

Người làm: Nguyễn Ánh Dung

Zalo: Dung Ôc - số đt zalo: 03456.40076

Email: Nguyenanhdungspotoan@gmail.com

CD13: HÌNH HỌC

Dạng 1. Chứng minh song song, vuông góc

Câu 1. (Đề giao lưu HSG 7 huyện Nga Sơn, Thanh Hóa - cụm Liêm- Tiến- Tân- Thanh năm học 2022 - 2023)

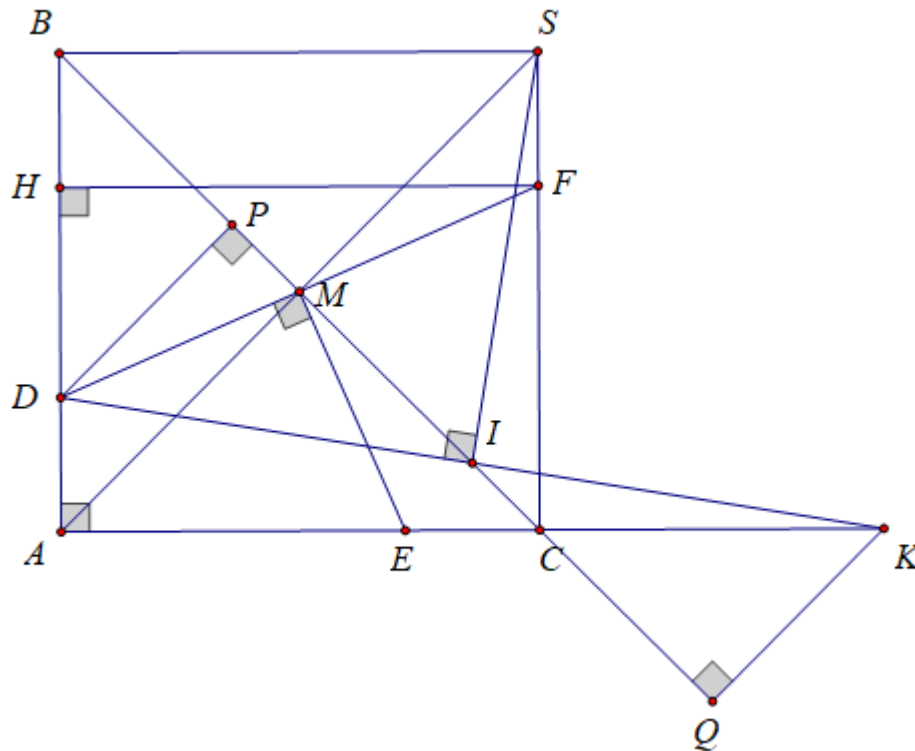
Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi M là trung điểm của BC . Lấy điểm D trên đoạn thẳng AB (D khác A và B), đường thẳng vuông góc với MD tại M cắt AC tại E .

a) Chứng minh: $MD = ME$.

b) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho $CK = BD$, DK cắt BC tại I , đường vuông góc với DK tại I cắt AM tại S . Chứng minh: I là trung điểm của DK và SC vuông góc với AK .

c) Chứng minh: $MD + ME \geq AD + AE$.

Lời giải



a) Ta có: $\angle AMD + \angle AME = 90^\circ$ ($MD \perp ME$) và $\angle AME + \angle CME = 90^\circ$ ($AM \perp BC$) $\Rightarrow \angle AMD = \angle CME$.

Ta có $\triangle ABM = \triangle ACM$ (c - c - c) suy ra $\angle BAM = \angle ACM = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ và $AM = MC$.

- Xét $\triangle AMD$ và $\triangle CME$ có: $AM = CM$; $\angle AMD = \angle CME$; $\angle MAD = \angle ACM = 45^\circ$
 $\Rightarrow \triangle AMD = \triangle CME$ (g - c - g) $\Rightarrow MD = ME$.

b) Hạ DP , KQ vuông góc với BC tại P và Q .

* Chứng minh: I là trung điểm của DK .

Xét $\triangle BDP$ vuông tại P và $\triangle CKQ$ vuông tại Q có $BD = CK$; $\angle DBP = \angle KCQ = 45^\circ$

Suy ra $\triangle BDP = \triangle CKQ$ (cạnh huyền - góc nhọn) suy ra $DP = KQ$.

Xét $\triangle PID$ và $\triangle QIK$ có $\angle DPI = \angle KQI = 90^\circ$; $DP = KQ$; $\angle PDI = \angle QKI$ (so le trong, $DP \parallel KQ$).

Suy ra $\triangle PID = \triangle QIK$ (g - c - g) suy ra $DI = IK$, hay I là trung điểm của DK .

* Chứng minh: $SC \perp AK$

Xét $\triangle ABS$ và $\triangle ACS$ có $AB = AC$; $\angle BAM = \angle ACM$; AS chung.

Suy ra $\triangle ABS = \triangle ACS$ (c - g - c) suy ra $\angle ABS = \angle ACS$. (1)

Trong tam giác DSK có SI vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao nên $\triangle DSI$ cân tại S , suy ra $SD = SK$.

Xét $\triangle SBD$ và $\triangle SCK$ có $BS = CS$; $CK = BD$; $DS = SK$.

Suy ra $\triangle SBD = \triangle SCK$ (c - c - c), suy ra $\angle SBD = \angle SCK$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\angle ACS = \angle SCK$

Mà $\angle ACS + \angle SCK = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle ACS = 90^\circ$

$\Rightarrow SC \perp AK$

c) Gọi giao điểm của DM với SC là F .

Chứng minh $\triangle MDB = \triangle MFC \Rightarrow MD = MS \Rightarrow M$ là trung điểm của DF .

Từ F kẻ $FH \perp AB$ tại H . Chứng minh $\triangle FAH = \triangle AFC \Rightarrow FH = AC$.

Do $\triangle AMD = \triangle CME \Rightarrow AD = CE \Rightarrow AD + AE = CE + AE \Rightarrow AD + AE = AC$.

Do $MD = ME$ nên $MD + ME = 2MD = DF$

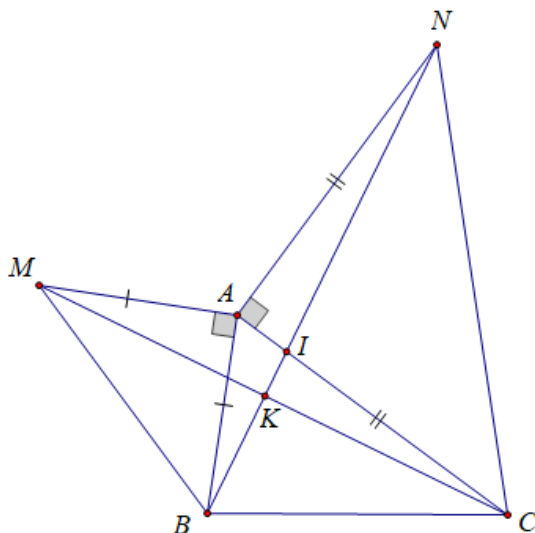
Mặt khác $DF \geq HF \Rightarrow DF \geq AC$ hay $MD + ME \geq AD + AE$.

Dấu " $=$ " khi $MD \perp AB$.

Câu 2. (Đề khảo sát HSG 7 huyện Sông Lô, Vĩnh Phúc năm học 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có góc A nhỏ hơn 90° . Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C lấy điểm M sao cho $\triangle ABM$ vuông cân tại A . Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B lấy điểm N sao cho $\triangle ACN$ vuông cân tại A . Gọi K là giao điểm của BN và CM . Chứng minh $\triangle AMC = \triangle ABN$ và $BN \perp CM$.

Lời giải



Chứng minh được $\angle MAC = \angle NAB$ ($= 90^\circ + \angle BAC$)

Xét $\triangle AMC$ và $\triangle ABN$, có:

+ $AM = AB$ ($\triangle ABM$ vuông cân)

+ $AC = AN$ ($\triangle ACN$ vuông cân)

+ $\angle MAC = \angle NAB$

Suy ra $\triangle AMC = \triangle ABN$ (c - g - c)

Gọi I là giao điểm của BN với AC

Xét $\triangle KIC$ và $\triangle AIN$, có:

$$\angle ANI = \angle KCI \quad (\triangle AMC = \triangle ABN)$$

$$\angle AIN = \angle KIC \quad (\text{đối đỉnh})$$

$\Rightarrow \angle KIC = \angle AIN = 90^\circ$, do đó: $BN \perp CM$ tại K .

Câu 3. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

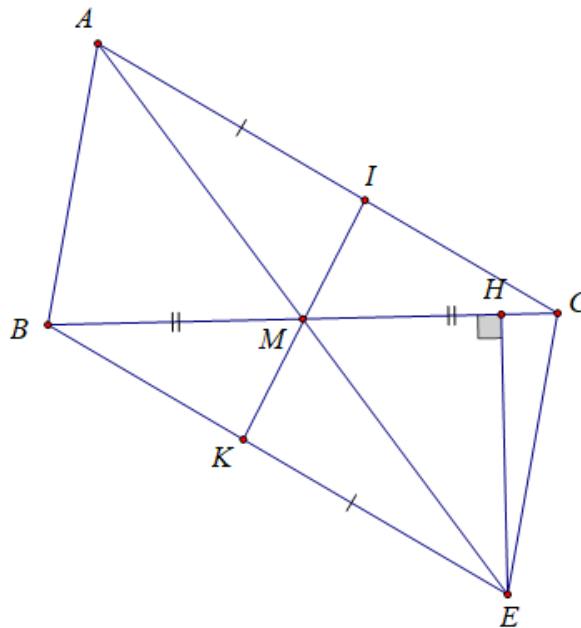
Cho $\triangle ABC$, M là trung điểm của BC . Trên tia đối của của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng:

a) $AC = EB$ và $AC \parallel EB$

b) Gọi I là một điểm trên AC ; K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I , M , K thẳng hàng.

c) Từ E kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$). Biết $\angle HBE = 50^\circ$; $\angle MEB = 25^\circ$. Tính $\angle HEM$ và $\angle BME$.

Lời giải



a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có:

$$MA = ME \quad (\text{gt})$$

$$\angle AMC = \angle EMB \quad (\text{đối đỉnh})$$

$$BM = MC \quad (\text{gt})$$

Nên: $\triangle AMC = \triangle EMB$ (c - g - c) $\Rightarrow AC = EB$

Vì $\triangle AMC = \triangle EMB \Rightarrow \angle MAC = \angle MEB$ (2 góc có vị trí so le trong được tạo bởi đường thẳng AC và EB cắt đường thẳng AE)

Suy ra $AC \parallel EB$.

b) Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có:

$$AM = EM \quad (\text{gt})$$

$$\angle MAI = \angle MEK \quad (\text{vì } \triangle AMC = \triangle EMB)$$

$$AI = EK \quad (\text{gt})$$

Nên $\triangle AMI = \triangle EMK$ (c - g - c)

Suy ra: $\widehat{AMI} = \widehat{EMK}$

Mà $\widehat{AMI} + \widehat{IME} = 180^\circ$ (tính chất hai góc kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{EMK} + \widehat{IME} = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Ba điểm I, M, K thẳng hàng.

c) Trong tam giác vuông BHE ($\widehat{H} = 90^\circ$ có $\widehat{HBE} = 50^\circ$)

$$\Rightarrow \widehat{HEB} = 90^\circ - \widehat{HBE} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{HEM} = \widehat{HEB} - \widehat{MEB} = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$$

Nên $\widehat{BME} = \widehat{HEM} + \widehat{MHE} = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$ (định lý góc ngoài của tam giác).

Câu 4. (Đề HSG 7 huyện Hưng Hà năm học 2022 - 2023)

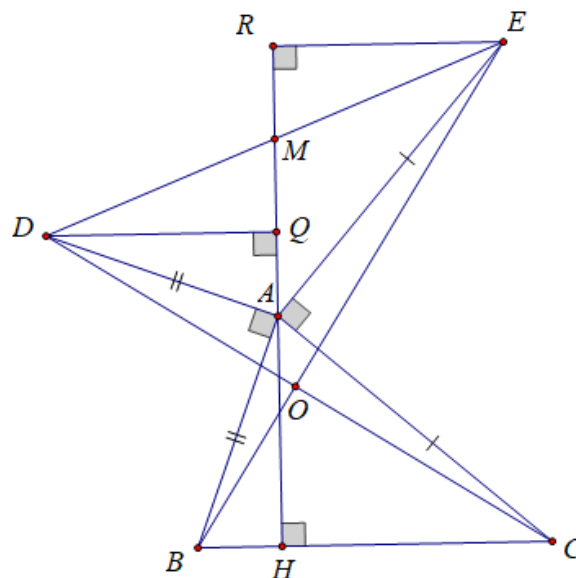
Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, $AB < AC$. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B kẻ đoạn thẳng AE vuông góc và bằng AC . Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C kẻ đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AB . Từ A kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC).

a) Chứng minh $BE = CD$.

b) Chứng minh $BE \perp CD$.

c) Chứng minh tia HA đi qua trung điểm của đoạn thẳng DE .

Lời giải



a) Ta có: $AC \perp AE \Rightarrow \widehat{EAC} = 90^\circ$; $AB \perp AD \Rightarrow \widehat{DAB} = 90^\circ$

$$\widehat{EAB} = \widehat{EAC} + \widehat{BAC} = 90^\circ + \widehat{BAC}$$

$$\widehat{CAD} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} = 90^\circ + \widehat{BAC}$$

$$\Rightarrow \widehat{EAB} = \widehat{CAD}$$

Xét $\triangle EAB$ và $\triangle CAD$ có:

$$AE = AC; \widehat{EAB} = \widehat{CAD}; AB = AD$$

Do đó $\triangle EAB = \triangle CAD$ (c - g - c) $\Rightarrow BE = DC$ (hai cạnh tương ứng).

b) Gọi K, O lần lượt là giao điểm của BE với AC và CD .

Theo chứng minh trên: $\triangle EAB = \triangle CAD$ (c-g-c)

Suy ra $\angle EBA = \angle ACD$ (hai góc tương ứng). Hay $\angle AEK = \angle KCO$

Xét $\triangle AEK$ vuông tại A có $\angle AEK + \angle AKE = 90^\circ$ (định lý).

Mặt khác $\angle AKE = \angle OCK$ (hai góc đối đỉnh)

Suy ra $\angle KCO + \angle OCK = 90^\circ$

Xét $\triangle KCO$ có $\angle KCO + \angle OCK = 90^\circ$. Suy ra $\triangle KCO$ vuông tại O .

Do đó $KO \perp CO \Rightarrow BE \perp CD$

c)

Gọi M là giao điểm của tia HA và DE .

Kẻ $DQ \perp AM$ tại Q , $ER \perp AM$ tại R .

Ta có: $\angle DAQ = \angle EBH$ (Cùng phụ $\angle BAH$)

$AD = AB$ (gt) $\Rightarrow \triangle AHB = \triangle DQA$ (Cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow DQ = AH$ (1)

Chứng minh tương tự: $ER = AH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DQ = ER$

Suy ra $\triangle MDQ = \triangle MER$ (cạnh góc vuông – góc nhọn kề)

Suy ra $MD = ME$ (hai cạnh tương ứng)

Do đó M là trung điểm của DE .

Vậy tia HA đi qua trung điểm M của đoạn thẳng DE .

Câu 5. (Đề minh họa HSG 7 trường Lê Quý Đôn, Thái Hưng- Hưng Hà năm học 2022 - 2023)

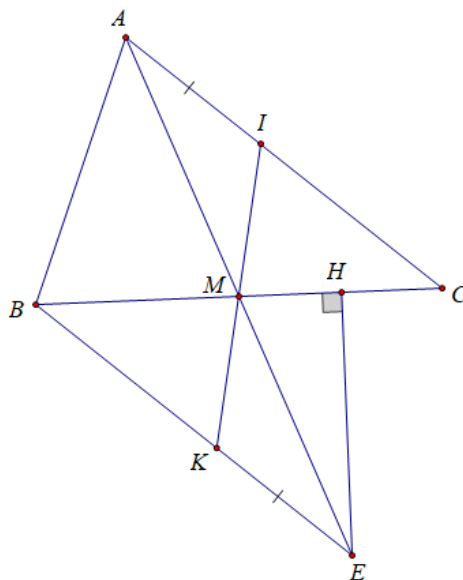
Cho tam giác ABC , M là trung điểm BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng:

a) $AC = EB$ và $AC \parallel EB$.

b) Gọi I là một điểm trên AC , K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

c) Từ E kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$); biết $\angle HBE = 30^\circ$; $\angle MEB = 40^\circ$. Tính $\angle HEM$ và $\angle BME$?

Lời giải



a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có:

$AM = EM$ (gt); $\angle AMC = \angle EMB$ (đối đỉnh); $BM = MC$ (giả thiết)

Nên $\triangle AMC = \triangle EMB$ (c - g - c)

$\Rightarrow AC = EB$ (hai cạnh tương ứng)

Vì $\triangle AMC = \triangle EMB$ (cmt) $\Rightarrow \angle MAC = \angle MEB$ (hai góc tương ứng)

Mà 2 góc này ở vị trí so le trong

Suy ra $AC \parallel EB$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song).

b) Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có:

$AM = EM$ (gt); $\angle MAI = \angle MEK$ ($\triangle AMC = \triangle EMB$); $AI = EK$ (gt)

Do đó $\triangle AMI = \triangle EMK$ (c - g - c)

suy ra $\angle AMI = \angle EMK$ (hai góc tương ứng)

Mà $\angle AMI + \angle EME = 180^\circ$ (kề bù)

$\Rightarrow \angle EMK + \angle EME = 180^\circ \Rightarrow I, M, K$ thẳng hàng.

c) Trong tam giác vuông BHE ($\angle H = 90^\circ$) có $\angle HBE = 30^\circ$

$\Rightarrow \angle HEB = 90^\circ - \angle HBE = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle HEM = \angle HEB - \angle MEB = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ$

$\angle BME$ là góc ngoài tại đỉnh M của $\triangle HEM$

Nên $\angle BME = \angle HEM + \angle MHE = 20^\circ + 90^\circ = 110^\circ$ (định lý góc ngoài của tam giác)

$\angle HEM = 20^\circ$; $\angle BME = 110^\circ$

Vậy

Câu 6. (Đề minh họa HSG 7 trường Lý Nam Đế- Hưng Hà năm học 2022 - 2023)

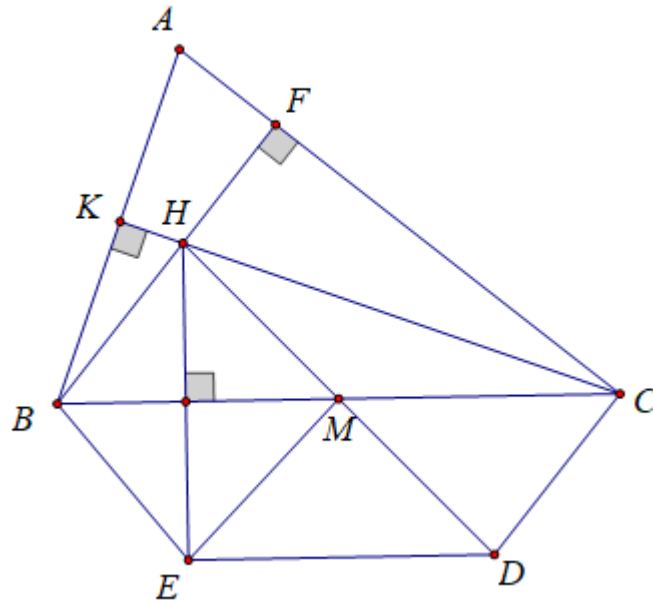
Cho tam giác ABC nhọn. Kẻ BF vuông góc với AC (F thuộc AC), kẻ CK vuông góc với AB (K thuộc AB), BF cắt CK tại H . Gọi M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MH lấy điểm D sao cho $MD = MH$

a) Chứng minh $DC \parallel BH$

b) Từ H kẻ HI vuông góc với BC (I thuộc BC), trên tia đối của tia IH lấy điểm E sao cho $IE = IH$. Chứng minh rằng: $BE = DC$

c) Chứng minh: $DE \parallel BC$

Lời giải



a) Chỉ ra $\triangle BHM = \triangle CMD$ (c - g - c)

Suy ra $\angle HBM = \angle BCM$ (hai góc tương ứng)

Mà hai góc này ở vị trí so le trong suy ra $DC \parallel BH$.

b) $\triangle BHM = \triangle CMD$ (cmt)

Suy ra $CD = BH$ (1)

Chứng minh $\triangle BHI = \triangle BEI$ (c - g - c)

Suy ra $BH = BE$ (2)

Từ (1) và (2) $BE = DC$.

$\triangle MHI = \triangle MIE$ (c - g - c)

c) Chứng minh

Suy ra $MH = ME$, mà $MH = MD$ (gt) nên $ME = MD$.

Vì $MH = ME$ suy ra $\triangle MEH$ cân tại M

Suy ra $\angle MHE = \angle MEH$ (3)

Vì $ME = MD$ suy ra $\triangle MDE$ cân tại M

Suy ra $\angle MDE = \angle MED$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\angle MEH + \angle MDE = \angle MEH + \angle MED = \angle DEH$

+) $\triangle HDE$ có $\angle MHE + \angle MDE + \angle DEH = 180^\circ$

$\Rightarrow 2\angle DEH = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle DEH = 90^\circ \Rightarrow ED \perp EH$ (5)

Mà $BC \perp EH$ (6). Từ (5) và (6) suy ra $DE \parallel BC$.

Câu 7. (Đề minh họa HSG 7 trường Thống Nhất- Hưng Hà năm học 2022 - 2023)

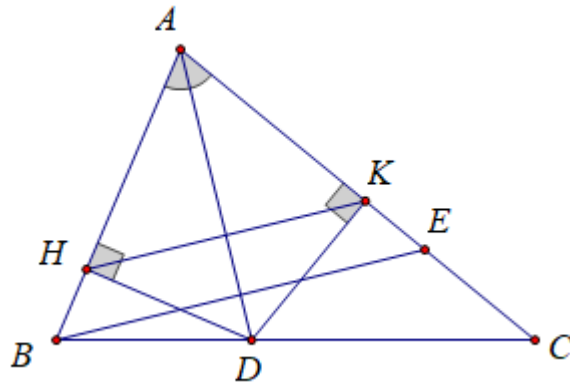
Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn ($AB < AC$). Tia phân giác của $\angle BAC$ cắt BC tại D , lấy E trên AC sao cho $AE = AB$.

a) Chứng minh: $\triangle ADB = \triangle ADE$.

b) Vẽ $DH \perp AB (H \in AB)$, $DK \perp AC$. Chứng minh rằng: $BH = EK$.

c) Chứng minh: $HK \parallel BE$.

Lời giải



a) Xét $\triangle ADB$ và $\triangle ADE$ có:

$$\begin{cases} AB = AE \text{ (gt)} \\ \widehat{BAD} = \widehat{EAD} \\ AD \text{ chung} \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle ADB = \triangle ADE$ (c - g - c).

b) Vì $\triangle ADB = \triangle ADE$ nên $BD = ED$ (hai cạnh tương ứng) và $\widehat{DBA} = \widehat{DEA}$ (hai góc tương ứng)

Xét $\triangle BDH$ vuông tại H và $\triangle EDK$ vuông tại K có:

$$\begin{cases} BD = ED \text{ (cmt)} \\ \widehat{DBH} = \widehat{DEK} \text{ (cmt)} \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle BDH = \triangle EDK$ (cạnh huyền- góc nhọn)

$\Rightarrow BH = EK$ (hai cạnh tương ứng).

c)

+ Có $AB = AE$; $BH = EK \Rightarrow AB - BH = AE - EK \Rightarrow AH = AK$

Suy ra A thuộc đường trung trực của HK

Có $DH = DK$ ($\triangle BDH = \triangle EDK$)

Suy ra D thuộc đường trung trực của HK

Do đó AD đường trung trực của HK

Hay $AD \perp HK$

+ Có $AB = AE$

Suy ra A thuộc đường trung trực của BE

Có $DB = DE$ ($\triangle BDH = \triangle EDK$)

Suy ra D thuộc đường trung trực của BE

Do đó AD đường trung trực của BE

Hay $AD \perp BE$

Có $\begin{cases} AD \perp HK \\ AD \perp BE \end{cases}$

Suy ra $HK \parallel BE$

Dạng 2. Hình khối trong thực tiễn (15 đề tách của mình không có)

Dạng 3. Bài toán chứng minh tổng hợp

Câu 1. (Đề giao lưu HSG 7 huyện Cẩm Thủy- Thanh Hóa, trường Tây Đô, trường Phạm Đôn Lễ- Hưng Hà năm học 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao của CD và BE , K là giao của AB và DC .

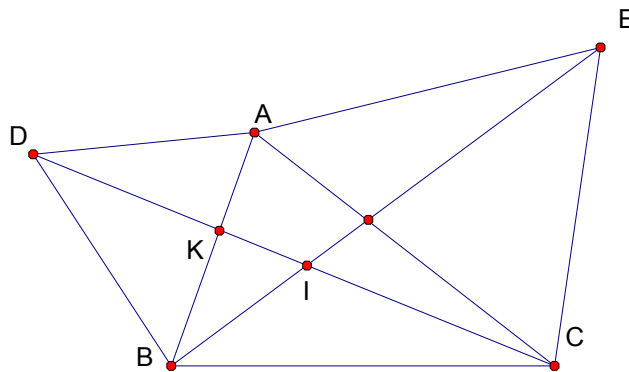
a) Chứng minh rằng: $\triangle ADC = \triangle ABE$.

b) Chứng minh rằng: $\angle DIB = 60^\circ$.

c) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều.

d) Chứng minh rằng AI là phân giác của góc DIE .

Lời giải



a) Chứng minh rằng: $\triangle ADC = \triangle ABE$

Ta có: $AD = AB$; $\angle DAC = \angle BAE$ và $AC = AE$

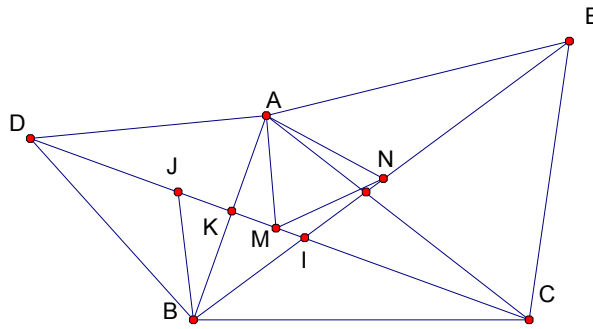
Suy ra $\triangle ADC = \triangle ABE$ (c - g - c).

b) Chứng minh rằng: $\angle DIB = 60^\circ$.

Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow \angle ABE = \angle ADC$

Lại có: $\angle BKI = \angle AKD$ (đối đỉnh)

c) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều.



Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow CM = EN$ và $\angle ACM = \angle AEN$
 $\Rightarrow \triangle ACM = \triangle AEN$ (c - g - c) $\Rightarrow AM = AN$ và $\angle CAM = \angle EAN$
 $\angle MAN = \angle CAE = 60^\circ$. Do đó $\triangle AMN$ đều.

d) Chứng minh rằng IA là phân giác của góc DIE .

Trên tia ID lấy điểm J sao cho $IJ = IB \Rightarrow \triangle BIJ$ đều $\Rightarrow BJ = BI$ và $\angle JBI = \angle DBA = 60^\circ$

Suy ra: $\angle JBD = \angle IBA$, kết hợp $BA = BD \Rightarrow \triangle IBA = \triangle JBD$ (c - g - c)

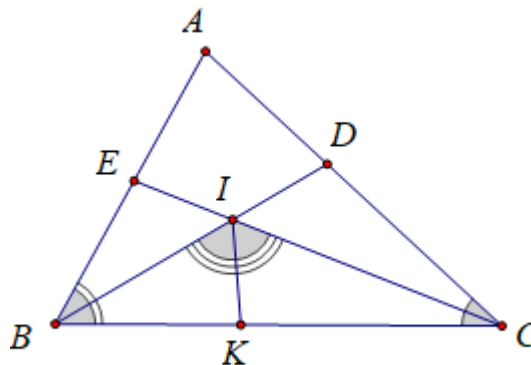
$\Rightarrow \angle AIB = \angle JIB = 120^\circ$ mà $\angle DIB = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle DIA = 60^\circ$. Từ đó suy ra IA là phân giác của góc DIE .

Câu 2. (Đề khảo sát HSG 7 huyện Sông Lô, Vĩnh Phúc năm học 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có $\angle A = 60^\circ$. Hai tia phân giác BD, CE của các $\angle ABC$ và $\angle ACB$ cắt nhau ở I ($D \in AC, E \in AB$). Chứng minh rằng $ID = IE$.

Lời giải



+ Kẻ tia phân giác IK của góc BIC

+ Xét $\triangle ABC$ có: $\angle A = 60^\circ \Rightarrow \angle B + \angle C = 120^\circ$

+ Vì BD, CE là các tia phân giác của $\angle ABC$ và $\angle ACB$

$\Rightarrow \angle IBC + \angle ICB = 60^\circ \Rightarrow \angle BIC = 120^\circ$

$\Rightarrow \angle BIE = \angle DIC = 60^\circ$ (góc kề bù với góc BIC)

+ Chứng minh được: $\triangle IBE = \triangle IKC$ (g - c - g) $\Rightarrow IE = IK$ (1)

+ Chứng minh tương tự được $ID = IK$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $ID = IE$.

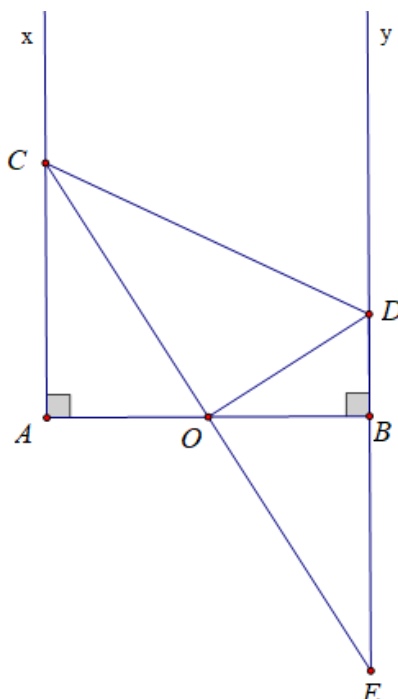
Câu 3. (Đề khảo sát HSG 7 huyện Yên Thế, Bắc Giang năm học 2022 - 2023)

1) Cho đoạn thẳng AB , O là trung điểm của AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia Ax ; By vuông góc với AB . Gọi C là một điểm thuộc tia Ax . Đường vuông góc với OC tại O cắt tia By ở D . Chứng minh $CD = AC + BC$.

2) Cho tam giác ABC . Gọi O là giao điểm các đường phân giác của tam giác đó. Từ O kẻ OD , OE , OF lần lượt vuông góc với BC , AC , AB . Trên tia đối của các tia AC , BA , CB lấy theo thứ tự ba điểm M , N , P sao cho $AM = BC$, $BN = AC$, $CP = AB$. Chứng minh $EM = FN = DP$.

Lời giải

1)

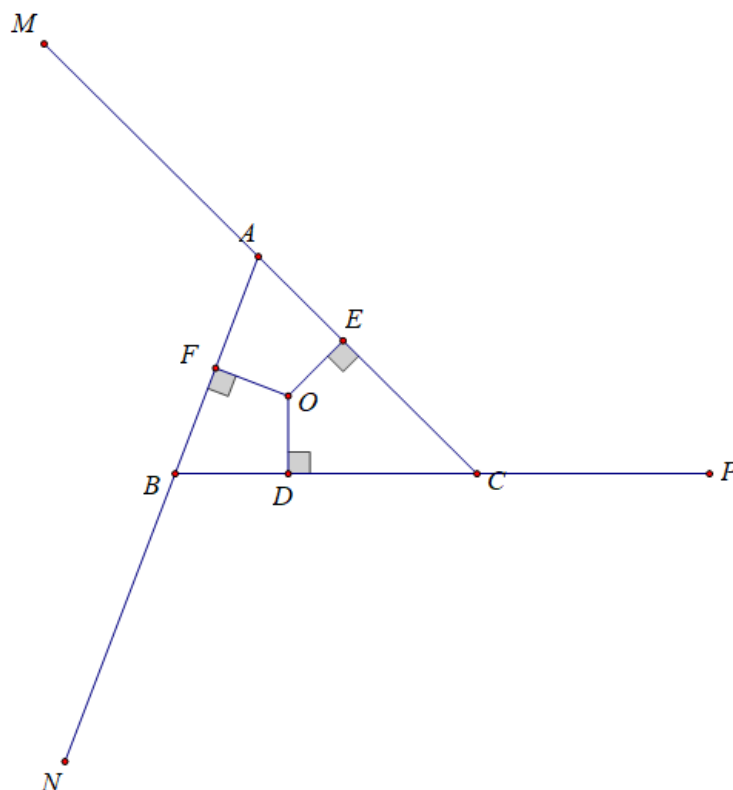


Giả sử đường thẳng CO cắt BD tại E Chứng minh được $\triangle ACO = \triangle BEO$ (g.c.g)
 $\Rightarrow CO = OE$; $AC = BE$.

Chứng minh $\triangle OCD = \triangle OED$ (c - g - c) hoặc chứng minh $\triangle CDE$ cân tại D (DO vừa là đường cao, vừa là trung tuyến) $\Rightarrow CD = DE$.

Có $CD = DE = BD + BE = BD + AC$ (đpcm).

2)



Ta có O là giao điểm các đường phân giác $\Rightarrow OD = OE = OF$

$$\Rightarrow AE = AF; BD = BF; CD = CE$$

Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$

$$\text{Xét } b + c - a = AB + AC - BC = AF + BF + AE + CE - BD - CD = 2AE$$

$$\Rightarrow AE = \frac{b + c - a}{2}$$

$$\text{Tương tự } BF = \frac{a + c - b}{2}; \quad CD = \frac{a + b - c}{2}$$

$$\text{Ta có } EM = AE + AM = \frac{b + c - a}{2} + a = \frac{a + b + c}{2};$$

$$FN = BF + BN = \frac{a + c - b}{2} + b = \frac{a + b + c}{2}; \quad DP = \frac{a + b + c}{2}$$

$$\Rightarrow EM = FN = DP$$

Câu 4. (Đề kiểm tra chọn SG 7 trường TH&THCS Kỳ Đồng, Hưng Hà năm học 2022 - 2023)

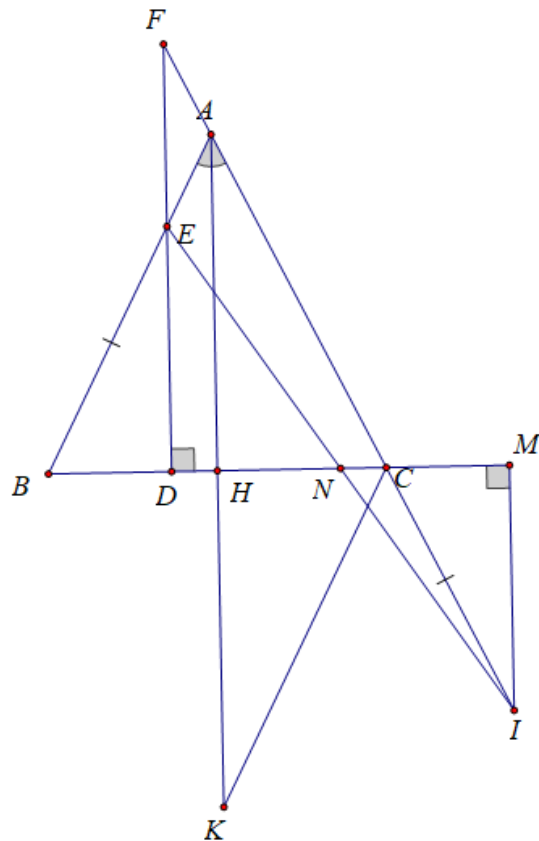
Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $DC = 2BD$. Đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt cạnh AB tại E và cắt tia CA tại F . Qua C kẻ đường thẳng song song với AB cắt tia phân giác AH của góc BAC ($H \in BC$) tại K .

a) Chứng minh $\triangle ABH = \triangle KCH$.

b) Chứng minh tam giác AEF là tam giác cân.

c) Trên tia đối của tia CA lấy điểm I sao cho $CI = BE$. Chứng minh BC đi qua trung điểm của EI .

Lời giải



a) Xét $\triangle ABH$ và $\triangle ACH$ có:

$$\begin{cases} AB = AC (gt) \\ \angle BAH = \angle CAH (gt) \\ AH \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABH = \triangle ACH (c - g - c)$$

$\Rightarrow BH = CH$ (cặp cạnh tương ứng)

Vì $CK \parallel AB \Rightarrow \angle ABH = \angle KCH$ (so le trong)

$$\text{Xét } \triangle ABH \text{ và } \triangle KCH \text{ có: } \begin{cases} \angle ABH = \angle KCH (cmt) \\ BH = CH (cmt) \\ \angle AHB = \angle HKC (dd) \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle KCH$ (g - c - g) (đpcm)

b) Vì $\triangle ABH = \triangle ACH$ (cmt) $\Rightarrow \angle AHB = \angle AHC$ (cặp góc tương ứng)

Mà $\angle AHB + \angle AHC = 180^\circ$ (kề bù)

$\Rightarrow \angle AHB = \angle AHC = 90^\circ$

$\Rightarrow AH \perp BC$

Mà $ED \perp BC(gt) \Rightarrow AH \parallel ED$ (quan hệ từ vuông góc đến song song)

$$\Rightarrow \widehat{BED} = \widehat{BAH} \text{ (đồng vị) (1)}$$

Có $ED \parallel AH \Rightarrow FD \parallel AH \Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{CAH}$ (đồng vị) (2)

$$\text{Mà } \widehat{BED} = \widehat{AEF} \text{ (đđ)}, \widehat{BAH} = \widehat{CAH} \text{ (gt)} \text{ (3)}$$

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{AEF} \Rightarrow \triangle AEF$ cân tại A .

c) Gọi N là giao điểm của EI và BC

Từ I kẻ $IM \perp BC$ tại M , có $AH \perp BC \text{ (gt)} \Rightarrow AH \parallel IM$

$$\Rightarrow \widehat{HAC} = \widehat{CIM} \text{ (so le trong)}$$

$$\text{có } \widehat{HAC} = \widehat{HBC} = \widehat{BED} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BED} = \widehat{CIM}$$

Xét $\triangle BED$ vuông tại D và $\triangle CIM$ vuông tại M có
$$\begin{cases} BE=CI \text{ (gt)} \\ \widehat{BED} = \widehat{CIM} \text{ (cmt)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle BED = \triangle CIM \text{ (cạnh huyền – góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow ED = IM \text{ (cặp cạnh tương ứng)}$$

Mặt khác $EH = IM$ (cùng vuông góc với BC)

$$\Rightarrow \widehat{DEN} = \widehat{MIN} \text{ (so le trong)}$$

Xét $\triangle DEN$ vuông tại D và $\triangle MIN$ vuông tại M có
$$\begin{cases} ED=MI \text{ (cmt)} \\ \widehat{DEN} = \widehat{MIN} \text{ (cmt)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle DEN = \triangle MIN \text{ (cạnh góc vuông- góc nhọn kề)}$$

$$\Rightarrow EN = IN \text{ (cạnh tương ứng)}$$

$\Rightarrow N$ là trung điểm của EI .

Câu 5. (Đề minh họa HSG 7 trường Trần Thái Tông- Hưng Hà năm học 2022 - 2023)

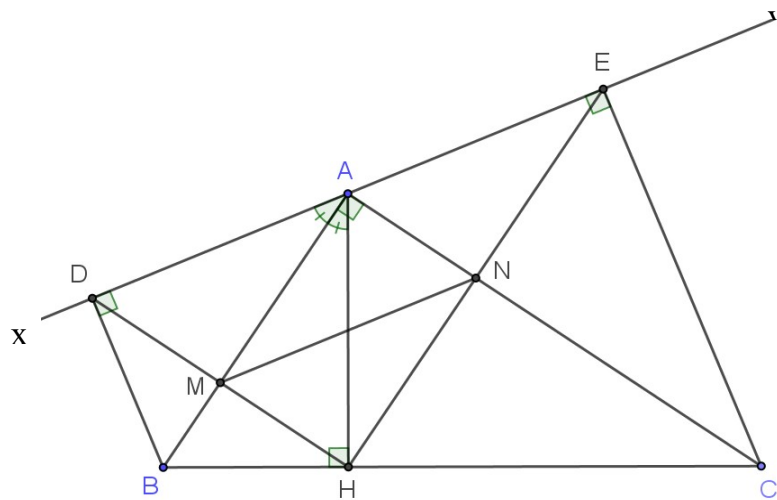
Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ đường cao AH . Vẽ tia Ax sao cho $\widehat{BAx} = \widehat{BAH}$. Gọi Ay là tia đối của tia Ax . Vẽ BD và CE vuông góc với đường thẳng xy ($D, E \in xy$). AB cắt DH tại M , AC cắt EH tại N . Chứng minh rằng:

a) Tia AC là phân giác của $\widehat{HAE}$.

b) $BD + CE = BC$.

c) $MN = AH$.

Lời giải



a) Tia AC là phân giác của $\angle HAE$.

+) Ta có

$$\angle HAB + \angle HAC = \angle BAC$$

$$\Rightarrow \angle HAB + \angle HAC = 90^\circ \quad (1)$$

$$\angle BAD + \angle BAC + \angle CAE = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BAD + \angle CAE = 180^\circ - \angle BAC$$

$$\Rightarrow \angle BAD + \angle CAE = 90^\circ \quad (2)$$

Mà $\angle BAH = \angle HAC$ (Do giả thiết cho AC là phân giác của $\angle HAE$) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \angle CAE = \angle BAH$.

$\Rightarrow AC$ là phân giác của $\angle HAE$.

b) Chứng minh $BD + CE = BC$.

+) $\triangle ADB = \triangle AHB$ (cạnh huyền- góc nhọn) nên $BD = BH$.

+) $\triangle AEC = \triangle AHC$ (Cạnh huyền – góc nhọn) nên $CE = HC$.

+) Do đó $BD + CE = BH + HC = BC$.

c) Chứng minh $MN = AH$.

+) $\triangle ADB = \triangle AHB$ (cạnh huyền- góc nhọn) nên $AD = AH$; $BD = BH$ suy ra AB là đường trung trực của DH hay $AB \perp DH$ tại M .

+) $\triangle AEC = \triangle AHC$ (Cạnh huyền – góc nhọn) nên $CE = HC$; $AE = AH$ suy ra AC là đường trung trực của EH hay $AC \perp EH$ tại N .

Suy ra $AM \parallel NH$

+) $\triangle ANH = \triangle HMA$ (Cạnh huyền – góc nhọn) nên $AN = MH$

Suy ra $AN = DM$

Do đó $\triangle AMN = \triangle MAD$ (c - g - c) nên $MN = AD$ suy ra $MN = AH$.

Câu 6. (Đề minh họa HSG 7 trường Thái Phương- Hưng Hà năm học 2022 - 2023)

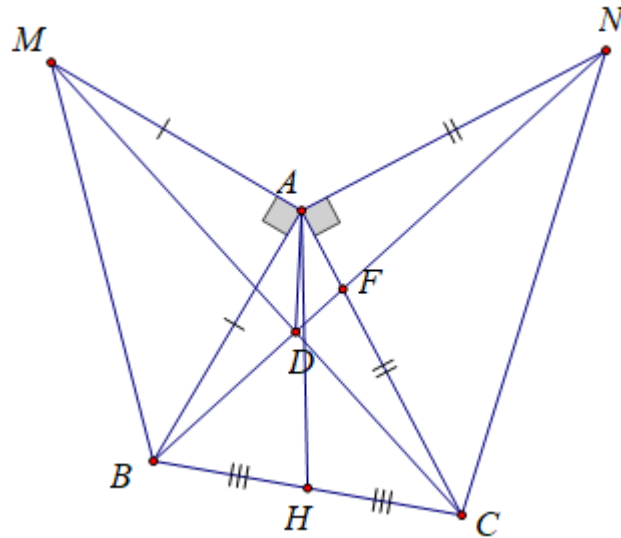
Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó các tam giác ABM , ACN vuông cân tại A ; BN và MC cắt nhau tại D .

a) Chứng minh: $\triangle AMC = \triangle ABN$; $BN \perp CM$.

b) Gọi H là trung điểm của BC . Chứng minh: $AH = \frac{1}{2}MN$.

c) Chứng minh rằng DA là phân giác của góc MDN .

Lời giải



a) Chứng minh được $\angle MAC = \angle BAN$ (Cùng bằng $90^\circ + \angle BAC$).

$MA = AB$ ($\triangle MAB$ vuông cân tại A)

$AC = AN$ (tam giác NAC vuông cân tại A)

$\Rightarrow \triangle AMC = \triangle ABN$ (c - g - c)

Gọi giao điểm của BN với AC là F .

Chỉ ra được $\angle AFN = \angle BFC$ (vì $\triangle AMC = \triangle ABN$)

$\angle ANF = \angle BCD$ (vì $\triangle AMC = \triangle ABN$)

Từ đó suy ra $\angle FDC = \angle FAN = 90^\circ$

Do đó: $BN \perp CM$.

b) Trên tia đối của tia HA lấy điểm K sao cho $AH = HK$

$\Rightarrow AH = \frac{1}{2}AK$ (1)

Xét $\triangle AHC$ và $\triangle KHB$ có:

$AH = HK$ (cách vẽ); $\angle AHC = \angle KHB$ (đối đỉnh); $HC = BH$ (gt)

$\Rightarrow \triangle AHC = \triangle KHB$ (c - g - c)

$\Rightarrow \angle ACH = \angle KBH$ (2 góc tương ứng)

Xét $\triangle ABC$ có $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$ (đ/l)

$\Rightarrow \angle ABC + \angle KBH = 180^\circ - \angle BAC$

$\Rightarrow \angle ABK = 180^\circ - \angle BAC$ (*)

Mà $\angle MAN = 180^\circ - \angle BAC$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \angle ABK = \angle MAN$

Xét $\triangle MAN$ và $\triangle ABK$ có

$MA = AB$ (cmt), $\angle ABK = \angle MAN$ (cmt); $AN = AC$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle MAN = \triangle ABK$ (c - g - c)

$\Rightarrow MN = AK$ (2 cạnh tương ứng)

Từ (1) và (2) ta suy ra $AH = \frac{1}{2}MN$ (đpcm).

c) Trên tia BN lấy điểm E , sao cho $BE = MD$

Ta chứng minh được $\triangle AMD = \triangle ABE$ (c - g - c)

$\Rightarrow \angle MAD = \angle BAE \Rightarrow \angle DAE = \angle MAB = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle ADE$ vuông tại A (2)

Từ (1) và (2) $\angle ADE = 45^\circ \Rightarrow \angle ADE = \frac{1}{2}\angle MDN$

$\Rightarrow DA$ là phân giác của $\angle MDN$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
<https://www.vnteach.com>