

**Câu 1. (4,5 điểm)**

1) Phân tích biểu thức sau thành nhân tử:  $P = 2a^3 + 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3$

2) Cho  $x^2 + x = 1$ . Tính giá trị biểu thức  $Q = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

**Câu 2. (4,5 điểm)**

1) Cho biểu thức  $R = \left( \frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x+1}{x^2+2x} - \frac{4}{x^3-4x} \right) : \frac{4026}{x}$ . Tìm  $x$  để biểu thức xác định, khi đó hãy rút gọn biểu thức

2) Giải phương trình sau:  $|x-2|(x-1)(x+1)(x+2)=4$

**Câu 3. (4,0 điểm)**

1) Cho  $n$  là số tự nhiên lẻ. Chứng minh  $n^3 - n$  chia hết cho 24

2) Tìm số tự nhiên  $n$  để  $n^2 + 4n + 2013$  là một số chính phương.

**Câu 4. (6,0 điểm)**

1) Cho hình thang  $ABCD$  vuông tại A và D. Biết  $CD = 2AB = 2AD$  và  $BC = a\sqrt{2}$

a) Tính diện tích hình thang  $ABCD$  theo  $a$

b) Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ , H là chân đường vuông góc kẻ từ  $D$  xuống  $AC$ .

Chứng minh  $\angle HDI = 45^\circ$

2) Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a, CA = b, AB = c$ . Độ dài các đường phân giác trong của tam giác kẻ từ các đỉnh  $A, B, C$  lần lượt là  $l_a, l_b, l_c$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

**Câu 5. (1,0 điểm)**

Cho hai số không âm  $a$  và  $b$  thỏa mãn:  $a^2 + b^2 = a + b$ . Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$$

## ĐÁP ÁN

### Câu 1.

1)

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } P &= 2(a^3 + b^3) + 7ab(a + b) \\ &= 2(a + b)(a^2 - ab + b^2) + 7ab(a + b) \\ &= (a + b)(2a^2 + 2b^2 + 5ab) \\ &= (a + b)(2a^2 + 4ab + 2b^2 + ab) \\ &= (a + b)[2a(a + 2b) + b(a + 2b)] \\ &= (a + b)(2a + b)(a + 2b)\end{aligned}$$

$$\text{Kết luận } P = (a + b)(2a + b)(a + 2b)$$

2)

Ta có:

$$\begin{aligned}Q &= x^2.(x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^4 + 2x^3 + x^2) + x^2 + x + x + 1 \\ &= x^2(x^2 + x)^2 + (x^2 + x)^2 + x + 2 \\ &= x^2 + x + 3 = 4\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } Q = 4$$

### Câu 2.

1)

$$\text{Ta có: } R = \left[ \frac{x-1}{x(x-2)} + \frac{x+1}{x(x+2)} - \frac{4}{x(x^2-4)} \right] \cdot \frac{x}{4026}$$

$$x(x^2 - 4) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$$

ĐK:

Khi đó:

$$R = \frac{1}{4026} \cdot \left( \frac{x-1}{x-2} + \frac{x+1}{x+2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$$

$$= \frac{1}{4026} \cdot \frac{(x-1)(x+2) + (x+1)(x-2) - 4}{x^2 - 4}$$

$$= \frac{1}{4026} \cdot \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = \frac{1}{2013}$$

Vậy  $R$  xác định khi  $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$  và  $R = \frac{1}{2013}$

2) + Nếu  $x \geq 2$ , phương trình đã cho trở thành :

$$(x-2)(x-1)(x+1)(x+2) = 4$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 4$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x^2 - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(ktm) \\ x = \sqrt{5}(tm) \\ x = -\sqrt{5}(ktm) \end{cases}$$

+) Nếu  $x < 2$ , phương trình đã cho trở thành:

$$(2-x)(x-1)(x+1)(x+2) = 4$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1)(x+2) = -4$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 4) = -4$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0$$

vô nghiệm

Phương trình có một nghiệm  $x = \sqrt{5}$

### Câu 3.

1) Ta có:  $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$

Vì  $n-1; n; n+1$  là ba số tự nhiên liên tiếp nên có một trong ba số đó chia hết cho 3.

Do đó  $(n^3 - n); 8 \quad (2)$

Vì 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau nên kết hợp với (1); (2) suy ra

$(n^3 - n); 24 \quad (dpcm)$

2) Giả sử  $n^2 + 4n + 2013 = m^2 (m \in \mathbb{N})$

Suy ra  $(n+2)^2 + 2009 = m^2 \Leftrightarrow m^2 - (n+2)^2 = 2009$

$$\Leftrightarrow (m+n+2)(m-n-2) = 2009$$

Mặt khác  $2009 = 2009.1 = 287.7 = 49.41$  và  $m+n+2 > m-n-2$  nên có các trường hợp sau:

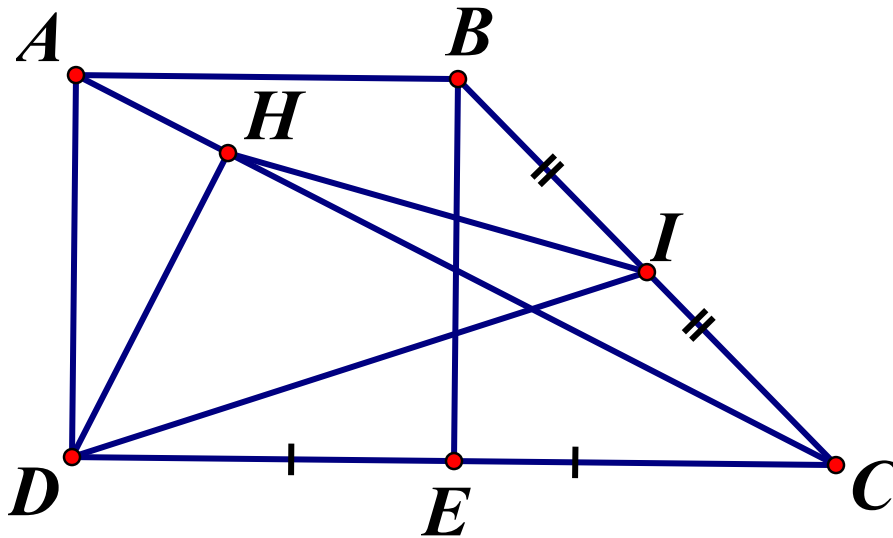
$$TH1: \begin{cases} m+n+2=2009 \\ m-n-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1005 \\ n=1002 \end{cases}$$

$$TH2: \begin{cases} m+n+2=287 \\ m-n-2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=147 \\ n=138 \end{cases}$$

$$TH3: \begin{cases} m+n+2=49 \\ m-n-2=41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=45 \\ n=2 \end{cases}$$

Vậy các số cần tìm là 1002; 138; 2

**Câu 4.**



1)

a) Gọi E là trung điểm của CD, chỉ ra  $ABED$  là hình vuông và  $BEC$  là tam giác vuông cân

Từ đó suy ra  $AB = AD = a, BC = 2a$

$$\text{Diện tích của hình thang } ABCD \text{ là } S = \frac{(AB + CD) \cdot AD}{2} = \frac{(a + 2a) \cdot a}{2} = \frac{3a^2}{2}$$

b)  $\angle ADH = \angle ACD$  (1) (hai góc nhọn có cặp cạnh tương ứng vuông góc)

Xét hai tam giác  $ADC$  và  $IBD$  vuông tại D và B có:

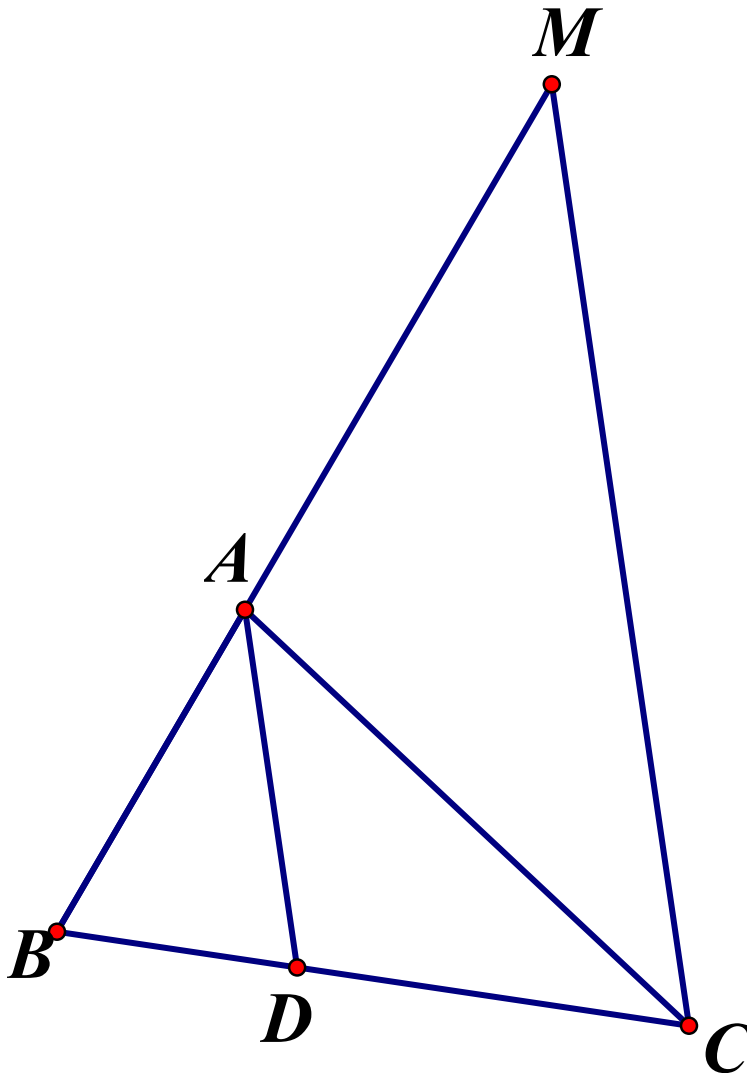
$\frac{AD}{DC} = \frac{IB}{BC} = \frac{1}{2}$ , do đó hai tam giác  $ADC$  và  $IBD$  đồng dạng

Suy ra  $\angle ACD = \angle BDI$  (2)

Từ (1), (2)  $\Rightarrow \angle ADH = \angle BDI$

Mà  $\angle ADH + \angle BDH = 45^\circ \Rightarrow \angle BDI + \angle BDH = 45^\circ$  hay  $\angle HDI = 45^\circ$

2)



Gọi AD là đường phân giác trong góc A, qua C kẻ đường thẳng song song với AD cắt đường thẳng AB tại M

Ta có:  $\angle BAD = \angle AMC$  (hai góc ở vị trí đồng vị)

$\angle DAC = \angle ACM$  (hai góc ở vị trí so le trong)

Mà  $\angle BAD = \angle DAC$  nên  $\angle AMC = \angle ACM$  hay  $\triangle ACM$  cân tại A, suy ra  $AM = AC = b$

Do  $AD \parallel CM$  nên  $\frac{AD}{CM} = \frac{BA}{BM} = \frac{c}{b+c}$

Mà  $CM < AM + AC = 2b \Rightarrow \frac{c}{b+c} > \frac{AD}{2b} \Rightarrow \frac{1}{l_a} > \frac{1}{2} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$  (1)

Tương tự ta có:  $\frac{1}{l_b} > \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right)$  (2);  $\frac{1}{l_c} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$  (3)

Cộng (1); (2); (3) về theo về ta có điều phải chứng minh

**Câu 5.**

Ta có:  $a^2 + 1 \geq 2a; b^2 + 1 \geq 2b \Rightarrow a^2 + b^2 + 2 \geq 2a + 2b \Rightarrow a + b \leq 2$

Chứng minh được với hai số dương  $x, y$  thì  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

Do đó:  $S = 2 - \left( \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \right) \leq 2 - \frac{4}{a+1+b+1} \leq 1$

Vậy GTLN của S là 1, đạt được khi  $a = b = 1$