

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 8

Năm học 2018-2019

Bài 1. Cho biểu thức $M = \left[\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x + 2} \right] : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$

a) Rút gọn M

b) Tính giá trị của M khi $|x| = \frac{1}{2}$

Bài 2. Cho biểu thức $A = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2$

a) Phân tích biểu thức A thành nhân tử

b) Chứng minh rằng: Nếu a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác thì $A < 0$

Bài 3.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$A = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

Bài 4. Cho hình bình hành ABCD. Với $AB = a, AD = b$. Từ đỉnh A, kẻ một đường thẳng a bất kỳ cắt đường chéo BD tại E, cắt cạnh BC tại F và cắt tia DC tại G.

a) Chứng minh : $AE^2 = EF \cdot EG$

b) Chứng minh rằng khi đường thẳng a quay quanh A thay đổi thì tích $BF \cdot DG$ không đổi

Bài 5. Chứng minh rằng nếu $\frac{x^2 - yz}{x(1 - yz)} = \frac{y^2 - xz}{y(1 - xz)}$ với $x \neq y; xyz \neq 0; yz \neq 1; xz \neq 1$
Thì $xy + xz + yz = xyz(x + y + z)$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) Rút gọn M

$$M = \left[\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x+2} \right] : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x+2} \right) = \left[\frac{x^2}{x(x-2)(x+2)} - \frac{6}{3(x-2)} + \frac{1}{x+2} \right] : \frac{6}{x+2}$$
$$M = \frac{-6}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{6} = \frac{1}{2-x}$$

b) $|x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow M = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Với

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow M = \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

Với

Bài 2.

a) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2) - (2bc)^2 \\ &= (b^2 + c^2 - 2bc - a^2)(b^2 + c^2 + 2bc - a^2) \\ &= (b + c - a)(b + c + a)(b - c - a)(b - c + a) \end{aligned}$$

b) Ta có: $b + c - a > 0$ (BĐT tam giác)

$$b + c + a > 0 \text{ (BĐT tam giác)}$$

$$b - c - a < 0 \text{ (BĐT tam giác)}$$

$$b + c - a > 0 \text{ (BĐT tam giác)}$$

$$\text{Vậy } A < 0$$

Bài 3.

a) Ta có: $A = x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 4y + 4 + 1 = (x - y)^2 + (y - 2)^2 + 1$

$$\text{Do } (x - y)^2 \geq 0; (y - 2)^2 \geq 0$$

Nên $A = (x - y)^2 + (y - 2)^2 + 1 \geq 1$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 2$

Vậy $\text{Min} A = 1 \Leftrightarrow x = y = 2$

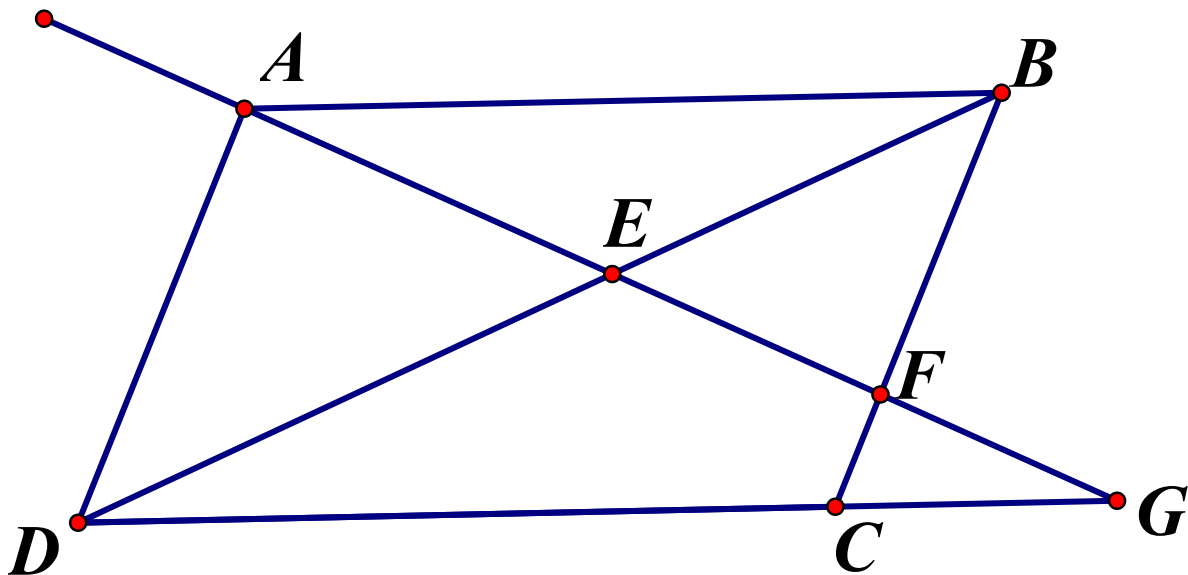
$$B = \frac{3(x+1)}{x^2(x+1) + (x+1)} = \frac{3(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{3}{x^2+1}$$

b)

Do $x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{B}{x^2 + 1} \leq 3$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$

Vậy $\text{Max} B = 3 \Leftrightarrow x = 0$

Bài 4.



a) Do $AB \parallel CD$ nên ta có: $\frac{EA}{EG} = \frac{EB}{ED} = \frac{AB}{DG}$ (1)

Do $BF \parallel AD$ nên ta có: $\frac{EF}{EA} = \frac{EB}{ED} = \frac{AD}{FB}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{EA}{EG} = \frac{EF}{EA}$ hay $AE^2 = EF \cdot EG$

b) Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AB}{DG} = \frac{FB}{AD} \Rightarrow BF \cdot DG = AB \cdot AD = a \cdot b$ (không đổi)

Bài 5.

$$\text{Từ gt} \Rightarrow (x^2 - yz)y(1 - xz) = x(1 - yz)(y^2 - xz)$$

$$\Leftrightarrow x^2y - x^3yz - y^2z + xy^2z^2 = xy^2 - x^2z - xy^3z + x^2yz^2$$

$$\Leftrightarrow x^2y - x^3yz - y^2z + xy^2z^2 - xy^2 + x^2z + xy^3z - x^2yz^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow xy(x - y) + xyz(yz + y^2 - xz - x^2) + z(x^2 - y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y(x - y) + xyz(x - y)(x + y + z) + z(x - y)(x + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)[xy - xyz(x + y + z) + xz + yz] = 0$$

$$\text{Do } x - y \neq 0 \text{ nên } xy + xz + yz - xyz(x + y + z) = 0$$

$$\text{Hay } xy + xz + yz = xyz(x + y + z) \quad (dfcm)$$