

DẠNG 10**Cực trị khối đa diện**

Câu 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = x$, $AD = 1$. Biết rằng góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng 30° . Tìm giá trị lớn nhất V_{max} của thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

- A. $V_{max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. B. $V_{max} = \frac{1}{2}$. C. $V_{max} = \frac{3}{2}$. D. $V_{max} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ đều, có cạnh bên bằng 1. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $\frac{4}{27}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{4\sqrt{3}}{27}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = x$, các cạnh còn lại của hình chóp đều bằng 2. Giá trị của x để thể tích khối chóp đó lớn nhất là

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{7}$. D. $\sqrt{6}$.

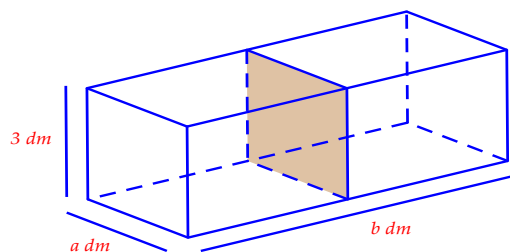
Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Biết $SA = x$ với $(0 < x < 2\sqrt{3})$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 2. Tìm x để thể tích của khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất?

- A. 2. B. $2\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $\sqrt{6}$.

Câu 5: Cho hình trụ có hai đường tròn đáy là $(O; R)$ và $(O'; R)$, chiều cao của hình trụ là $R\sqrt{3}$. Giả sử AB là một đường kính cố định trên đường tròn (O) và M là điểm di động trên đường tròn (O') . Hỏi diện tích tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

- A. $2R^2$. B. $4R^2$. C. $R^2\sqrt{3}$. D. $2R^2\sqrt{2}$.

Câu 6: Người ta muốn thiết kế một bể cá bằng kính không có nắp với thể tích 72dm^3 , chiều cao là 3dm . Một vách ngăn ở giữa, chia bể cá thành hai ngăn, với các kích thước a, b như hình vẽ. Tính a, b để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất, coi bể dày các tấm kính như nhau và không ảnh hưởng đến thể tích của bể.



- A. $a = \sqrt{24}\text{ dm}$; $b = \sqrt{24}\text{ dm}$. B. $a = 6\text{ dm}$; $b = 4\text{ dm}$.
C. $a = 3\sqrt{2}\text{ dm}$; $b = 4\sqrt{2}\text{ dm}$. D. $a = 4\text{ dm}$; $b = 6\text{ dm}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Một mặt phẳng không qua S và cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q thỏa mãn $\overrightarrow{SA} = 2\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SP}$.

Tính tỉ số $\frac{SB}{SN}$ khi biểu thức $T = \left(\frac{SB}{SN}\right)^2 + 4\left(\frac{SD}{SQ}\right)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $\frac{SB}{SN} = \frac{11}{2}$. B. $\frac{SB}{SN} = 5$. C. $\frac{SB}{SN} = 4$. D. $\frac{SB}{SN} = \frac{9}{2}$.

Câu 8: Một kim tự tháp Ai Cập có hình dạng là một khối chóp tứ giác đều có độ dài cạnh bên là một số thực dương không đổi. Gọi α là góc giữa cạnh bên của kim tự tháp và mặt đáy. Khi thể tích của kim tự tháp lớn nhất, tính $\sin \alpha$.

- A. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$. B. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = 2x$. Tính thể tích lớn nhất V_{max} của hình chóp $S.ABC$

- A. $\frac{a^3}{8}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. D. $\frac{a^3}{6}$.

Câu 10: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với đáy một góc 60° , gọi M là điểm đối xứng với C qua D ; N là trung điểm của SC , mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Gọi (H_1) là phần đa diện chứa điểm S có thể tích V_1 ; (H_2) là phần đa diện còn lại có thể tích V_2 . Tính tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{31}{5}$. B. $\frac{7}{3}$. C. $\frac{7}{5}$. D. $\frac{1}{5}$.

Câu 11: Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích $V = \frac{1}{6}$, góc $ACB = 45^\circ$ và $AD + BC + \frac{AC}{\sqrt{2}} = 3$. Hỏi độ dài cạnh CD ?

- A. $2\sqrt{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. 2 .

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C (A, B, C không trùng với gốc tọa độ). Thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

- A. $\frac{81}{2}$ B. $\frac{243}{2}$ C. $\frac{81}{6}$ D. 243

Câu 13: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 2. Trên đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm M sao cho $AM = x$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên AB, MB . Đường thẳng qua E, F cắt d tại N . Xác định x để thể tích khối tứ diện $BCMN$ nhỏ nhất.

- A. $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $x = 1$. C. $x = 2$. D. $x = \sqrt{2}$.

Câu 14: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Tam giác ABC' có diện tích bằng $3\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng tạo với đáy một góc bằng $\alpha, \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Tìm α để thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$. B. $\tan \alpha = \sqrt{6}$. C. $\tan \alpha = \sqrt{2}$. D. $\tan \alpha = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$, trong đó $SA \perp (ABC)$, $SC = a$ và đáy ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh C . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) . Khi thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất thì $\sin 2\alpha$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$. D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = x$, các cạnh còn lại của hình chóp đều bằng a . Để thể tích khối chóp lớn nhất thì giá trị x bằng

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. a .

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M, N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC) . Tính tổng $T = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AM^2}$ khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $T = \frac{13}{9}$. B. $T = 2$. C. $T = \frac{5}{4}$. D. $T = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Câu 18: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = x, CD = y$, tất cả các cạnh còn lại bằng 2. Khi thể tích tứ diện $ABCD$ là lớn nhất tính xy .

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{16}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD ($AN < AM$) sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC) . Khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của $\frac{1}{AN^2} + \frac{16}{AM^2}$ bằng

- A. $\frac{17}{4}$. B. 5. C. $\frac{5}{4}$. D. 2.

Câu 20: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N là hai điểm nằm trên hai cạnh SC, SD sao cho $\frac{SM}{SC} = \frac{1}{2}$ và $\frac{SN}{SD} = 2$, biết G là trọng tâm của tam giác SAB . Tỉ số thể tích

$\frac{V_{GMND}}{V_{S.ABCD}} = \frac{m}{n}$ (m, n là các số nguyên dương và $(m, n) = 1$). Giá trị của $m + n$ bằng

- A. 17. B. 19. C. 21. D. 7.

Câu 21: Cho tứ diện $ABCD$ có $DAB = CBD = 90^\circ$, $AB = a$, $AC = a\sqrt{5}$ và $ABC = 135^\circ$; Góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (BCD) bằng 30° . Thể tích của tứ diện $ABCD$ là

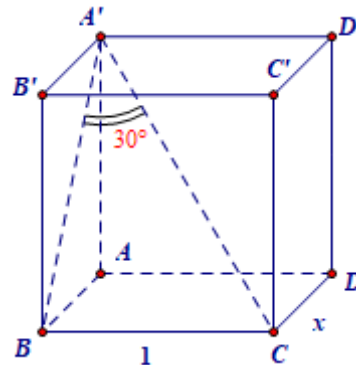
- A. $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$. B. $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. C. $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$. D. $\frac{a^3}{6}$.

Câu 22: Cho một cái hộp hình chữ nhật có kích thước ba cạnh lần lượt là 4cm , 6cm , 9cm như hình vẽ. Một con kiến ở vị trí A muốn đi đến vị trí B . Biết rằng con kiến chỉ có thể bò trên cạnh hay trên bề mặt của hình hộp đã cho. Gọi $x\text{cm}$ là quãng đường ngắn nhất con kiến đi từ A đến B . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $x \in (15; 16)$. B. $x \in (13; 14)$. C. $x \in (12; 13)$. D. $x \in (14; 15)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.C	3.C	4.D	5.A	6.D	7.C	8.B	9.A	10.C
11.B	12.D	13.DC	14.	15.D	16.A	17.C	18.C	19.B	20.B
21.D	22.B								

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1: Chọn C**

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $BC \perp (ABB'A')$.

Suy ra: $(A'C; (ABB'A')) = (A'C; A'B) = \angle BA'C = 30^\circ$

$\triangle A'BC$ vuông tại B nên $A'B = \frac{BC}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$.

$\triangle A'AB$ vuông tại A nên $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{3 - x^2}$.

Thể tích khối hộp: $V(x) = AB \cdot BC \cdot AA' = x\sqrt{3 - x^2}$ với $x \in (0; \sqrt{3})$.

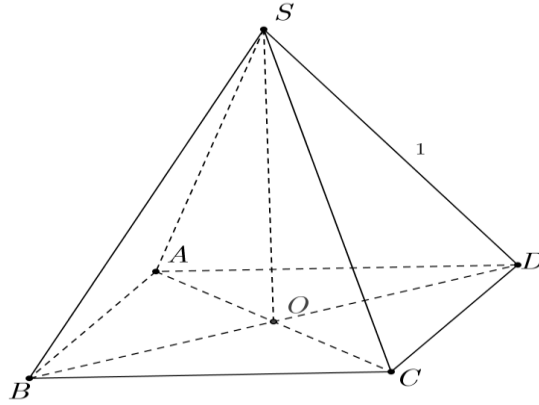
Có: $V'(x) = \sqrt{3 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{3 - x^2}} = \frac{3 - 2x^2}{\sqrt{3 - x^2}}$. Cho $V'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}, (x > 0)$.

Có bảng biến thiên:

x	0	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\sqrt{3}$	
$V'(x)$		+	0	-
$V(x)$	0	$\frac{3}{2}$	0	

Vậy $V_{\max} = \frac{3}{2}$ khi $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 2: Chọn C

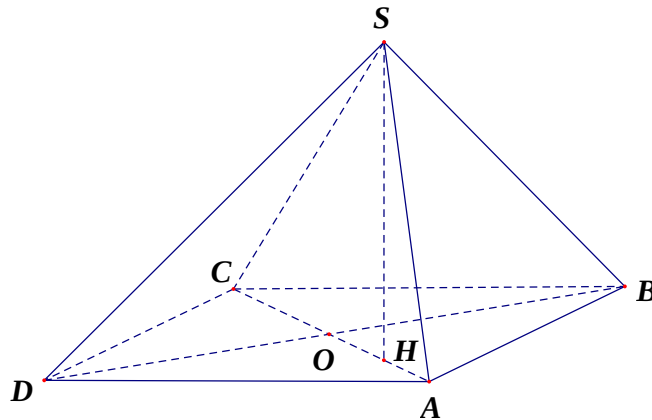


Gọi O là giao điểm của AC và $BD \Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD}$.

Đặt $AB = x \ (x > 0) \Rightarrow BD = x\sqrt{2} \Rightarrow OD = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SOD vuông tại $O \Rightarrow SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow x \in (0; \sqrt{2})$

Câu 3: Chọn D



Vì $SB = SC = SD = 2$ nên hình chiếu H của S lên $ABCD$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Mà tứ giác $ABCD$ có các cạnh bằng nhau nên tứ giác $ABCD$ là hình thoi, do đó $H \in AC$; $\triangle SBD$; $\triangle CBD$; $\triangle ABD$ có các cạnh tương ứng bằng nhau nên $SO = AO = CO \Rightarrow \triangle SAC$ vuông tại $S \Rightarrow AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = \sqrt{x^2 + 4}$.

$\triangle SAC$ vuông tại S , có đường cao SH nên $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SC^2} \Rightarrow SH = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

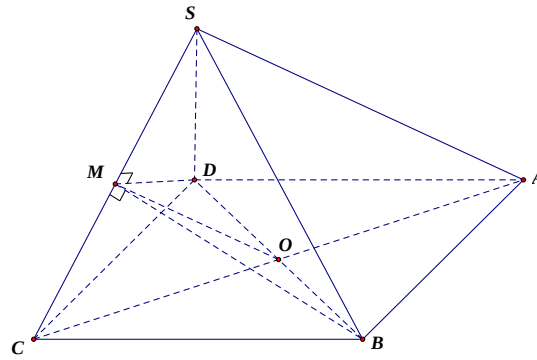
Lại có $OB^2 + OC^2 = BC^2 \Rightarrow OB^2 = BC^2 - \frac{AC^2}{4} = 4 - \frac{4+x^2}{4} = \frac{12-x^2}{4} \Rightarrow OB = \frac{\sqrt{12-x^2}}{2}$.

$S_{ABCD} = AC \cdot OB = \frac{1}{2} \sqrt{(x^2 + 4)(12 - x^2)}$.

Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot x \cdot \sqrt{12 - x^2} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 + 12 - x^2}{2} = 2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = 12 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \sqrt{6}$.

Cách 2.



Theo giả thiết ta có hai tam giác SBC , SCD là hai tam giác đều bằng nhau.

Gọi M là trung điểm của SC suy ra $\begin{cases} BM \perp MC \\ DM \perp MC \end{cases} \Rightarrow MC \perp (MBD)$.

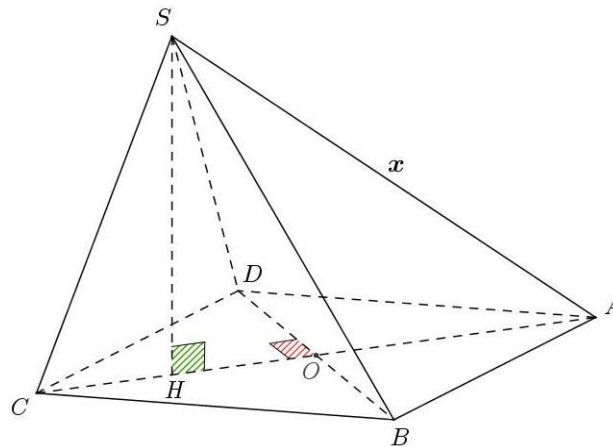
Ta có $V_{S.ABCD} = 2.V_{S.BCD} = 4.V_{C.MBD}$.

Ta lại có $V_{C.MBD} = \frac{1}{3}.MC.S_{\triangle MBD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} MB.MD.\sin BMD = \frac{1}{2} \sin BMD$,
 $(MC = 1, MB = MD = \sqrt{3})$.

Do đó để $V_{S.ABCD}$ lớn nhất $\Leftrightarrow V_{C.MBD}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin BMD = 1 \Leftrightarrow BMD = 90^\circ$.

Xét $\triangle MBD$ vuông tại M , khi đó $x = SA = 2.MO = BD = \sqrt{MD^2 + MB^2} = \sqrt{6}$.

Câu 4: Chọn D



Gọi O là tâm hình thoi $ABCD$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên AC

Ta có $\triangle ABD = \triangle CBD = \triangle SBD$ ($c - c - c$) $\Rightarrow SO = OA = OC = \frac{1}{2} AC$

Mà SO là trung tuyến của $\triangle SAC$ nên $\triangle SAC$ vuông tại S .

Lại có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (ABCD) \perp (SAC), (1)$

Và $(SAC) \cap (ABCD) = AC$; $SH \perp AC, (2)$.

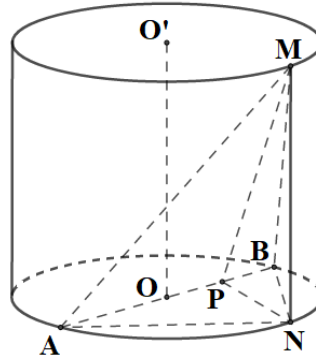
Từ (1) và (2) ta có $SH \perp (ABCD)$.

Trong $\triangle SAC$ vuông tại S có $AC = \sqrt{x^2 + 4}$; $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4} \Rightarrow SH = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

Trong $\triangle OAB$ vuông tại O có $OB = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{3 - \frac{x^2}{4}}$.

$$\begin{aligned} \text{Thể tích hình chóp là } V_{S.ABCD} &= \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot 2 \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot AC \cdot OB \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} \cdot \sqrt{x^2+4} \cdot \sqrt{3-\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{3} \sqrt{x^2(12-x^2)} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2+12-x^2}{2} = 2. \\ V_{S.ABCD} &\text{ lớn nhất bằng } 2 \text{ khi và chỉ khi } x^2 = 12 - x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Câu 5: Chọn A



Gọi N là hình chiếu của M trên $(O) \Rightarrow MN = R\sqrt{3}$.

Gọi P là hình chiếu của N trên AB , khi M di chuyển trên (O) thì $0 \leq NP \leq R$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} MN \perp (ABN) \\ NP \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MN \perp AB \\ NP \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (MNP) \Rightarrow AB \perp MP.$$

$$\Rightarrow S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} AB \cdot MP = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot MP = R \cdot MP.$$

Mặt khác, tam giác MNP vuông tại $N \Rightarrow MP = \sqrt{MN^2 + NP^2} \leq \sqrt{3R^2 + R^2} = 2R$.

$\Rightarrow S_{\triangle MAB} = R \cdot MP \leq R \cdot 2R = 2R^2$. Dấu “=” xảy ra khi $NP = R$ hay khi $MO' \perp AB$.

Vậy diện tích tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất bằng $2R^2$.

Câu 6: Chọn D

$$\text{Thể tích của bể cá: } V = 3ab = 72 \text{ dm}^3 \Leftrightarrow b = \frac{72}{3a} = \frac{24}{a}, \text{ với } a, b > 0.$$

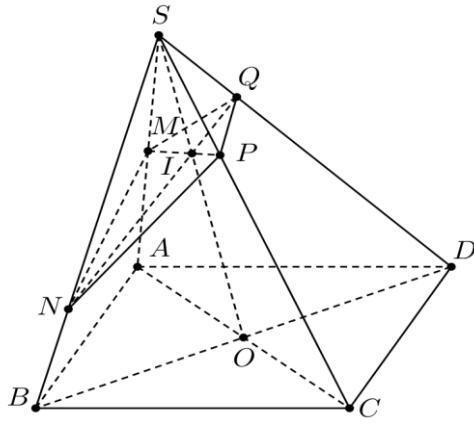
Diện tích kính để làm bể cá như hình vẽ:

$$S = 3.3a + 2.3b + ab = 9a + 6 \cdot \frac{24}{a} + a \cdot \frac{24}{a} = 9a + \frac{144}{a} + 24 \geq 2\sqrt{9a \cdot \frac{144}{a}} + 24 \Leftrightarrow S \geq 96.$$

$$S = 96 \Leftrightarrow 9a = \frac{144}{a} \Leftrightarrow a = 4 \Rightarrow b = 6.$$

Vậy để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất thì $a = 4 \text{ dm}$; $b = 6 \text{ dm}$.

Câu 7: Chọn C



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$, gọi $I = MP \cap AC$. Lấy điểm $N \in SB$, $NI \cap SD = Q$.

Do đáy $ABCD$ là hình bình hành nên ta chứng minh được hệ thức sau:

$$\frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SP} = \frac{SB}{SQ} + \frac{SD}{SN}.$$

Đặt $x = \frac{SB}{SQ}$, $y = \frac{SD}{SN}$ với $x > 0; y > 0$. Theo bài ta được $x + y = 2 + 3 = 5$.

Theo bài, ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x^2 + 4y^2$ với $x > 0, y > 0$ và $x + y = 5$.

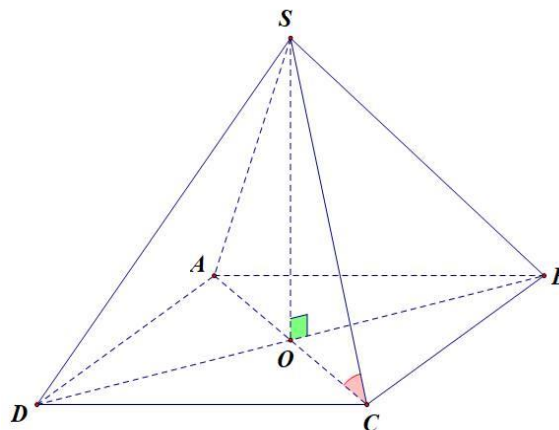
Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta được:

$$5^2 = \left(1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 2y\right)^2 \leq \left(1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)(x^2 + 4y^2) \text{ suy ra } x^2 + 4y^2 \geq 20. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{2y}{\frac{1}{2}} \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 20 đạt được khi $x = 4$, $y = 1$ hay $\frac{SB}{SN} = 4$.

Câu 8: Chọn B



Đặt $SC = a$ với $a > 0$. Ta có: $\begin{cases} SO \perp (ABCD) \\ SC \cap (ABCD) = C \end{cases}$ suy ra $SCO = \alpha$.

Mặt khác: $OC = a \cdot \cos \alpha$; $SO = a \cdot \sin \alpha$.

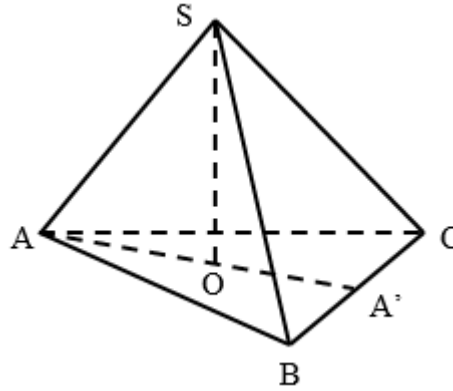
$$AC = 2OC = 2a \cdot \cos \alpha; AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2} \cdot \cos \alpha; S_{ABCD} = AB^2 = 2a^2 \cdot \cos^2 \alpha.$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{2}{3} a^3 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{2}{3} a^3 \cdot \sin \alpha \cdot (1 - \sin^2 \alpha)$$

Xét hàm $y = t(1 - t^2)$ với $\begin{cases} t = \sin \alpha \\ 0 < t < 1 \end{cases}$

Lập bảng biến thiên ta tìm được $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ thì hàm số y đạt giá trị lớn nhất.

Câu 9: Chọn A



Gọi O là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) .

Vì $SA = SB = SC$ nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Tam giác ABC cân tại A . Gọi A' là trung điểm của BC . Khi đó AA' là đường trung trực của tam giác ABC nên điểm O nằm trên đường thẳng AA' .

$$\text{Ta có: } AA' = \sqrt{AB^2 - BA'^2} = \sqrt{a^2 - x^2} \text{ nên } S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AA' = \frac{1}{2} 2x \sqrt{a^2 - x^2} = x \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$\text{Lại có: } S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} \Rightarrow OA = R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{ABC}} = \frac{a^2 \cdot 2x}{4x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

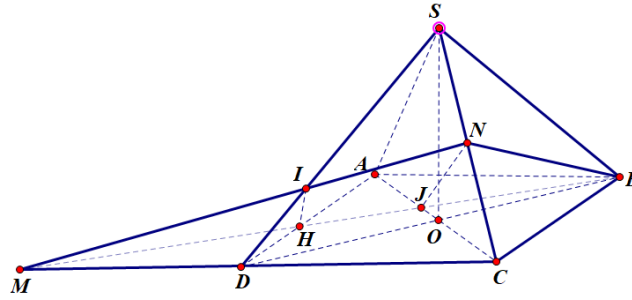
$$\text{Trong tam giác vuông } SAO, \text{ ta có: } SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{4(a^2 - x^2)}} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{3a^2 - 4x^2}{(a^2 - x^2)}}.$$

$$\text{Thể tích } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \frac{a}{2} \sqrt{\frac{3a^2 - 4x^2}{a^2 - x^2}} \cdot x \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a}{12} \cdot 2x \sqrt{3a^2 - 4x^2}.$$

$$\text{Mặt khác: } 2x \sqrt{3a^2 - 4x^2} \leq \frac{4x^2 + 3a^2 - 4x^2}{2} = \frac{3a^2}{2}.$$

Do đó: $V_{S.ABC} \leq \frac{a}{12} \cdot \frac{3}{2} a^2 = \frac{a^3}{8}$. Vậy $V_{max} = \frac{a^3}{8}$ khi $2x = \sqrt{3a^2 - 4x^2} \Leftrightarrow x = a\sqrt{\frac{3}{8}}$.

Câu 10: Chọn C



Áp dụng tỉ số thể tích cho khối chóp $M.CNB$ ta có

$$\frac{V_{MDIH}}{V_{MCNB}} = \frac{MD}{MC} \cdot \frac{MI}{MN} \cdot \frac{MH}{MB} = \frac{1}{4} \cdot \frac{MI}{MN}$$

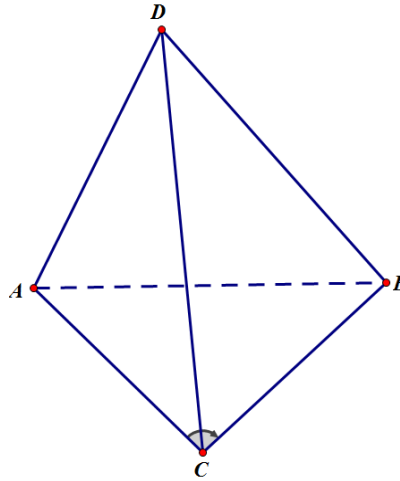
Định lý menelaus cho tam giác MNC với cát tuyến DIS ta có:

$$\frac{SN}{SC} \cdot \frac{CD}{DM} \cdot \frac{MI}{IN} = 1 \Leftrightarrow \frac{IN}{IM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MI}{MN} = \frac{2}{3}. \text{ Vậy } \frac{V_{MDIH}}{V_{MCNB}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow V_2 = \frac{5}{6} V_{MCNB}$$

$$\text{Mà } V_{MCNB} = \frac{1}{3} d_{(N;(MBC))} \cdot S_{\Delta MBC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot SO \cdot DC \cdot BC = \frac{1}{2} V_{SABCD}$$

$$V_2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} V_{SABCD} = \frac{5}{12} V_{SABCD} \Rightarrow V_1 = \frac{7}{12} V_{SABCD}. \text{ Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}.$$

Câu 11: Chọn B



$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot d(D, (ABC)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB \cdot \sin 45^\circ \cdot d(D, (ABC)) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot CA \cdot CB \cdot d(D, (ABC)) \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{CA \cdot CB \cdot AD}{\sqrt{2}} \quad (1). \end{aligned}$$

$$\text{Áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số dương } AD, BC, \frac{AC}{\sqrt{2}}, \text{ ta có } \frac{AC}{\sqrt{2}} \cdot BC \cdot AD \leq \left(\frac{\frac{AC}{\sqrt{2}} + BC + AD}{3} \right)^3.$$

$$\text{Do đó, } V \leq \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{\frac{AC}{\sqrt{2}} + BC + AD}{3} \right)^3 = \frac{1}{6} \quad (2).$$

Mặt khác ta có $V = \frac{1}{6}$, do đó để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì từ và, đẳng thức phải xảy ra, tức

$$\text{là } \begin{cases} DA \perp (ABC) \\ \frac{AC}{\sqrt{2}} = BC = AD = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CD = \sqrt{AC^2 + DA^2} \\ BC = 1, AD = 1, AC = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow CD = \sqrt{3}.$$

Câu 12: Chọn D

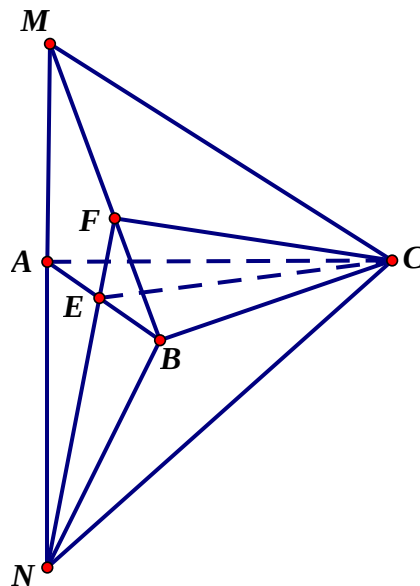
Ta có: $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ ($a, b, c > 0$)

$$(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1; M(9;1;1) \in (P) \Rightarrow \frac{9}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$$

$$1 = \frac{9}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{9}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} \Rightarrow V_{OABC} = abc \geq 243.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = 27, b = c = 3$.

Câu 13: Chọn D



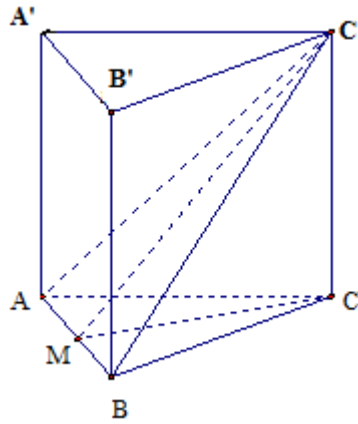
Do $\begin{cases} MB \perp FC \\ MB \perp EC \end{cases} \Rightarrow MB \perp (EFC) \Rightarrow FB \perp EF$. Xét các tam giác vuông: $\triangle NAE, \triangle BFE, \triangle BAM$.

$$\text{Ta có } \triangle NAE \sim \triangle BFE \sim \triangle BAM \Rightarrow \frac{NA}{BA} = \frac{AE}{AM} \Rightarrow AM \cdot AN = AE \cdot BA = 2.$$

$$V_{BCMN} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot (AM + AN) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} \cdot (AM + AN) \geq \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{AM \cdot AN} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Vậy } \min V_{BCMN} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ khi } AM = AN = \sqrt{2} \text{ hay } x = \sqrt{2}.$$

Câu 14: Chọn C



Gọi M là trung điểm của AB . Khi đó $AB \perp (MCC')$

$\Rightarrow$ Góc giữa (ABC') và (ABC) là $CMC' = \alpha$. Đặt $AB = x, x > 0$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}, CC' = CM \cdot \tan \alpha = \frac{x\sqrt{3}}{2} \tan \alpha \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} \tan \alpha = \frac{3x^3}{8} \tan \alpha$$

$$\text{Ta lại có } S_{ABC} = S_{ABC'} \cos \alpha = 3\sqrt{3} \cos \alpha \Rightarrow \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3} \cos \alpha \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3 \cos \alpha}$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{8} \cdot 24 \cos \alpha \sqrt{3 \cos \alpha} \cdot \tan \alpha = 9\sqrt{3} \sin \alpha \sqrt{\cos \alpha}$$

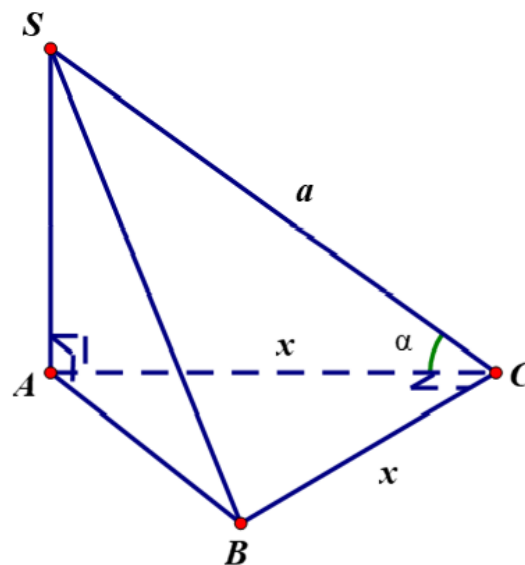
$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = 9\sqrt{3} \cdot \sqrt{\cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}$$

Xét hàm số $f(t) = t(1 - t^2) = t - t^3, t \in (0; 1)$. Ta có $f'(t) = 1 - 3t^2$

$$\Rightarrow \text{Hàm số đạt giá trị lớn nhất khi } t = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ và } \max f(t) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\text{Khi đó } \max V_{ABC.A'B'C'} = 6 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{2}.$$

Câu 15: Chọn D



$$\text{Đặt } AC = BC = x, SA = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Ta có thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\sqrt{a^2 - x^2}.\frac{1}{2}.x^2 = \frac{1}{6}\sqrt{a^2x^4 - x^6}$.

Xét hàm số $f(x) = a^2x^4 - x^6$ với $0 < x < a$. $f'(x) = 4a^2x^3 - 6x^5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{a\sqrt{6}}{3} \end{cases}$.

x	0	$\frac{a\sqrt{6}}{3}$	a
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

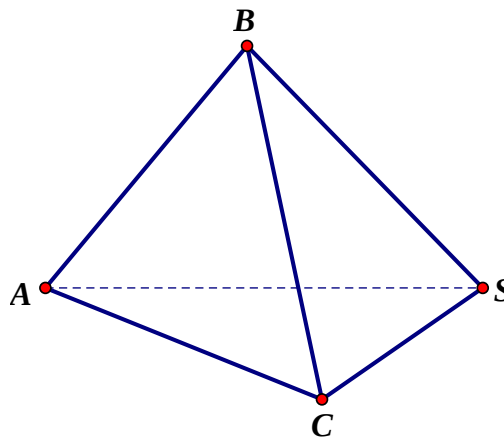
Dựa vào bảng biến thiên, ta có thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi

$x = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Khi đó $\sin \alpha = \frac{SA}{SC} = \frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{\frac{a}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos \alpha = \frac{AC}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{\frac{a}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 16: Chọn A

Cách 1:



Đặt $\alpha = \angle ABS$; $\beta = \angle ABC = 60^\circ$; $\gamma = \angle CBS = 60^\circ$.

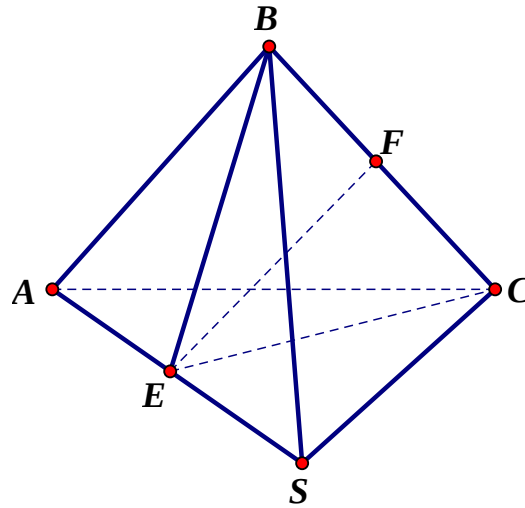
Ta có

$$V_{B.SAC} = \frac{BA \cdot BC \cdot BS}{6} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} = \frac{a^3}{6} \sqrt{\frac{1}{2} - \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha}$$

$V_{B.SAC}$ đạt GTLN khi $\frac{1}{2} - \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha$ đạt GTLN $\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{4}$.

Với $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ ta được $x = \sqrt{BA^2 + BS^2 - 2BA \cdot BS \cdot \cos \alpha} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Cách 2:



Gọi E, F lần lượt là trung điểm SA và BC .

Vì $\triangle BAS$ và $\triangle CAS$ lần lượt cân tại B và C nên $\begin{cases} BE \perp SA \\ CE \perp SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BEC)$

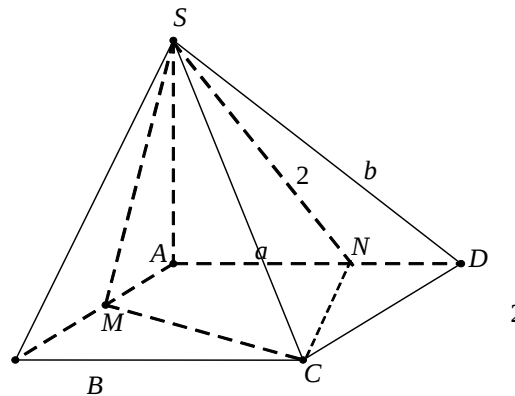
$$\text{Ta có: } BE = CE = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}}; EF = \frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2}$$

$$\text{Suy ra } S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} BC \cdot EF = \frac{a\sqrt{3a^2 - x^2}}{4}.$$

$$\text{Vậy } V_{SABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\triangle BEC} = \frac{1}{3} x \frac{a\sqrt{3a^2 - x^2}}{4} \leq \frac{a}{12} \frac{x^2 + (3a^2 - x^2)}{2} = \frac{a^3}{8}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } x = \sqrt{3a^2 - x^2} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Câu 17: Chọn C



Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ với:

$$A(0;0;0), S(0;0;2), B(2;0;0), C(2;2;0), D(0;2;0), M(a;0;0), N(0;b;0) \quad (a, b \in [0;2])$$

$$\overrightarrow{AC} = (2;2;0), \overrightarrow{AM} = (a;0;0), \overrightarrow{AN} = (0;b;0)$$

$$\overrightarrow{SC} = (2;2;-2), \overrightarrow{SM} = (a;0;-2), \overrightarrow{SN} = (0;b;-2)$$

$$[\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SC}] = (4;2a-4;2a) \Rightarrow \vec{n}_1 = (2;a-2;a) \text{ là VTPT của mp}(SCM)$$

$$[\overrightarrow{SN}, \overrightarrow{SC}] = (4-2b;-4;-2b) \Rightarrow \vec{n}_2 = (2-b;-2;-b) \text{ là VTPT của mp}(SCN)$$

Chủ đề 02: Cực trị của hàm số

$$(\overrightarrow{SCM}) \perp (\overrightarrow{SCN}) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow 2(2-b) - 2(a-2) - ab = 0 \Leftrightarrow 8 - 2b - 2a - ab = 0$$

$$\Leftrightarrow 8 - 2a - b(2+a) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{8-2a}{a+2}$$

$$\text{Mà: } 0 \leq b = \frac{8-2a}{a+2} \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8-2a}{a+2} \geq 0 \\ \frac{8-2a}{a+2} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-2; 4] \\ \frac{4-4a}{a+2} \leq 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -2) \cup [1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow a \in [1; 4]$$

Do đó: $a \in [1; 2]$

$$S_{AMCN} = S_{\triangle AMC} + S_{\triangle MCN} = \frac{1}{2} \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC} \right] + \frac{1}{2} \left[\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2a + \frac{1}{2} \cdot 2b = a + b = a + \frac{8-2a}{a+2} = \frac{a^2+8}{a+2}$$

Xét hàm số $f(a) = \frac{a^2+8}{a+2}$ trên $[1; 2]$

$$f'(a) = \frac{a^2+4a-8}{(a+2)^2}; f'(a) = 0 \Leftrightarrow a^2+4a-8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2-2\sqrt{3} \notin [1; 2] \\ a = -2+2\sqrt{3} \end{cases}$$

Ta có: $f(1) = 3$ khi $a = 1, b = 2$; $f(2) = 3$ khi $a = 2, b = 1$

$$f(-2+2\sqrt{3}) = -4+4\sqrt{3} \text{ khi } a = -2+2\sqrt{3}, b = -2+2\sqrt{3}$$

$$\text{Khi đó: } \max_{a \in [0; 2]} f(a) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, b = 1 \\ a = 1, b = 2 \end{cases}$$

$$V_{S.AMCN} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{AMCN} \text{ đạt giá trị lớn nhất} \Leftrightarrow S_{AMCN} \text{ đạt giá trị lớn nhất} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, b = 1 \\ a = 1, b = 2 \end{cases}$$

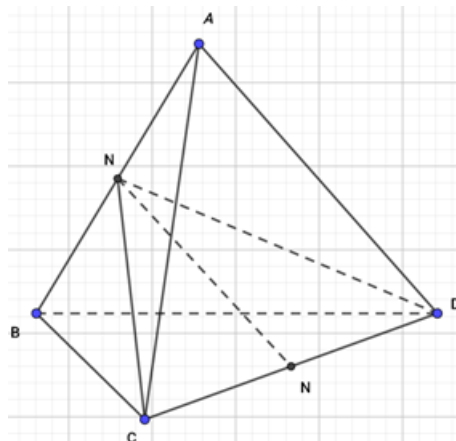
$$a = 2, b = 1. \overrightarrow{AM} = (2; 0; 0) \Rightarrow AM = 2, \overrightarrow{AN} = (0; 1; 0) \Rightarrow AN = 1$$

$$\text{Vậy: } T = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}.$$

$$a = 1, b = 2. \overrightarrow{AM} = (1; 0; 0) \Rightarrow AM = 1, \overrightarrow{AN} = (0; 2; 0) \Rightarrow AN = 2$$

$$\text{Vậy: } T = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AM^2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}. \text{ Kết luận: } T = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{5}{4}.$$

Câu 18: Chọn C



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD .

Tam giác ADB, CAB là hai tam giác cân cạnh đáy AB nên $DM \perp AB$ và $CM \perp AB$. Suy ra $AB \perp (MCD)$.

$$V_{ABCD} = V_{B.MCD} + V_{A.MCD} = \frac{1}{3} \cdot BM \cdot S_{MCD} + \frac{1}{3} \cdot AM \cdot S_{MCD} = \frac{x}{3} \cdot S_{MCD}.$$

Tam giác $\triangle ABC = \triangle ABD$ (c.c.c) nên $CM = DM \Rightarrow MN \perp CD$.

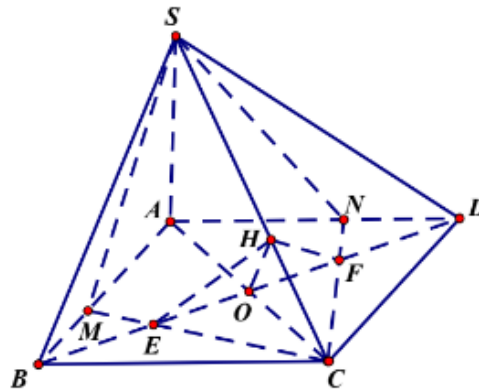
$$\begin{aligned} S_{MCD} &= \frac{1}{2} \cdot CD \cdot MN = \frac{1}{2} y \cdot \sqrt{MC^2 - CN^2} = \frac{1}{2} y \cdot \sqrt{(BC^2 - BM^2) - CN^2} = \frac{1}{2} y \sqrt{4 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}} \\ &= \frac{1}{4} y \sqrt{16 - (x^2 + y^2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{xy}{12} \sqrt{16 - (x^2 + y^2)} \leq \frac{xy}{12} \sqrt{16 - 2xy} = \frac{1}{12} \sqrt{xy \cdot xy \cdot (16 - 2xy)} \\ &\leq \frac{1}{12} \sqrt{\left(\frac{xy + xy + (16 - 2xy)}{3} \right)^3} = \frac{1}{12} \sqrt{\left(\frac{16}{3} \right)^3}. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} x = y \\ xy = 16 - 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy = \frac{16}{3} \end{cases}.$$

Vậy thể tích $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất khi $xy = \frac{16}{3}$.

Câu 19: Chọn B



Cách 1: Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $D(0;2;0)$, $S(0;0;2)$.

Suy ra $C(2;2;0)$. Đặt $AM = x$, $AN = y$, $x, y \in [0;2]$, $x > y$; suy ra $M(x;0;0)$, $N(0;y;0)$.

$$\overrightarrow{SM} = (x;0;-2), \overrightarrow{SC} = (2;2;-2), \overrightarrow{SN} = (0;y;-2).$$

$$\Rightarrow \vec{n}_1 = [\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SC}] = (4; 2x - 4; 2x), \vec{n}_2 = [\overrightarrow{SN}, \overrightarrow{SC}] = (4 - 2y; -4; -2y).$$

Do $(SMC) \perp (SNC)$ nên $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 4(4 - 4y) - 4(2x - 4) - 4xy = 0 \Leftrightarrow xy + 2(x + y) = 8$.

$$\Leftrightarrow y = \frac{8 - 2x}{x + 2}, \text{ do } y \leq 2 \text{ nên } \frac{8 - 2x}{x + 2} \leq 2 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

$$S_{AMCN} = S_{ABCD} - S_{BMC} - S_{DNC} = 4 - (2 - x) - (2 - y) = x + y.$$

$$\text{Do đó } V_{S.AMCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{AMCN} = \frac{2}{3} (x + y) = \frac{2}{3} \left(x + \frac{8 - 2x}{x + 2} \right) = \frac{2}{3} \frac{x^2 + 8}{x + 2}.$$

Xét $f(x) = \frac{2x^2 + 8}{3x + 2}$ với $x \in [1; 2]$, $f'(x) = \frac{2x^2 + 4x - 8}{3(x + 2)^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 + 2\sqrt{3}; x = -2 - 2\sqrt{3}$.

Lập BBT ta suy ra $\max_{[1;2]} f(x) = f(1) = f(2) = 2$.

Vậy $\max V_{S.AMCN} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \text{ (do } x > y) \Rightarrow \frac{16}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{16}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 5$.

Cách 2: Đặt $AM = x, AN = y, x, y \in [0; 2], x > y$.

Gọi $O = AC \cap DB; E = BD \cap CM; F = BD \cap CN$.

H là hình chiếu vuông góc của O trên SC , khi đó: $HO = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ta có: $\begin{cases} SC \perp OH \\ SC \perp BD \end{cases} \Rightarrow SC \perp (HBD) \Rightarrow \begin{cases} SC \perp HE \\ SC \perp HF \end{cases}$.

Do đó góc giữa (SCM) và (SCN) bằng góc giữa HE và HF . Suy ra $HE \perp HF$.

Mặt khác $V_{S.AMCN} = \frac{1}{3} SA.S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x + y)$.

Tính OE, OF :

Ta có: $x > 0, y > 0$ và nếu $x \neq 2, y \neq 2$ thì gọi K là trung điểm của AM , khi đó:

$\frac{OE}{EB} = \frac{KM}{MB} = \frac{x}{4 - 2x} \Rightarrow \frac{OE}{x} = \frac{EB}{4 - 2x} = \frac{OB}{4 - x} \Rightarrow OE = \frac{x\sqrt{2}}{4 - x}$.

Tương tự: $OF = \frac{y\sqrt{2}}{4 - y}$. Mà $OE.OF = OH^2 \Leftrightarrow (x + 2)(y + 2) = 12$.

Nếu $x = 2$ hoặc $y = 2$ thì ta cũng có $OE.OF = OH^2 \Leftrightarrow (x + 2)(y + 2) = 12$.

Tóm lại: $(x + 2)(y + 2) = 12$.

Suy ra: $V_{S.AMCN} = \frac{1}{3} SA.S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x + y) = \frac{2}{3}[(x + 2) + (y + 2) - 4] = \frac{2}{3}\left[(x + 2) + \frac{12}{x + 2} - 4\right]$.

Khảo sát hàm số ta được: $\max V_{S.AMCN} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \text{ (do } x > y)$

$\Rightarrow \frac{16}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{16}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 5$.

Cách 3. Đặt $AM = m, AN = n$ ($0 \leq n < m \leq 2$)

Dựng $AP \perp CM, AQ \perp CN (P \in CM, Q \in CN)$.

Ta có $\frac{AP}{BC} = \frac{AM}{CM} \Rightarrow AP = \frac{2m}{\sqrt{4 + (2 - m)^2}}$.

$$\text{Tương tự } AQ = \frac{2n}{\sqrt{4+(2-n)^2}}.$$

Trong mặt phẳng (SAP) dựng $AL \perp SP (L \in SP), AV \perp SQ (V \in SQ)$. Mặt phẳng (ALV) cắt SC tại H.

Dựa vào điều kiện bài toán dễ dàng chứng minh được tứ giác ALHV là hình chữ nhật và $AH \perp SC$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{3}{8} \Rightarrow AH^2 = \frac{8}{3}.$$

$$\frac{1}{AL^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SP^2} = \frac{m^2 - 2m + 4}{2m^2} \Rightarrow AL^2 = \frac{2m^2}{m^2 - 2m + 4} \text{ và } AV^2 = \frac{2n^2}{n^2 - 2n + 4}.$$

Do hình chữ nhật nên

$$AV^2 + AL^2 = AH^2 \Rightarrow \frac{2n^2}{n^2 - 2n + 4} + \frac{2m^2}{m^2 - 2m + 4} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow (mn - m - n + 4)(mn + 2(m + n) - 8) = 0$$

Do $mn - m - n + 4 = mn + 2 - m + 2 - n > 0$ nên $mn + 2(m + n) = 8$.

Do $0 < n < m \leq 2 \Rightarrow (m - 2)(n - 2) \geq 0 \Leftrightarrow mn - 2(m + n) + 4 \geq 0 \Rightarrow 12 - 4(m + n) \geq 0 \Rightarrow m + n \leq 3$.

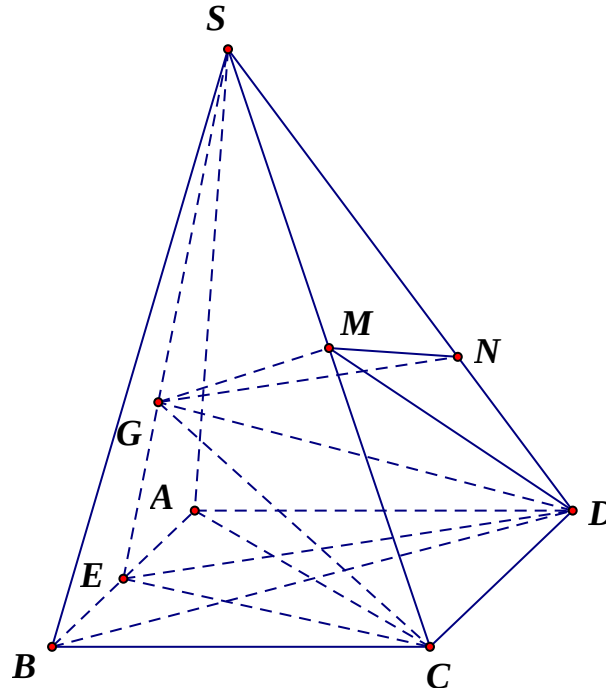
$$\text{Ta có: } S_{ANCM} = S_{ABCD} - S_{BMC} - S_{DNC} = 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 - m) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 - n) = m + n.$$

$$\text{Suy ra } V_{SAMCN} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{AMCN} = \frac{2}{3} (m + n) \leq 2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = 2, n = 1$.

$$\text{Khi đó } \frac{1}{AN^2} + \frac{16}{AM^2} = 5.$$

Câu 20: Chọn B



$$\frac{V_{S.GMN}}{V_{S.GMD}} = \frac{SN}{SD} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{GMND} = \frac{1}{3} V_{S.GMD}.$$

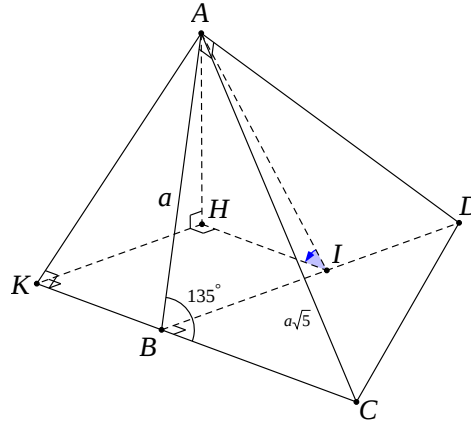
$$\frac{V_{S.GMD}}{V_{S.GCD}} = \frac{SM}{SC} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.GMD} = \frac{1}{2} V_{S.GCD}$$

$$\frac{V_{S.GCD}}{V_{S.ECD}} = \frac{SG}{SE} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Suy ra } V_{GMND} = \frac{1}{3} V_{S.GMD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V_{S.ECD} = \frac{1}{9} V_{S.ECD} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{18} V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_{S.GMND}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{18}. \text{ Do đó } m = 1; n = 18 \Rightarrow m + n = 19.$$

Câu 21: Chọn D



Trong tam giác ABC có $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 135^\circ \Leftrightarrow BC^2 + BC \cdot a\sqrt{2} - 4a^2 = 0$
 $\Rightarrow BC = a\sqrt{2}.$

Gọi K là hình chiếu của A lên BC ta có $\angle ABC = 135^\circ$ nên $\angle ABK = 45^\circ$. Suy ra tam giác AKB vuông cân tại K . Do đó $AK = BK = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

Gọi I, H lần lượt là hình chiếu của A lên BD và $(ABCD)$, ta có $KBIH$ là hình chữ nhật.

Khi đó $((ABD); (BCD)) = \angle AIH = 30^\circ$. Suy ra $AH = HI \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$

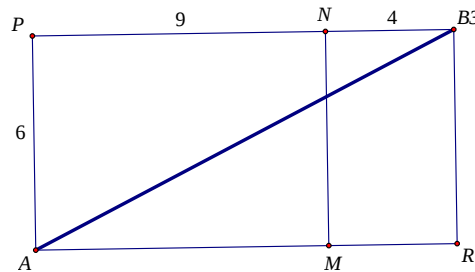
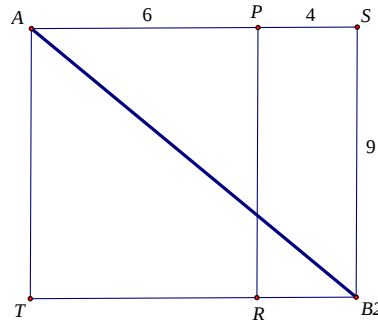
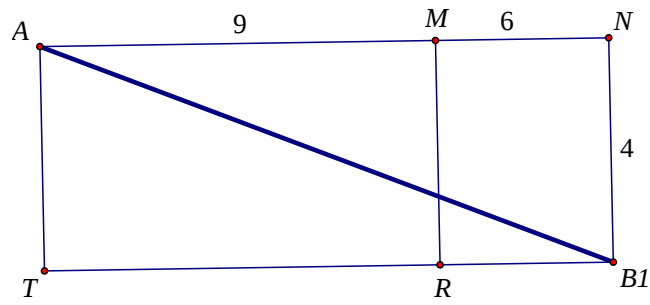
Từ đó ta tính được $BI = KH = \sqrt{AK^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$

Tam giác ABD vuông tại A , đường cao AI nên $AB^2 = BI \cdot BD \Rightarrow BD = \frac{AB^2}{BI} = a\sqrt{3}.$

Vậy thể tích khối chóp $ABCD$ là $V = \frac{1}{6} AH \cdot BD \cdot BC = \frac{a^3}{6}$

Câu 22: Chọn B

Vì con kiến bò theo mặt của hình hộp từ A đến B nên khi ta vẽ hình khai triển của hình hộp chữ nhật và trải phẳng như hình vẽ thì xem như con kiến bò trên một mặt phẳng.



Khi đó B sẽ được tách thành 3 vị trí là B_1 ; B_2 và B_3 . Quãng đường ngắn nhất sẽ là một trong ba đoạn thẳng AB_1 ; AB_2 hay AB_3 . Ta có:

$$AB_1 = \sqrt{15^2 + 4^2} = \sqrt{241}.$$

$$AB_2 = \sqrt{9^2 + 10^2} = \sqrt{181} \approx 13,45.$$

$$AB_3 = \sqrt{6^2 + 13^2} = \sqrt{205}.$$

Do đó quãng đường ngắn nhất là $AB_2 \approx 13,45 \in (13; 14)$.

