ĐỀ SỐ 13

Câu 1. (4 điểm)

a, Cho biểu thức $\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}\right):\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{x+1}\right)$. Rút gọn biểu thức P.

b, Cho biểu thức : $Q=x^4+2x^3+x^2+2023$. Tính giá trị của biểu thức Q với $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}$.

Câu 2. (2 điểm) . Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$ Chứng minh:

$$a\sqrt{(4-b^2)(4-c^2)}+b.\sqrt{(4-c^2)(4-a^2)}+c.\sqrt{(4-a^2)(4-b^2)}=8+abc$$

Câu 3. (2 điểm) . Tìm tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn $n^4-2n^3+2n^2-2n+1$ là số chính phương.

Câu 4.(2,0 điểm)

Giải phương trình: $2\left(\frac{x+2}{x+6}\right)^2+\left(\frac{x+6}{x+9}\right)^2=\frac{3x+6}{x+9}$.

Câu 5. (2 điểm)

Chia đa thức $P(x)=x^{2024}+x^{2023}+x^{2022}+\ldots+x+1$cho đa thức $q(x)=x^2-1$ ta được thương là đa thức h(x) và phân dư là đa thức r(x). Tính h(-1).

Câu 6.(2 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC) có đường cao AH (H thuộc BC). Trên tia HC lấy điểm D thỏa mãn HD = HA. đường thẳng qua D song song với AH cắt AC tại E. Chứng minh tam giác ADC đồng dạng với tam giác BEC và tính độ dài BC khi AE = 6 cm, EC = 2 cm.

Câu 7. (2 điểm) Cho hình vuông ABCD, điểm N thuộc cạnh CD thỏa mãn NC = 2^{ND}. Gọi H là giao điểm của AN với BD và M là trung điểm BC. Chứng minh tam giác AHM vuông cân.

Câu 8. (2 điểm). Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai của một ngôi nhà được thiết kế liên tiếp một nhịp với 21 bậc, mỗi bậc có chiều cao và chiều rộng mặt bậc thang bằng nhau (ảnh bên). Biết chiều cao từ mặt sàn tầng một đến mặt sàn tầng 2 là 3,75m và chiều rộng của mỗi bậc là 25cm. Hỏi vị trí bắt đầu xây cầu thang ở mặt sàn tầng một cách vị trí chân tường xây chắn tại cuối cầu thang bao nhiêu mét và cầu thang dài bao nhiêu mét?

Câu 9. (2 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương và thỏa mãn a +b + c = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: T = $\frac{a}{a^2+8bc}+\frac{b}{b^2+8ca}+\frac{c}{c^2+8ab}$.

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (4 điểm)

a, Cho biểu thức $\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}\right):\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{x+1}\right)$. Rút gọn biểu thức P.

Điều kiện $x\geq 0, x¿1$

Ta có $P=\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}\right):\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{x+1}\right)$

$¿\frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}:\frac{\sqrt{x}+1}{x+1}=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}:\frac{\sqrt{x}+1}{x+1}$

$¿\frac{\sqrt{x}-1}{x+1}.\frac{x+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

b, Cho biểu thức : $Q=x^4+2x^3+x^2+2023$. Tính giá trị của biểu thức Q với $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}$.

Ta có $x=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}\Leftrightarrow 2x+1=\sqrt{5}\Rightarrow(2x+1)^2=5\Leftrightarrow x^2+x-1=0(1)$.

$Q=x^4+2x^3+x^2+2023=[(2x+1)^2-1]+2024=(x^2+x-1)(x^2+x-1)+2024(2)$

Từ (1) và (2) ta được Q = 2024

Câu 2. (2 điểm)

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$ Chứng minh:

$a\sqrt{(4-b^2)(4-c^2)}+b.\sqrt{(4-c^2)(4-a^2)}+c.\sqrt{(4-a^2)(4-b^2)}=8+abc$

Ta có:

$a\sqrt{(4-b^2)(4-c^2)}=a\sqrt{(16-4(b^2+c^2)+b^2c^2}$

$¿a\sqrt{(16-4(4-a^2-abc)+b^2c^2}=a\sqrt{(4a^2+4abc+b^2c^2}=a\sqrt{(2a+bc)^2}$

$¿a(2a+bc)=2a^2+abc$

Tương tự $b.\sqrt{(4-c^2)(4-a^2)}=2b^2+abc; c.\sqrt{(4-a^2)(4-b^2)}=2c^2+abc$

$a\sqrt{(4-b^2)(4-c^2)}+b.\sqrt{(4-c^2)(4-a^2)}+c.\sqrt{(4-a^2)(4-b^2)}$

$¿2(a^2+b^2+c^2)+3abc=2(a^2+b^2+c^2+abc)+abc=8+abc$

Câu 3. (2 điểm)

Tìm tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn $n^4-2n^3+2n^2-2n+1$ là số chính phương.

Ta có

$n^4-2n^3+2n^2-2n+1=(n^4-2n^3+n^2)+(n^2-2n+1)$

¿$(n^2-n)^2+(n-1)^2=n^2(n-1)^2+(n-1)^2=(n-1)^2[n^2+1]$

Nếu n – 1 = 0 $\Leftrightarrow n=1\,thì\,n^4-2n^3+2n^2-2n+1=0$ là số chính phương.

Nếu n – 1 # 0 $\Leftrightarrow n$¿$1\,thì\,n^4-2n^3+2n^2-2n+1=0$ là số chính phương khi

$n^2+1=m^2(m\in R, m>n)$

$m^2-n^2=1\Leftrightarrow(m+n)(m-n)=1.1\Leftrightarrow\begin{cases}m-n=1\\m+n=1\end{cases}\Leftrightarrow(m;n)=(1;0)$

KL $n\in\{0;1\}$

Câu 4.(2,0 điểm)

Giải phương trình: $2\left(\frac{x+2}{x+6}\right)^2+\left(\frac{x+6}{x+9}\right)^2=\frac{3x+6}{x+9}$

ĐK x # -6, x # -9

$2\left(\frac{x+2}{x+6}\right)^2+\left(\frac{x+6}{x+9}\right)^2=\frac{3x+6}{x+9}\Leftrightarrow 2\left(\frac{x+2}{x+6}\right)^2+\left(\frac{x+6}{x+9}\right)^2=3\frac{x+2}{x+9}$

Đặt $a=\frac{x+2}{x+6}, b=\frac{x+6}{x+9}, c=\frac{x+2}{x+9}=ab$

Phương trình có dạng $2a^2+b^2=3ab\Leftrightarrow(a-b)(2a-b)=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\x=-10\end{cases}$ (thỏa mãn).

* a = b $\Leftrightarrow\frac{x+2}{x+6}=\frac{x+6}{x+9}\Leftrightarrow x+18=0\Leftrightarrow x=-18\,thỏa\,mãn$

* 2a = b $\Leftrightarrow\frac{x+2}{x+6}=\frac{x+6}{x+9}\Leftrightarrow x^2+10x=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\x=-10\end{cases}$ (thỏa mãn).

Kết luận…

Câu 5. (2 điểm)

Chia đa thức $P(x)=x^{2024}+x^{2023}+x^{2022}+\ldots+x+1$cho đa thức $q(x)=x^2-1$ ta được thương là đa thức h(x) và phân dư là đa thức r(x). Tính h(-1).

Dễ thấy r(x) = ax +b và p(x) = q(x).h(x) + r(x)

$\Leftrightarrow x^{2024}+x^{2023}+x^{2022}+\ldots+x+1=(x^2-1).h(x)+ax+b(1)$

Thay lần lượt các giá trị x = 1, x = -1 vào hai vế của (1) ta được

$\begin{cases}a+b=2025\\-a+b=-1\end{cases}\Leftrightarrow(a;b)=(1012;1013)$

$\Rightarrow x^{2024}+x^{2023}+x^{2022}+\ldots+x+1=(x^2-1).h(x)+1012x+1013(1)$

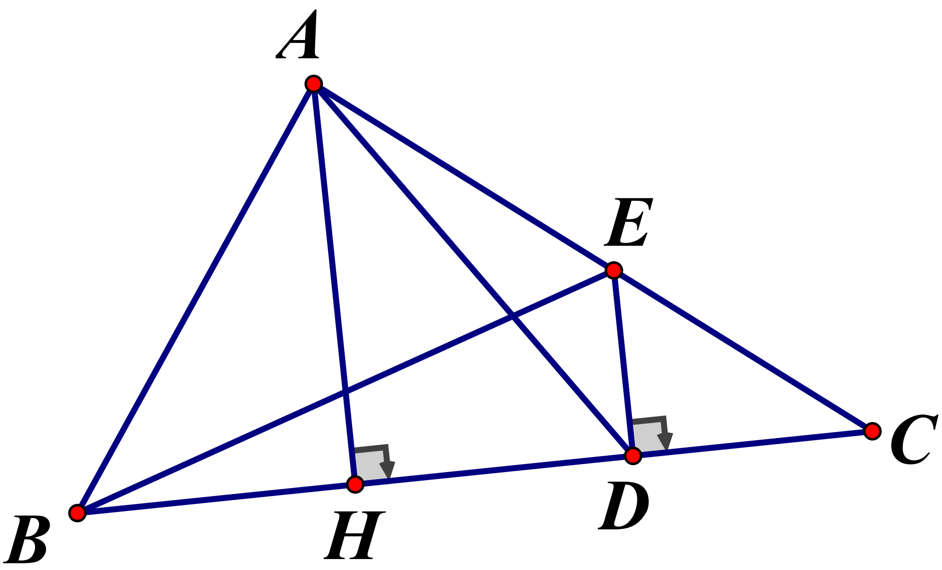
$\Leftrightarrow (x^{2024}+x^{2023})+(x^{2022}+x^{2022})+\ldots+(x^2+1)+(1-1012x-1013)$

$¿(x^2-1).h(x) \Leftrightarrow x^{2023}(x+1)+x^{2021}(x+1)+\ldots+x(x+1)-1012(x+1)$

$¿(x-1)(x+1)h(x) \Rightarrow x^{2023}+x^{2021}+\ldots+x-1012=(x-1)h(x)(2)$ (x #1)

Cho x = - 1 vào hai vế của (2) ta được -2021 = -2. h(-1) $\Leftrightarrow h(-1)=1012$

Câu 6.(2 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC) có đường cao AH (H thuộc BC). Trên tia HC lấy điểm D thỏa mãn HD = HA. đường thẳng qua D song song với AH cắt AC tại E. Chứng minh tam giác ADC đồng dạng với tam giác BEC và tính độ dài BC khi AE = 6 cm, EC = 2 cm.



Ta có hai tam giác vuông ΔCDE đồng dạng $\Delta CDE \Rightarrow \frac{CD}{CE}=\frac{CA}{CB}$

Xét tam giác ADC và tam giác BEC, $\frac{CD}{CA}=\frac{CE}{CB}$, $\hat{C}$ chung

$\Rightarrow \Delta ADC\,đồng\,dạng\,\Delta BEC(c.g.c)$

Do tam giác AHD cân đỉnh H$\Rightarrow \Delta ADC=180°-HDA=180°-45°=135°$

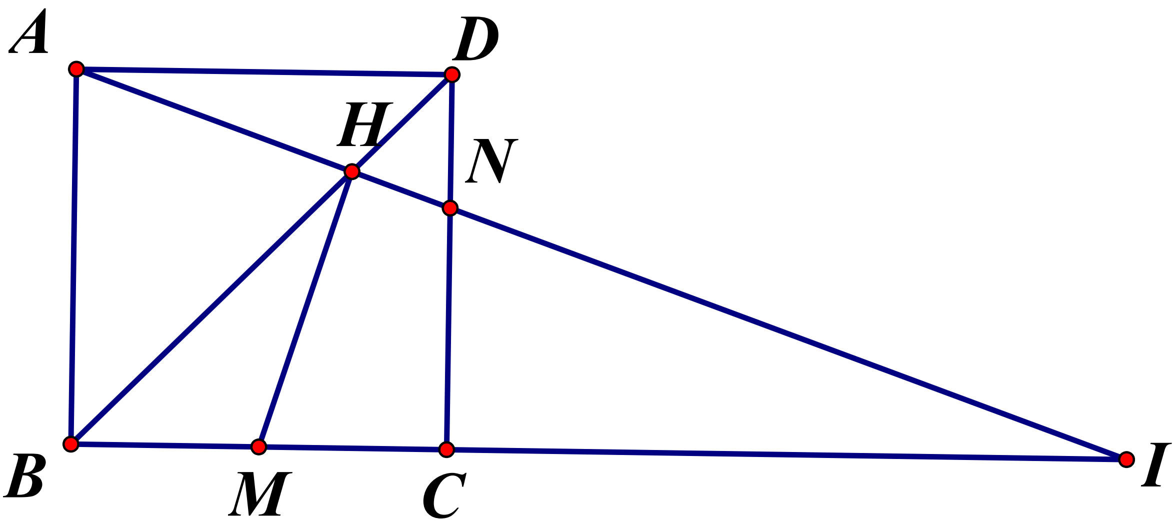
$\Delta ADC\,đồng\,dạng\,\Delta BEC \Rightarrow BEC=ADC=135° \Rightarrow BEA=45°$ nên tam giác ABE vuông cân đỉnh A $\Rightarrow AB=AE=6\,cm\,;AC=AE+EC=6+2=8\,cm$

Do tam giác ABC vuông tại A ta có:

$\Rightarrow BC^2=AB^2+AC^2$

$\Rightarrow BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=10\,cm$

Câu 7. (2 điểm) Cho hình vuông ABCD, điểm N thuộc cạnh CD thỏa mãn NC = 2ND. Gọi H là giao điểm của AN với BD và M là trung điểm BC. Chứng minh tam giác AHM vuông cân.



Gọi I là giao điểm cuae AN với BC từ sự đồng dạng của các cặp tam giác

$\Delta HDN \sim \Delta HAB, \Delta ICN \sim \Delta IBA$ *ta có so sánh sau*:

$HN = \frac{1}{3} HA = \frac{1}{4} AN = \frac{1}{12} IA \Rightarrow IH = ¿ + HN = \frac{2}{3} IA + \frac{1}{12} IA = \frac{3}{4} IA$ (1)

$MC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{6} IB \Rightarrow \Im = IC + CM = \frac{2}{3} IB + \frac{1}{6} IB = \frac{5}{6} IB$ (2)

Ta có

$IH . IA = \frac{3}{4} IA^2 = \frac{3}{4}(AB^2 + IB^2) = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{1}{3} IB\right)^2 + IB^2\right) = \frac{5}{6} IB^2$

IM.IB = $\frac{5}{6} IB^2$

Từ đó, suy ra IH.IA = IM.IB (3)

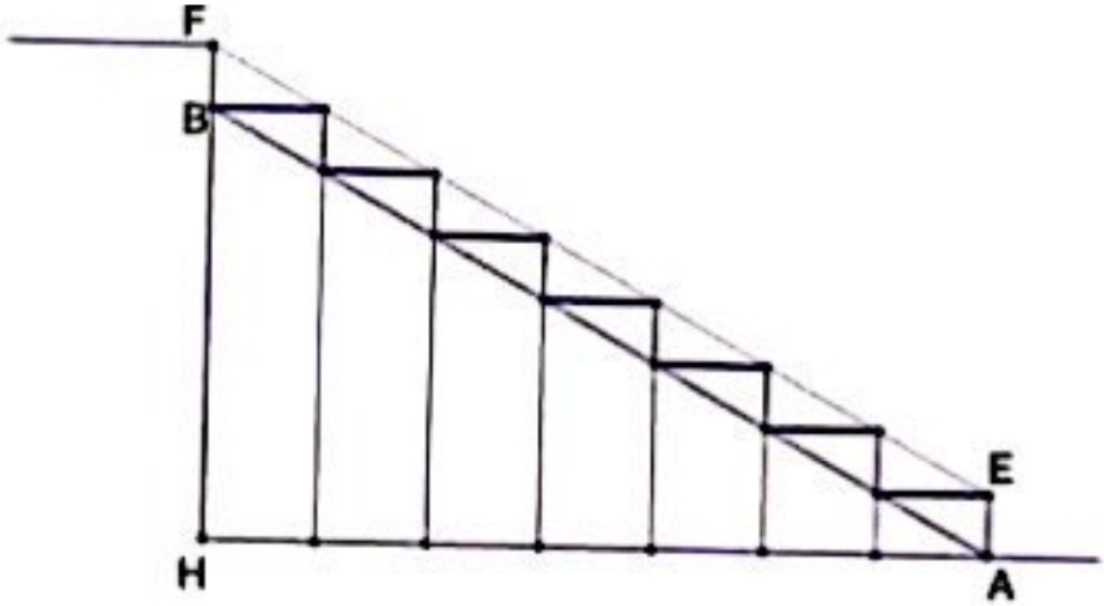
(3) $\Rightarrow \frac{\Im}{IH} = \frac{IA}{IA} \Rightarrow \Delta IHM \sim \Delta IBA \Rightarrow IHM = IBA = 90°$ (4)

Mặt khác (3)$\Rightarrow \frac{IH}{IB} = \frac{\Im}{IA} \Rightarrow \Delta IHB \sim \Delta IMA \Rightarrow IAM = IBH = 45°$ (5)

Từ (4), (5) ta được điều phải chứng minh

Câu 8. (2 điểm). Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai của một ngôi nhà được thiết kế liên tiếp một nhịp với 21 bậc, mỗi bậc có chiều cao và chiều rộng mặt bậc thang bằng nhau (ảnh bên). Biết chiều cao từ mặt sàn tầng một đến mặt sàn tầng 2 là 3,75m và chiều rộng của mỗi bậc là 25cm. Hỏi vị trí bắt đầu xây cầu thang ở mặt sàn tầng một cách vị trí chân tường xây chắn tại cuối cầu thang bao nhiêu mét và cầu thang dài bao nhiêu mét?

Cầu Thang có 21 bậc từ tầng một lên tầng hai thì số mặt bậc không phải mặt sàn nhà là 20 mặt. Nếu vị trí xây cách vị trí chân tường chắn cuối cầu thang là 20. 0,25 = 5 m.



(Hình vẽ mặt cắt minh họa cho cầu thang có 8 bậc)

Do chiều cao từ mặt sàn tầng một đến mặt sàn tầng hai bằng tổng chiều cao 21 bậc nên chiều cao một bậc là 3,57 : 21 = 0,17 m

Áp dụng định lí Pitago ta có chiều dài một bậc là $\sqrt{0,17^2+0.25^2}=\frac{\sqrt{914}}{100}$(m)

Vậy chiều dài cầu thang là $20\frac{\sqrt{914}}{100}=\frac{\sqrt{914}}{5}=6,05\,m$

Câu 9. (2 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương và thỏa mãn a +b + c = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: T = $\frac{a}{a^2+8bc}+\frac{b}{b^2+8ca}+\frac{c}{c^2+8ab}$.

Với các số a, b, c dương

Ta có T = $\frac{a}{a^2+8bc}+\frac{b}{b^2+8ca}+\frac{c}{c^2+8ab}$

$$\Rightarrow T=\frac{a^2}{a^3+8abc}+\frac{b^2}{b^3+8abc}+\frac{c^2}{c^3+8abc}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3+24abc}$$

Ta lại có:

¿ $a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc\ge a^3+b^3+c^3+27\sqrt[3]{abc}.\sqrt[3]{(abc)^2}-3ab(a+b+c)^2c=a^3+b^3+c^3+2$

Suy ra $a^3+b^3+c^3+24abc\le(a+b+c)^3$

$$\Rightarrow\frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3+24abc}\ge\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^3}=\frac{1}{a+b+c}=1$$

Do đó $T \geq 1$

dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Vậy MinT = 1, khi $a = b = c = \frac{1}{3}$