

$$u_n^2 - 4 = 3(u_{n-1} - 2) \tag{12}$$

Xét các trường hợp:

(a) Nếu $a = 1$ thì $u_n = 1$ suy ra $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.
(b) Nếu $a = 2$ thì $u_n = 2$ suy ra $\lim_{n\to\infty} u_n = 2$.
(c) Nếu $1 < a < 2$ thì từ các đẳng thức (10), (11) và (12) ta suy ra được $u_n > u_{n-1}$ và $u_n \in (1, 2)$. Trong trường hợp này ta được $\lim_{n\to\infty} u_n = 2$. Thỏa mãn.
(d) Nếu $a > 2$ thì từ các đẳng thức (10), (11) và (12) ta suy ra được $u_n < u_{n-1}$ và $u_n > 2$. Trong trường hợp này ta được $\lim_{n\to\infty} u_n = 2$. Thỏa mãn.
(e) Nếu $\dfrac{2}{3} \leq a < 1$ thì từ các đẳng thức (10), (11) và (12) ta suy ra được $u_n < u_{n-1}$ và $u_n < 1$. Trong trường hợp này ta được $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$. Không thỏa mãn vì u_n là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 0.

Vậy $a \geq 1$ thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

Bài 1.9 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long). Từ hệ thức đã cho, ta có:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2018} \quad (n = 1, 2, ..)$$

Hay

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 2018 \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right) \quad (n = 1, 2, ..), \tag{1}$$

Suy ra

$$1 = u_1 < u_2 < u_3 < \cdots < u_k < u_{k+1} \cdots$$

hay dãy $\{u_n\}$ đã cho là dãy đơn điệu tăng.

Giả sử dãy $\{u_n\}$ bị chặn trên. Khi đó dãy $\{u_n\}$ tồn tại giới hạn hữu hạn. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \quad (a > 1)$

Từ $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2018} + u_n$ suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n^2}{2018} + u_n \right)$$

Hay $a = \dfrac{a^2}{2018} + a$. Suy ra $a = 0$ (Vô lí vì $a > 1$).

Vậy dãy $\{u_n\}$ không bị chặn trên, và $\{u_n\}$ là dãy tăng.

Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \cdots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) = \lim_{n\to\infty} 2018 \left(1 - \frac{1}{u_{n+1}} \right) = 2018.$$

Bài 1.10 (ĐH Tây Bắc). a) Khi $\alpha = 0$, dễ thấy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln \left(\frac{k+n}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$$

là giới hạn của tổng Riemann của hàm liên tục $f(x) = \ln(1+x)$ trên đoạn $[0, 1]$ và ta được

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) = \int_0^1 \ln(1+x)dx = 2\ln 2 - 1.$$

b) Với $\alpha > 0$, cùng với a), ta có đánh giá

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+n}{n}+\alpha\varepsilon_n\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}+\alpha\varepsilon_n\right)\\ &\geq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\\ &\to 2\ln 2-1\end{aligned}$$

Mặt khác, do $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$ nên với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại n_0 sao cho $\forall n \geq n_0$ ta có $\alpha\varepsilon_n \leq \varepsilon$. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}+\alpha\varepsilon_n\right) \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}+\varepsilon\right).$$

Tuy nhiên, vế phải của bất đẳng thức trên là giới hạn của tổng Riemann của hàm liên tục $\ln(1+x+\varepsilon)$ trên $[0,1]$ nên ta có

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}+\varepsilon\right) &= \int_0^1 \ln(1+x+\varepsilon)dx\\ &= \int_\varepsilon^{1+\varepsilon}\ln(1+x)dx\\ &= 2\ln(2+\varepsilon)-(1+\varepsilon)\\ &\to 2\ln 2-1\end{aligned}$$

khi $\varepsilon \to 0$. Từ đó do $\varepsilon > 0$ tùy ý nên ta được

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+n}{n}+\alpha\varepsilon_n\right) = 2\ln 2-1.$$

2 CHUỖI SỐ

Bài 2.1 (ĐH Giao thông vận tải)**.** Xét hai chuỗi hội tụ

$$X = \frac{1}{1^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\ldots$$
$$Y = \frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{6^3}+\ldots$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}Y &= \frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{6^3}+\ldots\\ &= \frac{1}{2^3}\left(\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\ldots\right) = \frac{1}{2^3}S = \frac{1}{8}(X+Y).\end{aligned}$$

Ta có $Y = \dfrac{1}{7}X$ và $S = X + Y = \dfrac{8}{7}X$ và

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}\left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - ...\right) &= \frac{4}{3}(X - Y)\\ &= \frac{4}{3}\frac{6}{7}X = S.\end{aligned}$$

Bài 2.2 (ĐH Hàng hải Việt Nam)**.** Đặt

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x^{3n-2}}{3n-2} - \frac{x^{3n-1}}{3n-1}\right]. \tag{13}$$

Dễ thấy các chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{3n-2}}{3n-2}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{3n-1}}{3n-1}$ có bán kính hội tụ bằng 1 nên hàm f xác định trong khoảng $(-1,1)$. Theo tính chất của chuỗi lũy thừa ta có

$$f^{'}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[x^{3n-3} - x^{3n-2}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}x^{3n-3} - x\sum_{n=1}^{\infty}x^{3n-3} = \frac{1}{1-x^3} - \frac{x}{1-x^3} = \frac{1}{1+x+x^2}$$

với mọi $x \in (-1,1)$. Do đó

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f^{'}(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t+t^2},$$

với mọi $x \in (-1,1)$. Từ đó ta có

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2}$$

hay

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \tag{14}$$

Ta chứng minh chuỗi ở vế phải của (13) hội tụ đều trên đoạn $[0,1]$. Thật vậy, với $x \in [0,1]$ ta có

$$\left|\frac{x^{3n-2}}{3n-2} - \frac{x^{3n-1}}{3n-1}\right| = \frac{x^{3n-2}[3n-1-(3n-2)x]}{(3n-1)(3n-2)},$$

do đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho $3n-1$ số không âm, trong đó $3n-2$ số bằng x và 1 số bằng $3n-1-(3n-2)x$ ta được

$$\left|\frac{x^{3n-2}}{3n-2} - \frac{x^{3n-1}}{3n-1}\right| \le \frac{\left[\dfrac{(3n-2)x + [3n-1-(3n-2)x]}{3n-1}\right]^{3n-1}}{(3n-1)(3n-2)} = \frac{1}{(3n-1)(3n-2)}.$$

Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n-2)}$ hội tụ, nên theo tiêu chuẩn Weierstrass ta có điều phải chứng minh. Từ đó suy ra hàm f liên tục trên đoạn $[0,1]$ như là tổng của chuỗi hội tụ đều của các hàm liên tục. Ta suy ra

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n-2)}. \tag{15}$$

Từ (14) và (15) ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n-2)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Bài 2.3 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên)**.** Xét hàm số $f(t) = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ t \in \mathbb{R}$. Hàm này khả vi liên tục trên $\mathbb{R}$.
Áp dụng định lý Lagrange cho $f(t)$ trên mỗi đoạn $[k-1,k],\ k \in \mathbb{N}$ ta được

$$\frac{k^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(k-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \eta^\alpha,\ \eta \in (k-1,k).$$

Chú ý rằng $(k-1)^\alpha < \eta^\alpha < k^\alpha$ ta có

$$(k-1)^\alpha < \frac{k^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(k-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} < k^\alpha.$$

Cho k chạy từ 1 đến n và cộng lại ta được

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)^\alpha < \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < \sum_{k=1}^{n} k^\alpha.$$

Từ đây dễ dàng suy ra

$$\frac{1}{\alpha+1} < \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{n}.$$

Đến đây sử dụng định lý "kẹp" về giới hạn ta được

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Bài 2.4 (ĐH Tây Bắc)**.** a) Từ giả thiết ta suy ra $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ và với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \frac{nu_n^2}{1+(n+1)u_n} &\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{nu_n}{1+(n+1)u_n} \\ &\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n}[(1+(n+1)u_n] = nu_n \\ &\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} + (n+1)u_{n+1} = nu_n \\ &\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = nu_n - (n+1)u_{n+1}. \end{aligned}$$

Từ đây lấy tổng hai vế đẳng thức cuối cùng ta nhận được với mọi $k \geq 1$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{k} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{u_1}{u_0} + \sum_{n=1}^{k}[nu_n - (n+1)u_{n+1}] \\ &= \frac{u_1}{u_0} + 1.u_1 - (k+1)u_{k+1} \\ &= 2019 - (k+1)u_{k+1}.\end{aligned}$$

Mặt khác do $u_{k+1} > 0$ nên với mọi $k \geq 1$ ta có $\sum\limits_{n=0}^{k} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 2019$. Điều này chứng tỏ chuỗi số dương đã cho có tổng riêng bị chặn trên (bởi 2019) nên chuỗi là hội tụ.

b) Theo a) vì chuỗi số dương $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ hội tụ nên số hạng tổng quát $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 0$ khi $n \to \infty$. Từ đó suy ra tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_0$ ta đều có $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2}$. Không mất tính tổng quát có thể coi $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2}, \forall n \geq 0$. Từ đó với mọi n ta có

$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdots \frac{u_1}{u_0} u_0 \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}.$$

Suy ra $nu_n \leq \frac{n}{2^n}$. Tuy nhiên ta biết (dễ chứng minh được) rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ nên $nu_n \to 0$ khi $n \to \infty$. Từ đây và biểu diễn ở trên ta được

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{k\to\infty}[2019 - (k+1)u_{k+1}] = 2019.$$

Vậy chuỗi có tổng bằng 2019.

3 HÀM SỐ

Bài 3.1 (ĐH Bách khoa Thành phố HCM). Từ giả thuyết suy ra dãy $\{f(n)\}$ tăng và $f(n) \geqslant f(1) = a > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \ell < +\infty$ thì từ ii) suy ra $\ell = 2018\ell^2 + \ell \Rightarrow \ell = 0$ (mâu thuẫn). Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = +\infty$. Mặt khác,

$$f(k+1) = 2018(f(k))^2 + f(k) \Rightarrow 2018(f(k))^2 = f(k+1) - f(k)$$

$$\Rightarrow \frac{2018(f(k))^2}{f(k)f(k+1)} = \frac{f(k+1) - f(k)}{f(k)f(k+1)} \Rightarrow \frac{f(k)}{f(k+1)} = \frac{1}{2018}\left(\frac{1}{f(k)} - \frac{1}{f(k+1)}\right)$$

Từ đó suy ra

$$\frac{f(1)}{f(2)} + \frac{f(2)}{f(3)} + \ldots + \frac{f(n)}{f(n+1)} = \frac{1}{2018}\Big[\left(\frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(2)}\right) + \left(\frac{1}{f(2)} - \frac{1}{f(3)}\right) + \ldots +$$

$$+\left(\frac{1}{f(n)}-\frac{1}{f(n+1)}\right)\Big] = \frac{1}{2018}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{f(n+1)}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2018a}$$

Bài 3.2 (ĐH Hàng hải Việt Nam)**.** Ta có

$$27!a_{27} = P^{(27)}(0). \tag{16}$$

Rõ ràng

$$P(x) = \left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^6 = \left(1-6x^{10}+15x^{20}-20x^{30}+15x^{40}-6x^{50}+x^{60}\right)(1-x)^{-6}$$

nên theo công thức Leibniz

$$P^{(27)}(x) = \sum_{k=0}^{27} C_{27}^k \left(1-6x^{10}+15x^{20}-20x^{30}+15x^{40}-6x^{50}+x^{60}\right)^{(27-k)} \left[(1-x)^{-6}\right]^{(k)}.$$

Hay

$$P^{(27)}(x) = \sum_{k=0}^{27} C_{27}^k \left(1-6x^{10}+15x^{20}-20x^{30}+15x^{40}-6x^{50}+x^{60}\right)^{(27-k)} \frac{(k+5)!}{5!(1-x)^{(k+6)}}. \tag{17}$$

Giá trị tại $x=0$ của biểu thức

$$f_k(x) = \left(1-6x^{10}+15x^{20}-20x^{30}+15x^{40}-6x^{50}+x^{60}\right)^{(27-k)}$$

bằng tích của $(27-k)!$ với hệ số của x^{27-k} của $1-6x^{10}+15x^{20}-20x^{30}+15x^{40}-6x^{50}+x^{60}$ nên

— Với $27-k=0 \Leftrightarrow k=27$ ta có $f_{27}(0)=1$.

— Với $27-k=10 \Leftrightarrow k=17$ ta có $f_{17}(0)=10!(-6)$.

— Với $27-k=20 \Leftrightarrow k=7$ ta có $f_7(0)=20!15$.

— Với các trường hợp khác của $k, 0\le k\le 27$, ta có: $f_k(0)=0$.

Để ý rằng giá trị tại $x=0$ của biểu thức

$$g_k(x) = \frac{(k+5)!}{5!}(1-x)^{-(k+6)}$$

thỏa mãn

— Với $k=27$ ta có $g_{27}(0) = \dfrac{32!}{5!}$.

— Với $k=17$ ta có $g_{17}(0) = \dfrac{22!}{5!}$.

— Với $k=7$ ta có $g_7(0) = \dfrac{12!}{5!}$.

Từ đó và (17) suy ra

$$P^{(27)}(0) = C_{27}^{27}\frac{32!}{5!} + C_{27}^{17}.10!(-6)\frac{22!}{5!} + C_{27}^{7}.20!15.\frac{12!}{5!}$$

$$\Rightarrow P^{(27)}(0) = \frac{27!}{27!}\frac{32!}{5!} - 6\frac{27!}{17!}\frac{22!}{5!} + 15.\frac{27!}{7!}\frac{12!}{5!}.$$

Từ đó và (16) suy ra

$$a_{27} = \frac{32!}{27!5!} - 6\frac{22!}{17!5!} + 15.\frac{12!}{7!5!}$$

$$\Rightarrow a_{27} = C_{32}^{5} - 6C_{22}^{5} + 15C_{12}^{5}.$$

Hay $a_{27} = 55252$.

Bài 3.3 (ĐH Ngoại thương Hà Nội). Ta có: $f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2o(x) = xf'(0) + x^2o(x)$. Do đó:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f\left(\tfrac{k}{n^2}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left[\tfrac{k}{n^2}f'(0) + \tfrac{k}{n^2}o\left(\tfrac{k}{n^2}\right)\right] = \tfrac{f'(0)}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}\left[\tfrac{k}{n^2}o\left(\tfrac{k}{n^2}\right)\right] \\ &= \tfrac{f'(0)n(n+1)}{n^2.2} + \sum_{k=1}^{n}\left[\tfrac{k}{n^2}o\left(\tfrac{k}{n^2}\right)\right] = \tfrac{f'(0)(n+1)}{2n} + \sum_{k=1}^{n}\left[\tfrac{k}{n^2}o\left(\tfrac{k}{n^2}\right)\right]\end{aligned} \quad (*)$$

Hiển nhiên: $\dfrac{f'(0)(n+1)}{2n}$ có giới hạn $\dfrac{f'(0)}{2}$ Hơn nữa: Với mọi $\varepsilon > 0$ chọn n đủ lớn thì $\dfrac{k}{n^2} \le \frac{1}{n}$ đủ bé sao cho $\left|o(\dfrac{k}{n^2})\right| < \varepsilon$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{n^2}o\left(\frac{k}{n^2}\right)\right]\right| < \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{n^2}\varepsilon\right] = \frac{n+1}{2n}\varepsilon < \varepsilon$$

Do đó $\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{k}{n^2}o\left(\frac{k}{n^2}\right)\right]$ có giới hạn 0 khi $n$tiến vô cùng.

Vậy từ (*) ta có kết quả là

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}$$

Bài 3.4 (Học viện Phòng không Không quân). a) Một tập $A \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là tập compact nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset A$ đều có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ đến một giới hạn thuộc A.
Xét

$$A = \{n - 1 : n \ge 2\}, \quad B = \left\{\frac{1}{n} - n : n \ge 2\right\}.$$

Khi đó, A và B là các tập đóng. Ta có

$$X - A = (-\infty, 1) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+1)$$

là tập mở do A đóng. Tương tự, ta cũng có

$$X - B = \bigcup_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - n - 1, \frac{1}{n} - n \right) \cup \left(-\frac{3}{2}, +\infty \right)$$

cũng là tập mở do B đóng. Nhưng

$$\begin{aligned} A + B &= \left\{ (n-1) + \frac{1}{n} - n : n \geq 2 \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{n} - 1 \right\}, n \geq 2 \\ &= \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \ldots, \frac{1-n}{n}, \ldots \right\} \end{aligned}$$

không phải tập đóng vì dãy $z_n = \dfrac{1-n}{n} \subset A + B$ có giới hạn $-1 \notin A + B$.

b) Nếu A là tập compact và f là hàm liên tục thì $f(A)$ là tập compact. Ta sẽ chứng minh khẳng định này.

Xét dãy $\{y_n\}$ là dãy các phần tử bất kỳ trong $f(A)$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại $x_n \in A$ sao cho $y_n = f(x_n)$. Vì A là tập compact nên dãy $\{x_n\} \subset A$ chứa một dãy con $\{x_{n_k}\}$ sao cho $x_{n_k} \to a \in A$. Do f liên tục tại a nên ta có $f(x_{n_k}) \to f(a) \in A$. Đặt $y_{n_k} = f(x_{n_k})$. Như vậy, dãy $\{y_n\} \subset f(A)$ chứa một dãy con $\{y_{n_k}\}$ hội tụ đến $f(a) \in f(A)$ nên $f(A)$ là tập compact.

Bài 3.5 (Học viện Phòng không Không quân). Từ giả thiết, ta có $a < \dfrac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n < b$ với mọi n.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - x$ với $x \geq 1$ thì dễ thấy f tăng. Suy ra dãy $\left\{ \dfrac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n \right\}$ tăng. Do đó, ta có

$$\begin{aligned} \min |a-b| &= -\min \left(\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n \right) + \sup \left(\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\ln 2} + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n \right) \end{aligned}$$

Sử dụng quy tắc L' Hospital thì

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{2}.$$

Do đó, $\min|a-b|=1-\dfrac{1}{\ln 2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{\ln 2}$

Bài 3.6 (ĐH Quảng Bình). Hàm $g(x)=e^{-2018nx}f(x)$ thỏa mãn định lí Rolle, nên tồn tại $x_n\in(a;b)$ thỏa $g'(x_n)=0$. Ta có

$$g'(x)=-2018f(x)+f'(x)e^{-2018nx}.$$

Do đó $2018=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f'(x_n)}{e^{2018nx_n}f(x_n)}$

Bài 3.7 (ĐH Quốc tế). **Cách 1** Xét hàm số $g(x)=e^x\left(f(x)-2018\right),x\in(0,1]$. Dễ thấy $g'(x)=e^x\left(f(x)+f'(x)-2018\right)<0,x\in(0,1)$.

Suy ra

$$f(0)-f(2018)>e^x\left(f(x)-2018\right)>e(f(a)-2018).$$

Mặt khác

$$e(f(1)-2018)\geq e(f(0)-2018)(\text{do } f(1)\geq f(0)).$$

Suy ra $(f(0)-2018)\geq e(f(0)-2018)$.

Hay $(e-1)\left(f(0)-2018\right)<0$

Vậy $f(0)<2018$ và $f(x)-2018<0,\forall x\in(0,1)$

Cách 2 Giả sử $f(x_0)=\max\limits_{x\in[0,1]}f(x)$.

*) Nếu $x_0\in(0,1)$ thì $f'(x_0)=0$. Suy ra

$$f(x_0)+f'(x_0)=f(x_0)<2018$$

Vậy

$$f(x)\leq f(x_0)<2018;\ \forall x\in(0,1)$$

*) Nếu $f(x)<f(x_0)=f(1)\ \forall x\in(0,1)$ thì ta chứng minh rằng $f(1)\leq 2018$.

Giả sử $f(1)>2018$, suy ra $f(x)>2018,\ \forall x\in(\delta,1),0<\delta<1,$.

Do giả thiết $f'(x)+f(x)<2018,\ x\in(\delta,1)$, ta suy ra

$$f'(x)<2018-f(x)<0,\ \forall x\in(\delta,1)$$

Điều này mâu thuẫn với $f(1)$ là giá trị lớn nhất của hàm trên $[0,1]$.

Bài 3.8 (ĐH Quốc tế). Xét hàm

$$f(x) = \frac{x^{2018}}{2018} + \frac{bx^{2017}}{2017} + \frac{cx^{2016}}{2016}, x \in [0,1]$$

Áp dụng Định lý Rolle.

Bài 3.9 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). 1) Từ giả thiết f là hàm số liên tục trên $[a,b]$ và ánh xạ $[a,b]$ vào chính nó nên theo Định lý Bolzano-Cauchy tập $\mathcal{S} \neq \emptyset$.
2) Không mất tính tổng quát giả sử $f(x_n) \neq x_n, \forall n$. Giả sử $f(x_1) > x_1$ và đặt x^* là điểm đầu tiên mà $f(x^*) = x^*$. Vì $f(x_1) > x_1$ và $f(b) \leq b$ nên luôn tồn tại x^* như vậy.
Tiếp theo ta chứng minh khẳng định: Nếu $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x^*$ và $f(x_i) > x_i, \forall i = 1, \ldots, n$ thì $x_{n+1} < x^*$ và $f(x_{n+1}) > x_{n+1}$. Theo định nghĩa của x^* ta chỉ cần chứng minh $x_{n+1} < x^*$.
Giả sử ngược lại $x_{n+1} > x^*$, thì $x_n < x^* < x_{n+1}$ và

$$0 < x^* - x_n < x_{n+1} - x_n = \frac{f(x_n) - x_n}{2}.$$

Từ đó và giả thiết ta có

$$|x^* - x_n| < \frac{1}{2}|f(x_n) - x_n| \leq \frac{1}{2}|f(x_n) - x^*| + \frac{1}{2}|x^* - x_n|$$

hay

$$|x^* - x_n| < |f(x_n) - f(x^*)|.$$

Bất đẳng thức cuối mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $x_{n+1} < x^*$. Do đó theo giả thiết qui nạp ta chứng minh được dãy (x_n) đơn điệu tăng và bị chặn do đó tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$. Chuyển qua giới hạn khi $n \to \infty$ trong công thức truy hồi của dãy ta có $f(\ell) = \ell$.
Trường hợp $f(x_1) < x_1$, chứng minh tương tự.

Bài 3.10 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). a) Vì $f(f(x)) = x$ nên $f(x) = f(y) \Rightarrow f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow x = y, \forall x, y \in [a,b]$ do đó f là đơn ánh.
Thêm nữa, do f liên tục trên $[a,b]$ nên hàm số f là hàm đơn điệu trên $[a,b]$. Vì $a = f(a) < b = f(b)$ nên hàm số dã cho đơn điệu ngặt.
Không giảm tổng quát, ta giả sử hàm f đơn điệu tăng ngặt trên $[a,b]$. Khi đó, nếu $f(x) > x$ thì $f(f(x) > f(x)$ hay $x > f(x)$ (vô lý). Tương tự, nếu $f(x) < x$ thì $f(f(x) < f(x)$ hay $x < f(x)$ (vô lý). Như vậy ta có $f(x) = x, \forall x \in [a,b]$.
b) Theo giả thiết, ta có $\sup\limits_{[0,1]} f(x) = \sup\limits_{[0,1]} g(x)$ nên tồn tại $x_1, x_2 \in [0,1]$ sao cho $f(x_1) = \sup\limits_{[0,1]} f(x), g(x_2) = \sup\limits_{[0,1]} g(x)$.

Xét hàm số $h(x) = f^2(x) + 3f(x) - g^2(x) - 3g(x)$. Vì hàm số f, g liên tục trên $[0,1]$ nên hàm số h cũng liên tục trên đó.
Mặt khác, cũng do hàm số $f(x) \geq 0, \forall x \in [0,1]$ nên $h(x_1)h(x_2) < 0$. Theo định lý giá trị trung gian của hàm số ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.11 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Nếu tồn tại số $c \in (0,1)$ sao cho $f(c) = 0$ thì kết luận của bài toán hiển nhiên.
Ngược lại, do hàm f liên tục, không mất tính tổng quát ta giả sử $f(x) > 0, \forall x \in (0,1)$. Áp dụng định lý giá trị trung bình, với mỗi $t \in (1/2, 1)$ tồn tại $c_t \in (1/2, t)$ sao cho

$$\frac{\ln f(t) - \ln f(1/2)}{t - 1/2} = \frac{f'(c_t)}{f(c_t)}.$$

Vì $f(1) = 0$ nên cho $t \to 1^-$ trong đẳng thức trên ta có $\dfrac{f'(c_t)}{f(c_t)} \to -\infty$. Do đó tồn tại c_t sao cho

$$\frac{f'(c_t)}{f(c_t)} \leq -\frac{1}{2018}.$$

Do vậy $f'(c_t) < 0$ và

$$\left|\frac{f'(c_t)}{f(c_t)}\right| = -\frac{f'(c_t)}{f(c_t)} \geq \frac{1}{2018}.$$

Bất đẳng thức cuối cho ta điều phải chứng minh.

Bài 3.12 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long). Với mỗi $n \in \mathbb{N}$. Đặt $f(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}\right)$, ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x - \left(1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \ldots + \tfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) \\ &\ldots \\ f^{(n)} &= e^x - 1 > 0 \end{aligned}$$

Do đó $f^{(n-1)}(x)$ là hàm số đồng biến, suy ra

$$f^{(n-1)}(x) > f^{(n-1)}(0) = 0, \ \forall x > 0$$

Do đó $f^{(n-2)}(x)$ là hàm số đồng biến, suy ra

$$f^{(n-2)}(x) > f^{(n-2)}(0) = 0, \ \forall x > 0$$

Tiếp tục đến đạo hàm cấp một ta được $f'(x) > 0$ do đó $f(x)$ là hàm đồng biến, suy ra $f(x) > f(0) = 0, \ \forall x > 0$

Vậy, với $x > 0$ thì $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Bài 3.13 (ĐH Tây Bắc)**.** a) Khẳng định là sai. Thật vậy, chẳng hạn ta xét hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cho bởi $f(x) = x^3 - x$. Rõ ràng f là hàm liên tục và do $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ nên theo định lý giá trị trung gian của hàm liên tục ta được $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Tuy nhiên hàm f đạt cực trị (địa phương) tại 0 nên f không đơn điệu trên $\mathbb{R}$ (điều này cũng có thể được suy ra từ giả thiết về f ta có đánh giá $f(0) > f(\frac{1}{2}) < f(1)$, tức là f không đơn điệu).

b) Khẳng định là đúng. Thật vậy, trước hết ta giả sử f là hàm tăng trên $\mathbb{R}$. Khi đó với mọi số thực $a \in \mathbb{R}$ tập hợp $\{f(x), x < a\}$ bị chặn trên bởi $f(a)$ do tính đơn điệu tăng của f. Từ đó suy ra $f(x)$ tăng tới $f(a)$ khi x tăng tới a và ta thu được $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ tồn tại, đồng thời $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \le f(a)$. Hoàn toàn tương tự, tồn tại $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \ge f(a)$. Vậy $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \le f(a) \le \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

Trường hợp nếu hai giới hạn trên tồn tại và bằng nhau thì f liên tục tại a và ta suy ra khẳng định f liên tục trên $\mathbb{R}$. Ngược lại nếu không, ta được $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) := b < c := \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$. Khi đó do tính đơn điệu tăng của f nên ta có $f(x) \le \lim\limits_{x\to a^-} f(x) := b$ với mọi $x < a$ và $f(x) \ge c$ với mọi $x > a$ và do đó $f(\mathbb{R}) \subset (-\infty, b) \cup \{f(a)\} \cup (c, +\infty) \ne \mathbb{R}$, mâu thuẫn với giả thiết $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Chứng tỏ f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp f đơn điệu giảm ta có thể đưa về trường hợp trên bằng cách đặt $g(x) = -f(x)$ và được chứng minh tương tự.

c) Khẳng định là sai. Thật vậy, chẳng hạn ta xét $f(x) = \arctan x$ khi đó dễ thấy f đơn điệu và liên tục trên $\mathbb{R}$. Tuy nhiên $f(\mathbb{R}) = (-\pi/2; \pi/2) \ne \mathbb{R}$.

Bài 3.14 (ĐH Thủy Lợi)**.** Trước hết ta chứng minh rằng: Miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$ là $\mathbb{R}$.

\+ Đặt $u_n(x) = \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$. Với $x_0 \in \mathbb{R}$, xét

$$\left|\frac{u_{n+1}(x_0)}{u_n(x_0)}\right| = \frac{x_0^2}{2n+3}.$$

\+ Ta thấy: $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}(x_0)}{u_n(x_0)}\right| = 0 < 1$ với mỗi $x_0 \in \mathbb{R}$, do đó miền hội tụ của chuỗi hàm đã cho là $\mathbb{R}$, hay là miền xác định của $f(x)$ là $\mathbb{R}$.

\+ Khi đó, với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!},$$

và

$$f'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-1)!!} = 1 + x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}.$$

+ Bằng cách dịch chuyển chỉ số lấy tổng ta nhận được

$$f'(x) = 1 + x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!} = 1 + xf(x),\ x \in \mathbb{R},$$

và nhận được điều cần chứng minh.

4 PHÉP TÍNH VI PHÂN

Bài 4.1 (Học viện An ninh Nhân dân)**.** Xét hàm

$$g(x) = (x-a)(x-b)\sin(f(x)), x \in [a,b].$$

Ta thấy $g(a) = g(b) = 0$. Theo định lý Rolle tồn tại điểm $c \in (a,b)$ sao cho $g'(c) = 0$.
Thế mà

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x-a)\sin(f(x)) + (x-b)\sin(f(x)) \\ &\quad + (x-a)(x-b)f'(x)\cos(f(x)) \\ &= (2x-a-b)\sin(f(x)) + (x-a)(x-b)f'(x)\cos(f(x)), \end{aligned}$$

nên $g'(c) = 0$ nghĩa là $(2c-a-b)\sin(f(c)) + (c-a)(c-b)f'(c)\cos(f(c)) = 0$.
Suy ra $f'(c).\cot(f(c)) = \dfrac{(a+b-2c)}{(a-c)(b-c)}$.
Việc còn lại là ta phải chứng minh

$$\frac{2}{a-c} < f'(c).\cot(f(c)) = \frac{a+b-2c}{(a-c)(b-c)} = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c} < \frac{2}{b-c}.$$

Thật vậy, chú ý rằng $a-c<0$ và $b-c>0$, nên $\dfrac{1}{a-c} < \dfrac{1}{b-c}$ và do đó bất đẳng thức trên là đúng!

Bài 4.2 (Học viện An ninh Nhân dân)**.** Do f không phải là hàm tuyến tinh (đường thẳng) trên $[a,b]$, nên tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \neq \frac{f(b)-f(c)}{b-c} \quad (*)$$

Theo định lý Lagrange tồn tại $p \in (a, c)$ và $q \in (b, c)$ sao cho

$$f'(p) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \quad \text{và} \quad f'(q) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Chú ý đến $(*)$ ta có $f'(p) \neq f'(q)$. Không giảm tính tổng quát ta coi $f'(p) < f'(q)$.

Đặt $\lambda = \dfrac{c-a}{b-a}$, $0 < \lambda < 1$. Từ đó ta có

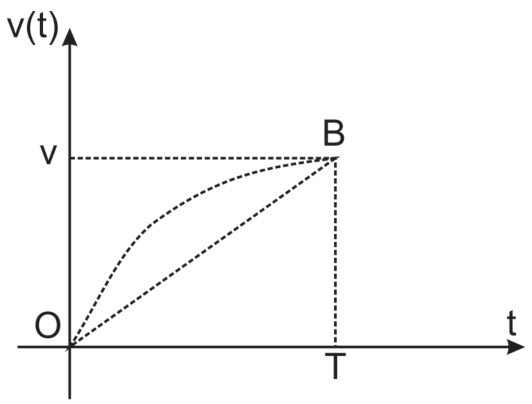
$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= \lambda \frac{f(c) - f(a)}{c - a} + (1 - \lambda) \frac{f(b) - f(c)}{b - c} \\ &= \lambda f'(p) + (1 - \lambda) f'(q) \\ &< \lambda f'(q) + (1 - \lambda) f'(q) = f'(q) \\ \text{và} \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= \lambda f'(p) + (1 - \lambda) f'(q) \\ &> \lambda f'(p) + (1 - \lambda) f'(p) = f'(p). \end{aligned}$$

Điều này hoàn thành chứng minh.

Nhận xét. Ta còn có thể chứng tỏ tồn tại $r \in (a, b)$ sao cho

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| < f'(r).$$

Bài 4.3 (ĐH Bách khoa Thành phố HCM). Vẽ đồ thị vận tốc $v(t)$ theo thời gian t.



Ta có $v(T) = v$. Diện tích miền phẳng dưới đường cong và giữa hai đường thẳng $t = 0$, $t = T$ chính là quãng đường đi được d. Từ chỗ gia tốc giảm $(a'(t) < 0 \Rightarrow v''(t) < 0)$, đường cong là lõm. Do đó

$$d \geqslant S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} vT \Rightarrow T \leqslant \frac{2d}{v}$$

Dấu bằng đạt được khi chuyển động với gia tốc hằng số.

Bài 4.4 (ĐH Bách khoa Thành phố HCM)**.** Giả sử ngược lại, $\exists x_0 \in [a,b]$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Có thể coi $f(x_0) > 0$. Đặt $E = \{x \in [a, x_0] : f(x) = 0\}$. Rõ ràng E khác rỗng vì $f(a) = 0$ và bị chặn. Đặt $x_1 = \sup E$. Do $f(x)$ liên tục và $f(x_1) = 0$ đồng thời $x_1 < x_0$; $f(x) > 0, \forall x \in (x_1, x_0]$.
Với $\alpha = 1$, xét hàm $g(x) = \ln f(x), x \in (x_1, x_0]$. Theo công thức số gia giới nội, ta có

$$|g(x) - g(x_0)| = |g'(c)|.|x - x_0| \leqslant A|x - x_0| \leqslant A|x_1 - x_0|,$$

trong khi đó $\lim\limits_{x \to x_1^+} |g(x) - g(x_1)| = +\infty$, mâu thuẫn.
Với $\alpha > 1$, xét hàm $g(x) = \dfrac{1}{1-\alpha}(f(x))^{1-\alpha}$, ta cũng thu được điều tương tự.
Vậy điều giả sử ngược lại là không đúng.

Bài 4.5 (ĐH Bách khoa Thành phố HCM). i) Từ hình vẽ ta thấy

$$\sin\theta = \frac{b}{BC} \Rightarrow BC = \frac{b}{\sin\theta}$$

và

$$\cos\theta = \frac{BD}{BC} \Rightarrow BC = \frac{a - AB}{\cos\theta}$$

Từ đó ta có

$$\frac{b}{\sin\theta} = \frac{a - AB}{\cos\theta} \Rightarrow b\cot\theta = a - AB \Rightarrow AB = a - b\cot\theta.$$

Theo định luật Poiseuille, tổng kháng lực là

$$R(\theta) = C\frac{AB}{r_1^4} + C\frac{BC}{r_2^4} = C\left(\frac{a - b\cot\theta}{r_1^4} + \frac{b}{\sin\theta r_2^4}\right)$$

ii) Lấy đạo hàm của hàm số $R(\theta)$ ta được

$$R'(\theta) = C\left(\frac{b}{\sin^2\theta.r_1^4} - \frac{b\cos\theta}{\sin^2\theta.r_2^4}\right)$$

Do đó

$$R'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2\theta.r_1^4} = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta.r_2^4} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{r_2^4}{r_1^4}$$

Ngoài ra,

$$R'(\theta) > 0 \Leftrightarrow \cos\theta < \frac{r_2^4}{r_1^4}$$

và

$$R'(\theta) < 0 \Leftrightarrow \cos\theta > \frac{r_2^4}{r_1^4}$$

Hàm $\cos\theta$ là hàm giảm với $0 < \theta < \pi$, do đó kháng lực R đạt giá trị nhỏ nhất khi $\cos\theta = \dfrac{r_2^4}{r_1^4}$

iii) Khi $r_2 = \dfrac{2}{3}r_1$ ta có $\cos\theta = \dfrac{2^4}{3^4} \Rightarrow \theta \approx 79^o$

Bài 4.6 (ĐH Giao thông vận tải)**.** Lấy $\epsilon > 0$ và đặt $\epsilon^* = \epsilon(1-\kappa) > 0$. Theo giả thiết, ta suy ra tồn tại $\delta > 0$ sao cho $x \in (-a,a)$ và $|x| < \delta$ sao cho

$$l - \epsilon^* < \frac{f(x) - f(\kappa x)}{x} < l + \epsilon^*.$$

Vì $\kappa \in (0,1)$ nên $|\kappa^n x| \leq |x| < \delta$ với mọi $x \in (-a,a) \cap (-\delta,\delta)$ và $n \geq 1$. Cố định $x \in (-a,a) \cap (-\delta,\delta)$. Với mọi $n \geq 0$ ta có

$$l - \epsilon^* < \frac{f(\kappa^n x) - f(\kappa^{n+1}x)}{\kappa^n x} < l + \epsilon^*,$$

hay

$$(l-\epsilon^*)\kappa^n < \frac{f(\kappa^n x) - f(\kappa^{n+1}x)}{x} < (l+\epsilon^*)\kappa^n.$$

Vì vậy

$$\sum_{n=0}^{N}(l-\epsilon^*)\kappa^n < \sum_{n=0}^{N}\frac{f(\kappa^n x) - f(\kappa^{n+1}x)}{x} < \sum_{n=0}^{N}(l+\epsilon^*)\kappa^n,$$

với mọi $N \geq 1$. Từ đó

$$(l-\epsilon^*)\frac{1-\kappa^{N+1}}{1-\kappa} < \frac{f(x) - f(\kappa^{N+1}x)}{x} < (l+\epsilon^*)\frac{1-\kappa^{N+1}}{1-\kappa},$$

với mọi $N \geq 1$. Cho $N \to \infty$ ta được

$$(l-\epsilon^*)\frac{1}{1-\kappa} \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq (l+\epsilon^*)\frac{1}{1-\kappa},$$

tức là

$$\frac{l}{1-\kappa} - \epsilon \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq \frac{l}{1-\kappa} + \epsilon,$$

với mọi $x \in (-a,a) \cap (-\delta,\delta)$. Cuối cùng

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{l}{1-\kappa}.$$

Bài 4.7 (ĐH Hàng hải Việt Nam). Theo định lý Lagrange tồn tại các số c_1, c_2, c_3 sao cho:

$$\begin{aligned} f(2017) - f(2016) &= f^{'}(c_1); \\ f(2019) - f(2018) &= f^{'}(c_2); \\ f(2021) - f(2020) &= f^{'}(c_3). \end{aligned} \tag{18}$$

Bởi vì:

$$\min\left\{f^{'}(c_1), f^{'}(c_2), f^{'}(c_3)\right\} \leq \frac{f^{'}(c_1) + f^{'}(c_2) + f^{'}(c_3)}{3} \leq \max\left\{f^{'}(c_1), f^{'}(c_2), f^{'}(c_3)\right\}$$

nên theo tính chất Darboux của đạo hàm, tồn tại số thực c sao cho:

$$\frac{f^{'}(c_1) + f^{'}(c_2) + f^{'}(c_3)}{3} = f^{'}(c) \Leftrightarrow f^{'}(c_1) + f^{'}(c_2) + f^{'}(c_3) = 3f^{'}(c).$$

Vậy từ các đẳng thức (18) ta suy ra:

$$f(2017) + f(2019) + f(2021) - f(2016) - f(2018) - f(2020) = 3f^{'}(c).$$

Bài 4.8 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội). +) Nếu $f(x)$ là hàm hằng thì đẳng thức luôn xảy ra.

+) Xét $f(x)$ không là hàm hằng số. Xét hàm $F(x) = f'(x)e^{f(x)-f^{2018}(x)+f^{2018}(0)-f(0)}$ xác định với $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $F(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$ và

$$F'(x) = \left(f''(x) + (f'(x))^2 - 2018.f^{2017}(x).(f'(x))^2\right).e^{f(x)-f^{2018}(x)+f^{2018}(0)-f(0)},$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mặt khác, ta có $F(0) = F(1)$ nên theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $F'(c) = 0$. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 4.9 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội). Ta coi tàu du lịch tượng trưng bởi điểm A. Với mỗi cặp v_1, v_2, ta gọi C là vị trí người đàn ông có thể chạm bờ. Đặt $x = BC$. Khi đó quãng đường mà người đàn ông chèo thuyền tới C là $\sqrt{16+x^2}$, và θ là góc giữa tia AB và tia AC. Ta có $\tan\theta = \dfrac{x}{4}$, và khi đó $\theta \in [0, \arctan(\dfrac{3}{4})]$. Ta cũng có tổng thời gian để anh ta về khác sạn là $f(x) = \dfrac{\sqrt{16+x^2}}{v_1} + \dfrac{3-x}{v_2}$, với $x \in [0,3]$. Khảo sát hàm $f(x)$, có $f'(x) = \dfrac{x}{v_1\sqrt{16+x^2}} - \dfrac{1}{v_2} = \dfrac{(a^2-1)x^2 - 16}{v_2\sqrt{16+x^2}(ax + \sqrt{16+x^2})}$ với $a = \dfrac{v_2}{v_1} > 0$.

Nếu $0 < a \leq 1$ thì $f'(x) < 0, \forall x \in [0,3]$ và $\min\limits_{[0,3]} f(x) = f(3)$.

Nếu $a > 1$ thì $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0, +\infty)$ tại $x = \dfrac{4}{\sqrt{a^2-1}}$.

Khi $1 < a \leq \dfrac{5}{3}$, ta có $\min\limits_{[0,3]} f(x) = f(3)$. Khi $a > \dfrac{5}{3}$, ta có $\min\limits_{[0,3]} f(x) = f(\dfrac{4}{\sqrt{a^2-1}})$.

a) Ta có $a = 2 > \dfrac{5}{3}$. Do đó $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0, 3]$ tại $x = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

b) Ta có v_1 tối thiểu khi và chỉ khi a lớn nhất. Khi $a \leq \dfrac{5}{3}$, hàm $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0, 3]$ tại $x = 3$. Mà $a = \dfrac{5}{v_1}$ nên $v_1 \geq 3$. Vậy với $v_2 = 5, v_1 \geq 3$, thời gian người đàn ông chèo trực tiếp về khác sạn là ít nhất so với thời gian hoàn thành các hành trình có cùng vận tốc đã cho. Vậy giá trị tối thiểu của v_1 là 3 km/h.

c) Ta xác định θ thông qua a. Khi $1 < a \leq \dfrac{5}{3}$, hành trình mà người đàn ông chèo trực tiếp về khác sạn có thời gian hoàn thành ít nhất so với các hành trình có cùng vận tốc. Tính được $\theta = \arctan(\dfrac{3}{4})$.

Khi $a = 2$, hàm $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0, 3]$ tại $x = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$. Khi đó, người đàn ông chạm bờ tại điểm C_1 với $BC_1 = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$. Với hành trình này, ta tính được $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

Khi $\dfrac{5}{3} \leq a \leq 2$, hàm $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0, 3]$ tại $x = \dfrac{4}{\sqrt{a^2-1}}$. Khi đó, ta có $\theta = \arctan(\dfrac{4}{\sqrt{a^2-1}})$. Mặt khác, ta lại có $a \in [\dfrac{5}{3}, 2] \Leftrightarrow \dfrac{4}{\sqrt{a^2-1}} \in [\dfrac{4}{\sqrt{3}}, 3]$. Do đó, $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \arctan(\dfrac{3}{4})\right]$. Vậy khoảng giá trị của θ là $\left[\dfrac{\pi}{6}, \arctan(\dfrac{3}{4})\right]$.

Bài 4.10 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội)**.** Từ giả thiết ta thu được

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left[(x^2+1)(f(x)-\frac{a}{2})\right]'\right)' = 0.$$

Bởi Định lý Lagrange, ta nhận được

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[(x^2+1)(f(x)-\frac{a}{2})\right]'}{x} = 0.$$

Đặt $g(x) = (x^2+1)(f(x) - \frac{a}{2})$ khả vi đến cấp 2 trên $(0, +\infty)$. Với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, tồn tại $N > 0$ sao cho $-\varepsilon.x < g'(x) < \varepsilon.x$ với mọi $x \geq N$. Suy ra, với mọi $x > N$, ta nhận được $-\varepsilon.\frac{x^2+1}{2} + \varepsilon.\frac{N^2+1}{2} + g(N) < g(x) < \varepsilon.\frac{x^2+1}{2} - \varepsilon.\frac{N^2+1}{2} + g(N)$. Biến đổi bất đẳng thức, ta được $-\varepsilon.\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon.\frac{N^2+1}{2} + g(N)}{x^2+1} < f(x) - \frac{a}{2} < \varepsilon.\frac{1}{2} + \frac{-\varepsilon.\frac{N^2+1}{2} + g(N)}{x^2+1}$ với mọi $x > N$. Do đó, tồn tại $M > N$ sao cho $-\varepsilon < f(x) - \frac{a}{2} < \varepsilon$ với mọi $x \geq M$. Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{a}{2}$.

Ta lại có $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g'(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2(f(x) - \frac{a}{2}) + (x + \frac{1}{x})f'(x)\right) = 0$. Suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty} (x + \frac{1}{x})f'(x) = 0$.

Bài 4.11 (ĐH Kỹ thuật Hậu cần Công an Nhân dân)**.** Xét hàm $g(x) = (x-a)(x-b)\exp\{\sin(f(x))\},\ \exp\{t\} = e^t$.
Ta thấy $g(a) = g(b) = 0$. Theo định lý Rolle tồn tại điểm $c \in (a, b)$ sao cho $g'(c) = 0$.
Thế mà

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x-a)\exp\{\sin(f(x))\} + (x-b)\exp\{\sin(f(x))\} \\ &\quad + (x-a)(x-b)f'(x)\cos(f(x))\exp\{\sin(f(x))\} \\ &= [(2x-a-b) + (x-a)(x-b)f'(x)\cos(f(x))]\exp\{\sin(f(x))\}, \end{aligned}$$

nên $g'(c) = 0$ nghĩa là $[(2c-a-b)+(c-a)(c-b)f'(c)\cos(f(c))]\exp\{\sin(f(c))\} = 0$.
Suy ra $(2c-a-b) + (c-a)(c-b)f'(c)\cos(f(c)) = 0$,
hay là $f'(c)\cos(f(c)) = \dfrac{a+b-2c}{(a-c)(b-c)}$.
Việc còn lại là ta phải chứng minh

$$\frac{2}{a-c} < f'(c)\cos(f(c)) = \frac{a+b-2c}{(a-c)(b-c)} = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c} < \frac{2}{b-c}.$$

Thật vậy, chú ý rằng $a - c < 0$ và $b - c > 0$, nên $\frac{1}{a-c} < \frac{1}{b-c}$ và do đó bất đẳng thức trên là đúng!

Bài 4.12 (ĐH Kỹ thuật Hậu cần Công an Nhân dân)**.** Xét các hàm

$$g(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2}),\ g(0) = 0,$$

$$G(t) = \int_{-t}^{t} g(x)dx - 8\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} g(x)dx.$$

Dễ thấy $G(0) = 0$ và điều kiện ở đề bài trở thành $G(\frac{1}{2}) = 0$.
Theo định lý Rolle tồn tại $t_0 \in (0, \frac{1}{2})$ sao cho $G'(t_0) = 0$. Thế mà

$$G'(t) = g(t) + g(-t) - 4g(\frac{t}{2}) - 4g(-\frac{t}{2}) \quad \Rightarrow \quad G'(0) = 0.$$

Theo định lý Rolle tồn tại $t_1 \in (0, t_0)$ sao cho $G''(t_1) = 0$. Thế mà

$$G''(t) = g'(t) - g'(-t) - 2g'(\frac{t}{2}) + 2g'(-\frac{t}{2}) \quad \Rightarrow \quad G''(0) = 0.$$

Theo định lý Rolle tồn tại $t_2 \in (0, t_1)$ sao cho $G'''(t_2) = 0$. Thế mà

$$G'''(t) = [g''(t) - g''(\frac{t}{2})] - [g''(-\frac{t}{2}) - g''(-t)].$$

Theo định lý Lagrange thì tồn tại $\theta_1 \in (-t_2, -\frac{t_2}{2})$ và $\theta_2 \in (\frac{t_2}{2}, t_2)$ để

$$g''(-\frac{t_2}{2}) - g''(-t_2) = \frac{t_2}{2}g'''(\theta_1) \quad \text{và} \quad g''(t_2) - g''(\frac{t_2}{2}) = \frac{t_2}{2}g'''(\theta_2).$$

Do đó

$$0 = G'''(t_2) = \frac{t_2}{2}[g'''(\theta_2) - g'''(\theta_1)] \quad \Rightarrow \quad g'''(\theta_1) = g'''(\theta_2).$$

Đến đây theo định lý Rolle tồn tại $c \in (\theta_1, \theta_2) \subset (0, 1)$ sao cho $g^{(4)}(c) = 0$, tức là $f^{(4)}(c) = 0$.

Bài 4.13 (ĐH Kỹ thuật Hậu cần Công an Nhân dân)**.** Đặt

$$h(t) = \int_a^t f(x)dx. \int_b^t g(x)dx$$

là hàm khả vi.
Ta có $h(a) = h(b) = 0$, nên theo định lý Rolle tồn tại $\xi \in (a, b)$ sao cho $h'(\xi) = 0$.
Ta thấy

$$h'(t) = f(t) \int_b^t g(x)dx + g(t) \int_a^t f(x)dx$$

và do điều kiện $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ ta có $h'(b) = 0 = h'(\xi)$, nên theo định lý Rolle tồn tại $c \in (\xi, b) \subset (a, b)$ sao cho $h''(c) = 0$, tức là

$$\begin{aligned}
h''(t) &= f'(t)\int_b^t g(x)dx + f(t)g(t) + g'(t)\int_a^t f(x)dx + g(t)f(t)\\
&= 2f(t)g(t) - f'(t)\int_t^b g(x)dx + g'(t)\int_a^t f(x)dx,\\
0 = h''(c) &= 2f(c)g(c) - f'(c)\int_c^b g(x)dx + g'(c)\int_a^c f(x)dx\\
&= 2f(c)g(c) - f'(c)\int_c^b g(x)dx + g'(c)\Big[\int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx\Big]\\
&= 2f(c)g(c) - f'(c)\int_c^b g(x)dx - g'(c)\int_c^b f(x)dx.
\end{aligned}$$

Điều này dẫn đến $f'(c)\displaystyle\int_c^b f(x)dx + g'(c)\int_c^b g(x)dx = 2f(c)g(c)$.

Bài 4.14 (ĐH Ngoại thương Hà Nội)**.** BĐT tương đương với $b \geq \dfrac{1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} - n$ và $a \leq \dfrac{1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} - n$ với $\forall n \in \mathbb{N}$

Xét hàm $f(x) = \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}$ với $x \in (0;1]$

Ta có: $f'(x) = \left(\ln(1+x) - \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}\right)\dfrac{\sqrt{1+x}\ln(1+x)+x}{x^2\sqrt{1+x}\ln^2(1+x)}$ với $x \in (0;1]$

Lại có $\dfrac{d}{dx}\left(\ln(1+x) - \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}\right) = \dfrac{2\sqrt{1+x}-(x+2)}{2\sqrt{(1+x)^3}} < 0$ với mọi $x \in (0;1]$

Mà $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln(1+x) - \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}\right) = 0$ nên $f'(x) < 0$ trên $x \in (0;1]$ hay f giảm ngặt trên $x \in (0;1]$.

Suy ra: $a = f(1) = \dfrac{1}{\ln 2} - 1$ và $b = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{2}$

Bài 4.15 (Học viện Phòng không Không quân)**.** Ta xét ánh xạ $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ được xác định như sau

$$g(x) = f(x) + \frac{x(1-x)}{2}.$$

Ta có

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= f'(x) + \frac{1-2x}{2} \\
\Rightarrow g''(x) &= f''(x) - 1 \le 0
\end{aligned}
$$

Điều này có nghĩa là $g(x)$ là hàm lõm nên $g\left(\frac{1}{2}\right) \ge \frac{1}{2}(g(0)+g(1))$. Tức là

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8} \ge \frac{1}{2}\left(f(0)+f(1)\right) \\
\Leftrightarrow\ & f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \le \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Bài 4.16 (ĐH Quảng Bình)**.** Đặt hàm $f(x) = g(x) - x^{2018}$. Khi đó hàm $f(x)$ là hàm số khả vi trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f'(0)f'(1) < 0$. Ta chứng minh tồn tại $c \in (0;1)$ sao cho $f'(c) = 0$.
Giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $f'(0) > 0; f'(1) < 0$. Vì f khả vi trên $[0;1]$ nên f liên tục trên $[0;1]$. Do đó tồn tại $c \in [0;1]$ để $f(c) = \max\limits_{x\in[0;1]} f(x)$. Ta chứng minh $c \in (0;1)$. Khai triển tay lor $f(x)$ tại $x = 0$, ta được;

$$f(x) = f(0) + f'(0) + \circ(x).$$

Do $f'(0) > 0$ nên $f(x) > f(0)$ với x đủ gần 0. Từ đó $x = 0$ không thể là điểm cực đại.
Tương tự khai trên taylor tại $x = 1$ ta được:

$$f(x) = f(1) + (-f'(1))(1-x) + \circ(1-x) > f(1).$$

với x đủ gần 1. Như vậy $x = 1$ cũng không thể là điểm cực đại.
Mà $f'(x) = g'(x) - 2018x^{2017}$. Nên $f'(c) = 0$ suy ra $g'(c) = 2018c^{2017}$.

Bài 4.17 (ĐH Quốc tế)**.** Dùng khai triển Taylor tại 0 đối với hàm f ta có

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f"(0)x^2}{2}\ x > 0$$

Suy ra $f(x) \le f(0) + f'(0)x,\ x > 0$.

Vậy $f(x_1) < 0$, với x_1 đủ lớn.

Để ý rằng hàm f' giảm ngặt, nên phương trình $f(x) = 0, x \in [0, +\infty)$ có duy nhất nghiệm.

Bài 4.18 (ĐH Quốc tế)**.** Giả sử rằng $f"(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f"(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f"(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

1) Nếu $f"(x) > 0, x \in \mathbb{R}$ thì $f'(x)$ tăng trên $\mathbb{R}$

a) Giả sử $f'(0) > 0$, khi đó $f(x) = f(0) + f'(c)x, 0 < c < x$. Và như thế $f(x)$ không bị chặn vì

$$f(x) > f(0) + f'(0)x,\ \ x > 0$$

b) Nếu $f'(0) < 0$, ta có

$$f(x) > f(0) + f'(\xi)x, x < \xi < 0$$

Suy ra $f(x) > f(0) + f'(0)x,\ x < 0$

2) Trường hợp $f"(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ được chứng minh tương tự

Bài 4.19 (ĐH Quốc tế)**.** Đặt $u(x) = 1 + 2\int\limits_0^x f(t)dt, x \in [0,1]$. Do f không âm nên $u(x) \geq 1,\ \forall x \in [0,1]$.

Ta có $u'(x) = 2f(x),\ x \in [0,1]$

Và như thế điều kiện

$$(f(x))^2 \leq 1 + 2\int\limits_0^x f(t)dt, x \in [0,1]$$

trở thành

$$\frac{u'(x)}{4} \leq u(x)\ x \in [0,1]$$

Suy ra

$$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \leq 1,\ \forall x \in [0,1]$$

(Để ý rằng $u(x) > 0, \forall x \in [0,1]\,, u'(x) = 2f(x), x \in [0,1]$.

Tích phân hai vế ta có

$$\int\limits_0^t \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \leq t,\ \forall t \in [0,1]$$

Hay $\sqrt{u(t)} - 1 \leq t, t \in [0,1]$.

Vậy $\sqrt{u(t)} \leq t + 1, t \in [0,1]$.

Như thế $f(x) = \sqrt{f(x)^2} \leq \sqrt{u(x)} \leq x + 1, \forall x \in [0,1]$

Bài 4.20 (Trường Sĩ quan Không quân). Đặt $g(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) - \frac{(x-a)(x-b)}{2}k$.
Lấy $x_0 \in (a; b)$, xác định k từ điều kiện:

$$g(x_0) = f(x_0) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a) - \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2}k = 0.$$

Khi đó $g(x_0) = g(a) = g(b) = 0$. Theo giả thiết và định nghĩa hàm $g(x)$ suy ra g liên tục, khả vi trên $[a; x_0]$. Áp dụng định lý Rolle với $x \in [a; x_0]$, tồn tại $c_1 \in [a; x_0]$ sao cho $g'(c_1) = 0$.
Tương tự, tồn tại $c_2 \in [x_0; b]$ sao cho $g'(c_2) = 0$. Mặt khác, từ định nghĩa, suy ra:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - k(x - \frac{a + b}{2}).$$

Theo giả thiết, f có đạo hàm cấp hai trên $(a; b)$ nên g cũng có đạo hàm cấp hai trên $(a; b)$. Và vì $g'(c_1) = g'(c_2) = 0$ nên cũng theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (c_1; c_2)$ sao cho $g''(c) = f''(c) - k = 0$. Do đó:

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = \frac{(x - a)(x - b)}{2}f''(c), c \in (a; b).$$

Bài 4.21 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên). Xét hàm $g(x) = (x - a)(x - b)\exp\{f(x)\},\ \exp\{t\} = e^t$.
Ta thấy $g(a) = g(b) = 0$. Theo định lý Rolle tồn tại điểm $c \in (a, b)$ sao cho $g'(c) = 0$.
Thế mà

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x - a)\exp\{f(x)\} + (x - b)\exp\{f(x)\} \\ &\quad + (x - a)(x - b)f'(x)\exp\{f(x)\} \\ &= [(2x - a - b) + (x - a)(x - b)f'(x)]\exp\{f(x)\}, \end{aligned}$$

nên $g'(c) = 0$ nghĩa là $[(2c - a - b) + (c - a)(c - b)f'(c)]\exp\{f(c)\} = 0$.
Suy ra $(2c - a - b) + (c - a)(c - b)f'(c) = 0$, hay là $f'(c) = \dfrac{a + b - 2c}{(a - c)(b - c)}$.
Việc còn lại là ta phải chứng minh

$$\frac{2}{a - c} < f'(c) = \frac{a + b - 2c}{(a - c)(b - c)} = \frac{1}{a - c} + \frac{1}{b - c} < \frac{2}{b - c}.$$

Thật vậy, chú ý rằng $a - c < 0$ và $b - c > 0$, nên $\dfrac{1}{a - c} < \dfrac{1}{b - c}$ và do đó bất đẳng thức trên là đúng!

Bài 4.22 (CĐ Sư phạm Nam Định). + Ta chứng minh $f(x)$ liên tục tại $x=0$.
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \left|\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|$
Ta có $0 \le x^2 \left|\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| \le x^2$.
$\lim\limits_{x\to 0} 0 = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$.
Theo định lý giới hạn kẹp ta có $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.
Vậy $f(x)$ liên tục tại $x=0$.
+ Ta chứng minh $f(x)$ khả vi tại $x=0$.
$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \left(x.\left|\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|\right)$
Ta có $0 \le \left|x.\left|\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|\right| \le |x|$
và $\lim\limits_{x\to 0} 0 = \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$.
Theo định lý giới hạn kẹp ta có $\lim\limits_{x\to 0} \left|x.\left|\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|\right| = 0$. Vậy $f(x)$ khả vi tại $x=0$ và $f'(0)=0$. + Trên khoảng $(0;+\infty)$: $f(x) = x^2\left|\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|$ liên tục trên $(0;+\infty)$. Do đó $f(x)$ liên tục tại $x=\frac{2}{2017}$.
+ Ta chứng minh $f(x)$ không khả vi tại $x=\frac{2}{2017}$. Xét các đạo hàm phải và trái tại $\frac{2}{2017}$. Ta có

$$f'\left({\frac{2}{2017}}^+\right) = \lim_{x\to {\frac{2}{2017}}^+} \frac{f(x)-f\left(\frac{2}{2017}\right)}{x-\frac{2}{2017}} = \lim_{x\to {\frac{2}{2017}}^+} \frac{x^2\left|\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|}{x-\frac{2}{2017}}$$

$$= \frac{4}{2017^2} \lim_{x\to {\frac{2}{2017}}^+} \frac{\left|\sin\left(\frac{2017\pi}{2}-\frac{\pi}{x}\right)\right|}{\frac{2x}{2017\pi}.\left(\frac{2017\pi}{2}-\frac{\pi}{x}\right)}$$

$$= \pi \lim_{x\to {\frac{2}{2017}}^+} \frac{\sin\left(\frac{2017\pi}{2}-\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{2017\pi}{2}-\frac{\pi}{x}} = \pi.$$

Tương tự $f'\left({\frac{2}{2017}}^-\right) = -\pi$.
Vậy không tồn tại $f'\left(\frac{2}{2017}\right)$.

Bài 4.23 (CĐ Sư phạm Nam Định). Gọi R, h là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ tròn (lon sữa).
+ $V = \pi R^2 h = 500$ vậy $h = \dfrac{500}{\pi R^2}$
+ $S_{xq} = 2\pi Rh$.
+ $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$.
+ $Cost = 2\pi Rh \times 1 + (2\pi Rh + 2\pi R^2)\times 5$

$$= 10\pi R^2 + 12\pi Rh = 10\pi R^2 + 12\pi R.\frac{500}{\pi R^2}$$

$$= 10\pi R^2 + \frac{6000}{R} = 10\pi R^2 + \frac{3000}{R} + \frac{3000}{R}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{10\pi R^2.\frac{3000}{R}.\frac{3000}{R}} = 300\sqrt[3]{90\pi} \approx 1969 \text{ (đồng)}$$

Vậy $Cost_{\min} = 1969$ (đồng).

Bài 4.24 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long). Áp dụng quy tắc L'hospital, ta có:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}f(x)}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{x^2}f(x)\right)'}{\left(e^{x^2}\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}(f'(x)+2xf(x))}{2xe^{x^2}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{x^2}(f'(x)+2xf(x))\right)'}{\left(2xe^{x^2}\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}\left(f''(x)+4xf'(x)+2\left(2x^2+1\right)f(x)\right)}{e^{x^2}(4x^2+2)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)+4xf'(x)+2\left(2x^2+1\right)f(x)}{4x^2+2} = 0.\end{aligned}$$

Bài 4.25 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long). Đặt $F(x) = (x-2018)e^{-x}f(x)$, ta có

$$\begin{aligned}F'(x) &= (x-2018)e^{-x}f'(x) + (-x+2019)e^{-x}f(x)\\ &= e^{x}\left((x-2018)f'(x) - (x-2019)f(x)\right)\end{aligned}$$

Do $F(2018) = F(2019) = 0$, nên theo định lý Rolle, tồn tại số $c \in (2018, 2019)$ sao cho $F'(c) = 0$, hay

$$(c-2018)f'(c) - (c-2019)f(c) = 0$$

Suy ra, phương trình $(x-2018)f'(x) = (x-2019)f(x)$ có nghiệm $c \in (2018, 2019)$

Bài 4.26 (ĐH Thủy Lợi). + Xét hàm số $g(x) = f(x).\sin x$, khi đó dễ thấy $g(x)$ là hàm liên tục trong $[0;\pi]$, khả vi trong $(0;\pi)$ và:

$$g(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = g(\pi).$$

+ Áp dụng Định lý Rolle cho hàm $g(x)$ lần lượt trong $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$:
tồn tại $c_1 \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) : g'(c_1) = 0$
tồn tại $c_2 \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right) : g'(c_2) = 0.$
+ Xét hàm $h(x) = g'(x) = f'(x)\sin x + f(x)\cos x$, đây là hàm liên tục trong $[c_1;c_2]$, khả vi trong $(c_1;c_2)$ và $h(c_1) = h(c_2)$; ta lại áp dụng Định lý Rolle cho hàm $h(x)$ trong $[c_1;c_2]$, khi đó sẽ tồn tại $c \in (c_1;c_2) \subset (0;\pi) : h'(c) = 0$, hay là

$$f''(c)\sin c + 2f'(c)\cos c - f(c)\sin c = 0,$$

+ Do $\sin c \neq 0$, nên chia cả hai vế của đẳng thức trên cho $\sin c$ ta sẽ nhận được điều cần chứng minh.

Bài 4.27 (ĐH Thủy Lợi). Trước hết dễ thấy hàm số $f(x)$ xác định tại $x_0 = 0$ và trong lân cận của điểm đó.
+ Xét

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{x}{[(k-1)x+1][kx+1]} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(k-1)x+1} - \frac{1}{kx+1}\right]$$

$$S_n(x) = 1 - \frac{1}{nx+1}.$$

+ Khi đó

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{nếu } x = 0 \\ 1\ , & \text{nếu } x \neq 0, \end{cases}$$

tức là $f(x)$ không liên tục tại $x_0 = 0$, do đó nó không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

5 PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Bài 5.1 (Học viện An ninh Nhân dân)**.** Sử dụng định lý giá trị trung bình Lagrange, $\forall x \in [0,1]$ ta có

$$\begin{aligned} \Big|f(x) - \int_0^1 f(t)dt\Big| &= \Big|\int_0^1 [f(x) - f(t)]dt\Big| \leqslant \int_0^1 |f(x) - f(t)|dt \\ &= \int_0^1 |f'(c_x)||x-t|dt, \text{ với } c_x \in (x,t) \text{ hoặc } c_x \in (t,x) \\ &\leqslant M\int_0^1 |x-t|dt = M\Big[\int_0^x (x-t)dt + \int_x^1 (t-x)dt\Big] \\ &= \frac{1}{4}\Big[(2x-1)^2 + 1\Big]M. \end{aligned}$$

Bây giờ giả sử bất đẳng thức trên đúng với hằng số $C > 0$, tức là

$$\Big|f(x) - \int_0^1 f(t)dt\Big| \leqslant C\Big[(2x-1)^2 + 1\Big]M.$$

Xét hàm $f(x) = x$, thì $M = 1$ và ta có

$$\Big|x - \frac{1}{2}\Big| \leqslant C\Big[(2x-1)^2 + 1\Big],\ \forall x \in [0,1].$$

Khi đó với $x = 0$ ta được $\dfrac{1}{2} \leqslant 2C$, tức là $C \geqslant \dfrac{1}{4}$ và bài toán hoàn toàn được chứng minh.

Bài 5.2 (Học viện An ninh Nhân dân)**.** Xét hàm

$$g(x) = (\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} - \sqrt{b})\int_a^x f(t)dt, x \in [a,b].$$

Ta thấy $g(a) = g(b) = 0$ và

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big[(\sqrt{x} - \sqrt{a}) + \sqrt{x} - \sqrt{b}\Big]\int_a^x f(t)dt + (\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} - \sqrt{b})f(x).$$

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $g'(c) = 0$, tức là

$$\frac{1}{2\sqrt{c}}\Big[(\sqrt{c}-\sqrt{a}) + (\sqrt{c}-\sqrt{b})\Big]\int_a^c f(x)dx + (\sqrt{c}-\sqrt{a})(\sqrt{c}-\sqrt{b})f(c) = 0.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} 2f(c) &= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{c}) + (\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{a}-\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})}\int_a^c f(x)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}}\Big[\frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{a-c} + \frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{b-c}\Big]\int_a^c f(x)dx. \end{aligned}$$

Bài 5.3 (ĐH Bách khoa Thành phố HCM)**.** Lấy $x \in (0,2)$, theo công thức số gia giới nội $\exists \theta_1 \in (0,x)$ sao cho

$$f(x) - f(0) = xf'(\theta_1) \Rightarrow f(x) = 1 + xf'(\theta_1).$$

Do $f'(x) \geqslant -1$ nên $f(x) \geqslant 1 - x, \forall x \in (0,1)$.
Tương tự, $\exists \theta_2 \in (x,2)$ để

$$f(x) - f(2) = (x-2)f'(\theta_2) \Rightarrow f(x) = 1 + (x-2)f'(\theta_2).$$

Do $f'(x) \leqslant 1$ nên $f(x) \geqslant x - 1, \forall x \in (1,2)$.
Vậy $\int_0^2 f(x)dx \geqslant \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x-1, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$
Tuy nhiên, khi đó hàm này lại không khả vi tại 1. Vậy dấu bằng không xảy ra.

Bài 5.4 (ĐH Giao thông vận tải)**.** Trước hết ta chỉ ra $f(a-b+c) \le f(a) - f(b) + f(c)$ với mọi $a < b < c$ và $a,b,c \in [1,13]$. Vì $b \in (a,c)$ nên tồn tại $\lambda \in [0,1]$ sao cho $b = \lambda a + (1-\lambda)c$. Vì f lồi nên

$$f(b) \le \lambda f(a) + (1-\lambda)f(c).$$

Mặt khác $a - b + c = \lambda c + (1-\lambda)a$ nên

$$f(a-b+c) \le \lambda f(c) + (1-\lambda)f(a).$$

Cộng 2 bất đẳng thức trên ta được điều cần chứng minh. Đặt $c = a + 10$ và $b = a + 4$, $a \in [1,3]$ ta có

$$f(a+4) + f(a+6) \le f(a) + f(a+10).$$

Lấy tích phân 2 vế với chú ý

$$\int_1^3 f(a+6)da = \int_7^9 f(x)dx, \int_1^3 f(a+4)da = \int_5^7 f(x)dx,$$

$$\int_1^3 f(a+10)da = \int_{11}^{13} f(x)dx,$$

ta suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 5.5 (ĐH Hàng hải Việt Nam)**.** Vì hàm f tuần hoàn chu kỳ T nên tích phân của nó trên các đoạn có độ dài T bằng nhau. Ta chứng minh công thức

$$\int\limits_0^{nT} f(t)dt = n\int\limits_0^{T} f(t)dt \tag{19}$$

với mọi n nguyên. Thật vậy, với n nguyên dương ta có

$$\int\limits_0^{nT} f(t)dt = \int\limits_0^{T} f(t)dt + \int\limits_T^{2T} f(t)dt + ... + \int\limits_{(n-1)T}^{nT} f(t)dt = n\int\limits_0^{T} f(t)dt.$$

Với n nguyên âm ta có

$$\int\limits_0^{nT} f(t)dt = \int\limits_0^{-T} f(t)dt + \int\limits_{-T}^{-2T} f(t)dt + ... + \int\limits_{(n+1)T}^{nT} f(t)dt = (-n)\int\limits_T^{0} f(t)dt = n\int\limits_0^{T} f(t)dt.$$

Cuối cùng rõ ràng (19) đúng với $n = 0$.

Với $x \in \mathbb{R}$ tồn tại duy nhất số nguyên n thỏa mãn

$$nT \le x < (n+1)T.$$

Do (19) ta có

$$\int\limits_0^{x} f(t)dt = \int\limits_0^{nT} f(t)dt + \int\limits_{nT}^{x} f(t)dt = n\int\limits_0^{T} f(t)dt + \int\limits_{nT}^{x} f(t)dt.$$

Suy ra

$$\frac{\int\limits_0^x f(t)dt}{x} = \frac{n\int\limits_0^T f(t)dt}{x} + \frac{\int\limits_{nT}^x f(t)dt}{x}. \tag{20}$$

Dễ thấy hàm $|f(t)|$ tuần hoàn chu kỳ T nên

$$\left|\frac{\int\limits_{nT}^{x} f(t)dt}{x}\right| \leq \frac{\int\limits_{nT}^{x} |f(t)|dt}{|x|} \leq \frac{\int\limits_{nT}^{(n+1)T} |f(t)|dt}{|x|} = \frac{\int\limits_{0}^{T} |f(t)|dt}{|x|}.$$

Do đó

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int\limits_{nT}^{x} f(t)dt}{x} = 0 \tag{21}$$

vì

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int\limits_{0}^{T} |f(t)|dt}{|x|} = 0.$$

Ta có

$$\left|\frac{n}{x} - \frac{1}{T}\right| = \left|\frac{nT - x}{xT}\right| < \frac{T}{|x|T} = \frac{1}{|x|}.$$

Mà $\frac{1}{|x|}$ dần đến 0 nên $\left|\frac{n}{x} - \frac{1}{T}\right|$ dần đến 0 khi x dần đến vô cực, hay

$$\lim_{x\to\infty} \frac{n}{x} = \frac{1}{T}. \tag{22}$$

Từ (20),(21),(22) suy ra

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int\limits_{0}^{x} f(t)dt}{x} = \frac{\int\limits_{0}^{T} f(t)dt}{T}.$$

Bài 5.6 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên)**.** Đặt $a = 3\int_0^1 f(x)dx$. Khi đó

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \int_0^1 \left([f(x)]^2 + af(x) - \frac{a^2}{2}\right)^2 dx \\
&= \int_0^1 \left([f(x)]^4 + 2a[f(x)]^3 - a^3 f(x) + \frac{a^4}{4}\right) dx \\
&= \int_0^1 [f(x)]^4 dx - a^3 \int_0^1 f(x)dx + \frac{a^4}{4} \\
&= \int_0^1 [f(x)]^4 dx - \frac{27}{4}\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^4.
\end{aligned}$$

Bài 5.7 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên)**.** Xét hàm $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ như sau

$$g(t) = \int_{(1-t)a+tb}^{ta+(1-t)b} f(x)dx.$$

Ta thấy $g(0) = g(\frac{1}{2}) = g(1) = 0$ và $g(t)$ là hàm khả vi.
Theo định lý Rolle tồn tại $c_1 \in (0, \frac{1}{2})$ và $c_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$ để $g'(c_1) = g'(c_2) = 0$.
Mặt khác

$$\begin{aligned} g'(t) &= f(ta + (1-t)b)(a-b) - f((1-t)a + tb)(b-a) \\ &= (a-b)[f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)]. \end{aligned}$$

Do đó

$$f(c_k a + (1-c_k)b) + f((1-c_k)a + c_k b) = 0,\ (k = 1, 2).$$

Rõ ràng $c_k \neq \frac{1}{2}$ nên $c_k a + (1-c_k)b \neq \frac{a+b}{2},\ (k = 1, 2)$.
Gọi $c_1 = c \in (0, \frac{1}{2})$ ta có $f(ca + (1-c)b) + f((1-c)a + cb) = 0$, đồng thời ta thấy $(1-c)a + cb < ca + (1-c)b \ \Leftrightarrow\ 0 < (b-a)(1-2c)$.
Đặt $\alpha = \frac{1}{2}(b-a)(1-2c) = \frac{1}{2}(b-a) - c(b-a)$ thì $0 < \alpha < \frac{b-a}{2}$ và ta được $\frac{a+b}{2} - \alpha = (1-c)a + cb,\ \frac{a+b}{2} + \alpha = ca + (1-c)b$, nên

$$f(\frac{a+b}{2} - \alpha) + f(\frac{a+b}{2} + \alpha) = 0.$$

Bài 5.8 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội)**. 1)** Gọi $p(x)$ là đa thức bậc 3 bất kỳ. Ta chứng minh được $\int\limits_0^1 p(x)dx = \frac{1}{6}(p(0) + 4p(\frac{1}{2}) + p(1))$. Tiếp theo, với $0 \leq a < b \leq 1$, sử dụng đổi biến và công thức trên với đa thức bậc 3, ta thu được $\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$.

2) Trước tiên, xét $f(x)$ chỉ có duy nhất $x = 0$ là nghiệm trong $[0,1]$. Vì $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ nên $f(x)$ không đổi dấu trên $[0,1]$. Khi đó

$$\int\limits_0^1 |f(x)|dx = \left|\int\limits_0^1 f(x)dx\right| = \left|\frac{4f(\frac{1}{2}) + f(1)}{6}\right| \leq \frac{5}{6}\max_{[0,1]}|f(x)|.$$

Kết thúc chứng minh, ta xét $f(x)$ có ít nhất một nghiệm khác 0. Gọi $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ là tất cả các nghiệm khác 0 của $f(x)$ trong $(0,1]$. Vì $f(x)$ liên tục nên $f(x)$ không đổi dấu trên $[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_m,x_{m+1}]$ với $x_0=0, x_{m+1}=1$. Ta có

$$\left|\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx\right| = \left|\frac{x_{i+1}-x_i}{6}(f(x_i)+4f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})+f(x_{i+1}))\right| \le \frac{5(x_{i+1}-x_i)}{6}\max_{[0,1]}|f(x)|$$

với mọi $i=0,1,\cdots,m$. Mà ta lại có $\left|\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx\right| = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}|f(x)|dx$ và $\int\limits_0^1|f(x)|dx = \sum\limits_{i=0}^{m}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}|f(x)|dx$, do đó ta thu được $\int\limits_0^1|f(x)|dx \le \sum\limits_{i=0}^{m}\frac{5(x_{i+1}-x_i)}{6}\max\limits_{[0,1]}|f(x)| = \frac{5}{6}\max\limits_{[0,1]}|f(x)|$.

3) Ta xác định được hàm số $g(x)=4x^3-8x^2+5x$ thuộc tập $\mathcal{M}$ và thỏa mãn các điều kiện $g(x)\ge 0$ trên $[0,1]$, $\max\limits_{[0,1]} g(x)=1$ và $\int\limits_0^1 g(x)dx=\frac{5}{6}$. Khi đó với mỗi $C\in(0,\frac{5}{6})$, ta luôn có $\int\limits_0^1|g(x)|dx > C = C.\max\limits_{[0,1]}|g(x)|$.

Bài 5.9 (ĐH Kỹ thuật Hậu cần Công an Nhân dân)**.** Đặt $c=\frac{1}{2}(a+b)$ và $m=\frac{1}{2}(b-a)$. Do $\int_a^b f(x)dx=0$, ta được

$$\int_a^b xf(x)dx = \int_a^b (x-c)f(x)dx = \int_a^c (x-c)f(x)dx + \int_c^b (x-c)f(x)dx.$$

Với tích phân $\int_a^c (x-c)f(x)dx$ ta đổi biến $y=c-x$ thì

$$\int_a^c (x-c)f(x)dx = -\int_0^m yf(c-y)dy = -\int_0^m tf(c-t)dt.$$

Với tích phân $\int_c^b (x-c)f(x)dx$ ta đổi biến $z=x-c$ thì

$$\int_c^b (x-c)f(x)dx = \int_0^m zf(z+c)dz = \int_0^m tf(t+c)dt.$$

Từ đó và định lý Lagrang ta có $\xi_t \in (c-t, c+t)$ để

$$\int_a^b xf(x)dx = \int_0^m t[f(t+c) - f(c-t)]dt = \int_0^m 2t^2 f'(\xi_t)dt$$

$$\Big|\int_a^b xf(x)dx\Big| = \Big|\int_0^m 2t^2 f'(\xi_t)dt\Big| \leqslant \int_0^m 2t^2\Big|f'(\xi_t)\Big|dt \leqslant 2M\int_0^m t^2dt$$

$$= 2M\frac{m^3}{3} = \frac{(b-a)^3}{12}M.$$

Bài 5.10 (Học viện Phòng không Không quân). 1. Ta thấy rằng để cho dãy số $\{a_n\}$ xác định thì $x > 0$. Khi $n \to \infty$ thì số hạng a_n chính là tích phân suy rộng

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx.$$

Ta sẽ chứng minh tích phân này hội tụ. Thật vậy

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx + \int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx.$$

Xét tích phân thứ nhất. Với α bất kỳ thuộc vào $(0,1)$ ta luôn có $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{1+x^2} : \frac{1}{x^\alpha}\right) = 0$. Suy ra $\frac{\ln x}{1+x^2} < \frac{1}{x^\alpha}$ mà tích phân $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn so sánh thì $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx$ hội tụ. Tương tự, trong tích phân thứ hai, ta thấy rằng $\frac{x\sqrt{x}\ln x}{1+x^2} \to 0$ khi $x \to \infty$. Tích phân $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ hội tụ nên tích phân $\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx$ hội tụ.

Vậy $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx$ hội tụ. Tức là dãy $\{a_n\}$ hội tụ với $x > 0$.

2. Tính giới han. Ta có

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx + \int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx.$$

Xét tích phân $\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx$. Đặt $x = \frac{1}{t}$, suy ra $dx = -\frac{1}{t^2}dt$. Ta có tích phân mới

$$\int_1^0 \frac{\ln(1/t)}{1+\frac{1}{t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_1^0 \frac{\ln t}{1+t^2}dt.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx = 0.$

Bài 5.11 (Học viện Phòng không Không quân). 1. Tích phân này không tồn tại do hàm f không khả tích. Thật vậy, với phân hoạch bất kỳ chia đoạn $[0,1]$ thành các đoạn con bởi các điểm

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1,$$

thì mỗi đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ đều chứa các điểm hữu tỉ và các điểm vô tỉ nên

$$w_i = \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = 1 - 0 = 1.$$

Vì vậy,

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1 - 0 = 1 \text{ với } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Do đó, $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_i w_i \Delta x_i = 1 \neq 0$. Suy ra hàm f không khả tích trên $[0,1]$.

2. Ta có

$$\int_0^1 xf'(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = f(1) - \int_0^1 f(x)dx = 0$$

Thế nên

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha f(x)dx = \alpha\int_0^1 f(\alpha x)dx &= \alpha\int_0^1 [f(\alpha x) - f(x) - (\alpha-1)xf'(x)]dx \\ &= \alpha(\alpha-1)^2\int_0^1 x^2\frac{f''(\theta)}{2}dx.\end{aligned}$$

Từ đây suy ra

$$\left|\int_0^\alpha f(x)dx\right| = \left|\alpha(\alpha-1)^2\int_0^1 x^2\frac{f''(\theta)}{2}dx\right| \leq \left|\alpha(\alpha-1)^2\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx\right| \max_x |f''(x)|.$$

Ta có

$$\alpha(\alpha-1)^2 = \frac{1}{2}2\alpha(1-\alpha)(1-\alpha) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2a+1-\alpha+1-\alpha}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}.$$

Còn $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{6}$ nên

$$\frac{1}{4}\max_{0\leq x\leq 1}|f''(x)| \geq 10\left|\int_0^\alpha f(x)dx\right|$$

Bài 5.12 (ĐH Quảng Bình)**.** Bằng phương pháp tích phân từng phân ta tính được

$$\int_0^1 x^3 f(x)dx = \frac{1}{4}x^4 f(x)|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{4}x^4 f'(x)dx = -\int_0^1 \frac{1}{4}x^4 f'(x)dx.$$

Do đó

$$\int_0^1 x^4 f'(x)dx = 1 \tag{23}$$

Lại có

$$\int_0^1 (9x^4)^2 dx = 9 \tag{24}$$

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx = 9 \tag{25}$$

Từ đó

$$\int_0^1 (9x^4)^2 dx - 18\int_0^1 x^4 f'(x)dx + \int_0^1 (f'(x))^2 dx = 9 - 18.1 + 9 = 0.$$

hay

$$\int_0^1 [(9x^4) - f'(x)]^2 dx = 0.$$

Suy ra $f'(x) = (9x^4), \forall x \in [0;1]$ nên $f(x) = \frac{9}{5}x^5 + C$. Vì $f(1) = 0$ nên $f(x) = \frac{9}{5}(x^5 - 1)$.

$$\int_0^1 f(x)dx = -\frac{3}{2}.$$

Bài 5.13 (Trường Sĩ quan Không quân)**.** $I_0 = \int dx = x + C$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} = \int \frac{dx}{2\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})} \\
&= \int \frac{\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})dx}{2\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\cos^2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})} = \int \frac{d(\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}))}{\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})} \\
&= \ln|\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})| + C \\
I_2 &= \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.
\end{aligned}$$

Với $n \geq 2$, ta có:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{1}{\cos^{n-2} x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{\cos^{n-2} x} d(\tan x) \\
&= \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - \int \tan(x)(\cos^{2-n} x)' dx \\
&= \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} - (n-2) \int \frac{\sin^2 x}{\cos^n x} dx \\
&= \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} - (n-2) \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^n x} dx \\
&= \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} - (n-2) \int \frac{1}{\cos^n x} - \frac{1}{\cos^{n-2} x} dx \\
I_n &= \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} - (n-2) I_n + (n-2) I_{n-2}.
\end{aligned}$$

Suy ra công thức truy hồi:

$$I_n = \frac{1}{n-1} . \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}.$$

Bài 5.14 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Do f đơn điệu và liên tục trên J, ta suy ra tồn tại $f^{-1} : [0, f^{-1}(c)] \to [0, c]$

Do f tăng ngặt nên ta có $f'(t) > 0, \forall t \in J$. Đặt $g(t) = bt - \int_0^t f(x)dx$. Khi đó ta có: $\frac{d}{dt} g(t) = b - \frac{d}{dt}\left(\int_0^t f(x)dx\right) = b - f(t)$. Từ đó dẫn tới $g'(t) = 0$ khi và chỉ khi $t = f^{-1}(b)$.

Do $g''(t) = -f(t) < 0, \forall t \in J$ nên $g(t)$ đạt cực đại tại $t = f^{-1}(b)$.

Thêm vào đó ta có:

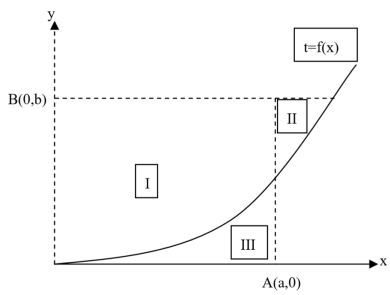
$$\begin{aligned}
\int_0^{f^{-1}(b)} x f'(x) dx = x f(x)|_0^{f^{-1}(b)} - \int_0^{f^{-1}(b)} f(x)dx = bf^{-1}(b) - \int_0^{f^{-1}(b)} f(x)dx \\
= \left[bt - \int_0^t f(x)dx\right] |_{f^{-1}(b)} = g(t)|_{f^{-1}(b)} = g(f^{-1}(b))
\end{aligned}$$

Đặt $y = f(x)$ thì $dy = f'(x)dx$. Khi $x = 0$ thì $y = 0$ còn khi $x = f^{-1}(b)$ thì ta có $y = b$

$$\int_0^{f^{-1}(b)} x f'(x) dx = \int_0^b f^{-1}(y) dy = \int_0^b f^{-1}(x) dx$$

Từ đó, ta có $g(f^{-1}(b)) = \int_0^b f^{-1}(x)dx$.

Do $g(t)$ đạt cực đại tại $t = f^{-1}(b)$ nên ta có $g(a) \leq g(f^{-1}(b))$.



Mặt khác từ định nghĩa của $g(t)$ ta có $g(a) = ba - \displaystyle\int_0^a f(x)dx$.

Khi đó, ta có: $\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx = [ab - g(a)] + g(f^{-1}(b)) \geq ab$

Đặt:

$\displaystyle\int_0^a f(x)dx =$ diện tích III, $\displaystyle\int_0^b f^{-1}(x)dx =$ diện tích I + diện tích II.

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx = &\text{ diện tích I + diện tích II + diện tích III}\\ \geq &\text{ diện tích I + diện tích III} = ab\end{aligned}$$

Ta có hình minh họa bất đẳng thức trên như sau

Bài 5.15 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Giả sử f là hàm số liên tục thoả mãn bài toán. Khi đó f là hàm số khả vi.

Đạo hàm hai vế của đẳng thức đã cho ta có

$$\frac{f'(x)(1+x^2) - 2xf(x)}{(1+x^2)^2} = 2018\frac{f(x)}{1+x^2}$$

hay

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2018 + \frac{2x}{1+x^2}.$$

Tích phân hai vế ta nhận được $\ln f(x) = 2018x + \ln(1+x^2) + C, C-$hằng số. Do đó $f(x) = a(1+x^2)e^{2018x}$, $a-$hằng số. Thay vào phương trình ban đầu ta nhận được $a = 2018$. Do đó, ta có hàm số có dạng $f(x) = 2018(1+x^2)e^{2018x}$. Thử lại ta có hàm số trên thỏa mãn. Vậy hàm số cần tìm là $f(x) = 2018(1+x^2)e^{2018x}$

Bài 5.16 (CĐ Sư phạm Nam Định). Lấy $a \in (0,1)$ bất kỳ.

Đặt $I_n = \int\limits_0^1 f(x^n)dx = \int\limits_0^{1-a} f(x^n)dx + \int\limits_{1-a}^1 f(x^n)dx = J_n + K_n$.

Với $J_n = \int\limits_0^{1-a} f(x^n)dx$, $K_n = \int\limits_{1-a}^1 f(x^n)dx$.

Vì $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ nên theo định lý giá trị trung bình tồn tại $c \in (0, 1-a)$ sao cho $J_n = f(c^n)(1-a)$. Vì $0 < c < 1-a < 1$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} c^n = 0$
Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = f(0)(1-a) = 2018(1-a)$.
Vậy tồn tại $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho $2018 - 2019a < J_n < 2018 - 2017a$ với mọi $n \geq N$.
$|K_n| = \left|\int\limits_{1-a}^{1} f(x^n)dx\right| \leq \int\limits_{1-a}^{1} |f(x^n)|\, dx$
$f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ nên $|f(x)|$ cũng thế. Vậy tồn tại $M = \max\limits_{[0,1]} |f(x)|$.
$|K_n| \leq \int\limits_{1-a}^{1} M dx = Ma$.
Vậy $-Ma \leq K_n \leq Ma$.
Vậy $2018 - (M+2019)a \leq I_n \leq 2018 - (M+2017)a < 2018 + (M+2019)a$ với mọi $n \geq N$.
Lấy $\epsilon \in (0;1)$ bất kỳ. Chọn $a = \dfrac{\epsilon}{M+2019} \in (0;1)$
Vậy $2018 - \epsilon < I_n < 2018 + \epsilon$ với mọi $n \geq N$.
Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 2018$.

Bài 5.17 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long)**.** Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 \left(f'(x) - 15x^2\right)^2 dx &= \int\limits_0^1 \left((f'(x))^2 - 30x^2 f'(x) + 225x^4\right) dx \\ &= 45 - 30\int\limits_0^1 x^2 f'(x)dx + 45x^5\Big|_0^1 \\ &= 90 - 30\int\limits_0^1 x^2 f'(x)dx\end{aligned}$$

Xét $\displaystyle\int_0^1 x^2 f'(x)dx$.

Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = f'(x)dx \end{cases}$, ta được

$$\int_0^1 x^2 f'(x)dx = x^2 f(x)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 xf(x)dx = 5 - 2 = 3$$

Suy ra $\displaystyle\int_0^1 \left(f'(x) - 15x^2\right)^2 dx = 0$.

Do đó $f'(x) - 15x^2 = 0$. Hay $f(x) = 5x^3 + C$

Mà $f(1) = 5$ nên $C = 0$. Vậy $f(x) = 5x^3$

$$\int_0^1 f(x)e^{x^4}dx = \frac{5}{4}\int_0^1 4x^3e^{x^4}dx = \frac{5}{4}(e-1)$$

Bài 5.18 (ĐH Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long)**.** Ta có

$$\begin{aligned}0 \le \int_0^1 \left(e^{f(x)}f'(x)-2\right)^2 dx &= \int_0^1 \left(e^{f(x)}f'(x)\right)^2 dx - 4\int_0^1 e^{f(x)}f'(x)dx + \int_0^1 4dx\\ &= \int_0^1 \left(e^{f(x)}f'(x)\right)^2 dx - 4(e^{f(1)} - e^{f(0)}) + 4\\ &= \int_0^1 \left(e^{f(x)}f'(x)\right)^2 dx - 4\end{aligned}$$

Suy ra $\displaystyle\int_0^1 \left(e^{f(x)}f'(x)\right)^2 dx \ge 4$

Mà theo giả thiết $\displaystyle\int_0^1 \left(e^{f(x)}f'(x)\right)^2 dx \le 4$, nên suy ra

$$\int_0^1 \left(e^{f(x)}f'(x)\right)^2 dx = 4$$

Do đó $\displaystyle\int_0^1 \left(e^{f(x)}f'(x)-2\right)^2 dx = 0$ và $e^{f(x)}f'(x) = 2$

Hay $e^{f(x)} = 2x + C$. Mà $f(0) = 0$ nên $C = 1$

Vậy $f(x) = ln(2x+1)$.

Bài 5.19 (ĐH Tây Bắc)**.** a) Ta giả sử phản chứng ngược lại rằng $M \neq 0$. Do $f(0) = 0$ nên nếu $M \neq 0$ thì $M > 0$. Theo giả thiết ta có f đạt giá trị lớn nhất $M > 0$ tại $x_0 \in (0,1)$. Khi đó x_0 là điểm cực đại của f và do đó $f'(x_0) = 0, f(x_0) = M > 0, f''(x_0) \le 0$. Từ đó suy ra $x_0^2 f''(x_0) \le 0; x_0^4 f'(x_0) = 0$ và $-f(x_0) < 0$. Do đó $x_0^2 f''(x_0) + x_0^4 f'(x_0) - f(x_0) < 0$, mâu thuẫn với giả thiết $x^2 f''(x) + x^4 f'(x) - f(x) = 0, \forall x \in (0,1)$. Vậy $M = 0$.
b) Giả sử f đạt giá trị nhỏ nhất m tại điểm $y_0 \in [0,1]$. Ta xét các trường hợp sau:
TH1: Nếu $y_0 \in \{0,1\}$. Do $f(0) = f(1) = 0$, khi đó $m = 0$. Ta xét hai khả năng
(i) Nếu f đạt cực đại tại $x_0 \in \{0,1\}$ thì khi đó $\max f = \min f = 0$ và ta được $f = 0$ là hàm hằng.

(2i) Nếu f đạt cực đại tại $x_0 \in (0,1)$, theo đó, từ phần a) ta được $M = \max_{x\in[0,1]} f(x) = 0$. Và tương tự (i) ta được $\max f = \min f = 0$ và ta được $f = 0$ là hàm hằng.
TH2: Hàm f đạt giá trị nhỏ nhất m tại $y_0 \in (0,1)$. Bằng lập luận tương tự như phần a) (thay cho M bởi m) ta có m không thể âm, tức là $\min_{x\in[0,1]} f(x) = 0$ suy ra $f = 0$ là hàm hằng trên $[0,1]$.

Bài 5.20 (ĐH Tây Bắc). a) Ta xét trường hợp hàm f_0 đơn điệu tăng. Khi đó dễ chứng minh quy nạp được
(i) Mỗi hàm f_n là đơn điệu tăng.
(2i) Với mọi $x \in (0,1]$ ta có $f_0(x) \geq f_1(x) \geq \cdots \geq f_n(x) \geq \cdots \geq f_0(0)$.
Từ (2i) ta suy ra dãy $\{f_n\}$ giảm và bị chặn dưới bởi $f_0(0)$ trên tập $(0,1]$ và do đó tồn tại hàm giới hạn

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), x \in (0,1].$$

Do (i) ta suy ra h là đơn điệu tăng và từ (2i) ta có $f_0(0) \leq h(x) \leq f_n(x), \forall n, \forall x \in (0,1]$.
Ta sẽ chỉ ra $h(1) = f_0(0)$, khi đó do h đơn điệu tăng ta suy ra $h(x) = f_0(0)$ với mọi $x \in (0,1]$. Thật vậy, giả sử $h(1) > f_0(0)$. Khi đó do tính đơn điệu tăng của h, tồn tại $0 < \delta < 1$ sao cho $h(1) > f_0(\delta)$.
Mặt khác, từ định nghĩa của f_n và (i), (2i) ta có

$$\begin{aligned} f_{n+1}(1) = \int_0^1 f_n(t)dt &\leq \int_0^\delta f_0(t)dt + \int_\delta^1 f_n(t)dt \\ &\leq \delta f_0(\delta) + (1-\delta)f_n(1). \end{aligned}$$

Do đó ta thu được

$$f_n(1) - f_{n+1}(1) \geq \delta[f_n(1) - f_0(\delta)] \geq \delta[h(1) - g(\delta)] > 0.$$

Từ đó suy ra

$$\sum_{n=0}^{\infty}[f_n(1) - f_{n+1}(1)] \geq \sum_{n=0}^{\infty} \delta[h(1) - g(\delta)] = +\infty,$$

tức là $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = -\infty$. Điều này mâu thuẫn với (2i) vì $f_n(1) \geq f_0(0)$. Mâu thuẫn chứng tỏ rằng $h(1) = f_0(0)$ và do đó $h(x) = f_0(0)$ với mọi $x \in (0,1]$. Vậy $\lim_{n\to\infty} f_n = f_0(0)$ trên $(0,1]$.
Trường hợp f_0 đơn điệu giảm được chứng minh tương tự ta được $\lim_{n\to\infty} f_n = f_0(0)$ trên $(0,1]$.

b) Trường hợp f_0 liên tục tùy ý, ta đặt

$$M_0(x) = \max_{t\in[0,x]} f_0(t), m_0(x) = \min_{t\in[0,x]} f_0(t),\ x \in [0,1]$$

Khi đó trên $[0,1]$ hàm m_0 liên tục tăng và M_0 liên tục giảm, $m_0(x) \le f_0(x) \le M_0(x), \forall x \in [0,1]; M_0(0) = f_0(0) = m_0(0)$. Tương tự như vậy ta xác định dãy hàm $\{M_n\}$ và $\{m_n\}$ tương tự như M_0, m_0 thay cho f_0 bởi f_n. Rõ ràng ta có $m_n(x) \le f_n(x) \le M_n(x)$.
Mặt khác, theo chứng minh phần a) cho mỗi hàm đơn điệu m_n, M_n ta được

$$\lim_{n\to\infty} m_n(x) = m(0) = f_0(0) = M(0) = \lim_{n\to\infty} M_n(x), x \in (0,1].$$

Do đó ta được $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(0)$.

Bài 5.21 (ĐH Thủy Lợi). Ta có

$$|u_n| = \Big|\int_n^{n+2018} \frac{\sin x}{x} dx\Big| \leqslant \int_n^{n+2018} \Big|\frac{\sin x}{x}\Big| dx \leqslant \int_n^{n+2018} \frac{dx}{x} = \ln\Big(1 + \frac{2018}{n}\Big),$$

Mà: $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\Big(1 + \dfrac{2018}{n}\Big) = 0$, do đó

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Bài 5.22 (ĐH Thủy Lợi). + Với mọi $x \in (0;1]$ ta có $xf(x) = \int_0^x f(t)dt$.
+ Từ đó $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (0;1]$, hay là: $f(x)$ là hàm hằng trong $(0;1]$.
+ Mặt khác, do tính liên tục của hàm số $f(x)$ trong $[0;1]$, nên

$$f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \Big(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\Big) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$$

+ Áp dụng L'Hospital ta có:

$$f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{1} = f(0) = 2018.$$

+ Vậy $f(x) = 2018,\ x \in [0;1]$.

Bài 5.23 (ĐH Thủy Lợi). + Xét

$$I_1 = \int \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \sqrt{x^2+1}\, d\big(e^{\arctan x}\big) = \sqrt{x^2+1}\, e^{\arctan x} - \int \frac{x e^{\arctan x}}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

+ Xét

$$I_2 = \int \frac{x e^{\arctan x}}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

khi đó: $I_1 + I_2 = \sqrt{x^2+1}e^{\arctan x} + C_1$.
+ Ta lại có

$$I_2 = \int \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int x\sqrt{x^2+1}d\big(e^{\arctan x}\big)$$

$$I_2 = x\sqrt{x^2+1}e^{\arctan x} - \int \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{x^2+1}}dx - 2\int \frac{x^2e^{\arctan x}}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$I_2 = x\sqrt{x^2+1}e^{\arctan x} - I_1 - 2I$$

+Từ đó $I = \dfrac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2+1}e^{\arctan x} + C$.

6 PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Bài 6.1 (ĐH Giao thông vận tải). Hiển nhiên hàm số $f(x) = 0$ với mọi x, là một nghiệm. Giả sử có x_0 sao cho $f(x_0) \neq 0$. Khi đó $f(\sqrt{x_0^2+y^2}) = f(x_0)f(y) = f(x_0)f(-y)$ với mọi $y \in \mathbb{R}$, suy ra $f(y) = f(-y)$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Vì thế f là hàm chẵn, và do đó ta chỉ cần tìm $f(x)$ với $x \geq 0$. Đặt $g(x) = f(\sqrt{x})$, $x \geq 0$. Khi đó từ phương trình đã cho ta có

$$g(u+v) = g(u)g(v),$$

với $u = x^2$, $v = y^2$. Phương trình này có nghiệm $g(u) = a^u$, a là hằng số dương. Thật vậy, trước hết ta chỉ ra $g(u) > 0$ với mọi $u \geq 0$. Rõ ràng hàm $g(u) = 0$ với mọi u thỏa mãn phương trình trên. Giả sử có u_0 sao cho $g(u_0) \neq 0$, khi đó ta có

$$g(u_0) = g(u_0-u)g(u),$$

điều này suy ra $g(u) \neq 0$. Hơn nữa

$$g(u) = g\Big(\frac{u}{2}\Big)g\Big(\frac{u}{2}\Big) = \Big[g\Big(\frac{u}{2}\Big)\Big]^2 > 0.$$

Đặt $h(u) = \ln g(u)$. Khi đó $h(u)$ liên tục với mọi $u \geq 0$ và dễ thấy

$$h(u+v) = h(u) + h(v).$$

Như vậy $h(u)$ thỏa mãn phương trình hàm Cauchy nên ta có $h(u) = bu$, $b = h(1) = \ln f(1)$. Như vậy $g(u) = a^u$, $a = e^b$. Cuối cùng $f(x) = a^{x^2}$.

Bài 6.2 (ĐH Quảng Bình). Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, đặt $x_1 = \sin x, x_2 = \sin x_1, \cdots, x_{n+1} = \sin x_n$. Khi đó, dãy $(x_n) \subset [-1;1]$. Vì hàm $y = \sin x$ có $y' = \cos x > 0, \forall x \in [-1;1]$ nên dãy (x_n) đơn điệu. Do đó dãy $(x_n)_n$ là dãy đơn điệu và bị chặn. Gọi $a = \lim\limits_{n\to\infty} \lim x_n$; từ phương trình $a = \sin a$ ta suy ra $a = 0$.

Ta thấy $f(x) = f(x_n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Vì vậy

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(0).$$

Tư đó, ta kết luận được $f(x) = f(0)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, tức là f là hàm hằng.

Bài 6.3 (CĐ Sư phạm Nam Định). Đặt $Q(x) = P(1-x)$. Ta có $Q((1-x)^2) = P(2x - x^2) = (P(x))^2 = (Q(1-x))^2$. Dẫn đến

$$Q(x^2) = (Q(x))^2.$$

Nếu $Q(x)$ không phải đơn thức thì $Q(x) = ax^k + x^m.R(x)$ với $m > k \geq 0$, $a \neq 0$ và $R(x)$ là đa thức thỏa mãn $R(0) \neq 0$.
Từ $Q(x^2) = ax^{2k} + x^{2m}.R(x^2)$, ta có

$$(Q(x))^2 = a^2x^{2k} + 2ax^{m+k}R(x) + x^{2m}(R(x))^2.$$

Nói riêng, $2k < k + m < 2m$.
Đồng nhất hệ số hai vế. Hệ số của x^{2k} dẫn đến $a = a^2$. Hệ số x^{m+k} là $0 = 2a.R(0)$. Vì $a \neq 0$, $R(0) \neq 0$. Vô lý.
Vậy $Q(x)$ là đơn thức. Viết $Q(x) = ax^k$. Do đó $ax^{2k} = a^2.x^{2k}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Cho $x = 1$ ta được $a = 0$ hoặc $a = 1$. Vậy $Q(x) = 0$ hoặc $Q(x) = x^k$.
Do đó $P(x) = 0$ hoặc $P(x) = 1$ hoặc $P(x) = (1-x)^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

Bài 6.4 (ĐH Tây Bắc). Do f là đa thức nên f là khả vi mọi cấp trên $\mathbb{R}$. Đồng thời ta có $\lim_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0)$ do tính liên tục tại 0 của f. Từ đó theo giả thiết ta được $\lim_{x\to\infty} f''(x) = f(0)$. Tuy nhiên f'' cũng là đa thức nên nếu $\deg f'' \geq 1$ thì $\lim_{x\to\infty} f''(x) = \infty$. Điều này chứng tỏ $\deg f'' = 0$ hay nói cách khác f'' là hàm hằng, $\deg f \leq 2$ và $f''(x) = f(0), \forall x \in \mathbb{R}$.
Mặt khác do $f(x) \geq f(2018), \forall x \in \mathbb{R}$ nên f không thể là hàm lẻ. Vậy $\deg f \in \{0, 2\}$.
TH1: Nếu $\deg f = 0$ khi đó $f'' = 0$ và từ giả thiết $\lim_{x\to\infty} f''(x) = \lim_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$ suy ra $f \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
TH2: Nếu $\deg f = 2$ tức là f là hàm số bậc hai trên $\mathbb{R}$. Từ giả thiết $f(x) \geq f(2018), \forall x \in \mathbb{R}$ ta suy ra tọa độ của đỉnh parabol $y = f(x)$ là $x = 2018$, ngoài ra do hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của f bằng 1 nên ta được $f(x) = (x - 2018)^2 + c$ với c là hằng số nào đó.
Cuối cùng, do giả thiết $f''(x) = f(0)$ nên ta được $c + 2018^2 = f(0) = f''(x) = 2$ và ta được $c = 2 - 2018^2$. Vậy $f(x) = (x - 2018)^2 + 2 - 2018^2$.
Kết luận: Hoặc $f(x) = 0$ hoặc $f(x) = (x - 2018)^2 + 2 - 2018^2$. Rõ ràng thử lại ta thấy f thỏa mãn các điều kiện của hàm cần tìm.