

Câu 1. (3,5 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{y+2} = 16x & (1) \\ (x^2 + x)\sqrt{x-y+3} = 2x^2 + x + y + 1 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 2. (2 điểm) Cho tập $X = \{1; 2; \dots; 8\}$. Gọi A là tập các số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau được lập từ X . Lấy ngẫu nhiên một số từ tập A . Tính xác suất để số được lấy chia hết cho 2222.

Câu 3. (3+2,5 điểm)

a. Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x+2}$ có đồ thị (C) và điểm $O(0;0)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = 2x + 3m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn trọng tâm G của tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta: 2x - y + m^3 = 0$.

b. Cho các hàm số $f(x) = x^2 - 4x + m$ và $g(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)^2(x^2 + 3)^3$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(3; +\infty)$.

Câu 4. (3+2 điểm) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B . Mặt phẳng $(A'BC)$ cách điểm A một khoảng bằng 2 và tạo với mặt phẳng (ABC) một góc α .

a) Tính thể tích khối lăng trụ theo α .

b) Tìm α để thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5. (2+2 điểm)

a. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD . Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm I của AG và cắt các đoạn AB, AC, AD tại các điểm khác A . Gọi h_A, h_B, h_C, h_D lần lượt là khoảng cách từ các điểm A, B, C, D đến mặt phẳng (P) . Chứng minh rằng $\frac{h_B^2 + h_C^2 + h_D^2}{3} \geq h_A^2$.

b. Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn $5(x^3 + y^3 + z^3) = (x + y + z)(xy + yz + zx) + 15xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{2(x + y + z)} - (y^2 + z^2)$.

ĐÁP ÁN

Câu 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{y+2} = 16x & (1) \\ (x^2+x)\sqrt{x-y+3} = 2x^2+x+y+1 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq -2 \\ x-y+3 \geq 0 \end{cases}$

Từ phương trình (2) ta có $(x^2+x)\sqrt{x-y+3} = 2(x^2+x) - x + y + 1$

$$(x^2+x)(\sqrt{x-y+3}-2) + x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2+x) \frac{x-y-1}{\sqrt{x-y+3}+2} + x - y - 1 = 0$$

$$(x-y-1) \left(\frac{x^2+x}{\sqrt{x-y+3}+2} + 1 \right) = 0$$

$$\text{Với } x \geq 1 \Rightarrow \frac{x^2+x}{\sqrt{x-y+3}+2} + 1 > 0$$

Nên ta có $x-y-1=0 \Leftrightarrow y=x-1$ thế vào phương trình (1) ta được

$$13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{x+1} = 16x \Leftrightarrow 13 \left(x-1 - \sqrt{x-1} + \frac{1}{4} \right) + 3 \left(x+1 - 3\sqrt{x+1} + \frac{9}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 13 \left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{2} \right)^2 + 3 \left(\sqrt{x+1} - \frac{3}{2} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{x+1} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4} \quad (TM)$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = \left(\frac{5}{4}; \frac{1}{4} \right)$.

Câu 2. Cho tập $X = \{1; 2; \dots; 8\}$. Gọi A là tập các số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau được lập từ X . Lấy ngẫu nhiên một số từ tập A . Tính xác suất để số được lấy chia hết cho 2222.

Lời giải

Ta có $n(\Omega) = 8!$. Gọi số được lấy từ A có dạng $a = \overline{a_1 a_2 \dots a_8}$.

Vì $2222 = 2.1111$, hơn nữa 2 và 1111 là 2 số nguyên tố cùng nhau nên

$$a : 2222 \Leftrightarrow \begin{cases} a : 2 \\ a : 1111 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_8 : 2 \\ a : 1111 \end{cases}$$

Từ $a_1 + a_2 + \dots + a_8 = 1 + 2 + \dots + 8 = 36 : 9$ nên $a : 9999$.

Lại có $a = \overline{a_1 a_2 \dots a_8} = 10000 \cdot \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} + \overline{a_5 a_6 a_7 a_8} = 9999 \cdot \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} + (\overline{a_1 a_2 a_3 a_4} + \overline{a_5 a_6 a_7 a_8})$ suy ra $(\overline{a_1 a_2 a_3 a_4} + \overline{a_5 a_6 a_7 a_8}) : 9999$.

Nhưng vì $2000 < \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} + \overline{a_5 a_6 a_7 a_8} < 18000$ nên $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4} + \overline{a_5 a_6 a_7 a_8} = 9999$ hay $a_1 + a_5 = a_2 + a_6 = a_3 + a_7 = a_4 + a_8 = 9$.

Dễ thấy mỗi số tự nhiên a thỏa mãn điều kiện trên và a_8 là số chẵn đều chia hết cho 2222.

Chia 8 số từ X thành bốn bộ có tổng bằng 9 là $(1; 8), (2; 7), (3; 6), (4; 5)$. a_8 có 4 cách chọn.

Mỗi cách chọn a_8 ta có duy nhất một cách chọn a_4 .

Ba bộ còn lại $(a_1; a_5), (a_2; a_6), (a_3; a_7)$ có thể hoán vị cho nhau, đồng thời hai phần tử trong mỗi bộ có cũng có thể hoán vị cho nhau nên có tất cả $3! \cdot (2!)^3$ cách chọn.

Tóm lại, ta có $n(A) = 4 \cdot 3! \cdot (2!)^3 = 192$. Vậy $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{192}{8!}$.

Câu 3a. Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x+2}$ có đồ thị (C) và điểm $O(0;0)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = 2x + 3m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn trọng tâm G của tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta: 2x - y + m^3 = 0$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x+3}{x+2} = 2x + 3m$ (với x là ẩn số) (1).

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ 2x^2 + 3(m+1)x + 6m - 3 = 0 \end{cases}$$

Khi đó $2x^2 + 3(m+1)x + 6m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta = 9(m+1)^2 - 8(6m-3) > 0 \\ 8 - 6(m+1) + 6m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9m^2 - 30m + 33 > 0 \text{ luôn đúng với mọi } m \in \mathbb{R}.$$

Ta có $O \notin d \Leftrightarrow m \neq 0$.

Gọi x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình (1).

Theo Định lý Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = -\frac{3(m+1)}{2}$.

Giả sử $A(x_1; 2x_1 + 3m)$, $B(x_2; 2x_2 + 3m)$.

Khi đó $G\left(\frac{x_1 + x_2}{3}; \frac{2(x_1 + x_2) + 6m}{3}\right)$ hay $G\left(-\frac{m+1}{2}; m-1\right)$.

Ta có $G \in \Delta \Leftrightarrow m^3 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm\sqrt{2} \end{cases}$.

Đối chiếu điều kiện $m \neq 0$ ta được tất cả các giá trị cần tìm của m là $-\sqrt{2}; \sqrt{2}$.

Câu 3b. Cho các hàm số $f(x) = x^2 - 4x + m$ và $g(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)^2(x^2 + 3)^3$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(3; +\infty)$ là

Lời giải

$$f(x) = x^2 - 4x + m \Rightarrow f'(x) = 2x - 4.$$

$$g(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)^2(x^2 + 3)^3 = a_{12}x^{12} + a_{10}x^{10} + \dots + a_2x^2 + a_0$$

$$\Rightarrow g'(x) = 12a_{12}x^{11} + 10a_{10}x^9 + \dots + 2a_2x.$$

$$[g(f(x))]' = f'(x) \cdot g'(f(x)) = (2x - 4)[12a_{12}f^{11}(x) + 10a_{10}f^9(x) + \dots + 2a_2f(x)]$$

$$= (2x - 4) \cdot f(x) \cdot [12a_{12}f^{10}(x) + 10a_{10}f^8(x) + \dots + 2a_2]$$

Vì $a_{12}; a_{10}; \dots; a_2; a_0 > 0$ và $2x - 4 > 0 \forall x \in (3; +\infty)$ nên

$$(2x - 4)[12a_{12}f^{10}(x) + 10a_{10}f^8(x) + \dots + 2a_2] > 0 \forall x \in (3; +\infty).$$

Hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(3; +\infty) \Leftrightarrow [g(f(x))]' \geq 0 \forall x \in (3; +\infty)$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq 0 \forall x \in (3; +\infty) \Leftrightarrow x^2 - 4x + m \geq 0 \forall x \in (3; +\infty) \Leftrightarrow m \geq g(x) = -x^2 + 4x \forall x \in (3; +\infty)$$

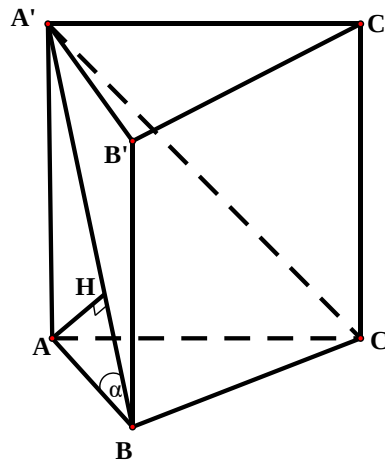
$$\Rightarrow m \geq \max_{x \in [3; +\infty)} g(x) = 3.$$

Câu 4. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B . Mặt phẳng $(A'BC)$ cách điểm A một khoảng bằng 2 và tạo với mặt phẳng (ABC) một góc α .

a) Tính thể tích khối lăng trụ theo α .

b) Tìm α để thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



a) Đặt $AH \perp A'B(1)$

Ta có: $BC \perp AB, BC \perp AA' \Rightarrow BC \perp (AA'B); AH \subset (AA'B) \Rightarrow AH \perp BC(2)$

Từ (1); (2) $\Rightarrow AH \perp (A'BC)$ hay $d(A, (A'BC)) = AH = 2$

Ta có: $BC = (ABC) \cap (A'BC)(3)$

$BC \perp (AA'B); A'B \subset (AA'B) \Rightarrow A'B \perp BC(4);$

$AB \perp BC(\Delta ABC \text{ vuông tại } B)(5)$

Từ (3); (4); (5) $\Rightarrow$ Góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là $\angle ABA' = \alpha (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$

$$\text{Xét } \triangle AHB : \sin \angle ABA' = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AB = \frac{2}{\sin \alpha} ; \text{ Xét } \triangle AHA' : \sin \angle AA'H = \frac{AH}{AA'} \Rightarrow AA' = \frac{2}{\cos \alpha}$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AA' \cdot AB \cdot BC = \frac{4}{\cos \alpha \sin^2 \alpha} = \frac{4}{\cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}$$

b) Đặt $t = \cos \alpha (0 < t < 1) \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{4}{t(1-t^2)} = V(t)$

Ta có $V'(t) = \frac{4(3t^2-1)}{(t-t^3)^2}; V'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{\sqrt{3}} (N) \\ t = -\frac{1}{\sqrt{3}} (L) \end{cases}$

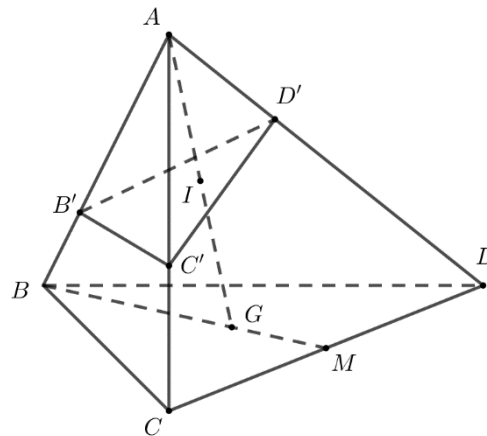
Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
V'	-	0	+
V			

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha \approx 54,74^\circ$

Câu 5a. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD . Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm I của AG và cắt các đoạn AB, AC, AD tại các điểm khác A . Gọi h_A, h_B, h_C, h_D lần lượt là khoảng cách từ các điểm A, B, C, D đến mặt phẳng (P) . Chứng minh rằng $\frac{h_B^2 + h_C^2 + h_D^2}{3} \geq h_A^2$.

Lời giải



Gọi B', C', D' lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) với các cạnh AB, AC, AD .

Ta có $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AG} = \frac{1}{6} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{6} \left(\frac{AB}{AB'} \overrightarrow{AB'} + \frac{AC}{AC'} \overrightarrow{AC'} + \frac{AD}{AD'} \overrightarrow{AD'} \right)$.

Vì 4 điểm I, B', C', D' đồng phẳng nên $\frac{1}{6} \left(\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} \right) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} = 6 \Leftrightarrow \frac{BB'}{AB'} + \frac{CC'}{AC'} + \frac{DD'}{AD'} = 3 \quad (1).$

Mặt khác ta có $\frac{BB'}{AB'} = \frac{h_B}{h_A}, \frac{CC'}{AC'} = \frac{h_C}{h_A}, \frac{DD'}{AD'} = \frac{h_D}{h_A} \quad (2).$

Từ (1) và (2), suy ra $\frac{h_B}{h_A} + \frac{h_C}{h_A} + \frac{h_D}{h_A} = 3 \Leftrightarrow h_B + h_C + h_D = 3h_A$.

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$(h_B + h_C + h_D)^2 \leq 3(h_B^2 + h_C^2 + h_D^2) \Leftrightarrow 9h_A^2 \leq 3(h_B^2 + h_C^2 + h_D^2) \Leftrightarrow \frac{h_B^2 + h_C^2 + h_D^2}{3} \geq h_A^2 \text{ (đpcm)}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (BCD) .

Câu 5b. Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn $5(x^3 + y^3 + z^3) = (x + y + z)(xy + yz + zx) + 15xyz$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{2(x + y + z)} - (y^2 + z^2)$.

Lời giải

Khi x, y, z dương thì $5(x^3 + y^3 + z^3) = (x + y + z)(xy + yz + zx) + 15xyz$

$$\Leftrightarrow 5(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = (x + y + z)(xy + yz + zx)$$

$$\Leftrightarrow 5(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = (x + y + z)(xy + yz + zx)$$

$$\Leftrightarrow 5(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = xy + yz + zx$$

$$\Leftrightarrow 5(x^2 + y^2 + z^2) = 6(xy + yz + zx) \Leftrightarrow 5x^2 - 6x(y + z) = 6yz - 5(y^2 + z^2).$$

Vì $6yz - 5(y^2 + z^2) = -4(y - z)^2 - (y + z)^2 \leq -(y + z)^2$ nên $5x^2 - 6xA \leq -A^2 \Leftrightarrow 5x^2 - 6xA + A^2 \leq 0$

(với $A = y + z > 0$) $\Leftrightarrow \frac{A}{5} \leq x \leq A$ hay $\frac{1}{5}(y + z) \leq x \leq y + z$.

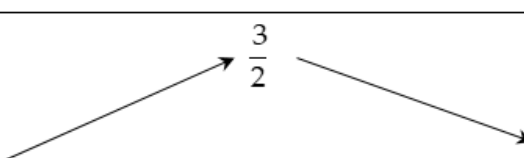
$$\text{Do đó } P = \sqrt{2(x + y + z)} - (y^2 + z^2) \leq 2\sqrt{y + z} - \frac{(y + z)^2}{2}.$$

Đặt $t = \sqrt{y + z}$, $t > 0$ khi đó $P \leq 2t - \frac{1}{2}t^4$. Xét hàm số $f(t) = 2t - \frac{1}{2}t^4$ với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = 2 - 2t^3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$		$\frac{3}{2}$	



$$\text{Suy ra } \max P = \frac{3}{2} \text{ khi } t = 1 \Leftrightarrow y + z = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = y + z = 1 \\ y = z = \frac{1}{2} \end{cases}.$$