

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH THANH HÓA
TRƯỜNG THPT LÊ LỢI

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

HƯỚNG DẪN HỌC SINH KỸ THUẬT CHỌN
“ĐIỂM RƠI” TRONG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY

Người thực hiện : PHAN QUỐC NAM
Chức vụ : Giáo viên
SKKN thuộc môn : Toán

THANH HÓA NĂM 2016

MỤC LỤC	TRANG
A. PHẦN MỞ ĐẦU	2
I. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI	2
1.Cơ sở lý luận:	2
2.Thực trạng của vấn đề nghiên cứu:	2
II .ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU	2
III. NHIỆM VỤ CỦA NGHIÊN CỨU	3
IV. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU	3
B . PHẦN NỘI DUNG	4
I. GIẢI PHÁP THỰC HIỆN	4
II. BIỆN PHÁP TỔ CHỨC THỰC HIỆN	4
1.Kiến thức toán có liên quan	4
2.Một số bài toán thường gặp và phương pháp tiếp cận vấn đề	4
Dạng 1:Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bài toán cực trị	6
Xảy ra tại biên	
Dạng 2:Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bài toán cực trị	11
Xảy ra tại tâm	
C. KẾT LUẬN	20
1 .Kết quả đạt được	20
2 .Bài học kinh nghiệm	20
3 .Tài liệu tham khảo	20

A.PHẦN MỞ ĐẦU

I. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

1.Cơ sở lý luận:

Bài toán tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN), giá trị lớn nhất (GTLN) của một biểu thức là một bài toán bất đẳng thức và đây là một trong những dạng toán khó ở chương trình phổ thông. Trong đề thi học sinh giỏi THPT hay tuyển sinh Đại học, Cao đẳng hàng năm (nay là Thi tốt nghiệp THPT Quốc Gia), nội dung này thường xuất hiện ở dạng câu khó nhất.

Qua quá trình giảng dạy trên lớp: Bồi dưỡng nâng cao kiến thức cho HS khá giỏi, bồi dưỡng thi HSG các cấp, luyện thi Đại Học (Thi tốt nghiệp THPT Quốc Gia) tôi đã tích lũy được một số kinh nghiệm cho nội dung này. Các vấn đề trình bày trong sáng kiến kinh nghiệm là chuyên đề được ứng dụng trong giảng dạy lớp bồi dưỡng nâng cao kiến thức cho học sinh khá giỏi lớp 10, luyện thi học sinh giỏi và tốt nghiệp THPT Quốc Gia cho học sinh lớp 12 đã được đúc kết trong quá trình giảng dạy nhiều năm cùng với sự góp ý sâu sắc của các thầy cô giáo trong tổ Toán trường THPT Lê Lợi.

2. Thực trạng của vấn đề nghiên cứu:

Khi dạy học sinh phần bất đẳng thức hay bài toán tìm GTLN, GTNN thực tế đa số học sinh rất bế tắc ở cách dùng kỹ thuật này.

Một là: không định hướng được cách dùng bất đẳng thức Cauchy trong trường hợp nào.

Hai là: biết cần dùng bất đẳng thức Cauchy cho bài toán, xong không biết vận dụng cho mấy số và những số nào thì hợp lý, thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trong khi đó, hiện nay trên thị trường sách tham khảo có rất nhiều chủng loại sách cùng với hàng trăm tác giả và đa phần sách viết ở dạng trình bày lời giải không có sự phân tích, giải thích cặn kẽ làm cho học sinh khi đọc sách bị gò bó, áp đặt, không tự nhiên.

II. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU

Rèn luyện cho học sinh biết cách khai thác kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức Cauchy qua các bài toán tìm cực trị hay chứng minh bất đẳng thức. Phân loại bài tập thường gặp và cách giải cho mỗi dạng.

III. NHIỆM VỤ CỦA NGHIÊN CỨU :

Trình bày kỹ thuật chọn điểm rơi thông qua hệ thống bài tập. Hướng dẫn học sinh giải quyết các bài toán trong một số tình huống cụ thể. Từ đó bồi dưỡng cho học sinh kỹ năng giải toán và khả năng tư duy sáng tạo .

IV. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

1. Phương pháp nghiên cứu lý luận: Nghiên cứu sách giáo khoa bài tập ,sách tài liệu và các đề thi HSG,thi Đại học,mạng internet.

2. Phương pháp điều tra thực tiễn : Dự giờ ,quan sát việc dạy và học phần bài tập này.

3. Phương pháp thực nghiệm sư phạm

4 .Phương pháp thống kê

B . PHẦN NỘI DUNG

I. Các giải pháp thực hiện.

Khi tiếp cận các bài toán, giáo viên phải giúp học sinh biết nhận dạng được bài toán để đưa ra các dự đoán hợp lý. Sau đó hướng dẫn học sinh phân tích ,xây dựng phương pháp giải phù hợp.

II. Biện pháp tổ chức thực hiện.

Để giúp học sinh sử dụng kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức Cauchy khi giải quyết các bài toán tìm Giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) hay chứng minh bất đẳng thức, trước hết giáo viên cần yêu cầu học sinh ôn tập các kiến thức cơ bản về bất đẳng thức. Sau đó giáo viên phân dạng phù hợp, chọn một số bài toán điển hình phù hợp cho các dạng giúp HS hiểu và nắm kỹ kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức Cauchy.

1. Kiến thức toán có liên quan

- Tính chất của bất đẳng thức:**

$$+ A > B \Leftrightarrow B < A$$

$$+ A > B \text{ và } B > C \Leftrightarrow A > C$$

$$+ A > B \Rightarrow A + C > B + C$$

$$+ A > B \text{ và } C > D \Rightarrow A + C > B + D$$

$$+ A > B \text{ và } C > 0 \Rightarrow A.C > B.C$$

$$+ A > B \text{ và } C < 0 \Rightarrow A.C < B.C$$

$$+ 0 < A < B \text{ và } 0 < C < D \Rightarrow 0 < A.C < B.D$$

$$+ A > B > 0 \Rightarrow A^n > B^n \quad \forall n$$

$$+ A > B \Rightarrow A^n > B^n \text{ với } n \text{ lẻ}$$

$$+ |A| > |B| \Rightarrow A^n > B^n \text{ với } n \text{ chẵn}$$

$$+ m > n > 0 \text{ và } A > 1 \Rightarrow A^m > A^n$$

$$+ m > n > 0 \text{ và } 0 < A < 1 \Rightarrow A^m < A^n$$

$$+ A < B \text{ và } A.B > 0 \Rightarrow \frac{1}{A} > \frac{1}{B}$$

- Bất đẳng thức Cauchy và dạng tương đương:**

Bất đẳng thức Cauchy cho 2 số:

Cho 2 số không âm a, b thì ta luôn có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b$.

Bất đẳng thức dạng tương đương:

- $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

- $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$

- $(a+b)^2 \geq 4ab$

Bất đẳng thức cauchy cho 3 số:

Cho 3 số không âm a, b, c thì ta luôn có: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.

Bất đẳng thức dạng tương đương.

$$- \quad abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

$$- \quad \frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq abc$$

Bất đẳng thức cauchy cho 4 số:

Cho 4 số không âm a, b, c, d thì ta luôn có: $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=d$.

Bất đẳng thức dạng tương tự:

$$- \quad abcd \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$$

Tổng quát: Cho n số thực không âm $a_1, a_2, \dots, a_n, n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$, ta luôn có:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \cdot \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

• Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

* **Định nghĩa.** Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp $D \subset \mathbb{R}$.

a) Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in D$ sao cho $f(x) \leq f(x_0)$ với mọi $x \in D$ thì số $M = f(x_0)$ được gọi là *giá trị lớn nhất* của hàm số f trên D , kí hiệu là $M = \max_{x \in D} f(x)$.

b) Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in D$ sao cho $f(x) \geq f(x_0)$ với mọi $x \in D$ thì số $m = f(x_0)$ được gọi là *giá trị nhỏ nhất* của hàm số f trên D , kí hiệu là $m = \min_{x \in D} f(x)$.

* **Nhận xét.** Như vậy, muốn chứng tỏ rằng số M (hoặc m) là giá trị lớn nhất (hoặc giá trị nhỏ nhất) của hàm số f trên tập hợp D cần chỉ rõ:

a) $f(x) \leq M$ (hoặc $f(x) \geq m$) với mọi $x \in D$;

b) Tồn tại ít nhất một điểm $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$ (hoặc $f(x_0) = m$).

2. Một số bài toán thường gặp và phương pháp tiếp cận vấn đề:

Một vài khái niệm:

Điểm rơi trong các bất đẳng thức là giá trị đạt được của biến khi dấu “=” trong bất đẳng thức xảy ra.

Trong các bất đẳng thức dấu “=” thường xảy ra ở các trường hợp sau:

- Khi các biến có giá trị tại biên. Khi đó ta gọi bài toán có **cực trị đạt được tại biên**
- Khi các biến có giá trị bằng nhau (thường xảy ra với biểu thức đối xứng). Khi đó ta gọi bài toán có **cực trị đạt được tại tâm**.

Căn cứ vào điều kiện xảy ra của dấu “=” trong bất đẳng thức ta xét các kỹ thuật chọn điểm rơi trong các trường hợp trên.

Dạng 1: Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bài toán cực trị xảy ra ở biên

BÀI TOÁN MỞ ĐẦU:

Bài toán 1: Cho số thực $a \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của $A = 3a + \frac{1}{2a}$

Sai lầm thường gặp là: Khi gặp bài toán này học sinh thường áp dụng ngay bất đẳng

thức Cauchy: $A = 3a + \frac{1}{2a} \geq 2\sqrt{3a \cdot \frac{1}{2a}} = \sqrt{6}$. Vậy GTNN của A là $\sqrt{6}$.

Nguyên nhân sai lầm: Chưa xét điều kiện dấu bằng xảy ra

Ta thấy: GTNN của A là 2 $\Leftrightarrow 3a = \frac{1}{2a} \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{1}{6}} < 1$ vô lý vì theo giả thuyết thì $a \geq 1$.

Lời giải đúng: $A = 3a + \frac{1}{2a} = \frac{a}{2} + \frac{1}{2a} + \frac{5a}{2} \geq 2\sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2a}} + \frac{5a}{2} \geq 1 + \frac{5 \cdot 1}{2} = \frac{7}{2}$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{2a}$ hay $a = 1$ thỏa mãn giả thiết.

Vậy GTNN của A là $\frac{7}{2}$.

Vì sao chúng ta lại biết phân tích được như lời giải trên. Đây chính là kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức.

Quay lại bài toán trên, dễ thấy a càng tăng thì A càng tăng. Ta dự đoán A đạt GTNN khi $a=1$. Khi đó ta nói A đạt GTNN tại “**Điểm rơi** $a=1$ ”. Ta không thể áp dụng bất đẳng

thức Cauchy cho hai số $3a$ và $\frac{1}{2a}$ vì không thỏa quy tắc dấu “=”. Vì vậy ta phải tách $3a$

hoặc $\frac{1}{2a}$ để khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy thì thỏa quy tắc dấu “=”. Giả sử ta sử

dụng bất đẳng thức Cauchy cho cặp số $\left(\frac{3a}{\alpha}, \frac{1}{2a}\right)$ sao cho tại “**Điểm rơi** $a=1$ ” thì $\frac{3a}{\alpha} = \frac{1}{2a}$, ta có sơ đồ sau:

$$a=1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{3a}{\alpha} = \frac{3}{\alpha} \\ \frac{1}{2a} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 6$$

Như vậy phải áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số $\frac{3a}{6}, \frac{1}{2a}$ hay $\frac{a}{2}, \frac{1}{2a}$. Vậy thì phải làm xuất

hiện số hạng $\frac{a}{2}$ Khi đó: $A = 3a + \frac{1}{2a} = \frac{a}{2} + \frac{5a}{2} + \frac{1}{2a}$ và ta có lời giải như trên.

Lưu ý: Để giải bài toán trên, ngoài cách chọn cặp số $\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{1}{a}\right)$ ta có thể chọn các cặp số sau: $\left(\alpha a, \frac{1}{a}\right)$ hoặc $\left(a, \frac{\alpha}{a}\right)$ hoặc $\left(a, \frac{1}{\alpha a}\right)$.

Bài toán 2: Cho số thực $a \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = a + \frac{1}{a^2}$

Sơ đồ điểm rơi: Kinh nghiệm từ bài toán 1 giáo viên có thể hỏi học sinh GTNN đạt được

khi nào và học sinh trả lời ngay được khi $a=2$. Khi đó GTNN là $A = \frac{9}{4}$

Giáo viên hướng dẫn học sinh lập sơ đồ điểm rơi sau:

$$a=2 \Rightarrow \textcolor{red}{\text{!}} \left\{ \frac{a}{\alpha} = \frac{2}{\alpha} \textcolor{red}{\text{!}} \textcolor{red}{\text{!}} \textcolor{red}{\text{!}} \right.$$

Sai lầm thường gặp là: $A = \frac{a}{8} + \frac{1}{a^2} + \frac{7a}{8} \geq 2\sqrt{\frac{a}{8} \cdot \frac{1}{a^2}} + \frac{7a}{8} = \sqrt{\frac{1}{2a}} + \frac{7a}{8} \geq \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 2}} + \frac{7 \cdot 2}{8} = \frac{9}{4}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=2$.

Vậy GTNN của A là $\frac{9}{4}$

Nguyên nhân sai lầm: Mặc dù GTNN của A là $\frac{9}{4}$ là đáp số đúng nhưng cách giải trên

mắc sai lầm trong đánh giá mẫu số: “ $a \geq 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2a}} \geq \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 2}}$ là sai”.

Vậy làm thế nào để khắc phục được sai lầm trên? nhận định thấy bậc của a ở mẫu bằng 2, vậy phải ghép cặp với 2 số hạng bậc 1 của a .

Lời giải đúng: $A = \frac{a}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{a^2} + \frac{6a}{8} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{8} \cdot \frac{a}{8} \cdot \frac{1}{a^2}} + \frac{6a}{8} \geq \frac{3}{4} + \frac{6 \cdot 2}{8} = \frac{9}{4}$ (kỹ thuật tách nghịch đảo)

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=2$

Vậy GTNN của A là $\frac{9}{4}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Bài 1: Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b \leq 1$. Tìm GTNN của $A = ab + \frac{1}{ab}$

Phân tích:

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

Ta có:

Sơ đồ điểm rơi:

$$ab = \frac{1}{4} \Rightarrow \textcolor{red}{\text{!}} \left\{ \frac{ab}{\alpha} = \frac{1}{4\alpha} \textcolor{red}{\text{!}} \textcolor{red}{\text{!}} \textcolor{red}{\text{!}} \right.$$

Giải:

Ta có:

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow -ab \geq -\frac{1}{4}$$

$$A = 16ab + \frac{1}{ab} - 15ab \geq 2\sqrt{16ab \cdot \frac{1}{ab}} - 15ab \geq 8 - 15 \cdot \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow ab = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$

Vậy GTNN của A là $\frac{17}{4}$

Bài 2: Cho số thực $a \geq 6$. Tìm GTNN của $A = a^2 + \frac{18}{a}$

Phân tích:

Ta có

$$A = a^2 + \frac{18}{a} = a^2 + \frac{9}{a} + \frac{9}{a}$$

Dễ thấy a càng tăng thì A càng tăng. Ta dự đoán A đạt GTNN khi $a=6$. Ta có sơ đồ điểm rơi:

$$a=6 \Rightarrow \begin{cases} a^2 \\ \alpha \end{cases} = \frac{36}{\alpha} \quad \text{điểm rơi}$$

Giải: C1 :

$$A = \frac{a^2}{24} + \frac{9}{a} + \frac{9}{a} + \frac{23a^2}{24} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{24} \cdot \frac{9}{a} \cdot \frac{9}{a} + \frac{23a^2}{24}}$$
$$\text{điểm rơi} \quad \frac{9}{2} + \frac{23 \cdot 36}{24} = 39$$

Ta có:

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a^2}{24} = \frac{9}{a} \Leftrightarrow a = 6$

Vậy GTNN của A là 39

C2 : chọn α sao cho $\alpha a^2 = \frac{18}{a}$ khi $a = 6$ suy ra $\alpha = 1/12$.

$$A = \frac{a^2}{12} + \frac{18}{a} + \frac{11a^2}{12} \geq 2\sqrt{\frac{18}{12}a} + \frac{11a^2}{12} \geq 6 + \frac{11 \cdot 36}{12} = 39$$

Bài 3 (Đề thi HSG HÀ NỘI-2013) :cho x,y dương thỏa mãn : $x \geq 2y$.Tìm GTNN của :

$$S = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

Phân tích : Đưa S về dạng $S = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 2y$

Khi $x=2y$ $\Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha x}{y} = 2\alpha \\ \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4}$ nên $S = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x}{4y} + \frac{y}{x} + \frac{3x}{4y} \geq \frac{5}{2}$

(Do giả thiết $x \geq 2y \Rightarrow \frac{x}{y} \geq 2$)

Bài 4: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a+2b+3c \geq 20$. Tìm GTNN của

$$A = a + b + c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c}$$

Phân tích:

Dự đoán GTNN của A đạt được khi $a+2b+3c=20$,tại điểm rơi $a=2, b=3, c=4$.

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{2}{\alpha} \end{cases}$$

$$b=3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{\beta} = \frac{3}{\beta} \end{cases}$$

$$c=4 \Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{\gamma} = \frac{4}{\gamma} \end{cases}$$

Giải: Ta phân tích như sau:

$$A = \left(\frac{3a}{4} + \frac{3}{a} \right) + \left(\frac{b}{2} + \frac{9}{2b} \right) + \left(\frac{c}{4} + \frac{4}{c} \right) + \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + \frac{3c}{4}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{3a}{4} \cdot \frac{3}{a}} + 2\sqrt{\frac{b}{2} \cdot \frac{9}{2b}} + 2\sqrt{\frac{c}{4} \cdot \frac{4}{c}} + \frac{a+2b+3c}{4} \geq 3+3+2+5=13$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=2, b=3, c=4$

Vậy GTNN của A là 13

Bài 5: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $ab \geq 12$. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c) + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{8}{abc} \geq \frac{121}{12}$$

Phân tích:

Dự đoán GTNN của A đạt được khi $ab=12$, tại điểm rơi $a=3, b=4, c=2$.

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{a}{18} + \frac{b}{24} + \frac{2}{ab} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{18} \cdot \frac{b}{24} \cdot \frac{2}{ab}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{9} + \frac{c}{6} + \frac{2}{ca} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{9} \cdot \frac{c}{6} \cdot \frac{2}{ca}} = 1$$

$$\frac{b}{16} + \frac{c}{8} + \frac{2}{bc} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{16} \cdot \frac{c}{8} \cdot \frac{2}{bc}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{a}{9} + \frac{c}{6} + \frac{b}{12} + \frac{8}{abc} \geq 4\sqrt[4]{\frac{a}{9} \cdot \frac{c}{6} \cdot \frac{b}{12} \cdot \frac{8}{abc}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{13a}{18} + \frac{13b}{24} \geq 2\sqrt{\frac{13a}{18} \cdot \frac{13b}{24}} \geq 2\sqrt{\frac{13}{18} \cdot \frac{13}{24} \cdot 12} = \frac{13}{3}$$

$$\frac{13b}{48} + \frac{13c}{24} \geq 2\sqrt{\frac{13b}{48} \cdot \frac{13c}{24}} \geq 2\sqrt{\frac{13}{48} \cdot \frac{13}{24} \cdot 8} = \frac{13}{4}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được:

$$(a+b+c) + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{8}{abc} \geq \frac{121}{12} \quad (\text{đpcm})$$

Dạng 2: Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bài toán cực trị đạt được tại tâm

BÀI TOÁN MỞ ĐẦU:

Bài toán 1: Cho $a, b > 0$. Tìm min của $S = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$

Sai lầm thường gặp là: $S = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \geq 2\sqrt{\frac{a+b}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{a+b}} = 2 \Rightarrow \min S = 2$

Nguyên nhân sai lầm: chưa xét điều kiện dấu “=” xảy ra.

$\min S = 2$ khi $\frac{a+b}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \Leftrightarrow \sqrt{ab} = a+b \geq 2\sqrt{ab} \rightarrow 1 \geq 2$ vô lý.

Phân tích:

Do S là biểu thức đối xứng với a, b nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại

$$a=b \text{ khi đó GTNN của } A = \frac{5}{2}$$

Ta không thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số $\frac{a+b}{\sqrt{ab}}, \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$ vì không thỏa mãn

quy tắc dấu “=”. Vì vậy ta phải tách $\frac{a+b}{\sqrt{ab}}$ hoặc $\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$ để khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy thì thỏa quy tắc dấu “=”. Giả sử ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho cặp số $(\frac{a+b}{\alpha\sqrt{ab}}, \frac{\sqrt{ab}}{a+b})$ sao cho tại “Điểm rơi $a=b$ ” thì $\frac{a+b}{\alpha\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$, ta có sơ đồ sau:

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=b \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{\alpha\sqrt{ab}} = \frac{2}{\alpha} \\ \frac{\sqrt{ab}}{a+b} = \frac{\sqrt{a^2}}{2a} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 4$$

$$S = \frac{a+b}{4\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} + \frac{3(a+b)}{4\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{\frac{a+b}{4\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{a+b}} + \frac{3(a+b)}{4\sqrt{ab}} \geq 1 + \frac{3(a+b)}{4 \cdot \frac{a+b}{2}} = \frac{5}{2}$$

Giải đúng:

Dấu = xảy ra khi $a=b$

Bài toán 2: Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b \leq 1$.. Tìm GTNN của

$$A = a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Sai lầm thường gặp là: $A = a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4 \sqrt[4]{a \cdot b \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} = 4$

Vậy GTNN của A là 4.

Nguyên nhân sai lầm: GTNN của A là 4 $\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{a}=\frac{1}{b} \Leftrightarrow a=b=1$. Khi đó $a+b=2 \geq 1$ trái giả thiết.

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại

$$a=b=\frac{1}{2}$$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=b=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a \\ \alpha \end{cases} = \begin{cases} b \\ \alpha \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha} \\ \end{cases}$$

Lời giải đúng: $A = \left(4a + 4b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - 3a - 3b \geq 4 \sqrt[4]{4a \cdot 4b \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} - 3(a+b) \geq 8 - 3 = 5$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$

Vậy GTNN của A là 5

BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Bài 1: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a+b+c \leq \frac{3}{2}$. Tìm GTNN của

$$A = a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại

$$a = b = c = \frac{1}{2}$$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a = b = c = \frac{1}{2} \Rightarrow \left\{ \frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\alpha} = \frac{c}{\alpha} = \frac{1}{2\alpha} \right\}$$

Giải: Ta phân tích biểu thức như sau:

$$A = \left(4a + 4b + 4c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 3a - 3b - 3c$$

$$6\sqrt[6]{4a \cdot 4b \cdot 4c \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} - 3(a + b + c)$$

$$12 - \frac{9}{2} = \frac{13}{2}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{2}$

Vậy GTNN của A là $\frac{13}{2}$

Bài 2: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a + b + c \leq \frac{3}{2}$. Tìm GTNN của

$$A = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại

$$a = b = c = \frac{1}{2}$$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a = b = c = \frac{1}{2} \Rightarrow \left\{ a^2 = b^2 = c^2 = \frac{1}{4} \right\}$$

Giải:

Ta có thể phân tích $A = \left(a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{8a} + \frac{1}{8b} + \frac{1}{8c} + \frac{1}{8a} + \frac{1}{8b} + \frac{1}{8c} \right) + \frac{3}{4a} + \frac{3}{4b} + \frac{3}{4c}$

$$\geq 9 \sqrt[9]{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \frac{1}{8a} \cdot \frac{1}{8b} \cdot \frac{1}{8c} \cdot \frac{1}{8a} \cdot \frac{1}{8b} \cdot \frac{1}{8c}} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\geq \frac{9}{4} + 9 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{9}{4} + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{\frac{a+b+c}{3}} \geq \frac{9}{4} + \frac{9}{4} \cdot 2 = \frac{27}{4}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$

Vậy GTNN của A là $\frac{27}{4}$

Bài 3: Cho 3 số thực dương a, b, c . Tìm GTNN của

$$A = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại

$$a=b=c$$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=b=c \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Giải:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{b+c}{4a} + \frac{c+a}{4b} + \frac{a+b}{4c} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \right) \\ &\stackrel{!}{=} 6 \sqrt[6]{\frac{a}{b+c} \cdot \frac{b}{c+a} \cdot \frac{c}{a+b} \cdot \frac{b+c}{4a} \cdot \frac{c+a}{4b} \cdot \frac{a+b}{4c}} + \frac{3}{4} \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \right) \\ &\stackrel{!}{=} 3 + \frac{3}{4} \cdot 6 \cdot \sqrt[6]{\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}} = 3 + \frac{9}{2} = \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Vậy GTNN của A là $\frac{15}{2}$

Bài 4: Cho 2 số thực dương a, b thỏa mãn $a+b \leq 1$. Tìm GTNN của :

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab}$$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại

$$a = b = \frac{1}{2}$$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a = b = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{!} \left\{ \frac{1}{a^2 + b^2} = 2 \text{ ! ! !} \right.$$

Giải:

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} \geq 2 \sqrt{\frac{1}{(a^2 + b^2)2ab}} \geq 2 \cdot \frac{1}{\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{2}} = \frac{4}{(a+b)^2} \geq 4$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \text{!} \left\{ a^2 + b^2 = 2ab \text{ ! ! !} \right.$

Vậy GTNN của A là 4

Bài 5: Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b \leq 1$. Tìm GTNN của

$$A = \frac{1}{1+a^2+b^2} + \frac{1}{2ab}$$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại

$$a = b = \frac{1}{2}$$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a = b = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{!} \left\{ \frac{1}{1+a^2+b^2} = \frac{2}{3} \text{ ! ! !} \right.$$

Giải:

$$A = \frac{1}{1+a^2+b^2} + \frac{1}{6ab} + \frac{1}{3ab}$$

$$\stackrel{!}{=} 2 \sqrt{\frac{1}{(1+a^2+b^2)6ab}} + \frac{1}{3ab}$$

$$\stackrel{!}{=} 2 \cdot \frac{1}{\frac{1+a^2+b^2+6ab}{2}} + \frac{1}{3ab} = \frac{4}{(a+b)^2+1+4ab} + \frac{1}{3ab}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{4}{(a+b)^2+1+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} + \frac{1}{3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \quad \left(\text{Do } ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \right)$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{4}{2(a+b)^2+1} + \frac{4}{3(a+b)^2}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{4}{2 \cdot 1 + 1} + \frac{4}{3 \cdot 1} = \frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(1+a^2+b^2=6ab \right) \stackrel{!}{=} \left(a=b \right)$$

Dấu “=” xảy ra

Vậy GTNN của A là $\frac{8}{3}$

Bài 6: Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b \leq 1$. Tìm GTNN của

$$A = \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{ab} + 4ab$$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại

$$a=b=\frac{1}{2}$$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=b=\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{a^2+b^2} = 2 \right)$$

$$a=b=\frac{1}{2} \Rightarrow \left(4ab = 1 \right)$$

Giải:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{2ab} + 4ab + \frac{1}{4ab} + \frac{1}{4ab} \\
&\stackrel{!}{=} 2\sqrt{\frac{1}{(a^2+b^2)2ab}} + 2\sqrt{4ab \cdot \frac{1}{4ab} + \frac{1}{4ab}} \\
&\stackrel{!}{=} 2 \cdot \frac{1}{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}} + 2 + \frac{1}{4ab} = \frac{4}{(a+b)^2} + 2 + \frac{1}{4ab} \\
&\geq \frac{4}{(a+b)^2} + 2 + \frac{1}{4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \quad \left(\text{Do } ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \right) \\
&\geq \frac{5}{(a+b)^2} + 2 \geq \frac{5}{1} + 2 = 7 \\
&\Leftrightarrow \left(\begin{aligned} a^2+b^2 &= 2ab \\ 4ab &= \frac{1}{4ab} \end{aligned} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{aligned} a=b \\ a=b \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra

Vậy GTNN của A là 7

Bài 7: Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b \leq 1$. Tìm GTNN của

$$A = \frac{1}{a^3+b^3} + \frac{1}{a^2b} + \frac{1}{ab^2}$$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại

$$a=b=\frac{1}{2}$$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=b=\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{a^3+b^3} = 2 \right)$$

Giải: Ta có

$$A = \frac{1}{a^3+b^3} + \frac{1}{2a^2b} + \frac{1}{2ab^2} + \frac{1}{2a^2b} + \frac{1}{2ab^2} \geq 5\sqrt{\frac{1}{a^3+b^3} \cdot \frac{1}{2a^2b} \cdot \frac{1}{2ab^2} \cdot \frac{1}{2a^2b} \cdot \frac{1}{2ab^2}}$$

$$\geq 5 \frac{1}{a^3 + b^3 + 2a^2b + 2ab^2 + 2a^2b + 2ab^2} \cdot \frac{25}{(a+b)^3 + ab(a+b)}$$

$$\geq \frac{25}{(a+b)^3 + \frac{(a+b)^3}{4}} \left(\text{Do } ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \right) \geq \frac{25}{1 + \frac{1}{4}} = 20$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^3 + b^3} = \frac{1}{2a^2b} = \frac{1}{2ab^2} \quad a=b$$

Dấu “=” xảy ra

Vậy GTNN của A là 20

Bài 8: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Tìm GTLN của

$$P = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z}$$

Đề thi Đại học khối A năm 2005

Phân tích: Biểu thức P là biểu thức đối xứng nên dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\frac{3}{4}$ nên

GTLN của P = 1. Do giả thiết cho điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$ nên ta cần đánh giá P xuất hiện

tổng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

Giải:

Thật vậy áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 4 số x, x, y, z ta có

$$\frac{1}{2x+y+z} = \frac{1}{x+x+y+z} \leq \frac{1}{4\sqrt[4]{x \cdot x \cdot y \cdot z}} = \frac{1}{4} \sqrt[4]{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z}} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

dấu = xảy ra khi

$x=y=z$

Tương tự:

$$\frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

$$\frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \right)$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta có:

$$P = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{4}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z} \right) = 1$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{3}{4}$$

Vậy GTLN của P là 1

PHẦN C :KẾT LUẬN

I.KẾT QUẢ ĐẠT ĐƯỢC :

Sáng kiến này đã đạt được một số kết quả sau :

- + Nhắc lại cách tìm GTNN, GTLN của hàm số .
- + Hệ thống một số tính chất của bất đẳng thức.
- + Hướng dẫn học sinh biết cách sử dụng kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức Cauchy thông qua hệ thống bài tập.
- + Sau khi vận dụng chuyên đề vào giảng dạy tôi thấy học sinh không còn lúng túng khi vận dụng bất đẳng thức Cauchy.Tự tin xử lý ,vận dụng tốt kỹ thuật chọn điểm rơi, tranh được những sai lầm thường gặp trước đây.

II.BÀI HỌC KINH NGHIỆM

Qua thực tế giảng dạy chúng tôi thấy rằng vấn đề nào dù khó mà giáo viên quan tâm và truyền thụ cho học sinh bằng lòng say mê và nhiệt tình của mình thì sẽ cuốn hút các em vào con đường nghiên cứu. Sử dụng kỹ thuật chọn điểm rơi để tìm GTNN, GTLN của một biểu thức không phải là một vấn đề mới, xong lại là vấn đề “Khó “ muôn thuở đối với học sinh mà đôi khi còn nhiều giáo viên ngại quan tâm và đào sâu nó.

III.TÀI LIỆU THAM KHẢO :

1. Các phương pháp chứng minh bất đẳng thức của tác giả Võ Quốc Bá Cẩn
2. Một số sai lầm thường gặp khi giải toán của tác giả Trần Phương
3. Một số trang mạng Internet: Vnmath.com,....

