

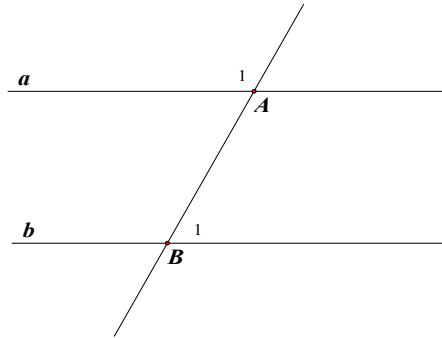
CD14: PHẦN HÌNH HỌC

Dạng toán: Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau, so sánh góc

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 - 2022)

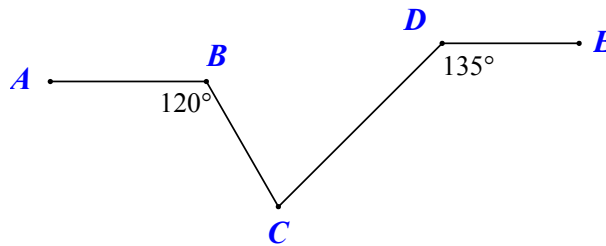
Cho $a \parallel b$ và $\widehat{A_1} = 2\widehat{B_1}$ (hình vẽ bên). Số đo $\widehat{B_1}$ bằng



- A. 30° . B. 60° . C. 90° . D. 45° .

Câu 2. (HSG 7 huyện Tam Nông, 2022 - 2023)

Cho hình vẽ $AB \parallel DE$. Số đo $\widehat{BCD}$ bằng



- A. 75° . B. 85° . C. 45° . D. 65° .

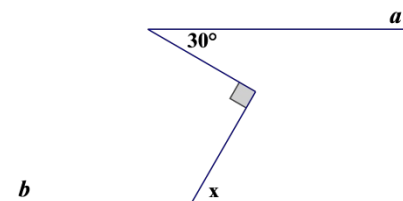
Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 - 2022; huyện Tân An 2017 - 2018; huyện Lâm Thao 2016 - 2017)

Cho $\widehat{xOy} = 50^\circ$, điểm A nằm trên Oy. Qua A vẽ tia Am. Để Am song song với Ox thì số đo của $\widehat{OAm}$ là:

- A. 50° . B. 130° . C. 50° và 130° . D. 80° .

Câu 4. (HSG 7 huyện Thảo Lâm, 2022 - 2023)

Cho $a \parallel b$ như hình vẽ bên. Số đo góc x bằng:



- A. 150° . B. 90° . C. 60° . D. 30° .

Câu 5. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 – 2022)

Cho $\triangle ABC$ có $\angle A = 40^\circ$; $\angle B - \angle C = 20^\circ$ trên tia đối của AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Số đo $\angle BE$ là:

- A. 80° . B. 100° . C. 90° . D. 120° .

Câu 6. (HSG 7 huyện Thảo Lâm, 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Trên cạnh BC lấy điểm 2 điểm D và E sao cho $BD = BA$; $CE = CA$. Khi đó $\angle DAE$ có số đo là.

- A. 20° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .

Câu 7. (HSG 7 huyện Sơn Động, 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $\angle B = 80^\circ$, $\angle A = 36^\circ$. Tia phân giác $\angle BAC$ cắt BC tại D . Số đo $\angle ADC$ là

- A. 90° . B. 88° . C. 82° . D. 98° .

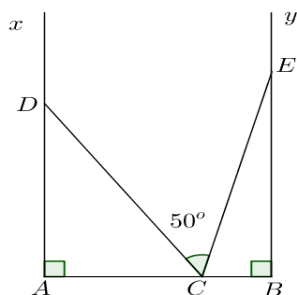
Câu 8. (HSG 7 huyện Tam Nông, 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC . Hai tia phân giác của $\angle B$ và $\angle C$ cắt nhau tại I . Nếu $\angle BIC = 120^\circ$ thì số đo $\angle BAC$ bằng.

- A. 120° . B. 100° . C. 90° . D. 60° .

Câu 9. (HSG 7 Tam Nông, Phú Thọ 2021-2022)

Cho hình vẽ. Biết hai tia Ax, By vuông góc với AB . Trên hai tia Ax, By và đoạn AB lần lượt lấy các điểm D, E, C sao cho $\angle BCE = 50^\circ$.



Khi đó

- A. $\angle ADC + \angle EBC = 90^\circ$. B. $\angle ADC + \angle EBC = 50^\circ$.
C. $\angle ADC + \angle EBC = 100^\circ$. D. $\angle ADC + \angle EBC = 80^\circ$.

Câu 10. (HSG 7 huyện Tam Nông, Phú Thọ 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC cân tại A , $\angle A = 20^\circ$. Vẽ tam giác đều DBC (D nằm trong tam giác ABC). Tia phân giác $\angle ABD$ cắt AC tại M . Số đo góc BDM là

- A. 140° . B. 150° . C. 160° . D. 170° .

Câu 11. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2018 – 2019)

Cho tam giác ABC cân tại A , $\angle A = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Số đo của góc BDC là:

- A. 50° . B. 70° . C. 30° . D. 80° .

Câu 12. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC cân tại A , $\angle A = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $BD = BC$. Số đo của góc BDC là:

- A. 50° B. 70° C. 30° D. 80°

Câu 13. (HSG 7 Tam Nông, Phú Thọ 2021-2022)

Cho tam giác ABC có $\angle A = 2\angle B + 2\angle C$. Các phân giác trong hai góc B và C cắt nhau tại I . Số đo góc BIC là

- A. 150° B. 155° C. 160° D. 120°

Câu 14. (HSG 7 trường THCS Phan Đình Phùng 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại B , $AB = 6$, $\angle A = 30^\circ$. Phân giác góc C cắt AB tại D . Khi đó độ dài đoạn thẳng BD và AD lần lượt là:

- A. 2; 4 B. 3; 3 C. 4; 2 D. 1; 5

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Nghi Xuân 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $\angle BAC = 60^\circ$. Tia phân giác của góc B cắt AC ở D . Tia phân giác của góc C cắt AB ở E ; BD và CE cắt nhau tại M . Tính $\angle EMD$?

Câu 2. (HSG 7 huyện Hoằng Hóa 2017 - 2018)

Cho tam giác đều ABC . M là một điểm nằm trong tam giác sao cho $MA : MB : MC = 3 : 4 : 5$. Tính số đo góc AMB .

Câu 3. (HSG 7 huyện Như Xuân, 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC có $\angle BAC = \angle BCA = 80^\circ$. Ở miền trong của tam giác vẽ hai tia Ax và Cy cắt BC, BA lần lượt tại D và E . Cho biết $\angle CAD = 60^\circ$, $\angle ECA = 50^\circ$. Tính số đo $\angle ADE$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Diễn Châu 2022 - 2023; huyện Phù Ninh 2018 - 2019; huyện Nam Sách 2017 - 2018; trường Tân Lạc; huyện Ngọc Lặc 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC có $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 120^\circ$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2CB$. Tính $\angle ADB$?

Câu 5. (HSG 7 huyện Đông Hưng; huyện Vũ Thư 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $\angle BAC = 15^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$, trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2CB$. Tính số đo $\angle ADC$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Kinh Môn 2022 - 2023; trường Ngô Gia Tự 2017 - 2018; trường Nguyễn Du, huyện Nga Sơn 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC có $AB = AC$, $\angle A = 100^\circ$. Điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho $\angle MBC = 10^\circ$, $\angle MCB = 20^\circ$. Tính số đo góc $\angle AMB$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2017- 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao điểm của BE và CD . Chứng minh rằng $\widehat{EIC} = 60^\circ$ và IA là tia phân giác của $\widehat{DIE}$.

Câu 8. (HSG 7 Huyện 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Gọi I là một điểm trên AC , K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Từ E kẻ $EH \perp BC (H \in BC)$. Biết $\widehat{HBE} = 50^\circ$; $\widehat{MEB} = 25^\circ$. Tính $\widehat{HEM}$ và $\widehat{BME}$.

Câu 9. (HSG 7 trường THCS Hiệp Thành 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$. Các đường phân giác AD và BE , tính số đo của góc BED

Câu 10. (HSG 7 huyện Đức Thọ, 2022 - 2023)

Tam giác ABC có $\widehat{A} = 40^\circ$; $\widehat{B} - \widehat{C} = 30^\circ$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Tính số đo góc CBE .

Câu 11. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ năm 2021 - 2022)

Cho $\triangle ABC$ có độ dài ba cạnh là $BC = a, AC = b, AB = c$ thỏa mãn: $a^2 + b^2 > 5c^2$.

Chứng minh rằng:
 $\widehat{C} < 60^\circ$

Câu 12. (HSG 7 huyện Quốc Oai 2016 - 2017)

Cho $\triangle ABC$, tia phân giác của $\widehat{A}$ cắt BC tại D . Biết $\widehat{ADB} = 85^\circ$.

a) Tính $\widehat{B} - \widehat{C}$

b) Tính các góc của $\triangle ABC$ nếu $4\widehat{B} = 5\widehat{C}$

Câu 13. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Cho tam giác nhọn ABC . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi M là giao điểm của DC và BE .

a) Chứng minh $\triangle ABE = \triangle ADC$

b) Tính số đo $\widehat{BMC}$

Câu 14. (HSG 7 thị xã Kỳ Anh 2022 - 2023)

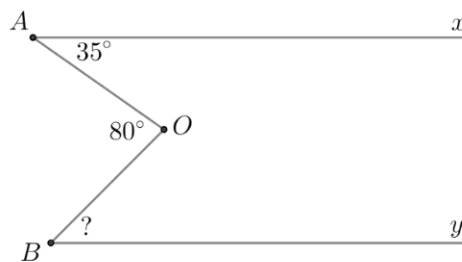
Tính số đo bằng độ của góc tạo bởi kim phút và kim giờ của một chiếc đồng hồ vào lúc đồng hồ chỉ 12 giờ 20 phút?

Câu 15. (HSG 7 thị xã Kỳ Anh 2022 - 2023)

Tam giác ABC có số đo góc A bằng 100° . Tia phân giác của góc ABC và tia phân giác của góc ACB cắt nhau tại O . Tính số đo của góc BOC ?

Câu 16. (HSG 7 huyện Yên Bình 2022 - 2023)

Trong hình bên, cho $Ax \parallel By$; Biết $\widehat{A} = 35^\circ$ và $\widehat{O} = 80^\circ$. Tính góc B .



Câu 17. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2022 - 2023)

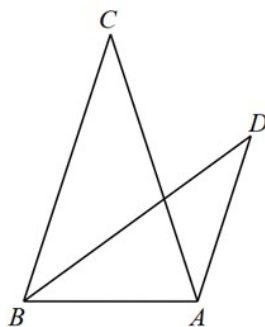
Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$. Vẽ $AH \perp BC$ ($H \in BC$), trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Vẽ $DE \perp BC$. Tính số đo góc AEC .

Câu 18. (HSG 7 huyện Nghi Xuân 2022-2023)

Trong hình bên, tính $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{E}$?

Câu 19. (HSG 7 Đức Thọ, Hà Tĩnh 2021 – 2022)

Cho hình vẽ bên. Biết $BC \parallel AD$, $CA = CB$, $AB = AD$ và $\widehat{C} = \widehat{D}$. Tính số đo $\widehat{BAC}$.



Câu 20. (HSG 7 Yên Mỹ, Hưng Yên 2021 – 2022)

Cho $\triangle ABC$ cân tại B , có $\widehat{ABC} = 80^\circ$. Lấy điểm I nằm trong tam giác sao cho $\widehat{IAC} = 10^\circ$ và $\widehat{ICA} = 30^\circ$. Tính số đo $\widehat{AIB}$.

Câu 21. (HSG 7 Bắc Ninh 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC , đường trung tuyến AM , $\widehat{MAB} = 30^\circ$, $\widehat{C} = 30^\circ$. Tính số đo $\widehat{ABC}$ biết $\widehat{ABC}$ là góc tù.

Câu 22. (HSG 7 Điện Bàn 2022 - 2023).

Cho tam giác đều ABC . Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $AM = CN$ ($M \neq A, M \neq B; N \neq A, N \neq C$). Gọi O là giao điểm của BN và CM . Chứng tỏ rằng tổng $\widehat{MAN} + \widehat{MON}$ có giá trị không đổi.

Câu 23. (HSG 7 huyện Hà Trung, tỉnh Thanh Hóa 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên AC lấy điểm E sao cho $\widehat{EBC} = 2\widehat{ABE}$. Trên tia BE lấy điểm M sao cho $EM = BC$. So sánh $\widehat{MBC}$ và $\widehat{BMC}$.

Câu 24. (HSG 7 huyện Tam Dương, tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC , O là điểm nằm trong tam giác.

a) Chứng minh rằng $\angle BOC = \angle A + \angle ABO + \angle ACO$.

b) Biết $\angle ABO + \angle ACO = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$ và tia BO là tia phân giác của $\angle ABC$. Chứng minh rằng tia CO là tia phân giác của $\angle ACB$.

Câu 25. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2017- 2018)

Cho tam giác ABC có $\angle B < 90^\circ$ và $\angle B = 2\angle C$. Kẻ đường cao AH . Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BH$. Đường thẳng HE cắt AC tại D . Chứng minh $\angle BEH = \angle ACB$.

Câu 26. (HSG 7 trường Trần Hưng Đạo 2017- 2018)

Cho tam giác nhọn ABC có $AB > AC$, ba đường cao BD , CE và AF cắt nhau tại H . Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $AM = AC$. Gọi N là hình chiếu của M trên AC ; K là giao điểm của MN và CE . Chứng minh hai góc $\angle KAH$ và $\angle MCB$ bằng nhau.

Câu 27. (HSG 7 Vĩnh Phúc- năm học 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A , gọi D là trung điểm của AC . Trên đoạn BD lấy điểm E sao cho $\angle DAE = \angle ABD$. Chứng minh rằng $\angle DAE = \angle ECB$.

Câu 28. (HSG 7 huyện Lục Nam năm 2020 - 2021)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Trên đường trung tuyến BD lấy điểm E sao cho $\angle DAE = \angle ABD$ (E nằm giữa B và D). Chứng minh rằng $\angle DAE = \angle ECB$.

Câu 29. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, năm học 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC cân. Trên cạnh đáy BC lấy điểm D sao cho $CD = 2BD$. Chứng minh rằng $\angle BAD < \frac{1}{2} \angle CAD$.

Câu 30. (HSG 7 Huyện 2017 - 2018)

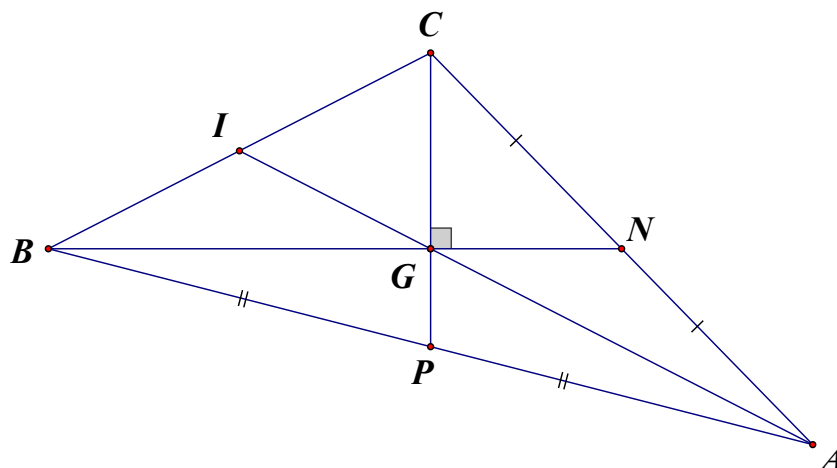
Cho tam giác ABC cân tại A có $\angle A = 20^\circ$, vẽ tam giác đều DBC (D nằm trong $\triangle ABC$). Tia phân giác của $\angle ABD$ cắt AC tại M . Chứng minh tia AD là phân giác của $\angle BAC$.

Dạng toán: Tính độ dài đoạn thẳng, chứng minh đoạn thẳng bằng nhau

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Cho hình vẽ, biết $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến BN , CP vuông góc với nhau tại G . Tia AG cắt BC tại I . $BC = 5\text{cm}$. Độ dài GA là:



- A. 10cm B. 2,5cm C. 5cm D. 3cm

Câu 2. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại B , $AB = 6$, $\angle A = 30^\circ$. Phân giác góc C cắt AB tại D . Khi đó độ dài đoạn thẳng BD và AD lần lượt là:

- A. 2; 4 B. 3; 3 C. 4; 2 D. 1; 5

Câu 3. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho tam giác DEF có $\angle E = \angle F$. Tia phân giác của góc D cắt EF tại I . Ta có:

- A. $\triangle DIE = \triangle DIF$ B. $DE = DF$, $\angle EDE = \angle FDF$
C. $IE = IF$, $DI = EF$ D. Cả A, B đều đúng

Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A , trên cạnh BC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Gọi H là trung điểm của BC . Biết $AB = 5\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, độ dài AM là:

- A. $\sqrt{17}\text{ cm}$ B. 4 cm C. $\sqrt{15}\text{ cm}$ D. $\sqrt{14}\text{ cm}$

Câu 5. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác. Độ dài AG là:

- A. $\frac{11}{3}\text{ cm}$ B. 5cm C. $\frac{10}{3}\text{ cm}$ D. 3cm

Câu 6. (HSG 7 huyện Sơn Động, 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ đều độ dài cạnh là 6 cm. Kẻ AI vuông góc với BC tại I , đường thẳng BM ($M \in AC$) cắt AI tại K . biết $MA = 3\text{ cm}$ và $KI = \sqrt{3}\text{ cm}$. Độ dài cạnh AI là

- A. $3\sqrt{2}\text{ cm}$ B. 3 cm C. $2\sqrt{3}\text{ cm}$ D. $6\sqrt{3}\text{ cm}$

Câu 7. (HSG 7 huyện Tam Nông, 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC vuông tại A , trọng tâm G , $BC = 6\text{cm}$. Khi đó AG bằng

- A. 1,5cm B. 2cm C. 1cm D. 3cm

Câu 8. (HSG 7 huyện Tam Nông, 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A , $AB = AC = x$, $BC = 2$ và $\angle A = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy D sao cho $\angle ACD = 10^\circ$. Độ dài AD bằng

- A. $\frac{x}{2}$. B. $\sqrt{x}$. C. 1. D. 2.

Câu 9. (HSG 7 Tam Nông, Phú Thọ 2021-2022)

Tam giác ABC có ba đường trung tuyến AM, BN, CP . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = \frac{1}{3}AM$. Khi đó giá trị $\frac{EB + EC + EA}{PC + BN + 2AM}$ là

- A. 2. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Lập Thạch – Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A , có $\angle A = 100^\circ$ và I là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác ABC . Trên tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BC$. Đường thẳng BI cắt AC tại E , DE cắt BC tại F . Chứng minh rằng $FB = FD$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Sơn Động 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A có $\angle BAC = 20^\circ$. Vẽ tam giác đều BCD sao cho điểm D nằm trong tam giác ABC . Tia phân giác của $\angle ABD$ cắt AC tại M . Chứng minh $AM = BC$.

Câu 3. (HSG 7 trường Bùi Hữu Duyên, huyện Hưng Hà; trường Đồng Xuân, huyện Phúc Yên 2022 - 2023; huyện Lục Nam 2018 - 2019)

Cho $\triangle ABC$ có $\angle A = 90^\circ$. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Tia phân giác của $\angle HAC$ cắt cạnh BC ở điểm D và tia phân giác của $\angle HAB$ cắt cạnh BC ở E .

Chứng minh rằng $AB + AC = BC + DE$.

Câu 4. (HSG 7 trường THCS-THPT Tri Thức 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC , qua A kẻ đường thẳng a song song với BC , qua C kẻ đường thẳng c song song với AB , a cắt c tại D . Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chứng minh $OC = OA$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Như Thanh, tỉnh Thanh Hóa năm học 2021 - 2022)

Cho góc nhọn xOy . Gọi Ot là tia phân giác của góc xOy . Lấy các điểm A, B, I lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Ot (A, B, I khác O) sao cho $OA = OB < OI$. Chứng minh: $IA = IB$ và $OI \perp AB$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường THCS Dân Chủ 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB = AC$. Trên AB và AC lần lượt lấy điểm D và E sao cho $AD = AE$. Qua A và D kẻ đường vuông góc với BE cắt BC lần lượt tại M và N . Tia ND cắt tia CA tại I . Chứng minh rằng:

a) A là trung điểm của CI .

b) $CM = MN$.

c) $AM = \frac{1}{2}NI$.

Câu 7. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Vị Thanh 2018 - 2019)

Cho góc nhọn $\angle xOy$ và tia phân giác Ot . Trên tia Oy lấy điểm A . Đường trung trực của OA cắt tia Ox tại F . Trên tia Oy lấy điểm B sao cho $AB = AF$, BF cắt Ot tại E .

a) Chứng minh E thuộc đường trung trực của FA

b) So sánh EF và EB

Câu 8. (HSG 7 huyện Việt Yên 2017- 2018)

Cho tam giác ABC cân tại A ($\angle B = \angle C = 40^\circ$). Kẻ phân giác BD ($D \in AC$). Trên tia AB lấy điểm M sao cho $AM = BC$. Chứng minh $BD + AD = BC$.

Câu 9. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có $\angle A = 100^\circ, \angle C = 50^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $MA = AC$. Chứng minh rằng: $CM = AB$.

Câu 10. (HSG 7 huyện 2022 - 2023; trường Hiền Quan 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AD . Kẻ đường trung tuyến BE cắt AD ở G . Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của GA, GB . Chứng minh rằng:

a) $IK \parallel DE; IK = DE$

b) $AG = \frac{2}{3}AD$

Câu 11. (HSG 7 Lai Châu - năm học 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC , từ M kẻ đường thẳng vuông góc với tia phân giác của góc BAC tại N và cắt tia AB tại E và cắt tia AC tại F . Chứng minh rằng:

1) $AE = AF$

2) $BE = CF$

Câu 12. (Đề khảo sát HSG 7 huyện Sông Lô, Vĩnh Phúc năm học 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có $\angle A = 60^\circ$. Hai tia phân giác BD, CE của các $\angle ABC$ và $\angle ACB$ cắt nhau ở I ($D \in AC, E \in AB$). Chứng minh rằng $ID = IE$.

Câu 13. (HSG 7 huyện Yên Thế 2022 - 2023; trường Đào Duy Từ, huyện Hoài Nhon 2018 - 2019)

1) Cho đoạn thẳng AB , O là trung điểm của AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia Ax ; By vuông góc với AB . Gọi C là một điểm thuộc tia Ax . Đường vuông góc với OC tại O cắt tia By ở D . Chứng minh $CD = AC + BC$.

2) Cho tam giác ABC . Gọi O là giao điểm các đường phân giác của tam giác đó. Từ O kẻ OD , OE , OF lần lượt vuông góc với BC , AC , AB . Trên tia đối của các tia AC , BA , CB lấy theo thứ tự ba điểm M , N , P sao cho $AM = BC$, $BN = AC$, $CP = AB$. Chứng minh $EM = FN = DP$.

Câu 14. (HSG 7 Thường Xuân 2022 - 2023; huyện Hoài Nhơn 2018 - 2019)

Cho $\triangle ABC$ có $\angle B = 2\angle C < 90^\circ$ vẽ AH vuông góc với BC tại H . Trên tia AB lấy điểm D sao cho $AD = HC$. Chứng minh đường thẳng DH đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC .

Câu 15. (HSG 7 huyện Tam Nông, trường THCS Hiền Quan 2017-2018)

Cho tam giác ABC vuông tại A , tia phân giác $\angle ABC$ cắt AC tại D . Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Chứng minh rằng:

- $DA = DE$.
- $DA < DC$.

Câu 16. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2017 - 2018)

Cho tam giác nhọn ABC . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông tại A : $\triangle ABD$, $\triangle ACE$ sao cho $AB = AD$, $AE = AC$. Kẻ AH vuông góc với BC , DM vuông góc với AH , EN vuông góc với AH .

- Chứng minh: $DM = AH$.
- Chứng minh MN đi qua trung điểm của DE .

Câu 17. (HSG 7 Huyện Vị Thanh, 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC có góc A nhỏ hơn 90° . Vẽ ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Chứng minh AH đi qua trung điểm của MN .

Câu 18. (HSG 7 trường Hiền Quan 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác ABE và ACF vuông cân tại A . Từ E và F kẻ đường vuông góc EK và FN với đường thẳng HA .

- Chứng minh rằng: $EK = FN$.
- Gọi I là giao điểm của EF với đường thẳng HA . Tìm điều kiện của tam giác ABC để $EF = 2AI$.

Câu 19. (HSG 7 Trường THCS Tào Sơn 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC có $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC$. Qua A vẽ đường thẳng d sao cho B và C nằm cùng phía đối với đường thẳng d . Kẻ BH và CK vuông góc với d . Chứng minh rằng:

- a) $AH = CK$.
 b) $HK = BH + CK$.

Câu 20. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC vuông tại A , $E = \frac{1}{2}B$, kẻ AH vuông góc với BC tại H . Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ đường thẳng CE vuông góc với đường thẳng AD .

- a) Tam giác ABD là tam giác gì? Vì sao?
 b) Chứng minh rằng $AD = CD$; $DE = DH$.

Câu 21. (HSG 7 trường Thực hành Sài Gòn 2017- 2018)

Cho tam giác có ba góc đều nhọn. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC . Kẻ $AH \perp MN$ tại H và CK vuông góc với đường thẳng MN tại K . Chứng minh:

- a) $AH = CK$
 b) $BC = 2MN$

Câu 22. (HSG 7 huyện 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng: $AC = EB$.

Câu 23. (HSG 7 huyện Giao Thủy 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC , O là trung điểm của BC . Từ B kẻ BD vuông góc với AC (D thuộc AC). Từ C kẻ CE vuông góc với AB ($E \in AB$)

$$OD = \frac{1}{2}BC$$

- a) Chứng minh rằng:
 b) Trên tia đối của tia DE lấy điểm N , trên tia đối của tia ED lấy điểm M sao cho $DN = EM$. Chứng minh rằng: Tam giác OMN là tam giác cân

Câu 24. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A , có $\angle A = 100^\circ$ tia phân giác của góc $\angle ABC$ cắt AC tại D . Chứng minh : $AD + BD = BC$

Câu 25. (HSG 7 trường Nguyễn Bảo Phương; huyện Thanh Thủy; huyện Phù Ninh 2018 - 2019; huyện Nam Sách 2017 - 2018; huyện Ngọc Lặc; huyện Tân Lạc 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC , từ M kẻ đường thẳng vuông góc với phân giác của góc A , cắt tia này tại N , cắt tia AB tại E và cắt tia AC tại F . Chứng minh rằng:

- a) $BE = CF$

$$AE = \frac{AB + AC}{2}$$
 b)
 c) Tính AE, BE theo $AC = b, AB = c$

Câu 26. (HSG 7 trường THCS Nhơn Trí 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của góc A và góc C cắt nhau tại O . Gọi F là hình chiếu của O trên BC ; H là hình chiếu của O trên AC . Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI . Chứng minh tam giác FCH cân và $AK = KI$

Câu 27. (HSG 7 huyện Rạch Giá 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh C bờ là đường thẳng AB dựng đoạn AE vuông góc với AB và $AE = AB$. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh B bờ là đường thẳng AC dựng đoạn AF vuông góc với AC và $AF = AC$. Chứng minh rằng:

a) $FB = EC$

b) $EF = 2AM$

Câu 28. (HSG 7 huyện Bồ Trách 2017 - 2018; huyện Triệu Sơn 2015 - 2016)

Cho $\triangle ABC$ có $\angle B + \angle C = 60^\circ$, phân giác AD . Trên AD lấy điểm O , trên tia đối của tia AC lấy điểm M sao cho $\angle ABM = \angle ABO$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $\angle ACN = \angle ACO$. Chứng minh rằng

a) $AM = AN$

b) $\triangle MON$ là tam giác đều.

Câu 29. (HSG 7 Huyện Hương Sơn, 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC ($\angle BAC < 90^\circ$) đường cao AH . Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB, AC đường thẳng EF cắt AB, AC lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng $AE = AF$.

Câu 30. (HSG 7 trường Lý Thường Kiệt 2017 - 2018)

Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của góc A và góc C cắt nhau tại O . Gọi F là hình chiếu của O trên BC ; H là hình chiếu của O trên AC . Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI .

a) Chứng minh $\triangle FCH$ cân

b) Chứng minh $AK = KI$

Câu 31. (HSG 7 Thị xã Sầm Sơn 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC có góc B và C nhọn. Dựng ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại các đỉnh B và C . Vẽ AH, DI và EK cùng vuông góc với đường thẳng BC ($H, I, K \in BC$). Chứng minh: $\triangle BDI = \triangle ABH$ và $DI + EK = BC$.

Câu 32. (HSG 7 trường THCS Nguyệt Ấn 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ nhọn có $AB < AC$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AB = AD$. Qua B kẻ đường thẳng song song với CD và cắt đường thẳng AC tại E .

a) Chứng minh rằng: $BE = CD$; $ED = BC$

b) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BE, CD . Chứng minh rằng A là trung điểm của PQ

c) Gọi M là điểm bất kì nằm trong $\triangle ABC$. Xác định vị trí của M để biểu thức $MA \cdot BC + MB \cdot AC + MC \cdot AB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 33. (HSG 7 Trường Hoàng Quyên huyện Thanh Oai năm 2018 – 2019)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , trung tuyến AM . Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $DM = MA$. Trên tia đối của tia CD , lấy điểm I sao cho $CI = CA$. Qua I vẽ đường thẳng song song với AC cắt đường thẳng AH tại E . Chứng minh $AE = BC$.

Câu 34. (HSG 7 huyện Mỹ Cày 2017- 2018)

Cho tam giác ABC cân tại A , BH vuông góc với AC tại H . Trên cạnh BC lấy điểm M bất kỳ (khác B và C). Gọi D, E, F là chân đường vuông góc hạ từ M đến AB, AC, BH .

a) Chứng minh khi M chạy trên cạnh BC thì tổng $MD + ME$ có giá trị không đổi.

b) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho $CK = EH$. Chứng minh BC đi qua trung điểm của DK .

Câu 35. (HSG 7 trường Đáp Cầu năm học 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A , trên cạnh BC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Gọi H là trung điểm của BC . Chứng minh $AM = AN$ và $AH \perp BC$.

Câu 36. (HSG 7 huyện Quốc Oai 2016 - 2017)

Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, trung tuyến AM . Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C , vẽ đoạn thẳng AE vuông góc và bằng AB . Trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa điểm B , vẽ đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AC . Chứng minh $BD = CE$.

Câu 37. (HSG 7 huyện 2016 - 2017)

Cho tam giác vuông ABC ($\angle A = 90^\circ$), đường cao AH , trung tuyến AM . Trên tia đối tia MA lấy điểm D sao cho $DM = MA$. Trên tia đối tia CD lấy điểm I sao cho $CI = CA$, qua I vẽ đường thẳng song song với AC cắt đường thẳng AH tại E . Chứng minh $AE = BC$.

Câu 38. (HSG 7 huyện Tam Dương, tỉnh Vĩnh Phúc 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Điểm M nằm bên trong tam giác sao cho $MA = 2\text{cm}$, $MB = 3\text{cm}$, $\angle AMC = 135^\circ$. Tính MC .

Câu 39. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2017- 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao điểm của BE và CD . Chứng minh rằng

a) $BE = CD$.

b) $\triangle BDE$ là tam giác cân.

Câu 40. (HSG 7 trường THCS Phan Đình Phùng 2017 - 2018; huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho đoạn thẳng AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB vẽ hai tia Ax, By lần lượt vuông góc với AB tại A và B . Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trên tia Ax lấy điểm C và trên tia By lấy điểm D sao cho góc $\angle COD = 90^\circ$. Chứng minh rằng $AC + BD = CD$.

Câu 41. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC ($CA < CB$), trên BC lấy các điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Qua điểm M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AN tại I .

a) Chứng minh I là trung điểm của AN .

b) Qua K là trung điểm của AB kẻ đường thẳng vuông góc với đường phân giác góc $\angle ACB$ cắt đường thẳng AC tại E , đường thẳng BC tại F . Chứng minh $AE = BF$.

Câu 42. (HSG 7 huyện Tam Dương 2016 - 2017)

Cho $\angle xOy$ bằng 60° . Tia Oz là phân giác của $\angle xOy$. Từ điểm B bất kỳ trên tia Ox kẻ BH, BK lần lượt vuông góc với Oy, Oz tại H và K . Qua B kẻ đường song song với Oy cắt Oz tại M . Chứng minh rằng: $BH = MK$.

Câu 43. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 3\text{ cm}$; $AC = 4\text{ cm}$. Điểm I nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác ABC . Gọi M là chân đường vuông góc kẻ từ I đến BC . Tính MB .

Câu 44. (HSG 7 Bình Lục 2022 - 2023)

Cho tam giác MNP có $\angle NMP < 90^\circ$. Vẽ ra phía ngoài tam giác MNP hai đoạn thẳng MQ vuông góc và bằng MN , MR vuông góc và bằng MP . Gọi I là trung điểm của NP . Chứng minh $MI = \frac{1}{2}QR$.

Dạng toán: Chứng minh tam giác bằng nhau

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 Tam Nông, Phú Thọ 2021-2022)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$). AD là tia phân giác góc A ($D \in BC$). Kẻ $DE \perp AB$ ($E \in AB$), $DI \perp AC$ ($I \in AC$). Khẳng định nào đúng?

- A. $\triangle AED = \triangle AID$. B. $\triangle BED = \triangle CID$. C. $\triangle ADB = \triangle ADC$. D. $\triangle AED = \triangle BED$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thảo Lâm, 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có ($AB < AC$). Vẽ AD là tia phân giác của góc A ($D \in BC$). Gọi E và I lần lượt là các hình chiếu của D trên cạnh AB, AC . Khẳng định nào sau đây là đúng.

- A. $\triangle AED = \triangle AID$. B. $\triangle BED = \triangle CID$. C. $\triangle ADB = \triangle ADC$. D. $\triangle AED = \triangle BED$.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 trường Ân Tường Đông 2014 - 2015)

Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Kẻ tia phân giác AD của $\angle BAC$ ($D \in BC$). Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$, trên tia AB lấy điểm F sao cho $AF = AC$. Chứng minh rằng:

a) $\triangle ADB = \triangle ADE$

b) $\triangle BDF = \triangle EDC$

Câu 2. (HSG 7 trường THCS Thạch Bình 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A , trung tuyến AM . Lấy $E \in BC$, kẻ $BH \perp AE$, $CK \perp AE$ ($H, K \in AE$)

a) Chứng minh: $\triangle ACK = \triangle BAH$

b) Chứng minh: $\triangle AMK = \triangle BMH$

c) Chứng minh: $\triangle MHK$ cân.

Câu 3. (HSG 7 Huyện Vị Thanh, 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC có góc A nhỏ hơn 90° . Vẽ ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$. Chứng minh rằng: $\triangle AMC = \triangle ABN$

Dạng toán: Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Câu 1. (HSG 7 huyện 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A . Trên cạnh AB lấy điểm D , trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Gọi I là trung điểm của DE .

Chứng minh ba điểm B, I, C thẳng hàng

Câu 2. (HSG 7 trường Lý Thường Kiệt 2017- 2018)

Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của góc A và góc C cắt nhau tại O . Gọi F là hình chiếu của O trên BC ; H là hình chiếu của O trên AC . Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI . Chứng minh 3 điểm B, O, K thẳng hàng.

Câu 3. (HSG 7 huyện 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Gọi I là một điểm trên AC , K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng

Câu 4. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A , trên cạnh AB lấy điểm D , trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Gọi I là trung điểm của DE . Chứng minh ba điểm B, I, C thẳng hàng.

Dạng toán: Bất đẳng thức tam giác

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 - 2022)

Cho $\triangle ABC$ có $\angle A = 45^\circ$; $2\angle B = 3\angle C$. Bất đẳng thức nào sau đây đúng

A. $BC < AC < AB$

B. $AC < AB < BC$

C. $AC < BC < AB$

D. $BC < AB < AC$

Câu 2. (HSG 7 huyện Sơn Động, 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có $AB = 5 \text{ cm}, AC = 10 \text{ cm}$. Biết độ dài cạnh BC (đơn vị cm) là một số nguyên.
Hỏi độ dài cạnh BC có thể nhận được bao nhiêu giá trị?
A. 10. B. 8. C. 11. D. 9.

Câu 3. (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC có $\angle A + 4\angle B + 10\angle C = 360^\circ$ và $3\angle B + 9\angle C = 180^\circ$ thì khẳng định nào sau đây là đúng:
A. $AB < BC < AC$ B. $AB < AC < BC$ C. $BC > AC > AB$ D. $AB = BC = AC$

Câu 4. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC , hai đường trung tuyến BM, CN . Biết $AC > AB$. Khi đó độ dài hai đoạn thẳng BM và CN là:
A. $BM \leq CN$ B. $BM > CN$ C. $BM < CN$ D. $BM = CN$

Câu 6. (HSG 7 huyện Thanh Sơn, 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$, hai đường trung tuyến BM, CN . Biết $AC > AB$. Chọn khẳng định đúng.
A. $BM \leq CN$ B. $BM > CN$ C. $BM < CN$ D. $BM = CN$

Câu 7. (HSG 7 huyện Sơn Động, 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $4\angle A = 6\angle B = 3\angle C$. Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $AC > AB > BC$ B. $AC > BC > AB$ C. $AB > BC > AC$ D. $AB > AC > BC$

Câu 8. (HSG 7 huyện Tam Nông, 2022 - 2023)

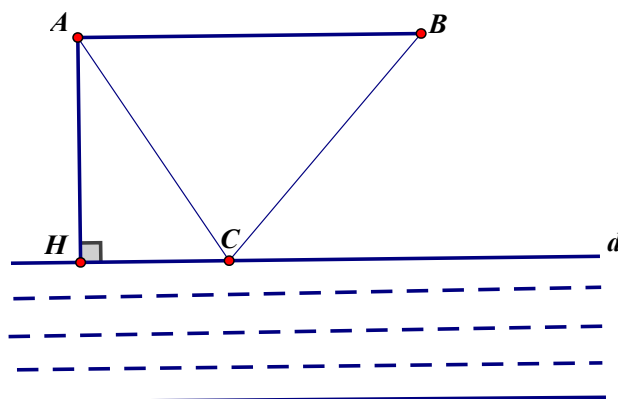
Tam giác ABC cân có $AB = 8 \text{ cm}, AC = 5 \text{ cm}$ thì chu vi tam giác đó bằng:
A. 21cm B. 18cm
C. 21cm hoặc 18cm D. 20cm hoặc 18cm

Câu 9. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có $\angle A = 70^\circ; \angle ACB = 50^\circ$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ B . Khẳng định nào sau đây đúng.
A. $HB < HC$ B. $HB > HC$ C. $HB = HC$ D. $\angle BAC = 70^\circ$

Câu 10. (HSG 7 Tam Nông, Phú Thọ 2021-2022)

Một người đi từ điểm A đến điểm C (nào đó) trên bờ sông d , lấy nước rồi mang về điểm B . Biết AB song song d và khoảng cách từ A đến bờ sông d là AH . Quãng đường đi lấy nước $AC + CB$ ngắn nhất khi



- A. E, C, H thẳng hàng B. H, C, B thẳng hàng
C. E, H, B thẳng hàng D. E, C, B thẳng hàng

Câu 11. (HSG 7 trường THCS Phan Đình Phùng 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC , hai đường trung tuyến BM , CN cắt nhau tại G . Biết $\angle BGC > 90^\circ$. Khi đó độ dài hai đoạn thẳng BM và CN là:

- A. $BM \leq CN$ B. $BM > CN$ C. $BM < CN$ D. $BM = CN$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Tam Hưng 2013 - 2014)

Cho hai điểm B và C nằm trên đoạn thẳng AD sao cho $AB = CD$. Lấy điểm M tùy ý trong mặt phẳng. Chứng minh rằng $MA + MD \geq MB + MC$

Câu 2. (HSG 7 huyện Yên Định 2022 - 2023; huyện Hoài Nhơn 2018 - 2019; huyện Tân An; trường THCS Phan Đình Phùng 2017 - 2018; huyện Lâm Thao 2016 - 2017)

Cho tam giác nhọn ABC , trực tâm H .

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$$

Chứng minh rằng:

Câu 3. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

a) Cho tam giác ABC . M là điểm bất kỳ trong tam giác. Chứng minh:

$$2(MA + MB + MC) > AB + AC + BC$$

b) Cho tam giác ABC . AN, BP, CQ là ba trung tuyến. Chứng minh:

$$\frac{4}{3}(AN + BP + CQ) > AB + AC + BC$$

Câu 4. (HSG 7 huyện An Nhơn năm 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC , trung tuyến AM và BE cắt nhau tại G .

Chứng minh rằng nếu $\angle AGB \leq 90^\circ$ thì $AC + BC > 3AB$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC vuông ở A , điểm M nằm giữa B và C . Gọi D, E thứ tự là hình chiếu của M trên AC, AB . Tìm vị trí của M để DE có độ dài nhỏ nhất.

Câu 6. (HSG 7 huyện Yên Phong 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ nhọn. Gọi M là một điểm bất kì nằm trong tam giác, xác định vị trí của M để biểu thức: $MA \cdot BC + MB \cdot AC + MC \cdot AB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 7. (HSG trường Tôn Đức Thắng 2018 - 2019; trường Trần Hưng Đạo 2017 - 2018)

Cho tam giác nhọn ABC có $AB > AC$, ba đường cao BD , CE và AF cắt nhau tại H . Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $AM = AC$. Gọi N là hình chiếu của M trên AC ; K là giao điểm của MN và CE . Chứng minh $AB + CE > AC + BD$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Hiệp Hòa 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $AB < AC < BC$. Điểm E nằm trong tam giác.
Chứng minh $EA + EB + EC < AC + BC$.

Dạng toán: Chứng minh song song, vuông góc

Câu 1. (HSG 7 huyện Ninh Giang 2022 - 2023)

Cho góc vuông xOy , trên tia Ox lấy điểm A , trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OA > OB$. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với Ox , qua B kẻ đường thẳng vuông góc với Oy . Hai đường thẳng này cắt nhau ở C .

a) Chứng minh $AC \perp BC$.

b) Kẻ phân giác của $\angle ACB$ cắt BC tại D , kẻ phân giác của $\angle ABC$ cắt OA tại E . Chứng minh $AD \parallel BE$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, năm học 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường trung tuyến AM . Qua A kẻ đường thẳng d vuông góc với AM . Qua M kẻ các đường vuông góc với AB, AC chúng cắt d theo thứ tự ở D và E . Chứng minh rằng:

a) $BD \parallel CE$

b) $DE = BD + CE$

Câu 3. (HSG 7 Huyện 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng $AC \parallel BE$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Tân Tạo; huyện Phú Khánh 2018 - 2019; huyện Minh An 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC ($\angle BAC < 90^\circ$), đường cao AH . Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB, AC , đường thẳng EF cắt AB, AC lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng:

a) $AE = AF$.

b) HA là phân giác của $\angle MHN$.

c) Chứng minh $CM \parallel EH, BN \parallel FH$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Sơn Dương 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC vuông góc tại A . Phân giác trong của B cắt cạnh AC tại điểm D . Từ D kẻ DE vuông góc với BC ($E \in BC$). Tia ED và tia BA cắt nhau tại F .

- a) So sánh DA và DC
- b) Chứng minh $BD \perp FC$
- c) Chứng minh $AE \parallel FC$

Câu 6. (Đề minh họa HSG 7 trường Lý Nam Đế- Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC nhọn. Kẻ BF vuông góc với AC (F thuộc AC), kẻ CK vuông góc với AB (K thuộc AB), BF cắt CK tại H . Gọi M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MH lấy điểm D sao cho $MD = MH$

- a) Chứng minh $DC \parallel BH$
- b) Từ H kẻ HI vuông góc với BC (I thuộc BC), trên tia đối của tia IH lấy điểm E sao cho $IE = IH$. Chứng minh rằng: $BE = DC$
- c) Chứng minh: $DE \parallel BC$

Câu 7. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường THCS Trần Đức Thông 2022 - 2023)

Cho ΔABC nhọn. Kẻ $BF \perp AC$ ($F \in AC$), kẻ $CK \perp AB$ ($K \in AB$), BF cắt CK tại H . Gọi M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MH lấy điểm D sao cho $MD = MH$.

1. Chứng minh $DC \parallel BH$.
2. Từ H kẻ $HI \perp BC$ ($I \in BC$), trên tia đối của tia IH lấy điểm E sao cho $IE = IH$. Chứng minh rằng:
 - a) $BE = DC$.
 - b) $DE \parallel BC$.

Câu 8. (HSG 7 trường Ân Tường Đông 2014 - 2015)

Cho tam giác ABC , D là trung điểm của AB , E là trung điểm của AC . Vẽ điểm F sao cho E là trung điểm của DF . Chứng minh rằng:

- a) $AD = FC$ và $AB \parallel FC$
- b) $\Delta BDC = \Delta FCD$
- c) $DE \parallel BC$ và $DE = \frac{1}{2}BC$

Câu 9. (HSG 7 huyện 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC có $\angle A < 90^\circ$. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó hai đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AB ; AE vuông góc và bằng AC .

- a) Chứng minh $DC \perp BE$.
- b) Gọi N là trung điểm của DE . Trên tia đối của tia NA lấy M sao cho $NA = NM$. Chứng minh $AB = ME$, $\Delta ABC = \Delta EMA$.
- c) Chứng minh $MA \perp BC$.

Câu 10. (HSG 7 huyện Tư Nghĩa, tỉnh Quảng Ngãi 2017 - 2018)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường phân giác BE . Kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$), gọi K là giao điểm của AB và EH . Chứng minh rằng:

- BE là đường trung trực của đoạn thẳng AH .
- $BE \perp CK$.

Câu 11. (HSG 7 Huyện Vị Thanh, 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC có góc A nhỏ hơn 90° . Vẽ ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$. Chứng minh $BN \perp CM$.

Câu 12. (HSG 7 trường Hiệp Thạnh 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC có $\angle B < 90^\circ$. Trên nửa mặt phẳng có chứa A bờ BC , vẽ tia Bx vuông góc với BC , trên tia đó lấy điểm D sao cho $BD = BC$. Trên nửa mặt phẳng có chứa C bờ AB , vẽ tia By vuông góc với BA , trên đó lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Chứng minh rằng:

- $DA = EC$
- $DA \perp EC$

Câu 13. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2014 - 2015)

Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$ và đường cao AH . Tia phân giác của $\angle BAH$ cắt BH tại D . Trên tia CA lấy điểm K sao cho $CK = BC$.

- Chứng minh $KB \parallel AD$.
- Chứng minh $KD \perp BC$.

Câu 14. (HSG 7 huyện Phù Cát 2017 - 2018; huyện Hoài Nhơn 2014 - 2015)

Cho tam giác ABC có $\angle A$ tù. Kẻ $AD \perp AB$ và $AD = AB$ (tia AD nằm giữa hai tia AB và AC). Kẻ $AE \perp AC$ và $AE = AC$ (tia AE nằm giữa hai tia AB và AC). Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $AM \perp DE$.

Câu 15. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $AB < AC$. Trên cạnh BC lấy điểm M và N sao cho $MC = CA, NB = BA$. Tia phân giác của góc B cắt AM tại I và cắt AN tại D , tia phân giác góc C cắt AN tại K và cắt AM tại E . Gọi O là giao điểm của BD và CE .

- Tính góc $\angle BOC$.
- Chứng minh: $BD \perp AN$ và $BD \parallel MK$.

Câu 16. (HSG 7 thành phố Ninh Bình 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có góc A tù. Kẻ $AD \perp AB$ và $AD = AB$ (tia AD nằm giữa hai tia của AB và AC). Kẻ $AE \perp AC$ và $AE = AC$ (tia AE nằm giữa hai tia của AB và AC). Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng: $AM \perp DE$.

Câu 17. (HSG 7 huyện Sông Lô 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có góc A nhỏ hơn 90° . Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C lấy điểm M sao cho $\triangle ABM$ vuông cân tại A . Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B lấy điểm N sao cho $\triangle ACN$ vuông cân tại A . Gọi K là giao điểm của BN và CM .

Chứng minh $\triangle AMC = \triangle ABN$ và $BN \perp CM$.

Dạng toán: Hình khối trong thực tế, chu vi và diện tích

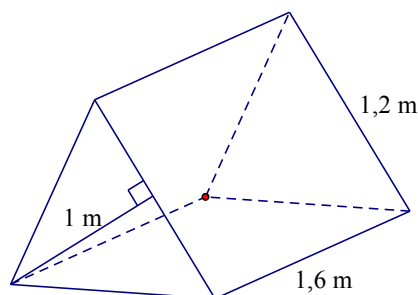
A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Sơn Động, 2022 - 2023)

Để xúc cát lên các xe tải, người ta dùng một máy xúc với gầu xúc (Hình 1) có dạng gần như một lăng trụ đứng tam giác kích thước như Hình 2. Nếu coi dung tích của gầu xúc đúng bằng thể tích của hình lăng trụ đứng tam giác thì muốn xúc 60 m^3 cát xe phải múc ít nhất bao nhiêu gầu?



Hình 1



Hình 2

- A. 62 B. 63 C. 64 D. 60

Câu 2.

Cho một tam giác cân có độ dài hai cạnh là 3 cm và 21 cm. Chu vi của tam giác đó bằng:

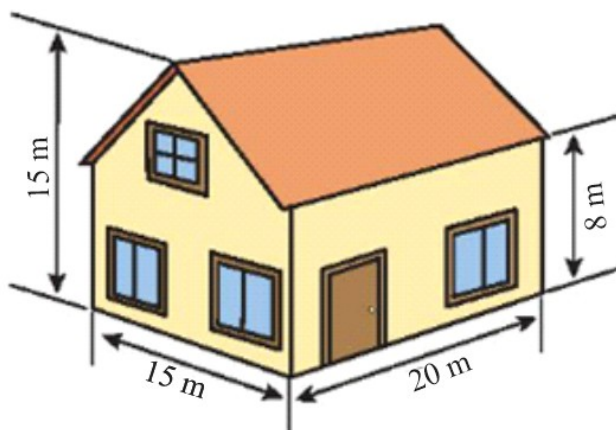
- A. 39 cm B. 27 cm C. 45 cm D. 46 cm

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Ngọc Lặc, trường THCS Nguyệt Án 2022 - 2023)

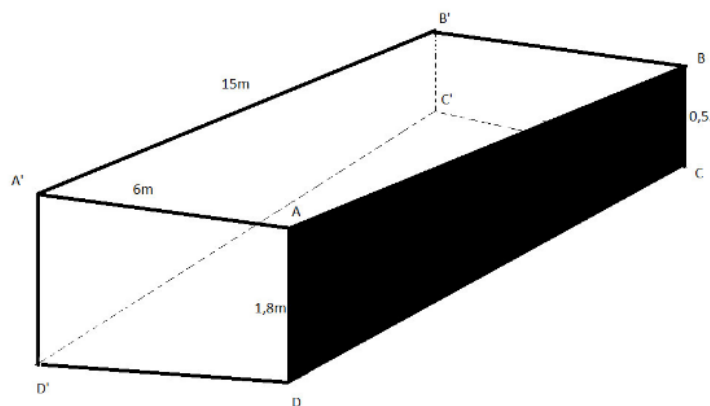
Một ngôi nhà có kích thước như hình vẽ (Hình 1). Tính thể tích của ngôi nhà. Khi đó phải cần bao nhiêu lít sơn để sơn phủ được tường mặt ngoài ngôi nhà (không sơn cửa)?

Biết 1 lít sơn bao phủ được 4 m^2 và tổng diện tích các cửa là 9 m^2 .



Hình 1

Câu 2. (HSG 7 huyện Tam Điệp, 2022 - 2023)



Hồ bơi của một trường THCS có dạng hình lăng trụ đứng tứ giác $ABCD A'B'C'D'$ với hai đáy là $ABCD$ và $A'B'C'D'$ là hình thang vuông, $A'B'$ (chiều dài hồ) là đường cao của hình thang $ABCD$. Hãy tính:

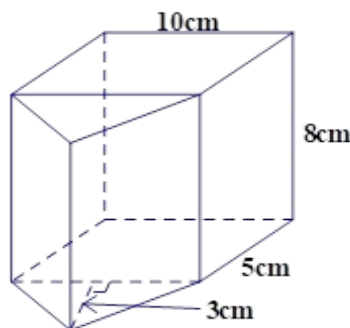
- Diện tích đáy $ABCD$ của lăng trụ?
- Thể tích của nước chứa trong hồ?

Câu 3. (HSG 7 huyện Tam Điệp, 2022 - 2023)

Một gia đình xây bể chứa nước hình hộp chữ nhật, phần trong lòng bể có đáy là hình vuông cạnh $1,5\text{ m}$, chiều cao bể là 1 m . Sau đó họ dùng các viên gạch men kích thước $20 \times 30\text{ cm}$, dày 1 cm để ốp xung quanh thành bể và đáy bể. Hỏi gia đình đó cần ít nhất bao nhiêu viên gạch ốp?

Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Tính thể tích vật thể có cấu trúc và kích thước được mô tả như hình vẽ sau:

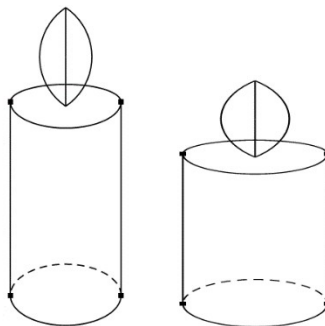


Câu 5. (HSG 7 huyện Đức Thọ, 2022 - 2023)

Diện tích ba mặt của một hình hộp chữ nhật là 30 cm^2 , 40 cm^2 và 75 cm^2 . Hỏi thể tích của hình hộp đó bằng bao nhiêu cm^3 ?

Câu 6. (HSG 7 huyện Quế Võ 2022 - 2023)

Hai ngọn nến hình trụ có chiều cao và đường kính khác nhau được đặt thẳng đứng trên mặt bàn. Ngọn nến thứ nhất cháy hết trong 6 giờ, ngọn nến thứ hai cháy hết trong 8 giờ. Hai ngọn nến được thắp sáng cùng lúc, sau 3 giờ chúng có cùng chiều cao.



- a) Tìm tỉ lệ chiều cao lúc đầu của hai ngọn nến.
 b) Biết tổng chiều cao lúc đầu của hai ngọn nến là 63 cm . Tính chiều cao lúc đầu của mỗi ngọn nến.

Câu 7. (HSG 7 Tp. Chí Linh 2022 - 2023)

Một trường THCS làm bể tập bơi cho học sinh có dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài 15 m , chiều rộng 10 m , chiều sâu $1,2\text{ m}$. Người ta lát gạch men các mặt xung quanh và đáy của bể (Coi mạch ghép giữa các viên gạch men không đáng kể).

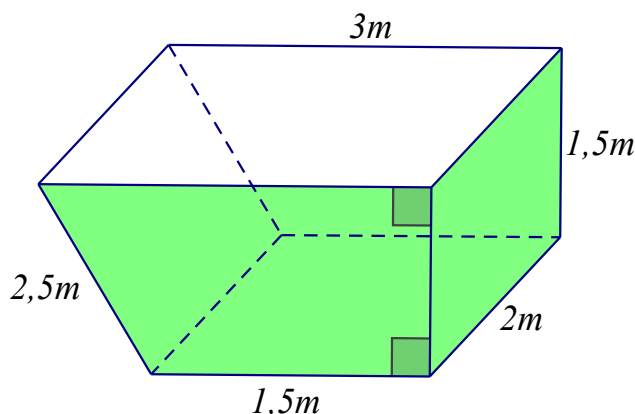
- a) Tính diện tích gạch men cần dùng để lát bể bơi đó?
 b) Cần phải bơm bao nhiêu mét khối nước vào bể để mực nước trong bể thấp hơn mép trên của bể là 20 cm (Ban đầu bể không có nước)?

Câu 8. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2022 - 2023)

Một bể cá hình hộp chữ nhật có chiều dài 60 cm , chiều rộng 25 cm và chiều cao 50 cm . Để nuôi cá, người ta đổ 45 lít nước và một tiểu cảnh bằng đá vào bể (nước ngập hết tiểu cảnh). Biết khi đó chiều cao mực nước trong bể là 34 cm . Hãy tính thể tích tiểu cảnh.

Câu 9. (HSG 7 trường THCS-THPT Tri Thức 2022 - 2023)

Thùng một chiếc máy nông nghiệp có dạng hình lăng trụ đứng tứ giác như hình vẽ. Đáy của hình lăng trụ đứng này (mặt bên của thùng) là một hình thang vuông có các kích thước đáy lớn 3 m , đáy nhỏ $1,5\text{ m}$. Người ta muốn sơn vỏ bên ngoài chiếc thùng bằng màu xanh, em hãy tính diện tích cần sơn?

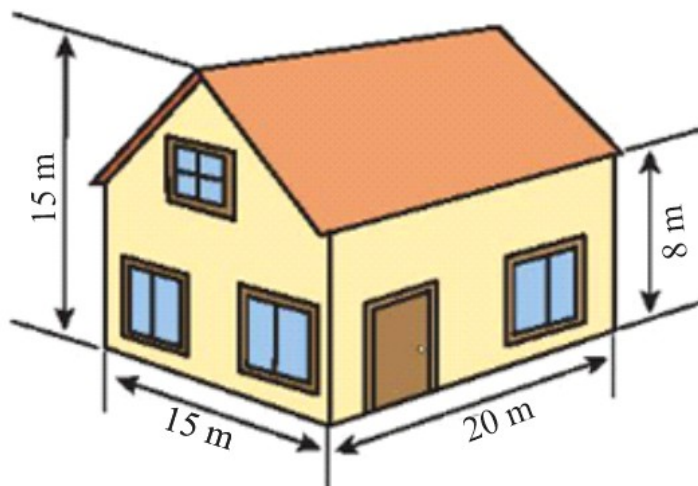


Câu 10. (HSG 7 thị xã Kỳ Anh 2022 - 2023)

Một lăng trụ đứng có đáy là tam giác; độ dài các cạnh của tam giác đáy là 6 cm , 7 cm , 9 cm . Độ dài cạnh bên lăng trụ bằng 13 cm . Diện tích xung quanh của lăng trụ bằng bao nhiêu cm^2 ?

Câu 11. (HSG 7 huyện Yên Bình 2022 - 2023)

Một ngôi nhà có các kích thước như hình vẽ.



- a) Tính thể tích phần không gian được giới hạn bởi ngôi nhà.
 b) Hỏi phải dùng bao nhiêu lít sơn để sơn phủ được mặt ngoài ngôi nhà? Biết rằng 1 lít sơn bao phủ được 8 m^2 tường (không sơn cửa) và tổng diện tích các cửa là 25 m^2 .

Câu 12. (HSG 7 huyện Thanh Trì 2022 - 2023)

Cho ba hình chữ nhật, biết diện tích hình thứ nhất và hình thứ hai tỉ lệ với 4 và 5 , diện tích hình thứ hai và hình thứ ba tỉ lệ với 7 và 8 . Hình thứ nhất và hình thứ hai có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là 27m , hình thứ hai và hình thứ ba có cùng chiều rộng, chiều dài của hình thứ ba là 24m . Tính diện tích mỗi hình chữ nhật đó.

Dạng toán: Bài toán chứng minh tổng hợp

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 trường Phan Đình Phùng; huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho tam giác DEF có $\angle E = \angle F$. Tia phân giác của góc D cắt EF tại I . Ta có:

- A. $\triangle DIE = \triangle DIF$.
 B. $DE = DF, \angle EDE = \angle DDF$.
 C. $IE = IF, \angle DIE = \angle DIF = 90^\circ$.
 D. Cả A, B, C đều đúng.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 Thị xã Hương Trà 2022 - 2023; huyện Kim Sơn 2021 - 2022; huyện Lộc Hà; trường Phong Đạt; trường Lý Tự Trọng 2018 - 2019; trường Thanh Văn, huyện Thanh Oai 2017 - 2018)

Cho $\angle A_y = 60^\circ$ có tia phân giác A_z . Từ điểm B trên A_x kẻ BH vuông góc với A_y tại H , K ở BK vuông góc với A_z và Bt song song với A_y , Bt cắt A_z tại C . Từ C kẻ CM vuông góc với A_y tại M . Chứng minh:

- a) K là trung điểm của AC .
 b) $\triangle KMC$ là tam giác đều.
 c) Cho $BK = 2\text{cm}$, tính các cạnh của $\triangle AKM$.

Câu 2. (HSG 7 trường Lê Quý Đôn – Tứ Kỳ 2016 - 2017; huyện Việt Yên 2012 - 2013)

Cho Oz là tia phân giác của $\angle Oy = 60^\circ$. Từ một điểm B trên tia Ox vẽ đường thẳng song song với tia Oy cắt Oz tại điểm C . Kẻ $BH \perp Oy$, $CM \perp Oy$, $BK \perp Oz$ ($H, M \in Oy; K \in Oz$). MC cắt Ox tại P . Chứng minh:

- K là trung điểm của OC .
- $\triangle KMC$ là tam giác đều.
- $OP > OC$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2018 - 2019; trường Hồng Dương, Thanh Oai 2017 - 2018)

Cho góc $\angle Ay = 60^\circ$ vẽ tia phân giác Az của góc đó. Từ một điểm B trên Ax vẽ đường thẳng song song với Ay cắt Az tại C . Vẽ $BH \perp Ay$, $CM \perp Ay$, $BK \perp AC$. Chứng minh rằng:

- K là trung điểm của AC
- $BH = \frac{AC}{2}$
- $\triangle KMC$ đều

Câu 4. (HSG 7 trường Nguyễn Trung Trực; trường Nguyễn Trãi 2018 - 2019; trường Thanh Văn, huyện Thanh Oai 2017 - 2018)

1) Cho tam giác ABC cân tại A , $\angle B = 50^\circ$. Gọi K là điểm trong tam giác sao cho $\angle KBC = 10^\circ$, $\angle KCB = 30^\circ$.

- Chứng minh $BA = BK$
- Tính số đo $\angle BAK$

2) Cho $\angle Ay = 60^\circ$ có tia phân giác Az . Từ điểm B trên Ax kẻ $BH \perp Ay$ tại H . Kẻ $BK \perp Az$ và Bt song song với Ay , Bt cắt Az tại C . Từ C kẻ CM vuông góc với Ay tại M .

- Chứng minh: K là trung điểm của AC
- Chứng minh: $\triangle KMC$ là tam giác đều

Câu 5. (HSG 7 Thị xã Sầm Sơn, 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC là tam giác đều. Lấy điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho $MA = 1$, $MB = 2$, $MC = \sqrt{3}$. Tính độ dài cạnh AB và số đo góc $\angle AMB$.

Câu 6. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong, huyện Yên Mỹ 2018 - 2019)

Cho tam giác cân ABC , $AB = AC$. Trên tia đối của các tia BC , CB lấy theo thứ tự hai điểm D và E sao cho $BD = CE$.

- Chứng minh tam giác ADE là tam giác cân.
- Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh AM là tia phân giác của $\angle DAE$.

Câu 7. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong, Yên Mỹ; huyện Tiên Phước 2018 - 2019; trường Nguyễn Văn Trỗi; trường Ngô Gia Tự 2017 - 2018; trường Võ Thị Sáu; trường Đáp Cầu, Bắc Ninh 2016 - 2017)

Cho tam giác cân ABC , $AB = AC$. Trên tia đối của các tia BC , CB lấy theo thứ tự hai điểm D và E sao cho $BD = CE$.

- Chứng minh tam giác ADE là tam giác cân.
- Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh AM là tia phân giác của $\angle A$.
- Từ B và C vẽ BH, CK theo thứ tự vuông góc với AD, AE . Chứng minh: $BH = CK$.
- Chứng minh: 3 đường thẳng AM, BH, CK gặp nhau tại một điểm.

Câu 8. (HSG 7 huyện Lục Ngạn năm 2021 - 2022)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A ($\angle A > 90^\circ$), trên cạnh BC lấy hai điểm D và E sao cho $BD = DE = EC$. Kẻ $BH \perp AD, CK \perp AE$ ($H \in AD, K \in AE$), BH cắt CK tại G .

- Chứng minh: $\triangle ADE$ cân và $BH = CK$.
- Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh 3 điểm A, M, G thẳng hàng.

Câu 9. (HSG 7 trường Liên Trường 2022 - 2023; đề thi vòng 4 - 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Gọi P, Q là trung điểm của AD, BC và I là giao điểm các đường vuông góc với AD và BC tại P và Q .

- Chứng minh $\triangle AIB = \triangle DIC$
- Chứng minh AI là tia phân giác của góc BAC .
- Kẻ IE vuông góc với AB , chứng minh $AE = \frac{1}{2} AD$.

Câu 10. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $\angle A = 90^\circ$, trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Tia phân giác của $\angle B$ cắt AC ở D .

- So sánh các độ dài DA và DE .
- Tính số đo góc $\angle BED$

Câu 11. (HSG 7 trường Nghĩa Điền, Tư Nghĩa 2017 - 2018)

Cho $\triangle ABC$, $\angle A > 90^\circ$, đường cao AH , $\angle BAH = 2\angle C$. Tia phân giác của $\angle B$ cắt AC ở E , tia phân giác của $\angle BAH$ cắt BE ở I .

- So sánh: AB với EB .
- Chứng minh: $\triangle AIE$ là tam giác vuông cân.

Câu 12. (HSG 7 trường THCS Hương Điền – Nam Hương 2017- 2018)

Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AM , BI cắt cạnh AC tại D .

a) Chứng minh $AC = 3AD$.

$$ID = \frac{1}{4}BD$$

b) Chứng minh:

Câu 13. (HSG 7 Điện Bàn 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh đáy BC lần lượt lấy hai điểm D và E sao cho $BD = DE = EC$.

a) Chứng minh $AD = AE$

b) So sánh số đo các góc $\angle BAD$ và $\angle ADE$.

Câu 14. (HSG 7 huyện 2022 - 2023; trường Đáp Cầu; trường Thanh Mai 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A , trên cạnh BC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Gọi H là trung điểm của BC .

a) Chứng minh: $AM = AN$ và $AH \perp BC$.

b) Chứng minh: $\angle MAN > \angle BAM = \angle CAN$

Câu 15. (HSG 7 (Triệu Sơn - năm học 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC , từ M kẻ đường thẳng vuông góc với tia phân giác của $\angle BAC$ tại N và cắt tia AB tại E , cắt AC tại F .

a) Chứng minh rằng $\triangle ANE = \triangle ANF$.

$$AE = \frac{AB + AC}{2}$$

b) Chứng minh rằng

Câu 16. (HSG 7 huyện Xuân Trường 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$. Kẻ AH vuông góc với $BC (H \in BC)$. Lấy điểm D trên AC sao cho $AD = AB$. Kẻ DE và DK lần lượt vuông góc với BC và $AH (E \in BC, K \in AH)$.

a) So sánh độ dài BH và AK

b) Tính số đo góc $\angle HAE$

Câu 17. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường THCS Lưu Khánh Đàm 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại $A (AB < AC)$, đường cao AH . Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Kẻ EI vuông góc với AH tại I , tia phân giác của $\angle BAC$ cắt BE tại M .

1) Chứng minh: $\triangle ABM$ vuông cân.

2) Chứng minh: $AH = EI$.

3) Chứng minh: $\angle AHM = 45^\circ$.

Câu 18. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Hưng Vũ 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Hai đường trung trực của BD, AC cắt nhau tại E . Chứng minh rằng:

a) $\triangle AEB = \triangle CED$

b) AE là tia phân giác trong tại đỉnh A của $\triangle ABC$.

Câu 19. (HSG 7 huyện Thanh Oai 2022 - 2023; huyện Mỹ Đức 2021 - 2021; huyện Bích Hòa 2013 - 2014)

Cho tam giác ABC vuông ở A , có góc $C = 30^\circ$, đường cao AH . Trên đoạn HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ CE vuông góc với AD . Chứng minh:

a) Tam giác ABD là tam giác đều

b) $AH = CE$

c) EH song song với AC

Câu 20. (HSG 7 huyện Mỹ Đức 2020 - 2021)

Cho tam giác ABC vuông tại A , có $\angle B = \frac{1}{2}\angle C$. Kẻ $AH \perp BC$ tại H . Trên tia CH lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ đường thẳng CE vuông góc với đường thẳng AD tại E .

a) Tam giác ABD là tam giác gì? Vì sao?

b) Chứng minh rằng: $AD = CD; DE = DH; HE \parallel AC$.

Câu 21. (HSG 7 huyện Lục Nam năm 2020 - 2021)

Cho tam giác ABC vuông tại A , có $\angle B = 60^\circ$. Kẻ $AH \perp BC (H \in BC)$. Trên HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ CE vuông góc với AD .

a) Chứng minh tam giác ADB đều.

b) Chứng minh: $DA = DC$ và EH vuông góc với AB .

Câu 22. (HSG 7 thị xã Kỳ Anh 2022 - 2023)

Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng (B nằm giữa A và C). M và N nằm cùng phía với nhau so với đường thẳng AB sao cho $\triangle MAB$ và $\triangle NBC$ là các tam giác đều; AN và MC cắt nhau ở I .

a) Chứng minh rằng AM song song với BN .

b) Chứng minh rằng $AN = MC$.

c) Tính số đo góc AIC .

Câu 23. (HSG 7 trường Phương Trung 2018 - 2019)

Cho tam giác cân $ABC, AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D . Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = BE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB và AC lần lượt ở M và N . Chứng minh:

a) $DM = EN$

b) Đường thẳng BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN .

c) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên BC .

Câu 24. (HSG 7 huyện Tam Điệp năm 2021 - 2022)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Trên cạnh AB lấy điểm D , trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Qua D và E kẻ các đường thẳng vuông góc với BC lần lượt tại M và N .

a) Chứng minh rằng: $BM = CN$.

b) Gọi I là giao điểm của BC và DE . Chứng minh $DE = 2ID$.

c) Kẻ AH vuông góc với BC tại H . Đường thẳng đi qua I và vuông góc với DE cắt AH tại K . Tính số đo góc DBK .

Câu 25. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm D (D khác B, C). Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Đường vuông góc với BC kẻ từ D cắt AB tại M . Đường vuông góc với BC kẻ từ E cắt đường thẳng AC tại N , MN cắt BC tại I .

a) Chứng minh: $DM = EN$.

b) Chứng minh: $IM = IN, BC < MN$.

c) Gọi O là giao của đường phân giác $\sphericalangle A$ và đường thẳng vuông góc với MN tại I . Chứng minh rằng $\triangle BMO = \triangle CNO$.

Câu 26. (HSG 7 huyện Tam Nông; Quận Hoàng Mai; trường Minh Khai; trường Văn Lang; huyện Hà Trung; huyện Nghĩa Đàn; huyện Thanh Thủy 2022 - 2023; huyện Hiệp Đức; huyện Như Xuân 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC $AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB và AC lần lượt M và N . Đường thẳng BC cắt MN tại điểm I . Chứng minh rằng:

a) Chứng minh rằng: $DM = EN$.

b) I là trung điểm của đoạn thẳng MN .

c) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC .

Câu 27. (HSG 7 huyện 2022 - 2023; huyện Hoài Nhơn 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC cân ở A . Trên cạnh AB lấy điểm M , trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $AM + AN = 2AB$

a) Chứng minh rằng: $BM = CN$

b) Chứng minh rằng: BC đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN

c) Đường trung trực của MN và tia phân giác của $\sphericalangle BAC$ cắt nhau tại K . Chứng minh rằng: $KC \perp AC$

Câu 28. (HSG 7 huyện Đồng Xuân; huyện Phúc Yên; huyện Vũ Thư 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Gọi M là trung điểm của BC . Lấy điểm E nằm giữa hai điểm C và M . Kẻ BH và CK lần lượt vuông góc với đường thẳng AE (H, K thuộc đường thẳng AE).

- a) Chứng minh: $BH = AK$;
 b) Chứng minh: $\triangle AHM = \triangle CKM$.

Câu 29. (HSG 7 Bình Lục 2022 - 2023)

Cho tam giác DEF vuông cân tại D . Gọi G là trung điểm của EF .

- a) Chứng minh $\triangle EDG = \triangle FGD$
 b) Lấy điểm H thuộc đoạn thẳng EG (H khác E và G) . Kẻ các đường thẳng EI , FK lần lượt vuông góc với đường thẳng DH tại I và K . Chứng minh $EI = DK$ và tam giác GIK vuông cân.

Câu 30. (HSG 7 huyện Yên Phong; trường Bùi Hữu Diên, huyện Hưng Hà; huyện Lập Thạch; Tp Thủ Đức 2022 - 2023; HSG 7 huyện 2017 - 2018)

Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , gọi M là trung điểm của BC . Lấy điểm D bất kì thuộc đoạn BM (D không trùng với B và M) . Gọi H và I theo thứ tự là hình chiếu của B và C xuống đường thẳng AD ; AM cắt CI tại K .

- a) Chứng minh: $BH = AI$ và $\triangle BAM = \triangle ACM$.
 b) Chứng minh: $\triangle HMI$ vuông cân.

Câu 31. (HSG 7 trường Cù Chính Lan năm học 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A có trung tuyến AM . E là điểm thuộc cạnh BC . Kẻ BH, CH vuông góc với AE (H, K thuộc AE)

- a) Chứng minh $BH = AK$
 b) Cho biết $\triangle MHK$ là tam giác gì? Vì sao?

Câu 32. (HSG 7 huyện Chương Mỹ, Thành phố Hà Nội năm học 2020 - 2021)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A , M là trung điểm BC . Lấy điểm D bất kì thuộc cạnh BM . Gọi H và I thứ tự là hình chiếu của điểm B và điểm C xuống đường thẳng AD .

- a) Chứng minh rằng $BH = AI$.
 b) Tia IM có là phân giác của góc HIC không? Vì sao?

Câu 33. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2022 - 2023)

Cho tam giác MNP vuông cân tại M , A là trung điểm của NP . Điểm B nằm giữa hai điểm A và P . Kẻ NH và PK vuông góc với MB lần lượt tại H và K .

- a) Chứng minh: $\triangle HMN = \triangle KPM$.
 b) Chứng minh: $\triangle MAP$ là tam giác cân và $AH \perp AK$.

Câu 34. (HSG 7 Chư Sê, Gia Lai 2021 - 2022)

Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại góc A . Tia AM là tia phân giác $\angle BAC$ ($M \in BC$) . Lấy D trên BC sao cho D nằm giữa B và M . Gọi H, I theo thứ tự là hình chiếu của B và C xuống đường thẳng AD . Chứng minh:

- a) $BH = AI$.
- b) $\triangle BHM = \triangle AIM$.
- c) IM là tia phân giác $\angle HIC$.

Câu 35. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A . M là trung điểm của BC . Lấy I là một điểm nằm giữa C và M . Từ B và C vẽ BD và CE lần lượt vuông góc với AI . (D và E thuộc AI).

Chứng minh rằng:

- a) $BD = AE$
- b) $\triangle BAC = \triangle EAC$
- c) DM tia phân giác $\angle BDE$

Câu 36. (HSG 7 Đức Thọ, Hà Tĩnh 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A ; M là trung điểm của cạnh BC . Lấy điểm D bất kỳ thuộc đoạn thẳng BM . Kẻ BH vuông góc với AD ($H \in AD$), CI vuông góc với AD ($I \in AD$). Đường thẳng AM cắt CI tại N . Chứng minh rằng:

- a) DN vuông góc với AC .
- b) $\triangle AHB = \triangle CIA$.
- c) IM là tia phân giác của góc $\angle CID$.

Câu 37. (HSG 7 Nam Đàn- Nghệ An 2022 - 2023)

Cho $\triangle MNP$ vuông cân tại M , gọi I là trung điểm của NP . Lấy điểm D bất

kì trên đoạn thẳng NI (D khác N và I). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của N và P xuống đường thẳng MD .

a)

Chứng minh $MK = NH$.

- b) Kẻ MI cắt PK tại E . Chứng minh đường thẳng DE vuông góc với MP .
- c) Chứng minh KI là phân giác của $\angle PKD$.

Câu 38. (HSG 7 huyện Phú Lý, trường Lý Tự Trọng 2018 - 2019)

Cho đoạn thẳng BC cố định, M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Vẽ góc $\angle CBx$ sao cho $\angle CBx = 45^\circ$, trên tia Bx lấy điểm A sao cho độ dài đoạn thẳng BM và BA tỉ lệ với 1 và $\sqrt{2}$. Lấy điểm D bất kỳ thuộc đoạn thẳng BM . Gọi H và I lần lượt là hình chiếu của B và C trên đường thẳng AD . Đường thẳng d cắt CI tại N . Chứng minh rằng:

- a) DN vuông góc với AC
- b) $BH^2 + CI^2$ có giá trị không đổi khi D di chuyển trên đoạn thẳng BM
- c) Tia phân giác của góc HIC luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 39. (HSG 7 huyện Tam Nông, tỉnh Thanh Hóa, 2018 – 2019)

Cho tam giác ABC có $AB = AC$, $\angle A = 100^\circ$. Tia phân giác của $\angle B$ cắt AC tại D , qua A kẻ đường vuông góc với BD cắt BC ở I .

- a) Chứng minh $BA = BI$.
- b) Trên tia đối của tia DB lấy điểm K sao cho $DA = DK$. Chứng minh $\triangle AIK$ đều.
- c) Tính các góc của tam giác BCK .

Câu 40. (HSG 7 huyện Thường Tín năm học 2018 – 2019)

Cho tam giác ABC có $AB = AC$, $\angle A = 100^\circ$. Tia phân giác của $\angle B$ cắt AC tại D , qua A kẻ đường vuông góc với BD cắt BC ở I .

- a) Chứng minh rằng: BD là trung trực của AI
- b) Trên tia đối của tia DB lấy K sao cho $DK = DA$. Chứng minh rằng: tam giác AIK đều
- c) Chứng minh: $BK = BC$

Câu 41. (HSG 7 Yên Mỹ, Hưng Yên 2021 - 2022; trường Châu Đốc 2018 - 2019; huyện Tiền Hải 2016 - 2017)

Cho $\triangle ABC$ nhọn có $\angle A = 60^\circ$. Phân giác của $\angle ABC$ cắt AC tại D , phân giác của $\angle ACB$ cắt AB tại E , cắt CE tại I .

- a) Tính số đo $\angle BIC$.
- b) Trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $BF = BE$. Chứng minh $\triangle CID = \triangle CIF$.
- c) Trên tia IF lấy điểm M sao cho $IM = IB + IC$. Chứng minh $\triangle BCM$ đều.

Câu 42. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2017- 2018)

Cho tam giác ABC có $\angle B < 90^\circ$ và $\angle B = 2\angle C$. Kẻ đường cao AH . Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BH$. Đường thẳng HE cắt AC tại D .

- a) So sánh độ dài của ba đoạn thẳng : DH , DC và DA .
- b) Lấy B' sao cho H là trung điểm của BB' . Tam giác $AB'C$ là tam giác gì? Vì sao?

Câu 43. (HSG 7 trường Vị Thanh 2018 - 2019; huyện Kim Sơn; huyện Thái Thụy 2017 - 2018; huyện Hiệp Hòa; huyện Việt Yên 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC có $\angle B = 2\angle C$. Kẻ đường cao AH . Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BH$. Đường thẳng HE cắt AC tại D .

- a) Chứng minh: $\angle BEH = \angle ACB$.

b) Chứng minh: $DH = DC = DA$.

c) Lấy B' sao cho H là trung điểm của BB' . Chứng minh $\triangle AB'C$ cân.

d) Chứng minh $AE = HC$.

Câu 44. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Thái Hưng 2022 - 2023; huyện Việt Yên 2018 - 2019)

Cho $\triangle ABC$ ($AB > AC$), M là trung điểm của cạnh BC , đường thẳng đi qua trung điểm M và vuông góc với tia phân giác của $\angle A$ tại H , cắt các cạnh AB , AC theo thứ tự tại E và F .

a) Chứng minh: $EH = HF$.

b) Chứng minh: $2\angle BME = \angle ACB - \angle B$.

c) Chứng minh: $BE = CF$.

Câu 45. (HSG 7 trường Trần Hưng Đạo 2017- 2018)

Cho tam giác nhọn ABC có $AB > AC$, ba đường cao BD , CE và AF cắt nhau tại H . Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $AM = AC$. Gọi N là hình chiếu của M trên AC ; K là giao điểm của MN và CE .

a) Chứng minh hai góc $\angle KAH$ và $\angle MCB$ bằng nhau.

b) Chứng minh $AB + CE > AC + BD$.

Câu 46. (HSG 7 huyện Sóc Sơn 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A . Kẻ BD vuông góc với đường thẳng AC tại D . Lấy điểm E bất kỳ trên cạnh BC (E khác B , khác C). Kẻ EF , EG , EH lần lượt vuông góc với AB , AC , BD .

1) Chứng minh: $\triangle HBE = \triangle FEB$.

2) Chứng minh rằng $EF + EG = BD$.

3) Nêu cách xác định vị trí điểm E trên BC để tam giác EGH vuông cân.

Câu 47. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2021 - 2022; huyện Mỹ Cày; huyện Sông Lô 2017- 2018; huyện Thái Thụy 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC cân tại A , BH vuông góc với AC tại H . Trên cạnh BC lấy điểm M bất kỳ (khác B và C). Gọi D , E , F là chân đường vuông góc hạ từ M đến AB , AC , BH .

a) Chứng minh $\triangle DBM = \triangle FMB$.

b) Chứng minh khi M chạy trên cạnh BC thì tổng $MD + ME$ có giá trị không đổi.

c) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho $CK = EH$. Chứng minh BC đi qua trung điểm của DK .

Câu 48. (HSG 7 huyện Bá Phước, Thanh Hóa 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC cân tại A , BH vuông góc với AC tại H . Trên cạnh BC lấy điểm M bất kỳ (M khác B và C). Gọi D, E, F là chân đường vuông góc hạ từ M đến AB, AC, BH .

a) Chứng minh rằng $\triangle DBM = \triangle FMB$ và $MD + ME = BH$.

b) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho $CK = EH$. Chứng minh rằng BC đi qua trung điểm I của DK .

c) Chứng minh rằng đường vuông góc với DK tại I luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên BC .

Câu 49. (HSG 7 Ứng Hòa – Hà Tây- năm học 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$, vẽ đường phân giác AD . Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$.

1) Chứng minh: $BD = DE$

2) Gọi K là giao điểm của AB và ED . Chứng minh rằng: $\triangle DBK = \triangle DEC$.

3) $\triangle ABC$ cần có thêm điều kiện gì để D cách đều ba cạnh của $\triangle AKC$.

Câu 50. (HSG 7 huyện Tiên Du 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Tia phân giác của góc A cắt BC tại điểm I . Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$.

a) Chứng minh rằng $BI = ID$.

b) Tia DI cắt tia AB tại E . Chứng minh rằng $\triangle IBE = \triangle IDC$. Từ đó suy ra $BD \parallel CE$.

c) Gọi H là trung điểm của EC . Chứng minh $AH \perp BD$.

d) Cho $\angle ABC = 2\angle ACB$. Chứng minh $AB + BI = AC$.

Câu 51. (HSG 7 huyện Hồng Ngự năm học 2017 - 2018)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $\angle A = 20^\circ$ vẽ tam giác đều DBC (D nằm trong $\triangle ABC$). Tia phân giác của $\angle ABD$ cắt AC tại M . Chứng minh:

a) Tia AD là phân giác của $\angle ABC$

b) $AM = BC$

Câu 52. (Olympic 7, trường Sương Bình 2017 - 2018; trường Thanh Oai 2018 - 2019)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A , có $\angle A = 108^\circ$. Gọi O là một điểm nằm trên tia phân giác của $\angle C$ sao cho $\angle BO = 12^\circ$, vẽ tam giác đều BOM (M và A cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BO).

a) Chứng minh ba điểm C, A, M thẳng hàng.

b) Chứng minh tam giác AOB cân.

Câu 53. (HSG 7 huyện năm 2018 - 2019)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A với $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$ và $BC = 15$ cm. Tia phân giác của $\angle C$ cắt AB tại D .

Kẻ $DE \perp BC$ ($E \in BC$)

a) Chứng minh $AC = CE$

b) Trên tia AB lấy điểm F sao cho $AF = AC$. Kẻ tia $Fx \perp FA$ cắt tia DE tại M . Tính $\angle BCM$

Câu 54. (HSG 7 huyện Cẩm Phổ 2017 - 2018)

Cho $\triangle ABC$ có $\angle B + \angle C = 60^\circ$, phân giác AD . Trên AD lấy điểm O . Trên tia đối của tia AC lấy điểm M sao cho $\angle ABM = \angle ABO$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $\angle ACN = \angle ACO$.

- Chứng minh $AM = AN$.
- Chứng minh $\triangle MON$ là tam giác đều.

Câu 55. (HSG 7 huyện Thanh Chương 2018 - 2019)

Tam giác ABC cân tại C và $\angle C = 100^\circ$; BD là phân giác của $\angle B$. Từ A kẻ tia Ax tạo với AB một góc 30° . Tia Ax cắt BD tại M , cắt BC tại E . Vẽ BK là phân giác $\angle CBD$, BK cắt Ax tại N .

- Tính số đo $\angle ACM$
- So sánh MN và CE .

Câu 56. (HSG 7 huyện Việt Yên 2017- 2018)

Cho tam giác ABC cân tại A ($\angle B = \angle C = 40^\circ$). Kẻ phân giác BD ($D \in AC$). Trên tia AB lấy điểm M sao cho $AM = BC$.

- Chứng minh $BD + AD = BC$.
- Tính $\angle AMC$.

Câu 57. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC ($CA < CB$), trên BC lấy các điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Qua điểm M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AN tại I .

- Chứng minh: I là trung điểm của AN
- Qua K là trung điểm của AB kẻ đường thẳng vuông góc với đường phân giác $\angle ACB$ cắt đường thẳng AC tại E , đường thẳng BC tại F . Chứng minh $AE = BF$

Câu 58. (HSG 7 TP Thanh Thiện 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A ($AB > BC$). Gọi F là trung điểm của AC , qua F kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt đường thẳng BC tại M . Trên tia đối của tia AM lấy điểm N sao cho $AN = BM$.

- Chứng minh: $AM = CN$.
- Chứng minh: $\angle AMC = \angle BAC$.

- c) Lấy điểm D trên cạnh AC , điểm E trên cạnh AB sao cho $AD = AE$. Trên tia BM lấy điểm I sao cho $BI = DE$. Chứng minh: $BD > \frac{BC + DE}{2}$.

Câu 59. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023; huyện Thanh Sơn 2021 - 2022)

Cho $\triangle ABC$ có đường trung tuyến AD , đường thẳng qua D và song song với AB cắt đường thẳng qua B song song với AD tại E , AE cắt BD tại I . Gọi K là trung điểm của đoạn EC .

- a) Chứng minh rằng: $IA = IE$
 b) Chứng minh: Ba điểm A, D, K thẳng hàng.

Câu 60. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC vuông tại A . Tia phân giác của góc B cắt AC tại điểm M . Lấy điểm D trên cạnh BC sao cho $BD = BA$. Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng DM và BA .

- a) Chứng minh: $MA = MD$.
 b) Kẻ $DH \perp MC$ ($H \in MC$) và $AK \perp ME$ ($K \in ME$), gọi N là giao điểm của hai tia DH và AK . Chứng minh $\triangle MHN = \triangle MKN$ và ba điểm B, M, N thẳng hàng.
 c) Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt tia BM tại F .
 Chứng minh: $AB + AM < CF + CM$.

Câu 61. (HSG 7 trường Trà My 2018 - 2019; huyện Xuân Dương 2013 - 2014)

Cho $\triangle ABC$ vuông ở A có $\angle C = 30^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $\angle BCM = \frac{2}{3} \angle ACB$, trên cạnh AC lấy điểm N sao cho $\angle BDN = \frac{2}{3} \angle ABC$. Gọi giao điểm của CM và BN là K .

- 1) Tính góc $\angle CKN$.
 2) Gọi F và I theo thứ tự là hình chiếu của điểm K trên BC và AC . Trên tia đối của tia IK lấy điểm D sao cho $IK = ID$, trên tia KF lấy điểm E sao cho $KF = FE$ ($E \neq K$). Chứng minh $\triangle DCE$ là tam giác đều.
 3) Chứng minh ba điểm D, N, E thẳng hàng.

Câu 62. (HSG 7 huyện Gia Viễn – Ninh Bình 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$), D là trung điểm của BC , trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho $DE = DA$. Gọi H và K thứ tự là chân đường vuông góc hạ từ B và C xuống đường thẳng AE , M là chân đường vuông góc hạ từ D xuống AC .

- a) Chứng minh $BK = CH$.
 b) Chứng minh $CD > KM$.
 c) Từ E kẻ đường thẳng vuông góc với BC tại P và cắt BH tại N . Chứng minh ba điểm D, M, N thẳng hàng.

d) Giả sử $\angle ACB = 36^\circ$, tia phân giác của $\angle ACB$ cắt AD tại F . Chứng minh $\triangle CEF$ cân.

Câu 63. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2017 - 2018)

Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, BD .

- Tam giác BDC là tam giác gì? Vì sao? So sánh DM và CN .
- Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với CN cắt tia BA tại K . Chứng minh: $\triangle BMK = \triangle CMD$.
- Biết $AB = a$. Tính chu vi tam giác DMK .

Câu 64. (HSG 7 Lý Nhân, Hà Nam 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa điểm B kẻ tia Cx song song với AB . Gọi E là trung điểm BC , tia AE cắt Cx tại D .

- Chứng minh E là trung điểm của AD .
- Từ E hạ EK vuông góc với AC (K thuộc AC). Chứng minh $\angle EDK = \angle B$.
- BK cắt AE ở P , DK cắt BC tại H . Chứng minh PH song song với AC .

Câu 65. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2022 - 2023; huyện Thiệu Hóa 2020 - 2021)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), D là trung điểm BC . Trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB chứa điểm C , vẽ đoạn thẳng AE vuông góc với AB tại A và $AE = AB$. Trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AC , chứa điểm B vẽ đoạn AK vuông góc với AC tại A và $AK = AC$.

- Chứng minh rằng: $EC = BK$.
- Trên tia đối tia DA lấy điểm N sao cho $DN = DA$. Chứng minh $\triangle AKE = \triangle CAN$.

Câu 66. (HSG 7 huyện Nghi Xuân 2022 - 2023)

Cho tam giác nhọn ABC . Trên nửa mặt phẳng chứa C bờ AB vẽ AD vuông góc với AB và $AD = AB$. Trên nửa mặt phẳng chứa B bờ AC vẽ AE vuông góc với AC và $AE = AC$.

- Chứng minh: $BE = CD$.
- Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh: $AM \perp ED$.

Câu 67. (HSG 7 huyện Yên Định 2022 - 2023; huyện Rạch Giá 2018 - 2019; huyện Hương Khê 2017 - 2018; huyện Đất Mũi 2016 - 2017)

Cho $\triangle ABC$, trung tuyến AM . Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh C bờ là đường thẳng AB dựng đoạn AE vuông góc với AB và $AE = AB$. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh B bờ là đường thẳng AC dựng đoạn AF vuông góc với AC và $AF = AC$. Chứng minh rằng:

- $FB = EC$.
- $EF = 2AM$.
- $AM \perp EF$.

Câu 68. (HSG 7 Vũ Thư, Thái Bình 2021 – 2022)

Cho $\triangle ABC$ nhọn. Kẻ tia Ax vuông góc với AB (tia AC nằm giữa hai tia Ax và AB), trên tia Ax lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Kẻ tia Ay vuông góc với AC (tia AB nằm giữa hai tia Ay và AC), trên tia Ay lấy điểm E sao cho $AE = AC$.

a) Chứng minh $BE = CD$.

b) Gọi M là trung điểm của BC . Lấy điểm H thuộc tia đối của tia MA sao cho $MH = MA$. Chứng minh $\triangle ADE = \triangle CHE$.

Câu 69. (HSG 7 Phòng GD&ĐT Hoàng Hóa 2018 - 2019)

Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, $AB < AC$, trung tuyến AM . Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C , vẽ đoạn thẳng AE vuông góc với AB và $AE = AB$. Trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa điểm B , vẽ đoạn thẳng AD vuông góc với AC và $AD = AC$.

a) Chứng minh $BD = CE$

b) Trên tia đối của tia MA lấy N sao cho $MN = MA$. Chứng minh: $\angle CN = 180^\circ - \angle BAC$ và $\triangle ADE = \triangle CAN$

c) Chứng minh: $AP < AQ$

Câu 70. (HSG 7 huyện Sơn Động; huyện Kinh Môn 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có M là trung điểm của cạnh BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $MA = ME$

a) Chứng minh: $AC = EB$; $AC \parallel BE$.

b) Gọi I là một điểm trên đoạn thẳng AC , K là một điểm trên đoạn thẳng EB mà $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

Câu 71. (HSG 7 huyện Đông Hưng 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$

a) Chứng minh rằng: $AC = EB$ và $AC \parallel BE$.

b) Gọi I là một điểm trên AC ; K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

c) Từ B kẻ $BP \perp AM$, từ C kẻ $CQ \perp AM (P, Q \in AE)$. Chứng minh $AP + AQ = 2AM$.

Câu 72. (HSG 7 huyện Krông Ana; trường Bắc Sơn, huyện Hưng Hà 2022 - 2023; huyện Thuận Thành, Bắc Ninh 2021 - 2022; trường Nguyễn Chí 2017 - 2018)

Cho $\triangle ABC$, M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$.

a) Chứng minh rằng: $AC = EB$ và $AC \parallel BE$.

b) Gọi I là một điểm trên AC , K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

- c) Từ E kẻ $EH \perp BC (H \in BC)$. Biết $\angle HBE = 50^\circ, \angle MEB = 25^\circ$. Tính $\angle HEM$ và $\angle BME$.

Câu 73. (HSG 7 trường Hùng Thư 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng:

- a) $AC = EB$ và $AC \parallel BE$.
- b) Gọi I là một điểm trên AC ; K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.
- c) Từ E kẻ $EH \perp BC (H \in BC)$. Biết $\angle HBE = 50^\circ, \angle MEB = 25^\circ$. Tính $\angle HEM$ và $\angle BME$.
- d) Từ H kẻ $HF \perp BE (F \in BE)$. Chứng minh rằng: $HF + BE > BH + HE$.

Câu 74. (HSG 7 huyện Tam Dương 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $AB < AC < BC$ gọi O là giao điểm của ba đường phân giác của tam giác ABC . Kẻ OH vuông góc với AC tại H , OI vuông góc với BC tại I .

- a) Chứng minh $\triangle CHI$ là tam giác cân
- b) Trên đoạn AC lấy K sao cho $IK = AH$, gọi M là giao điểm của AK và HI . Chứng minh M là trung điểm của AK .
- c) Chứng minh B, O, M thẳng hàng

Câu 75. (HSG 7 TP Lào Cai 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của góc A và góc C cắt nhau tại O . Gọi F là hình chiếu của O trên BC ; H là hình chiếu của O trên AC . Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI .

- a) Chứng minh $\triangle FCH$ cân; $OA = OI$.
- b) Gọi M là điểm trên đoạn thẳng FH sao cho $MI = FI$. Chứng minh $MI \parallel AC$.
- c) Chứng minh K là trung điểm của AI và 3 điểm B, O, K thẳng hàng

Câu 76. (HSG 7 huyện Quan Sơn; huyện Hoàng Hóa; trường Hồng Lĩnh, huyện Hưng Hà 2022 - 2023; trường Lê Hồng Phong; trường Nhon Trí 2018 - 2019; trường Kim An; trường Phú Trường; trường Lý Thường Kiệt 2017- 2018; trường Giao Tân; trường Nguyễn Khuyến 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của $\angle A$ và $\angle C$ cắt nhau tại O . Gọi F là hình chiếu của O trên BC ; H là hình chiếu của O trên AC . Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI .

- 1) Chứng minh $\triangle FCH$ cân.
- 2) Chứng minh $AK = KI$.
- 3) Chứng minh ba điểm B, O, K thẳng hàng.

Câu 77. (HSG 7 TP Bắc Giang 2022-2023)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn có $AB < AC$. Các tia phân giác của $\widehat{A}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại O . Gọi F và H lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ O xuống các cạnh BC và AC .

a) Chứng minh ΔHFC cân tại C .

b) Trên cạnh FC lấy điểm I sao cho $AH = FI$. Qua I kẻ đường thẳng song song AC cắt FH tại G . Gọi K là giao điểm của AI và FH . Chứng minh $\Delta AHK = \Delta IGK$.

c) Chứng minh ba điểm B, O, K thẳng hàng.

Câu 78. (HSG 7 Thị xã Kinh Môn, tỉnh Hải Dương 2020 – 2021)

Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC < BC$, O là giao điểm ba tia phân giác các góc trong của tam giác. Kẻ OH vuông góc AC tại H , OI vuông góc BC tại I .

1) Chứng minh ΔCHI cân.

2) Trên đoạn IC lấy K sao cho $IK = AH$, gọi M là giao điểm của AK và HI . Chứng minh M là trung điểm của AK .

3) Chứng minh B, O, M thẳng hàng.

Câu 79. (HSG 7 TP Thái Bình, Thái Bình, Trường Trần Hãn 2021 - 2022)

Cho tam giác ΔABC vuông cân tại A . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB, AC . Kẻ NH vuông góc CM tại H , HE vuông góc AB tại E , AK vuông góc CM tại K , AQ vuông góc với HN tại Q .

a) Tính $\widehat{BKH}$.

b) Chứng minh ΔABH cân.

c) Chứng minh HM là phân giác của $\widehat{BHE}$.

Câu 80. (HSG 7 huyện Quảng Xương 2022 - 2023)

Cho ΔABC vuông cân có đáy là BC . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC .

Kẻ NH vuông góc với CM tại H . Kẻ HE vuông góc với AB tại E . Kẻ AK vuông góc với CM tại K . Kẻ AQ vuông góc với HN tại Q .

a) Chứng minh tam giác $\Delta AKM = \Delta CHN = \Delta AQN$

b) Chứng minh ΔABH cân.

c) Gọi F là điểm di động trên tia CA , P là điểm di động trên tia CB . Xác định vị trí các điểm F, P sao cho ΔHFP có chu vi bé nhất.

Câu 81. (HSG 7 huyện Đô Lương 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Từ điểm E trên cạnh AB vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt các đường thẳng BC và AC thứ tự tại H và M . Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng BE . Từ H vẽ đường thẳng song song với AB cắt đường thẳng AC tại K .

a) Chứng minh tam giác BHE cân.

b) Chứng minh K là trung điểm của đoạn thẳng MC .

c) Cho điểm O nằm trong tam giác ABC sao cho $OA = OC$ và $\angle AOC = 150^\circ$. Chứng minh $AB = OB$.

Câu 82. (HSG 7 huyện Thọ Xuân 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC vuông cân có đáy BC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Kẻ NH vuông góc với CM tại H . Kẻ HE vuông góc với AB tại E . Kẻ AK vuông góc với CM tại K . Kẻ AQ vuông góc với HN tại Q .

- 1) Chứng minh rằng $AK = HC = AQ$. Tính số đo góc BKA .
- 2) Chứng minh tam giác ABH cân và HM là tia phân giác của góc BHE .
- 3) Gọi I là điểm di động trên tia CA , J là điểm di động trên tia CB . Xác định vị trí các điểm I, J sao cho tam giác HJI có chu vi bé nhất.

Câu 83. (HSG 7 Diễn Châu 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy D , trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB và AC lần lượt ở M và N . Chứng minh rằng:

- a) $BM = CN$.
- b) $BC < MN$.
- c) Đường thẳng vuông góc với MN tại giao điểm của MN và BC luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC .

Câu 84. (HSG 7 huyện Thanh Uyên 2022 - 2023; trường Bến Lức 2018 - 2019)

Cho tam giác cân $ABC, AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB, AC lần lượt ở M, N . Chứng minh rằng:

- a) $DM = EN$
- b) Đường thẳng BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN
- c) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC .

Câu 85. (HSG 7 huyện Kim Sơn năm 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm $D (D \neq B, C)$. Trên tia đối của tia CB , lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Đường vuông góc với BC kẻ từ D cắt BA tại M . Đường vuông góc với BC kẻ từ E cắt tia AC tại N , MN cắt BC tại I .

- a) Chứng minh rằng: $DM = EN$
- b) Chứng minh rằng: $IM = IN; BC < MN$

c) Gọi O là giao của đường phân giác góc A và đường thẳng vuông góc với MN tại I . Chứng minh rằng: $\triangle BMO = \triangle CNO$. Từ đó suy ra điểm O cố định.

Câu 86. (HSG 7 Thanh Hóa - năm học 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Trên cạnh AB lấy điểm M ; trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Kẻ MH và NK cùng vuông góc với BC ($H, K \in BC$). Gọi I là giao điểm của MN và BC .

a) Chứng minh $\triangle HBM = \triangle KCN$ và I là trung điểm của MN .

b) Đường trung trực của MN cắt tia phân giác Ax của góc BAC tại P . Chứng minh rằng: $\angle PMB = \angle PNC$.

c) Chứng minh rằng: Khi M di động trên AB và N di động trên tia đối của CA đồng thời thỏa mãn $BM = CN$ thì P là một điểm cố định.

Câu 87. (HSG 7 trường TH&THCS Kỳ Đồng, Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $DC = 2BD$. Đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt cạnh AB tại E và cắt tia CA tại F . Qua C kẻ đường thẳng song song với AB cắt tia phân giác AH của góc BAC ($H \in BC$) tại K .

a) Chứng minh $\triangle ABH = \triangle KCH$.

b) Chứng minh tam giác AEF là tam giác cân.

c) Trên tia đối của tia CA lấy điểm I sao cho $CI = BE$. Chứng minh BC đi qua trung điểm của EI .

Câu 88. (HSG 7 huyện Nghi Sơn 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D cắt AB tại M . Đường thẳng vuông góc với BE tại E cắt AC tại N .

1) Chứng minh $\triangle MBD = \triangle NCE$

2) Cạnh BC cắt MN tại I . Chứng minh I là trung điểm của MN .

3) Chứng minh đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua một điểm O cố định khi D thay đổi trên đoạn BC .

Câu 89. (HSG 7 huyện Bát Xát 2022 - 2023)

Cho tam giác cân ABC , $AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D (D không trùng với B và C), trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt cạnh AB và tia AC lần lượt tại M và N .

a) Chứng minh: $\triangle MDB = \triangle NEC$.

b) Gọi I là trung điểm MN . Chứng minh: I là trung điểm DE .

c) Chứng minh rằng: Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên BC .

Câu 90. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A , trên cạnh BC lấy điểm D (không trùng với B, C), trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$, các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E theo thứ tự cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại M và N .

- 1) Chứng minh rằng $DM = EN$;
- 2) Đường thẳng BC cắt MN tại I . Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng MN ;
- 3) So sánh chu vi của tam giác ABC và chu vi của tam giác AMN ;
- 4) Chứng minh: Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua điểm cố định khi D thay đổi trên BC .

Câu 91. (HSG 7 Cửa Lò, Nghệ An 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC cân tại A . Kẻ $CD \perp AB$ tại D , $BE \perp AC$ tại E .

- a) Chứng minh $\triangle ABE = \triangle ACD$.
- b) Chứng minh $DE \parallel BC$.
- c) Qua B kẻ đường thẳng song song với DC , qua C kẻ đường thẳng song song với EB , hai đường thẳng này cắt nhau tại N . Gọi O là giao điểm của BE và CD , M là trung điểm của BC . Chứng minh bốn điểm A, O, M, N cùng thuộc một đường thẳng.

Câu 92. (HSG 7 huyện Cao Lộc, tỉnh Lạng Sơn 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC cân tại A . Kẻ đường cao BE ($E \in AC$). Qua E kẻ đoạn thẳng EK vuông góc với BC tại I sao cho I là trung điểm của EK .

- a) Chứng minh BK vuông góc với KC .
- b) Chứng minh $\angle EKE = \angle EBC$.
- c) Kẻ đường cao CF ($F \in AB$) cắt BE tại H . Trên BK lấy điểm Q sao cho $QK = HE$. Chứng minh ba điểm A, H, Q thẳng hàng.

Câu 93. (HSG 7 huyện Tam Điệp, 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A , tia phân giác của góc B và góc C cắt AC và AB lần lượt tại E và D .

- a) Chứng minh rằng $BE = CD$; $AD = AE$.
- b) Gọi I là giao điểm của BE và CD , AI cắt BC ở M . Chứng minh rằng tam giác MAB vuông cân.
- c) Từ A và D vẽ các đường thẳng vuông góc với BE , các đường thẳng này cắt BC lần lượt ở K và H . Chứng minh $KH = KC$.

Câu 94. (HSG 7 Cẩm Thủy, Thanh Hóa 2021 - 2022; huyện Khoái Châu 2014 - 2015)

Cho tam giác ABC có $\angle A = 90^\circ$. Các đường phân giác BD và CE ($D \in AC, E \in AB$) cắt nhau tại O .

a) Tính số đo góc BOC

b) Trên BC lấy hai điểm M và N sao cho $BM = BA, CN = CA$. Chứng minh EN song song với DM .

c) Gọi I là giao điểm của BD và AN . Chứng minh tam giác AIM vuông cân.

Câu 95. (HSG 7 Quận Phú 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $AB < AC$. Trên cạnh BC lấy điểm M và N sao cho $MC = CA, NB = BA$. Tia phân giác của góc B cắt AM tại I và cắt AN tại D , tia phân giác góc C cắt AN tại K và cắt AM tại E . Gọi O là giao điểm của BD và CE .

1) Tính góc BOC .

2) Chứng minh: $BD \perp AN$ và $BD \parallel MK$.

3) Chứng minh: $AO = IK$.

Câu 96. (HSG 7 huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Từ trung điểm D của BC vẽ đường vuông góc với tia phân giác của góc A tại H . Đường thẳng này cắt các tia AB tại E và AC tại F . Vẽ tia BM song song với EF ($M \in AC$).

a) Chứng minh $\triangle ABM$ cân.

b) Chứng minh: $MF = BE = CF$.

c) Qua D vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt tia AH tại I . Chứng minh: $IF \perp AC$.

Câu 97. (HSG 7 huyện Thanh Miện, tỉnh Hải Dương năm học 2021 - 2022)

Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$, M là trung điểm của BC . Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với BC , đường thẳng này cắt tia phân giác của góc $\angle BAC$ tại D . Vẽ DH và DK lần lượt vuông góc với đường thẳng AB và đường thẳng AC tại H và K .

a) Chứng minh $BD = CD$ và $BH = CK$.

b) Chứng minh ba điểm H, M, K thẳng hàng.

Câu 98. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2022 - 2023; huyện Hưng Hà năm 2021 - 2022)

Cho điểm M thuộc đoạn thẳng AB ($MA > MB$). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB , vẽ các tam giác đều $\triangle AMC, \triangle BMD$. Gọi E, F thứ tự là trung điểm của AD, BC . Gọi K là giao điểm AD và BC . Chứng minh rằng:

a) $AD = BC$

b) $\triangle AEM = \triangle CFM$, từ đó suy ra $\triangle MEF$ là tam giác đều.

$$\frac{AK + BK - CK - DK}{KM} = 2$$

c)

Câu 99. (HSG 7 trường Trần Thái Tông, huyện Hưng Hà 2022 - 2023; huyện Quảng Trạch, Quảng Bình 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ đường cao AH . Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm H , vẽ tia Ax sao cho $\widehat{BAx} = \widehat{BAH}$. Gọi Ay là tia đối của tia Ax . Vẽ BD và CE vuông góc với đường thẳng xy ($D, E \in xy$). AB cắt DH tại M , AC cắt EH tại N .

a) Chứng minh rằng: Tia AC là phân giác của $\widehat{HAE}$.

b) Chứng minh rằng: $BD + CE = BC$.

c) Chứng minh rằng: $MN = AH$.

Câu 100. (HSG 7 huyện Thanh Trì 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $\widehat{B} < 90^\circ$, $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Trên tia đối tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BH$.

a) Chứng minh $\widehat{BEH} = \widehat{ACB}$

b) Lấy I là trung điểm đoạn HC . Trên tia đối tia IA lấy điểm D sao cho $IA = ID$.

Chứng minh $\triangle ACD = \triangle DHA$ và tia đối tia HA là phân giác của $\widehat{EHD}$.

c) Chứng minh tia EH đi qua trung điểm M của đoạn thẳng AC .

d) Chu vi tam giác ABH lớn hơn độ dài đoạn thẳng AC .

Câu 101. (HSG 7 huyện Nghĩa Hành 2021 - 2022; trường Cự Khê 2016 - 2017; huyện Thanh Oai 2013 - 2014)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$). Tia phân giác góc B cắt AC ở D . Kẻ DH vuông góc với BC . Trên tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Đường thẳng vuông góc với AE tại E cắt tia DH ở K . Chứng minh rằng:

a) $BA = BH$

b) $\widehat{DBK} = 45^\circ$

c) Cho $AB = 4$ cm, tính chu vi tam giác DEK

Câu 102. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$.

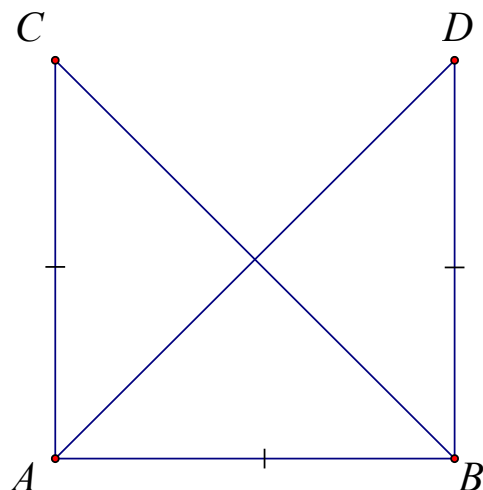
Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt đường trung trực của CE tại F .

a) Chứng minh tam giác BFC cân.

b) Biết góc $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Chứng minh tam giác BFE đều.

Câu 103. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, tỉnh Thanh Hóa năm học 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A , trên cạnh AB ta vẽ tam giác ABD vuông cân tại B như hình vẽ.



- 1) Gọi E là trung điểm của BD . Đường thẳng qua C vuông góc với AE tại M cắt AB tại P . Chứng minh: $\triangle ABE = \triangle CAP$.
- 2) Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với AE tại H .
 - a) Chứng minh: $MA = MH$.
 - b) Chứng minh tam giác HBM vuông cân.
- 3) Gọi N là trung điểm của CM , đường thẳng BM cắt đường thẳng DN tại K . Tính số đo $\angle BKM$.

Câu 104. (HSG 7 huyện Chương Mỹ năm học 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC có $\angle BAC < 90^\circ$, đường cao AH . Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB, AC đường thẳng EF cắt AB, AC lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng:

- a) $AE = AF$
- b) HA là phân giác của $\angle MHN$
- c) $CM \parallel EH, BN \parallel FH$

Câu 105. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường THCS Kim Trung 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ nhọn, kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$), lấy các điểm D và E ở ngoài tam giác sao cho AB là đường trung trực của HD và AC là đường trung trực của HE . Đoạn thẳng DE cắt cạnh AB ở I và cắt cạnh AC ở K ; HD cắt AB ở M và HE cắt AC ở N .

- a) Chứng minh: $\triangle ADE$ cân.
- b) Chứng minh: HA là tia phân giác của $\angle HIK$.
- c) Chứng minh: $\angle BAC = \angle HIC$.

Câu 106. (HSG 7 huyện Tương Dương 2022 - 2023; huyện Thanh Oai 2014 - 2015)

Cho $\triangle ABC$ nhọn, AD vuông góc với BC tại D . Xác định I, J sao cho AB là trung trực của DI , AC là trung trực của DJ ; IJ cắt AB, AC lần lượt ở L và K . Chứng minh rằng:

- a) $\triangle AIJ$ cân

b) DA là tia phân giác của góc LDK

c) $BK \perp AC; CL \perp AB$

d) Nếu D là một điểm tùy ý trên cạnh BC . Chứng minh rằng góc IAJ có số đo không đổi và tìm vị trí điểm D trên cạnh BC để IJ có độ dài nhỏ nhất.

Câu 107. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Tân Tiến 2022 - 2023)

Cho góc vuông $\widehat{xAy}$, C là một điểm thuộc tia phân giác Az của $\widehat{xAy}$. Từ C kẻ các đường thẳng vuông góc với Ax và Ay lần lượt tại B, D . Trên các đoạn thẳng AB, AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho chu vi $\triangle AMN$ bằng $AB + AD$. Trên tia Bx lấy điểm E sao cho $BE = ND$. Chứng minh rằng:

a) $\triangle CBE = \triangle CDN$

b) MC là tia phân giác của $\widehat{BMN}$.

Câu 108. (HSG 7 huyện Ý Yên năm 2021 - 2022)

Cho góc $\widehat{xAy}$ vuông, kẻ tia phân giác At của góc $\widehat{xAy}$. Trên tia At lấy điểm I cố định, qua I kẻ đường thẳng vuông góc với At cắt Ax, Ay lần lượt tại B, C . Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với Ax cắt tia At tại D . Gọi E là trung điểm của BD , gọi M, H lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ C, B xuống AE .

1) Chứng minh $AM = BH$ và $BC = AD$

2) Chứng minh $IH > \frac{MH}{2}$ và tia phân giác của góc $\widehat{EMC}$ luôn đi qua một điểm cố định

3) Gọi N là trung điểm của AC . Đường thẳng BM cắt DN tại K . Tính số đo $\widehat{BKN}$.

Câu 109. (HSG 7 Bắc Ninh - năm học 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Vẽ các tia Bx, Cy vuông góc với BC nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A . Gọi D là một điểm nằm giữa B và C . Đường thẳng vuông góc với AD tại A cắt Bx và Cy theo thứ tự tại E và F .

1) Chứng minh $\triangle AEB = \triangle ADC$;

2) Chứng minh tam giác EDF vuông cân;

3) Xác định vị trí điểm D trên BC để EF có độ dài nhỏ nhất.

Câu 110. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Thái Hòa 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Trên cùng nửa mặt phẳng chứa A bờ BC kẻ các tia Bx và Cy vuông góc với BC . Gọi M là điểm thuộc cạnh BC (M không trùng B và C). Đường thẳng vuông góc với AM tại A cắt Bx và Cy theo thứ tự ở D và E .

a) Chứng minh : $AM = AE$

b) Tính số đo góc $\widehat{BME}$

c) Lấy I nằm giữa A và D . Kẻ HE vuông góc với MI . Chứng minh HA là tia phân giác của góc $\widehat{EHI}$.

Câu 111. (HSG 7 TP Trữc Ninh 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , lấy điểm D bất kì thuộc cạnh BC (D khác B và

C). Trên nửa mặt phẳng chứa điểm A , kẻ tia Bx và Cy vuông góc với BC , đường thẳng vuông góc với AD tại A cắt tia Bx và Cy lần lượt tại E và F . Chứng minh rằng:

1) $\triangle AEB = \triangle ADC$

2) $\triangle DEF$ vuông cân.

3) Từ D kẻ đường thẳng song song với CF , đường thẳng này cắt AC và AB lần lượt tại K và Q . Chứng minh:

a) $BK \perp QC$.

$$KQ + KB + KC < \frac{2}{3}(QB + QC + BC)$$

b)

Câu 112. (HSG 7 huyện Văn Bàn 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC nhọn, AH là đường cao. Vẽ về phía ngoài của tam giác ABC các tam giác ABE vuông cân ở B và tam giác ACF vuông cân ở C . Trên tia đối của tia AH lấy điểm I sao cho $AI = BC$. Chứng minh:

a) $\triangle ABI = \triangle BEC$.

b) $BI = CE$ và $BI \perp CE$.

c) AH, CE, BF cắt nhau tại một điểm.

Câu 113. (HSG 7 Kim Thành 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A và có ba góc đều là góc nhọn. Vẽ trung tuyến AH .

a) Chứng minh: AH vuông góc với BC .

b) Vẽ $BE = BA$, BE vuông góc với BA (E và C nằm khác phía so với đường thẳng AB). Qua B vẽ đường thẳng vuông góc với EC cắt tia HA tại điểm I . Chứng minh: $BC = AI$.

c) Đường phân giác của $\angle ABC$ cắt AC tại D , đường phân giác của $\angle BDC$ cắt BC tại M , đường phân giác của $\angle ADB$ cắt BC tại N . Gọi F là trung điểm của MN . Trên tia đối của tia DB lấy điểm K sao cho $DK = DB$. Chứng minh: $\triangle BFK$ là tam giác vuông.

Câu 114. (HSG 7 huyện Trữc Ninh, tỉnh Nam Định 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$). Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $BD = AC$. Trên đường vuông góc với AB tại B lấy điểm E sao cho $BE = AD$ (E và C nằm trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB)

- 1) Tam giác CDE là tam giác gì.
- 2) Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $CF = AD$. Gọi giao điểm của BF và CD là O . Chứng minh $\angle EOF = 45^\circ$.
- 3) Trên BF lấy điểm P sao cho $\angle PCO = \angle BCP$. Kẻ $FH \perp CP$ ($H \in CP$). Chứng minh: HO là tia phân giác của $\angle FHP$.

Câu 115. (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC có đường phân giác AD . Trên đoạn thẳng AD lấy các điểm E và F sao cho $\angle ABE = \angle BCF$. Vẽ các điểm H, K, I sao cho AC, BC, AB theo thứ tự là đường trung trực của các đoạn thẳng EH, FK, EI .

- a) Chứng minh rằng: AD là đường trung trực của IH .
- b) Chứng minh rằng: $\angle FBI = \angle KBE$.
- c) Chứng minh rằng: $\angle ACE = \angle BCF$.

Câu 116. (HSG 7 huyện Lang Chánh 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $\angle A = 60^\circ$ (góc B và góc C nhọn). Tia phân giác của góc B cắt AC tại D , tia phân giác của góc C cắt AB tại E . BD cắt CE tại I . Trên cạnh BC lấy F sao cho $BF = BE$. Trên tia IF lấy M sao cho $IM = IB + IC$.

- a) Tính góc $\angle BIC$ và chứng minh $ID = IF$.
- b) Chứng minh tam giác BCM là tam giác đều.
- c) Tìm điều kiện của tam giác $\triangle ABC$ để D và E cách đều đường thẳng BC .

Câu 117. (HSG 7 huyện Thảo Lâm, 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A ($\angle A < 90^\circ$). Gọi I là trung điểm của AB , các điểm N, M lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ A, B đến đường thẳng CI . Trên đoạn thẳng CI lấy điểm E sao cho $\angle EAB = \angle ECA$. Kẻ $BH \perp AE$ (H thuộc đường thẳng AE).

- a) Chứng minh rằng $\angle ANI = \angle MBI$, rồi từ đó suy ra $AM \parallel BN$.
- b) Chứng minh rằng BE là phân giác của $\angle MBH$.
- c) Chứng minh rằng $\angle ECA = \angle ECB$.

Câu 118. (HSG 7 huyện Quế Võ 2022-2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , đường cao AH , AE là phân giác của $\angle HAC$ ($E \in HC$)

- a) Kẻ EI vuông góc với AC . Chứng minh rằng $HE = EI$. So sánh HE và EC .

b) Trên cạnh AB lấy điểm K , trên tia đối của tia AC lấy điểm M sao cho $AK = AM$. Chứng minh rằng $CK \perp BM$.

c) Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B vẽ tia Cx vuông góc với AC . Qua E kẻ EN vuông góc với AE ($N \in Cx$). Chứng minh rằng $AE = EN$.

Câu 119. (HSG 7 Hưng Hà - năm học 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Từ trung điểm D của BC vẽ đường vuông góc với tia phân giác của góc A tại H . Đường thẳng này cắt các tia AB tại E và tia AC tại F . Vẽ tia BM song song với EF (M thuộc AC).

a) Chứng minh: $\triangle ABM$ cân.

b) Chứng minh: $BE = CF = MF$

c) Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt tia AH tại I . Chứng minh: $IF \perp AC$

Câu 120. (HSG 7 Thái Thụy 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = AC$. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D , Trên cạnh AB lấy E sao cho $AE = AD$. Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với BD tại K và cắt BC ở H . Từ E kẻ đường thẳng vuông góc với BD tại I và cắt BC tại G . Đường thẳng EG cắt AC tại Q .

1) Chứng minh: $\angle EQ = \angle DB$ và $\triangle ABD = \triangle AQE$.

2) Chứng minh: A là trung điểm của QC và $\triangle QBC$ vuông cân.

3) Chứng minh: DH vuông góc với BC .

4) Chứng minh: $GB = GD$.

Câu 121. (HSG 7 huyện Thanh Trì, Thành phố Hà Nội năm học 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), gọi O là trung điểm của đoạn thẳng BC . Trên tia đối của tia OA lấy điểm K sao cho $OA = OK$.

a) Chứng minh $\triangle ABC = \triangle CKA$

b) Vẽ AH vuông góc với BC tại H . Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Qua điểm D vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại E . Gọi F là hình chiếu của điểm E trên AH . Chứng minh $AF = HB$.

c) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BE . Tính số đo $\angle HME$.

Câu 122. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc 2022 - 2023; huyện Thạc Thành 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao điểm BE và CD . Chứng minh rằng:

1) $\triangle ADC = \triangle ABE$.

2) $DE = BE$.

3) $\widehat{EIC} = 60^\circ$ và IA là tia phân giác của $\widehat{DIE}$.

Câu 123. (HSG 7 Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB \neq AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE .

a) Chứng minh rằng $DC = BE$

b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều.

Câu 124. (HSG 7 huyện Kinh Môn, tỉnh Hải Dương; huyện Kim Thành 2018 - 2019; huyện Hoàng Hóa 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao của CD và BE , K là giao của AB và DC .

1) Chứng minh rằng: $DC = BE$.

2) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Tính số đo $\widehat{BIK}$, $\widehat{AMN}$.

3) Chứng minh rằng IA là phân giác của $\widehat{DIE}$.

Câu 125. (HSG 7 trường Duyên Hải, huyện Hưng Hà; trường Tây Đô; trường Phạm Đôn Lễ, huyện Hưng Hà; huyện Văn Lâm; huyện Hậu Lộc; huyện Cẩm Thủy 2022 - 2023; huyện Ứng Hòa 2021 - 2022; huyện Sơn Trà 2018 - 2019; huyện Thiệu Hóa 2016 - 2017)

Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài $\triangle ABC$ các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao điểm của CD và BE , K là giao của AB và CD .

a) Chứng minh rằng: $\triangle ADC = \triangle ABE$

b) Chứng minh rằng: $\widehat{DIB} = 60^\circ$

c) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều.

d) Chứng minh rằng IA là phân giác của góc $\widehat{DIE}$.

Câu 126. (HSG 7 Thị xã Bỉm Sơn 2022-2023)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) dựng ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD , ACE .

a) Chứng minh rằng $\triangle ADC = \triangle ABE$

b) Gọi M là giao điểm của BE , CD . Tính $\widehat{BMC}$ và chứng minh $MD = MA + MB$.

c) Chứng minh rằng $\widehat{AMC} = \widehat{BMC}$.

Câu 127. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ năm 2021 - 2022)

Cho $\triangle ABC$ nhọn. Vẽ về phía ngoài tam giác ấy các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao điểm của BE và CD .

1) Chứng minh $BE = CD$.

2) Tính $\widehat{BIC}$.

3) Chứng minh rằng $IA + IB = ID$.

Câu 128. (HSG 7 huyện 2017- 2018)

Cho tam giác ABC có $\angle A < 90^\circ$. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó hai đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AB ; AE vuông góc và bằng AC .

a) Chứng minh $DC = BE$.

b) Gọi N là trung điểm của DE . Trên tia đối của tia NA lấy M sao cho $NA = NM$. Chứng minh $AB = ME$, $\angle ABC = \angle EMA$.

Câu 129. (Đề minh họa HSG 7 trường Thái Phương- Hưng Hà năm học 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó các tam giác ABM , ACN vuông cân tại A ; BN và MC cắt nhau tại D .

a) Chứng minh: $\angle AMC = \angle ABN$; $BN \perp CM$.

b) Gọi H là trung điểm của BC . Chứng minh: $AH = \frac{1}{2}MN$.

c) Chứng minh rằng DA là phân giác của góc MDN .

Câu 130. (HSG 7 huyện Bá Thước 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC nhọn; vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là tam giác ABD và tam giác ACE .

a) Chứng minh $DC = BE$ và $DC \perp BE$.

b) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến ED và M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Chứng minh A, M, H thẳng hàng.

Câu 131. (HSG 7 thị trấn Càng Nàng; trường Nguyễn Tông Quai, huyện Hưng Hà; trường Nguyệt Ân, huyện Ngọc Lặc; huyện Tiên Du 2022 - 2023; huyện Bồ Trạch 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC có góc A nhỏ hơn 90° . Vẽ ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$.

a) Chứng minh rằng: $MC = BN$.

b) Chứng minh: $BN \perp CM$.

c) Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Chứng minh AH đi qua trung điểm của MN .

Câu 132. (HSG 7 huyện Thái Thụy năm 2021 - 2022)

Cho $\triangle ABC$ có góc A nhỏ hơn 90° . Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C lấy điểm M sao cho $\triangle ABM$ vuông cân tại A . Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B lấy điểm N sao cho $\triangle ACN$ vuông cân tại A . Gọi K là giao điểm của BN và CM .

1. Chứng minh $\angle AMC = \angle ABN$.

2. Chứng minh $BN \perp CM$.

3. Tính $\angle AKC$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
<https://www.vnteach.com>