

Câu 1 (7,0 điểm).

a) Cho hàm số $y = x^5 - 5m(m+2)x^3 + \frac{5}{2}(3m^2 + 6m - 1)x^2 + 5m$ (m là tham số). Tìm m để hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = \sqrt{y^3 + 3y^2} & (1) \\ 3\sqrt{x-2} = \sqrt{y^2 + 8y} & (2) \end{cases}$$

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Giải vô địch bóng đá thế giới 2022 sẽ diễn ra tại Qatar bắt đầu từ 20 tháng 11 năm 2022. Giải đấu có 32 đội tham gia vòng chung kết được chia thành 4 nhóm (mỗi nhóm 8 đội) theo thứ tự trên bảng xếp hạng của FIFA. Các đội sẽ bốc thăm chia vào 8 bảng A, B, C, D, E, F, G, H thỏa mãn điều kiện mỗi bảng có 4 đội và các đội khác nhóm nhau đôi một. Biết rằng đội tuyển Pháp ở nhóm 1 và đội tuyển Đức ở nhóm 2, tính xác suất để hai đội Pháp và Đức không chung một bảng đấu.

b) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (2023x - \sin 2022x)(x - m - 3)\left(x - \sqrt{9 - m^2}\right)^3, \forall x \in \mathbb{R}$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

Câu 3 (1,5 điểm).

Ông An muốn làm một bể cá cảnh hình hộp chữ nhật không có nắp bằng kính với thể tích bằng 1m^3 , ông ngăn đôi bể cá thành hai bể hình hộp chữ nhật có thể tích bằng nhau (cắt đôi chiều dài bể) bằng vách ngăn kính cùng loại để nuôi các loại cá khác nhau. Giá kính trên thị trường hiện tại là 570.000 đ/m^2 . Hỏi tiền mua kính ít nhất là bao nhiêu?

Câu 4 (6,0 điểm).

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C và cạnh $AC = 2a$. Hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của AC . Biết góc giữa hai mặt phẳng $(AA'B'B)$ và $(AA'C'C)$ bằng 30° , góc giữa cạnh bên với mặt đáy bằng 60° .

a) Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

b) Tính $\sin$ của góc giữa đường thẳng $C'B$ và $mp(A'B'C)$.

Câu 5 (1,5 điểm).

Ký hiệu $d(MN, PQ)$ là khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và PQ . Chứng minh rằng nếu tứ diện $ABCD$ thỏa điều kiện $d(AB, CD) = d(AC, BD) = d(AD, BC)$ thì trong ba số $\cot(AB, CD)$, $\cot(AC, BD)$, $\cot(AD, BC)$ có một số bằng tổng hai số còn lại.

..... **Hết**

Họ và tên thí sinh.....

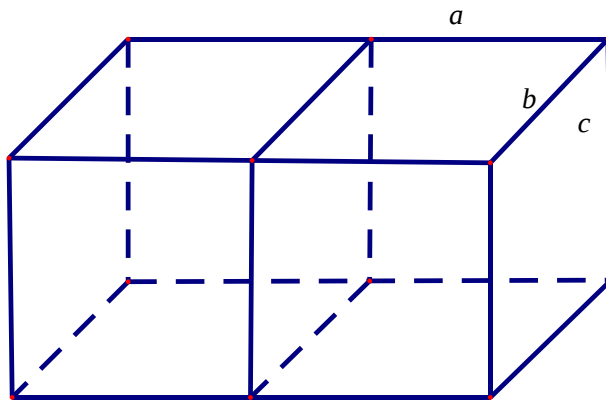
Số báo danh.....

Lưu ý: Học sinh không được phép sử dụng máy tính bỏ túi.

ĐÁP ÁN-BIỂU ĐIỂM

Câu	Nội dung	Điểm
1a	Ta có: $y' = 5x^4 - 15m(m+2)x^2 + 5(3m^2 + 6m - 1)x$ $y' = 5x \left[x^3 - 3m(m+2)x + 3m^2 + 6m - 1 \right]$ $y' = 5x(x-1)(x^2 + x + 1 - 3m^2 - 6m).$ Hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$ với mọi $x \in [1; +\infty)$ và $y' = 0$ tại hữu hạn điểm. *Vì $x \in [1; +\infty)$ nên $y' \geq 0, \forall x \in [1; +\infty)$ $\Rightarrow x^2 + x + 1 \geq 3m^2 + 6m, \forall x \in [1; +\infty) \quad (1)$ * Xét hàm số $y = x^2 + x + 1$ trên $[1; +\infty)$ luôn đồng biến. Ta thấy $\min_{[1; +\infty)} y = 3$ tại $x = 1$. Từ (1) $\Rightarrow 3 \geq 3m^2 + 6m \Leftrightarrow m \in [-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}]$.	
1b	Điều kiện : $\begin{cases} y^3 + 3y^2 \geq 0 \\ y^2 + 8y \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 0 \end{cases} (*)$ Ta có : $(1) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = y\sqrt{y+3} \Leftrightarrow (x-1)^3 - 3(x-1) = (\sqrt{y+3})^3 - 3(\sqrt{y+3}) \quad (1')$ Từ điều kiện ta có $\begin{cases} x-1 \geq 1 \\ y+3 \geq 3 \end{cases}$ Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ trên tập $[1; +\infty)$ $f'(t) = 3t^2 - 3 \geq 0, \forall t \geq 1 \Rightarrow f(t) \text{ là hàm số đồng biến trên khoảng } (1; +\infty)$ Khi đó : $(1') \Leftrightarrow f(x-1) = f(\sqrt{y+3}) \Leftrightarrow x-1 = \sqrt{y+3} \Leftrightarrow (x-1)^2 = y+3$ Kết hợp với phương trình (2), ta được : $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = y + 3 \\ 3\sqrt{x-2} = \sqrt{y^2 + 8y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 = y & (1') \\ 9(x-2) = y^2 + 8y & (2') \end{cases}$ Thế (1') vào (2'), ta được : $9x - 18 = (x^2 - 2x - 2)^2 + 8(x^2 - 2x - 2)$ $\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 17x + 6 = 0$ $\Leftrightarrow (x-3)(x^3 - x^2 + 5x - 2) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x^3 - x^2 + 5x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x^2(x-1) + 4x + (x-2) = 0(VN) \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=1(TM)$ Vậy hệ có nghiệm duy nhất : $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$	
2a	Bốc thăm bảng A có 8^4 cách Bốc thăm bảng B có 7^4 cách	

	Bốc thăm bảng C có 6^4 cách Bốc thăm bảng D có 5^4 cách Bốc thăm bảng E có 4^4 cách Bốc thăm bảng F có 3^4 cách Bốc thăm bảng G có 2^4 cách Bốc thăm bảng H có 1^4 cách Gọi Ω là không gian mẫu ta có $n(\Omega) = (8!)^4$. Xét biến cố hai đội Pháp và Đức cùng bảng đầu. - Có 8 cách để chọn bảng đầu cho hai đội - Có 8^2 cách chọn hai đội còn lại trong bảng đầu đó - Có $(7!)^4$ cách xếp đội cho các bảng đầu còn lại. Gọi Δ là biến cố cần tìm ta có $n(\bar{\Delta}) = 8.8^2.(7!)^4$ Xác suất biến cố đối là $P(\bar{\Delta}) = \frac{8^3(7!)^4}{(8!)^4} = \frac{1}{8}$ Vậy, xác suất cần tìm là $P(\Delta) = \frac{7}{8}$																																																				
2b	Điều kiện $9 - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 3$ Xét hàm số $h(x) = 2023x - \sin 2022x$ ta có $h'(x) = 2023 - 2022 \cos 2022x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ nên $y = h(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mặt khác, $h(0) = 0$ nên $x < 0 \Rightarrow h(x) < 0; x > 0 \Rightarrow h(x) > 0$. Như vậy, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m + 3 \\ x = \sqrt{9 - m^2} \end{cases}$ Ta xét các trường hợp sau. TH 1: $0 \leq m < 3$ ta có BTT <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$\sqrt{9 - m^2}$</td><td>$m + 3$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td colspan="5"></td></tr></table> Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$ TH 2: $-3 \leq m < 0$ ta có BTT <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$m + 3$</td><td>$\sqrt{9 - m^2}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td colspan="5"></td></tr></table> Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$ TH 2: $m = 3$ ta có BTT <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>6</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>-</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td></tr><tr><td>y</td><td colspan="4"></td></tr></table> Hàm số $y = f(x)$ không đạt cực tiểu tại $x = 0$ Từ đó suy ra $-3 \leq m < 3 \Rightarrow$ có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.	x	$-\infty$	0	$\sqrt{9 - m^2}$	$m + 3$	$+\infty$	y'	-	0	+	0	-	y						x	$-\infty$	0	$m + 3$	$\sqrt{9 - m^2}$	$+\infty$	y'	-	0	+	0	-	y						x	$-\infty$	0	6	$+\infty$	y'	-	0	-	0	y					
x	$-\infty$	0	$\sqrt{9 - m^2}$	$m + 3$	$+\infty$																																																
y'	-	0	+	0	-																																																
y																																																					
x	$-\infty$	0	$m + 3$	$\sqrt{9 - m^2}$	$+\infty$																																																
y'	-	0	+	0	-																																																
y																																																					
x	$-\infty$	0	6	$+\infty$																																																	
y'	-	0	-	0																																																	
y																																																					



Gọi chiều dài, chiều rộng, chiều cao của bể cá lần lượt là a, b, c ($a, b, c > 0$)

Theo giả thiết ta có $abc = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{ab}$

Khi đó tổng diện tích là $S = ab + 2ac + 3bc = ab + \frac{2}{b} + \frac{3}{a}$

Xem b là tham số và a là ẩn, ta xét hàm số $f(a) = ab + \frac{2}{b} + \frac{3}{a} \Rightarrow f'(a) = b - \frac{3}{a^2}$

3

$f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{3}{b}}$. Ta có bảng biến thiên

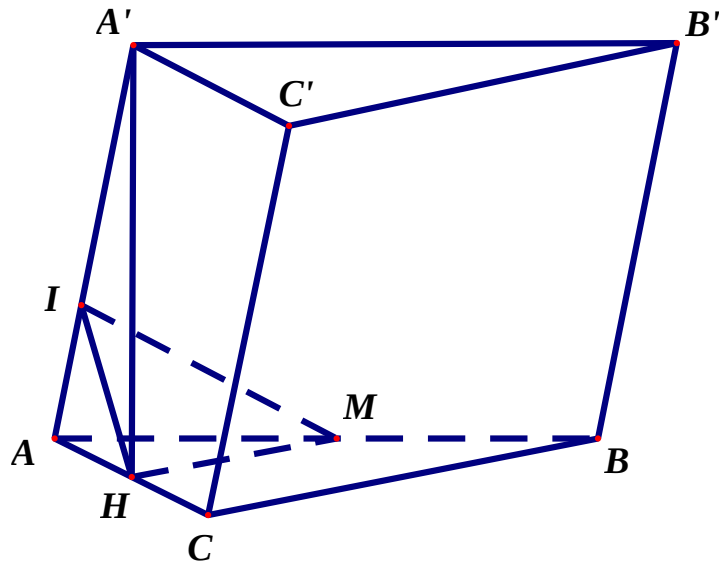
a	0	$\sqrt{\frac{3}{b}}$	$+\infty$	
$f'(a)$		$-$	0	$+$
$f(a)$				

$\swarrow$ $f\left(\sqrt{\frac{3}{b}}\right)$ $\searrow$

Từ BBT ta có $f(a) \geq f\left(\sqrt{\frac{3}{b}}\right) = 2\sqrt{3b} + \frac{2}{b} = \sqrt{3b} + \sqrt{3b} + \frac{2}{b} \geq 3\sqrt[3]{6}$

Dấu “=” xảy ra khi $a = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}; b = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}; c = \frac{1}{\sqrt[3]{6}}$

Vậy, số tiền ít nhất để mua kính là: $570.000 \times 3\sqrt[3]{6} \approx 3.107.000$ đ



4a

Ta có:

Kẻ $HM \parallel BC \Rightarrow HM \perp AC$

Ta có: $\begin{cases} HM \perp AC \\ HM \perp A'H \end{cases} \Rightarrow HM \perp (A'AC) \Rightarrow HM \perp AA'$

Kẻ $HI \perp AA' \Rightarrow AA' \perp (HMI) \Rightarrow AA' \perp IM$

Do đó: góc giữa hai mặt phẳng $(AA'B'B)$ và $(AA'C'C)$ chính là HIM và $HIM = 30^\circ$

Lại có: $(AA'; (ABC)) = A'AH = 60^\circ$

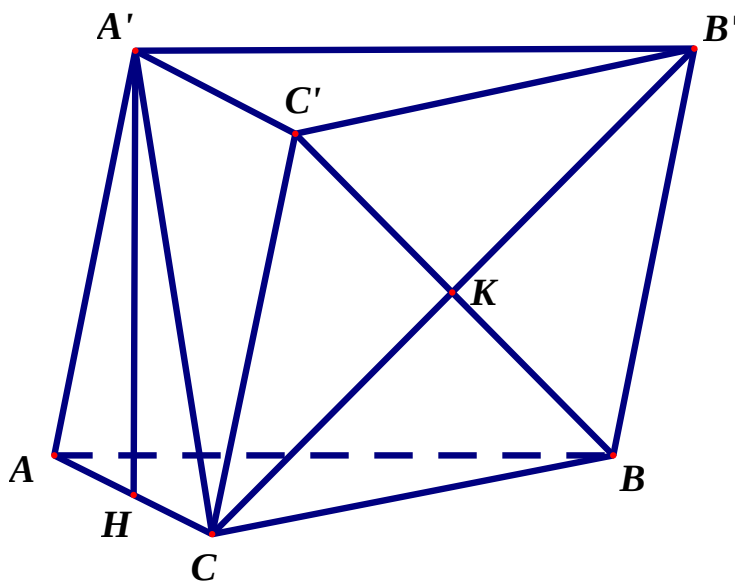
$$IH = AH \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad HM = HI \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2} \Rightarrow BC = a.$$

Tam giác AHA' vuông tại A nên ta có

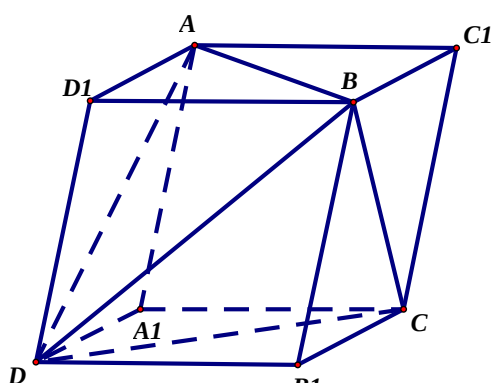
$$\frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{IH^2} - \frac{1}{AH^2} = \frac{4}{3a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{3a^2} \Rightarrow A'H = a\sqrt{3}$$

Thể tích khối lăng trụ là: $V = a\sqrt{3} \cdot \frac{2a^2}{2} = a^3\sqrt{3}$

4b



Đặt $(C'B, (A'B'C)) = \alpha$.

	Gọi K là giao điểm của C'B và B'C ta có $\sin \alpha = \frac{d(C', (A'B'C))}{KC'}$ Ta có $\begin{cases} CB \perp CA \\ CB \perp A'H \end{cases} \Rightarrow CB \perp AA',$ do đó BCC'B' là hình chữ nhật. Khi đó, $CB' = C'B = \sqrt{C'C^2 + CB^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow KC' = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ Vì $A'C = 2a; A'B' = B'C = a\sqrt{5} \Rightarrow S_{A'B'C} = 2a^2$ Mà $V_{C'A'B'C} = \frac{1}{3}V_t = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ nên $d(C', (A'B'C)) = \frac{3V_{C'A'B'C}}{S_{A'B'C}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ Vậy, $\sin \alpha = \frac{d(C', (A'B'C))}{KC'} = \frac{\sqrt{15}}{5}$	
5	 Dựng hình hộp $AC_1BD_1.B_1DA_1C$ ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Giả thiết $d(AB, CD) = d(AC, BD) = d(AD, BC)$ suy ra các mặt của hình hộp cùng diện tích S. Đặt $a = AB, a_1 = CD, AC = b, BC = b_1, AD = c,$ $BC = c_1, AD_1 = z, AC_1 = y, AB_1 = x.$ Từ hình bình hành AC_1BD_1 ta có: $a^2 + a_1^2 = 2(y^2 + z^2); \cos(AB, CD) = \frac{\left \frac{a^4}{4} + \frac{a_1^2}{4} - y^2 \right }{\frac{1}{2}a.a_1} = \cos(AB, CD) = \frac{ y^2 - z^2 }{a.a_1}$ Chú ý: $S = S_{AC_1BD_1} = a_1a \sin(AB, CD).$ Do đó: $\cot(AB, CD) = \frac{ y^2 - z^2 }{2S}$ Tương tự: $\cot(AC, BD) = \frac{ z^2 - x^2 }{2S}, \cot(AD, BC) = \frac{ x^2 - y^2 }{2S}$ Nếu $x \leq y \leq z$ thì $\cot(AB, CD) + \cot(AD, BC) = \cot(AC, BD).$ Các trường hợp khác tương tự.	