1. Không gian vector

Problem 1.1. Giả sử A là một ma trận vuông cấp n, và $C(A) = \{B \mid BA = AB\}$ là tập hợp tất cả các ma trận vuông phức cấp n giao hoán được với A. Chứng minh rằng: $C(A)$ là không gian vector con của không gian vector $M_{n\times n}$ và $\dim C(A) \geq n$.

Hint. Xét ánh xạ tuyến tính:

$$\begin{aligned} T : M_{n\times n} &\longrightarrow M_{n\times n} \\ B &\mapsto AB - BA. \end{aligned}$$

Khi đó $S = \ker T$ là không gian vector con của không gian các ma trận $M_{n\times n}$. Để ý rằng, nếu C là ma trận khả nghịch thì

$$AB = BA$$

khi và chỉ khi $C^{-1}ACC^{-1}BC = C^{-1}BCC^{-1}AC$. Nếu $D_1, \dots, D_n$ là các ma trận độc lập tuyến tính thì $C^{-1}D_1C, \dots, C^{-1}D_nC$ cũng độc lập tuyến tính. Do đó để đơn giản ta giả sử A có dạng Jordan, với khối Jordan thứ i cấp k là:

$$A_i = \begin{pmatrix} a & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & a & 1 \\ 0 & & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Khi đó A_i giao hoán với

$$B_i = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_k \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & b_1 & b_2 \\ 0 & & 0 & b_1 \end{pmatrix}.$$

Do đó A giao hoán với

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r \end{pmatrix}.$$

Vì trong B có n biến nên $\dim C(A) \geq n$. ♡

Problem 1.2. Cho S là không gian con của không gian $M_n(\mathbb{C})$ sinh bởi tập tất cả các ma trận có dạng $AB - BA$. Chứng minh rằng: $\dim S = n^2 - 1$.

Hint. Ta cần chỉ ra S có $n^2 - 1$ vector độc lập tuyến tính. Đó là các ma trận: $M_{ij} = M_{ik}M_{kj} - M_{kj}M_{ik},\ i \neq j$ (có $n^2 - n$ phần tử)

$M_{11} - M_{jj} = M_{ij}M_{j1} - M_{j1}M_{ij},\ j \neq 1$ (có $n - 1$ phần tử), trong đó ma trận M_{ij} là ma trận có phần tử 1 ở vị trí ij, các vị trí khác đều bằng 0. Do đó $\dim S \geq n^2 - 1$, mặt khác $S \neq M_{n\times n}$ nên $\dim S < n^2$. Suy ra: $\dim S = n^2 - 1$. ♡

Problem 1.3. Cho A, B là các không gian vector con của không gian vector hữu hạn chiều V sao cho $A + B = V$. Gọi $n = \dim V, a = \dim A, b = \dim B$. Lấy S là tập tất cả các tự đồng cấu f của V mà $f(A) \subset A, f(B) \subset B$. Chứng minh rằng S là không gian con của không gian tất cả các tự đồng cấu của V và hãy biểu thị số chiều của S qua a, b, n.

Hint. Lấy $f, g \in S$ và $r, s \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có: $\forall v \in A, (rf + sg)(v) = f(rv) + g(sv) \in A$ vì f, g bất biến đối với A. Tương tự ta cũng có $(rf + sg)(v) \in B$. Vậy $rf + sg \in S$, hay S là không gian vector con của không gian vector các tự đồng cấu của V. Để tính số chiều của S ta chỉ cần tính số chiều của không gian các ma trận bất biến với A và B. Gọi A_1, B_1 là không gian vector con của V sao cho $A = (A \cap B) \bigoplus A_1, B = (A \cap B) \bigoplus B_1$. Khi đó $\dim(A \cap B) = r = a + b - n, \dim A_1 = a - r, \dim B_1 = b - r$. Lấy $\{u_1, ..., u_{a-r}\}$ là cở sở của A_1, $\{v_1, ..., v_r\}$ là cở sở của $A \cap B$, $\{w_1, ..., w_{b-r}\}$ là cở sở của B_1, Mỗi tự đồng cấu bất biến đối với A, B thì phải bất biến đối với $A \cap B$. Do đó $f(u_i)$ được biểu thị tuyến tính qua

$\{u_1, ..., u_{a-r}, v_1, ..., v_r\}$, $f(v_i)$ chỉ có thể biểu diễn tuyến tính qua $\{v_1, ..., v_r\}$, $f(w_i)$ được biểu diễn tuyến tính qua $\{v_1, ..., v_r, w_1, ..., w_{b-r}\}$. Suy ra ma trận của f có dạng:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} a-r & r & b-r \end{array} \\ \begin{array}{r} a-r \\ r \\ b-r \end{array} & \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ M_2 & M_3 & M_4 \\ 0 & 0 & M_5 \end{pmatrix} \end{array}$$

trong đó số phần tử khác 0 nhiều nhất là $(a-r)^2 + rn + (b-r)^2 = a^2 + b^2 + n^2 - (a+b)n$. Vậy $\dim S = a^2 + b^2 + n^2 - (a+b)n$. ♡

Problem 1.4. Cho T là tự đồng cấu của không gian vector V. Giả sử $x \in V$ mà $T^m x = 0, T^{m-1}x \neq 0$ với m là số nguyên nào đó. Chứng minh rằng: $x, Tx, T^2x, \dots, T^{m-1}x$ độc lập tuyến tính.

Hint. Giả sử rằng có:

$$a_0 x + a_1 Tx + \cdots + a_k T^k x + \cdots + a_{m-1} T^{m-1} x = 0.$$

Tác động T^{m-1} vào hai vế ta có: $a_0 T^{m-1} x = 0$, suy ra $a_0 = 0$. Bằng quy nạp ta có $a_k = 0, \forall k = \overline{0, m-1}$ suy ra điều phải chứng minh ♡

Problem 1.5. Cho E là một không gian Euclide n chiều. Chúng ta nói hai cơ sở (a_i) và (b_i) cùng hướng nếu ma trận chuyển từ cơ sở (a_i) sang cơ sở (b_i) có định thức dương. Giả sử (a_i) và (b_i) là hai cơ sở trực chuẩn cùng hướng. Chứng minh rằng $(a_i + 2b_i)$ cũng là một cơ sở của E cùng hướng với (a_i).

Hint. Gọi P là ma trận chuyển từ (a_i) sang (b_i). Khi đó $I + 2P$ là ma trận chuyển từ (a_i) sang $(a_i + 2b_i)$. Ta có λ là giá trị riêng của $I + 2P$ khi và chỉ khi $\dfrac{1}{2}(\lambda - 1)$ là giá trị riêng của P. Do (a_i) và (b_i) là các cơ sở trực chuẩn nên P là ma trận trực giao và các giá trị riêng của P là ∓ 1, suy ra các giá trị riêng của $I + 2P$ là $3, -1$. Do đó 0 không phải là giá trị riêng của $I + 2P$ nên $I + 2P$ khả nghịch và $(a_i + 2b_i)$ là cơ sở. Hơn nữa $\det P = (-1)^\alpha 1^\beta$ với α, β là bội của các giá trị riêng $1, -1$ của P. Do đó $\det(I + 2P) = (-1)^\alpha 3^\beta$. Vì $\det p > 0$ nên α là số chẵn. Vậy $\det(I + 2P) > 0$, hay (a_i) và $(a_i + 2b_i)$ cùng hướng với nhau. ♡

Problem 1.6. Cho V là không gian vector n chiều và W là một không gian con m chiều của V, $(m < n)$. CMR, tồn tại một cơ sở của V không chứa một vector nào của W.

Hint. Gọi $\{v_1, \dots, v_m\}$ là cơ sở của W và $\{u_1, \dots, u_{n-m}\}$ là cơ sở của phần bù tuyến tính của W trong V. Khi đó cơ sở $\{v_1 + u_1, \dots, v_m + u_1, u_1, \dots, u_{n-m}\}$ chính là cơ sở cần tìm. ♡

Problem 1.7. Cho φ là ánh xạ tuyến tính từ V vào W, trong đó V và W là các không gian vector hữu hạn chiều. Gọi L, Z là không gian vector con của V và W. Chứng minh rằng:
a) $\dim \varphi(L) + \dim(\ker \varphi \cap L) = \dim L$
b) $\dim L - \dim \ker \varphi \leq \dim \varphi(L) \leq \dim L$
c) $\dim Z \leq \dim \varphi^{-1} Z \leq \dim Z + \dim \ker \varphi$

Hint. a) Xét ánh xạ tuyến tính hạn chế của φ lên L ta có:

$$\varphi|_L : L \longrightarrow \varphi L,$$

$\ker \varphi|_L = \ker \varphi \cap L$. Do đó: $\dim \varphi(L) + \dim(\ker \varphi \cap L) = \dim L$.
b) Suy ra từ a) với chú ý rằng $\dim(\ker \varphi \cap L) \leq \dim \ker \varphi$.
c) Đặt $L = \varphi^{-1} Z$ và chú ý rằng: $\varphi L \subset Z$. Từ câu b) ta có: $\dim \varphi^{-1} Z \leq \dim \varphi(\varphi^{-1} Z) + \dim \ker \varphi \leq \dim Z + \dim \ker \varphi$.
Mặt khác: $\ker \varphi \subset L$ nên từ a) ta có:

$$\dim \varphi(L) + \dim \ker \varphi = \dim L \ (1).$$

Ta cũng có: $\varphi(L) = Z \cap \varphi(V)$ nên

$$\begin{aligned}\dim \varphi(L) &= \dim(Z \cap \varphi(V)) \\ &= \dim Z + \dim \varphi(V) - \dim(Z + \varphi(V)) \\ &\geq \dim Z + \dim \varphi(V) - \dim W \\ &= \dim Z - \dim \ker \varphi. \ (2)\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh. ♡

Problem 1.8. Cho các đồng cấu của các $\mathbb{K}$-không gian vector hữu hạn chiều $\varphi : V \longrightarrow W, \psi : W \longrightarrow Z$. Chứng minh rằng:
a) $\dim \ker(\psi.\varphi) = \dim \ker \varphi + \dim(\operatorname{Im} \varphi \cap \ker \psi)$
b) $\dim \ker(\psi.\varphi) \leq \dim \ker \varphi + \dim \ker \psi$
c) $\operatorname{rank}(\psi.\varphi) = \operatorname{rank} \varphi - \dim(\ker \psi \cap \operatorname{Im} \varphi)$
d) $\operatorname{rank}(\psi.\varphi) \geq \operatorname{rank} \varphi + \operatorname{rank} \psi - \dim W$

Hint. a) Đặt $L = \operatorname{Im} \varphi$ và áp dụng bài tập 1.6.a ta có:

$$\dim \psi(L) + \dim(\ker \psi \cap L) = \dim L$$

hay

$$\dim \operatorname{Im}(\psi.\varphi) + \dim(\ker \varphi \cap L) = \dim V - \dim \ker \varphi$$

$$\dim \ker \varphi + \dim(\ker \varphi \cap L) = \dim V - \dim \operatorname{Im}(\psi.\varphi) = \dim \ker(\psi.\varphi.$$

b) Suy ra từ câu a) với chú ý rằng: $\ker \varphi \cap L \subset \ker \varphi$
c) Suy ra từ lập luận ở chứng minh của câu a).
d) Suy ra từ câu c) với chú ý rằng: $\ker \psi \cap \operatorname{Im} \varphi \subset \ker \psi$. ♡

Problem 1.9. Giả sử P, Q, R là các ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng:
$\operatorname{rank}(PQ) + \operatorname{rank}(QR) \leq \operatorname{rank} Q + \operatorname{rank}(PQR)$.

Hint. Sử dụng bài tập 1.7 câu c) ta có:

$$\operatorname{rank}(PQR) = \operatorname{rank}(PQ) - \dim(\ker(PQ) \cap \operatorname{Im} R)$$

$$\operatorname{rank}(QR) = \operatorname{rank} Q - \dim(\ker Q \cap \operatorname{Im} R)$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(PQ) + \operatorname{rank}(QR) &= \operatorname{rank}(PQR) + \operatorname{rank} Q + \dim(\ker Q \cap \operatorname{Im} R) \\ &\quad - \dim(\ker(PQ) \cap \operatorname{Im} R) \\ &\leq \operatorname{rank}(PQR) + \operatorname{rank} Q\end{aligned}$$

♡

Problem 1.10. Cho V và W là các không gian vector hữu hạn chiều. $T : V \longrightarrow W$ là ánh xạ tuyến tính, X là không gian vector con của không gian vector W Chứng minh: $\dim(T^{-1}X) \geq \dim V - \dim W + \dim X$. Hơn nữa nếu T toàn ánh thì ta có đẳng thức.

Hint. Xét ánh xạ tuyến tính: $F : V/_{T^{-1}X} \longrightarrow W/_X$ được cho bởi: $F(\overline{x}) = \overline{T(x)}$. Khi đó F là đơn ánh. Thật vậy, nếu $F(\overline{y}) = 0$ thì $T(y) \in X$ do đó $y \in T^{-1}X$ hay $\overline{y} = \overline{0}$. Từ đó suy ra:

$$\dim(V/_{T^{-1}X}) \leq \dim(W/_X)$$

hay

$$\dim V - \dim T^{-1}X \leq \dim W - \dim X.$$

Vậy

$$\dim T^{-1}X \geq \dim V - \dim W + \dim X.$$

♡

Problem 1.11. Cho $f : E \longrightarrow E$ là một tự đồng cấu tuyến tính của không gian vector hữu hạn chiều E. Chứng minh rằng

$$\dim \ker f^2 \leq 2 \dim \ker f.$$

Hint. Áp dụng bài tập 1.10 với $X = \ker f$. ♡

Problem 1.12. Cho A và B là các ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng không gian nghiệm của hai phương trình $AX = 0$ và $BX = 0$ bằng nhau khi và chỉ khi tồn tại ma trận C khả nghịch sao cho $A = CB$.

Problem 1.13. Cho A là ma trận vuông phức cấp n sao cho $\mathrm{tr}A^k = 0$ với $k = 1, \ldots, n$. Chứng minh rằng A là ma trận luỹ linh.

Hint. Giả sử A có dạng chéo hoá Jordan với các khối Jordan tương ứng với các giá trị riêng $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ phân biệt. Khi đó A^k là ma trận có các phần tử trên đường chéo chính là các giá trị riêng λ_i^k. Từ giả thiết $\mathrm{tr}(A^k) = 0, 1 \leq k \leq m$ ta có hệ phương trình:

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \lambda_i^k = 0, \forall k = 1, ..., n.$$

Từ hệ này ta suy ra $\lambda_i = 0, 1 \leq i \leq m$. Vậy A sẽ là ma trận luỹ linh. ♡

Problem 1.14. Cho A, B là các ma trận vuông cấp n sao cho $AB - BA = B$. Chứng minh rằng

(1) $A^k B = B^k (A + kI_n)$, với mọi $k \in \mathbb{N}$.
(2) $\det(B) = 0$ và $\mathrm{tr}(B^k) = 0$, với mọi $k \in \mathbb{N}$.
(3) B là ma trận lũy linh.

Problem 1.15. Cho A, B là các ma trận vuông cấp n, thoả mãn điều kiện: $AB = BA = 0$ và $\mathrm{Im}\, A \cap \ker A = \{0\}, \mathrm{Im}\, B \cap \ker B = \{0\}$. Chứng minh rằng: $\mathrm{rank}(A+B) = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$.

Hint. Ta có $\mathrm{rank}(A + B) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$. Giả sử $e_1, e_2, \ldots, e_k$ và $u_1, u_2, \ldots, u_s$ là các cơ sở của $\mathrm{Im}(A)$ và $\mathrm{Im}(B)$ tương ứng. Ta chứng minh hệ vector $e_1, e_2, \ldots, e_k, u_1, u_2, \ldots, u_s$ độc lập tuyến tính trong $\mathrm{Im}(A + B)$. Thật vậy, giả sử $\sum \lambda_i e_i + \sum \mu_j u_j = 0$, ta suy ra $\sum \lambda_i A e_i + \sum \mu_j A u_j = 0$. Từ giả thiết $AB = 0$ ta có $\mathrm{Im}(B) \subset \ker(A)$, do đó ta suy ra $\sum \lambda_i A e_i = 0$, hay $A(\sum \lambda_i e_i) = 0$. Từ đó ta có $\sum \lambda_i e_i = 0$. Vậy $\lambda_i = 0$. Tương tự ta cũng có $\mu_j = 0$. Tóm lại ta có hệ vector $e_1, e_2, \ldots, e_k, u_1, u_2, \ldots, u_s$ là cơ sở của $\mathrm{Im}(A + B)$.

Vậy $\mathrm{rank}(A + B) = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$. ♡

Problem 1.16. Cho $A_1, A_2, \ldots, A_m$ là các ma trận vuông đối xứng cấp n thoả mãn điều kiện $A_i A_j = 0, \forall i \neq j$. Chứng minh rằng:

$$\mathrm{rank}(A_1) + \mathrm{rank}(A_2) + \cdots + \mathrm{rank}(A_m) \leq n.$$

Problem 1.17. Ma trận A được gọi là pseudoreflection nếu $\mathrm{rank}(A - I) = 1$. Chứng minh rằng mọi ma trận A cấp n là tích của không quá $n + 1$ ma trận pseudoreflection.

Problem 1.18. Cho A là ma trận phức và k là một số tự nhiên. Chứng minh rằng tồn tại ma trận X sao cho $X^k = A$.

Problem 1.19. Cho A là ma trận phức cấp m sao cho dãy $(A^n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ đến ma trận B. Chứng minh rằng B đồng dạng với ma trận đường chéo mà các phần tử trên đường chéo chính bằng 0 hoặc 1.

Hint. Do $A^{2n} = A^n.A^n$ suy ra $B^2 = B$. Vậy ta có điều cần chứng minh. ♡

Problem 1.20. Cho W là không gian vector n-chiều, U và V là các không gian con của W sao cho $U \cap V = \{0\}$. Giả sử $u_1, u_2, \ldots, u_k \in U$ và $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ với $k > \dim U + \dim V$. Chứng minh rằng tồn tại các số $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0.$$

Khẳng định trên còn đúng không nếu $k \leq \dim U + \dim V$.

Hint. Chú ý rằng ta có đơn cấu $U \times V \longrightarrow W$ nên số chiều của $U \times V$ không quá n. ♡

Problem 1.21. Cho f là đa thức hệ số thực có bậc $n > 0$ và $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ là các đa thức hệ số thực và có bậc dương. CMR, tồn tại các số thực $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ không đồng thời bằng không sao cho đa thức $Q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (p_i(x))^i$ chia hết cho f.

Problem 1.22. Cho V là một không gian vector trên trường vô hạn $\mathbb{K}$ và $V_1, V_2, \ldots, V_n$ là các không gian vector con của V. Giả sử

$$V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i.$$

Chứng minh rằng tồn tại i sao cho $V = V_i$.

Hint. Đặt $A = V_1 \cup \ldots \cup V_{n-1}$. Ta sẽ chứng minh rằng $V_n = V$ hoặc $V_n \subset A$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Thật vậy, giả sử $V_n \neq V$ và $V_n \not\subset A$. Khi đó tồn tại các vector $x \in V \setminus V_n$ và $y \in V_n \setminus A$. Khi đó ta có $x + \lambda y \notin V_n$, với mọi $\lambda \neq 0$. Do đó ta có $x + y, x + 2y, \ldots, x + ny \in A = V_1 \cup \ldots \cup V_{n-1}$. Do đó tồn tại các số nguyên k, l sao cho $x + ky, x + ly \in V_i$, từ đó suy ra $y \in V_i \subset A$. Điều này là mâu thuẫn. ♡

Problem 1.23. Cho dãy các tự đồng cấu

$$V_0 \xrightarrow{f_1} V_1 \xrightarrow{f_2} V_2 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_m} V_m.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{m} \dim \ker f_i - \sum_{i=1}^{m} \dim(V_i / \operatorname{Im} f_i) = \dim V_0 - \dim V_m.$$

Hint. Trước hết ta chứng minh cho trường hợp $m = 1$. Tức là $f_1 : V_0 \longrightarrow V_1$, ta có $\dim V_0 = \dim \operatorname{Im} f_1 + \dim \ker f_1 = \dim V_1 - \dim(V_1 / \operatorname{Im} f_1) + \dim \ker f_1$. Do đó

$$\dim V_0 - \dim V_1 = \dim \ker f_1 - \dim(V_1 / \operatorname{Im} f_1).$$

Tương tự, ta có

$$\begin{aligned}
\dim V_0 - \dim V_1 &= \dim \ker f_1 - \dim(V_1 / \operatorname{Im} f_1) \\
\dim V_1 - \dim V_2 &= \dim \ker f_2 - \dim(V_2 / \operatorname{Im} f_2) \\
&\cdots \\
\dim V_{m-1} - \dim V_m &= \dim \ker f_m - \dim(V_m / \operatorname{Im} f_m).
\end{aligned}$$

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên, ta có điều cần chứng minh. ♡

Problem 1.24. Cho f, g là các tự đồng cấu tuyến tính của không gian vector V n-chiều thoả mãn điều kiện $f \circ g = g \circ f$, g luỹ linh và $\operatorname{rank}(f \circ g) = \operatorname{rank}(f)$. Chứng minh các khẳng định sau:

a) $\operatorname{Im}(f) \cap \ker(g \circ f) = \{0\}$,
b) $\operatorname{Im}(f) \cap \ker(g^2 \circ f) = \{0\}$,
c) Từ đó suy ra $f = 0$.

Problem 1.25. Cho f là một đẳng cấu tuyến tính của không gian vector V n-chiều. Giả sử $V = L\bigoplus N$, $\dim(N) = m, 0 < m < n$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên $k, (k \leq n^{2m})$ sao cho $V = f^k(L)\bigoplus N$.

Problem 1.26. Cho φ là một tự đồng cấu tuyến tính của không gian vector hữu hạn chiều V.

a) Giả sử đa thức tối tiểu của φ có phân tích $p(t) = h(t)g(t)$, trong đó h, g là các đa thức nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng: $V = L_1 \bigoplus L_2$, với $L_1 = \ker(h(\varphi)), L_2 = \ker(g(\varphi))$.

b) Giả sử đa thức tối tiểu của φ có phân tích $p(t) = h_1(t)\dots h_k(t)$, trong đó $h_i(t), 1 \leq i \leq k$ là các đa thức đôi một nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} L_i,$$

với $L_i = \ker(h_i(\varphi)), 1 \leq i \leq k$.

Hint. a) Do $h(t)$ và $g(t)$ là hai đa thức nguyên tố cùng nhau nên tồn tại các đa thức $u(t)$ và $v(t)$ sao cho $1 = h(t)u(t) + g(t)v(t)$. Khi đó mỗi vector x đều có phân tích duy nhất thành $x = h(\varphi)u(\varphi)(x) + g(\varphi)v(\varphi)(x)$ trong đó $h(\varphi)u(\varphi)(x) \in L_2$ và $g(\varphi)v(\varphi)(x) \in L_1$. ♡

2. HẠNG VÀ ĐỊNH THỨC

Problem 2.1. Cho ma trận vuông cấp n

$$A = \begin{pmatrix} x & y & \cdots & y \\ y & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & \cdots & x \end{pmatrix}$$

với x, y là các số thực cho trước. Tính A^k, với k là một số nguyên dương.

Hint. Đặt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta có $A = (x-y)I_n + yB$. Từ đây ta tính A^n. ♡

Problem 2.2. Cho $f_1(x),\ f_2(x),\ f_n(x)$ là các đa thức có bậc không vượt quá $n-2$, $n \geq 2$. Tính định thức sau

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$

Hint. Xét không gian vector $\mathbb{R}_{n-2}[x]$ gồm các đa thức với hệ số thực và có bậc không quá $n-2$. Ta có $\dim \mathbb{R}_{n-2}[x] = n-1$. Do đó các vector $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ là phụ thuộc tuyến tính, tức là tồn tại các số thực $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ không đồng thời bằng không sao cho $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Từ kết quả này ta suy ra định thức của ma trận

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$

bằng 0. ♡

Problem 2.3. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực. Chứng minh rằng định thức

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

bằng tích $f(\epsilon_1)f(\epsilon_2)\cdots f(\epsilon_n)$, trong đó ϵ_i là các căn bận n của đơn vị, với $f(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$.

Hint. Gọi $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ là n căn bậc n của 1. Ta có biểu diễn

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \epsilon_2 & \cdots & \epsilon_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \epsilon_2^{n-1} & \cdots & \epsilon_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(1) & f(\epsilon_2) & \cdots & f(\epsilon_n) \\ f(1) & \epsilon_2 f(\epsilon_2) & \cdots & \epsilon_n f(\epsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(1) & \epsilon_2^{n-1} f(\epsilon_2) & \cdots & \epsilon_n^{n-1} f(\epsilon_n) \end{vmatrix}$$

♡

Problem 2.4. Cho A là ma trận vuông thực cấp n và A^t là ma trận chuyển vị của nó. Chứng minh rằng A^tA và A cùng hạng.

Hint. Trước hết ta chứng minh: $\dim(\ker A^tA) = \dim \ker A$. Rõ ràng: $\ker A \subset \ker A^tA$, ngược lại giả sử $v \in \ker A^tA$ thì $A^tAv = 0$, suy ra $\langle A^tAv, v\rangle = \langle Av, Av\rangle = 0$ hay $Av = 0$, tức là $v \in \ker A$. Do vậy $\dim(\ker A^tA) = \dim \ker A$, từ đó ta có $\operatorname{rank}(A^tA) = \operatorname{rank} A$. ♡

Problem 2.5. Giả sử P và Q là các ma trận vuông cấp n thỏa mãn các điều kiện sau: $P^2 = P, Q^2 = Q$ và $I - (P+Q)$ khả nghịch. Chứng minh rằng P và Q có hạng bằng nhau.

Hint. Ta có:

$$\operatorname{rank} P = \operatorname{rank} P(I - P - Q) = \operatorname{rank} PQ$$
$$\operatorname{rank} Q = \operatorname{rank}(I - P - Q)Q = \operatorname{rank} PQ$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. ♡

Problem 2.6. Cho A, B là hai ma trận có tính chất $A^2 = A, B^2 = B$. Chứng minh rằng A đồng dạng với B khi và chỉ khi $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.

Problem 2.7. Cho

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

Giả sử $b_i \neq 0$, với mọi i. Chứng minh rằng:

a) $\operatorname{rank} T \geq n - 1$,

b) T có n giá trị riêng phân biệt.

Hint. a) Ma trận con có được bằng cách bỏ dòng 1, cột n có hạng bằng $(n-1)$.

b) Giả sử λ là giá trị riêng của A tức là $\det(A - \lambda I) = 0$. Theo câu a) $\operatorname{rank}(A - \lambda I) = n - 1$ nên $\dim \ker(A - \lambda I) = 1$, suy ra không gian con riêng ứng với giá trị riêng λ là một chiều. Do A là ma trận đối xứng nên A có đủ n giá trị riêng kể cả bội. Vậy A có n giá trị riêng khác nhau. ♡

Problem 2.8. Cho (a_{ij}) là ma trận vuông cấp n với các a_{ij} là các số nguyên.

a) Chứng minh rằng nếu số nguyên k là một giá trị riêng của A thì định thức của A chia hết cho k.

b) Giả sử m là một số nguyên và mỗi dòng của A có tổng bằng m

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = m, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Chứng minh rằng định thức của A chia hết cho m.

Hint. a) Ta có $\det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + ... + c_i(-1)^i \lambda^i + ... + c_n$ trong đó $c_n = \det A$ (a_{ij} nguyên nên c_i nguyên). Nếu k là giá trị riêng nên

$$(-1)^n k^n + ... + c_i(-1)^i k^i + ... + \det A = 0$$

suy ra k là ước của $\det A$.

b) Lấy $x = (1, ..., 1)$ ta có $Ax = mx$ nên m là giá trị riêng của A. Theo câu a) ta có m là ước của $\det A$. ♡

Problem 2.9. Cho định thức Vandermonde (phức)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \ldots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{pmatrix},$$

với a_i là các số phức.

a) Chứng minh rằng A khả nghịch khi và chỉ khi các a_i đôi một khác nhau.

b) Nếu các a_i đôi một khác nhau và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ là các số phức tùy ý. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất đa thức f bậc n với hệ số phức sao cho $f(a_i) = b_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Hint. a) Ta có: $\det A = \prod\limits_{i>j}(a_i - a_j)$, do đó A khả nghịch khi và chỉ khi các a_i khác nhau từng đôi một.

b) Giả sử $f = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ là một đa thức bậc n hệ số phức sao cho $f(a_i) = b_i$, ta có hệ phương trình ẩn là $c_i,\ i- = 0, n$

$$\begin{cases} c_0 + c_1 a_1 + \cdots + c_n a_1^n = b_1 \\ c_0 + c_1 a_2 + \cdots + c_n a_2^n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \\ c_0 + c_1 a_n + \cdots + c_n a_n^n = b_n \end{cases}$$

hệ phương trình trên có định thức Crame khác 0 nên có nghiệm duy nhất. Vậy tồn tại duy nhất đa thức f bậc n với hệ số phức sao cho $f(a_i) = b_i$. ♡

Problem 2.10. Cho ví dụ một hàm liên tục $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ với tính chất là $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ lập thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$, trong đó v_1, v_2, v_3 là các số thực phân biệt.

Hint. Xét hàm $f(t) = (1, t, t^2)$ thì f là hàm liên tục. Khi đó nếu $t_i,\ i = 1, 2, 3$ khác nhau từng đôi một thì

$$\det \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

♡

Problem 2.11. Cho $f_1, f_2, \ldots, f_n$ là các hàm nhận các giá trị thực liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh rằng $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi

$$\det \left(\int_a^b f_i(x) f_j(x) dx \right) = 0.$$

Hint. Xét tích vô hướng trên $C[a, b]$ xác định bởi

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Ta có $C[a, b]$ là không gian Euclid và

$$\det \left(\int_a^b f_i(x) f_j(x) dx \right)$$

chính là định thức Gram của hệ vector $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh. ♡

Problem 2.12. Ký hiệu $M_2(\mathbb{R})$ là không gian các ma trận vuông thực cấp 2. Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Xét phép biến đổi tuyến tính $L : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ xác định bởi $L(X) = AXB$. Hãy tính vết và định thức của L.

Hint. Xét các ánh xạ tuyến tính

$$L_A(X) = AX$$
$$L_B(X) = XB.$$

Ma trận của L_A và L_B lần lượt là:

$$M_A = \begin{pmatrix} =1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \; M_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $\det L = \det L_A . \det L_B = 2^6.5^2,\ Tr(L) = Tr(M_A.M_B) = 24$ ♡

Problem 2.13. Ký hiệu $M_3(\mathbb{R})$ là không gian các ma trận vuông thực cấp 3. Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Xét phép biến đổi tuyến tính $L : M_3(\mathbb{R}) \longrightarrow M_3(\mathbb{R})$ xác định bởi $L(X) = \dfrac{1}{2}(AX + XA)$. Hãy tính định thức của L.

Hint. Lấy $X = (x_{ij})$, ta có:

$$L(X) = \begin{pmatrix} x_{11} & \frac{3}{2}x_{12} & x_{13} \\ \frac{3}{2}x_{21} & 2x_{22} & \frac{3}{2}x_{23} \\ x_{31} & \frac{3}{2}x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

Dễ thấy mỗi ma trận M_{ij} đều là vector riêng của L. Suy ra $\det L = 2.(\dfrac{3}{2})^4 = \dfrac{81}{8}$. ♡

Problem 2.14. Ký hiệu $M_3(\mathbb{R})$ là không gian các ma trận vuông thực cấp 3. Giả sử $A \in M_3(\mathbb{R}), \det A = 32$ và đa thức tối tiểu của A là $(\lambda - 4)(\lambda - 2)$. Xét ánh xạ tuyến tính: $L_A : M_3(\mathbb{R}) \longrightarrow M_3(\mathbb{R})$ xác định bởi $L_A(X) = AX$. Hãy tính vết của L_A.

Problem 2.15. Ký hiệu $M_7(\mathbb{R})$ là không gian các ma trận vuông thực cấp 7. Giả sử $A \in M_7(\mathbb{R})$ là một ma trận chéo với đường chéo chính gồm 4 hạng tử +1 và 3 hạng tử -1. Xét ánh xạ tuyến tính $L_A : M_7(\mathbb{R}) \longrightarrow M_7(\mathbb{R})$ xác định bởi $L_A(X) = AX - XA$. Hãy tính $\operatorname{rank} L_A$.

Problem 2.16. Cho F là một trường, n và m là hai số nguyên, $M_{m \times n}$ là không gian các ma trận cấp $m \times n$ trên trường F. Giả sử A và B là hai ma trận cố định của $M_{m \times n}$. Xét ánh xạ tuyến tính $L : M_{m \times n} \longrightarrow M_{m \times n}$ xác định bởi $L(X) = AXB$. Chứng minh rằng nếu $m \neq n$ thì L suy biến.

Hint. Trường hợp $m > n$. Ta viết $T = T_1 \circ T_2$, trong đó $T_2 : M_{n\times m} \longrightarrow M_{n\times n}$ được xác định bởi: $T_2(X) = XB$ và $T_1 : M_{n\times n} \longrightarrow M_{m\times n}$ được cho bởi: $T_1(Y) = AY$. Vì $\dim M_{n\times m} = nm > n^2 = \dim M_{n\times n}$ nên T_2 không đơn ánh, suy ra T cũng không đơn ánh hay T không khả nghịch.

Trường hợp $m < n$ xét tương tự. ♡

Problem 2.17. Giả sử $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ là các ma trận cấp n. Chứng minh rằng tìm được $n+1$ số $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ không đồng thời bằng 0 sao cho ma trận $x_1A_1 + x_2A_2 \cdots + x_{n+1}A_{n+1}$ suy biến.

Hint. Gọi $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$ là các vector có toạ độ là cột đầu tiên của các ma trận $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ tương ứng. Khi đó $n+1$ vector này phụ thuộc tuyến tính. Do đó tồn tại $n+1$ số thực $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + v_{n+1}x_{n+1} = 0.$$

Lúc đó ma trận $x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_{n+1}A_{n+1}$ có cột đầu tiên bằng 0 nên ma trận $x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_{n+1}A_{n+1}$ suy biến. ♡

Problem 2.18. Cho A là ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu $A^2 = E$ thì tổng hạng của các ma trận $A - E$ và $A + E$ bằng n (E là ma trận đơn vị).

Hint. Xem A là tự đồng cấu tuyến tính của $\mathbb{R}^n$. Điều cần chứng minh $\operatorname{rank}(A-E) + \operatorname{rank}(A+E) = n$ tương đương với $\dim(\ker(A-E)) + \dim(\ker(A+E)) = n$. Thật vậy, với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ ta có

$$x = \frac{1}{2}(x + Ax) + \frac{1}{2}(x - Ax)$$

trong đó $\dfrac{1}{2}(x + Ax) \in \ker(A - E)$ và $\dfrac{1}{2}(x - Ax) \in \ker(A + E)$.

Mặt khác $\ker(A+E) \cap \ker(A-E) = \{0\}$ nên

$$\mathbb{R}^n = \ker(A+E) \bigoplus \ker(A-E),$$

suy ra $\dim(\ker(A-E)) + \dim(\ker(A+E)) = n$. ♡

Problem 2.19. Cho A là ma trận vuông thực cấp n. Chứng minh rằng: $\det(A^2 + E) \geq 0$. Khi nào thì đẳng thức xảy ra.

Problem 2.20. Ta viết

$$A^2 + E = (A + iE)(A - iE) = (A + iE)\overline{(A + iE)}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\det(A^2 + E) &= \det(A + iE)\det(\overline{(A + iE)})\\ &= \det(A + iE)\overline{\det(A + iE)} = |\det(A + iE)|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Vậy $\det(A^2 + E) \geq 0$ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi đa thức đặc trưng của A nhận $\pm i$ làm nghiệm.

Problem 2.21. Cho tam thức bậc hai $p(x) = x^2 + ax + b$ thoả mãn $p(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và A là một ma trận vuông thực cấp n. Chứng minh rằng: $\det p(A) \geq 0$.

Hint. Từ giả thiết ta có $p(x)$ có hai nghiệm phức liên hợp λ và $\overline{\lambda}$, do đó

$$p(x) = (x - \lambda)(x - \overline{\lambda}),$$

$$p(A) = (A - \lambda E)(A - \overline{\lambda}E) = (A - \lambda E)\overline{(A - \lambda E)}.$$

Suy ra

$$\det p(A) = |\det(A - \lambda E)|^2 \geq 0.$$

♡

Problem 2.22. Cho $f(x)$ là đa thức hệ số thực có bậc dương, hệ số dẫn đầu bằng 1 và $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, A là một ma trận vuông thực cấp n. Chứng minh rằng $\det f(A) \geq 0$.

Hint. Do $f(x) \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$ và hệ số dẫn đầu bằng 1 nên $f(x)$ là tích của các tam thức bậc hai có dạng $x^2 + ax + b$ không âm với mọi x. Theo bài 2.21 ta có đpcm. ♡

Problem 2.23. Cho A là ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng: $\det(AA^t + E) > 0$, trong đó A^t là ma trận chuyển vị của ma trận A và E là ma trận đơn vị cùng cấp với A.

Hint. Ta có $(AA^t + E)$ là ma trận đối xứng nên nó là ma trận của một dạng toàn phương. Hơn nữa, dạng toàn phương này xác định dương. Thật vậy, với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ ta có

$$\langle (AA^t + E)x, x\rangle = \langle AA^t x, x\rangle + \langle x, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle + \langle x, x\rangle > 0.$$

Do đó các giá trị riêng của A đều dương, vì vậy định thức của A bằng tích các giá trị riêng của A cũng dương. ♡

Problem 2.24. Cho A và B là các ma trận thực cấp n. Chứng minh rằng: $\det(AA^t + BB^t) \geq 0$.

Problem 2.25. Chứng minh tính chất sau của định thức Gram

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k) \geq G(a_1, \ldots, a_k) G(b_1, \ldots, b_l).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\langle a_i, b_j\rangle = 0 \; (i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, l)$$

hoặc một trong hai hệ vector $\{a_1, \ldots, a_k\}$; $\{b_1, \ldots, b_l\}$ là phụ thuộc tuyến tính.

Hint. Trực giao hóa hệ vector $\{a_1, ..., a_k, b_1, ..., k_l\}$ thành hệ vector trực giao $\{\alpha_1, ..., \alpha_k, \beta_1, ..., \beta_l\}$ và $\{b_1, ..., b_l\}$ thành $\{\rho_1, ..., \rho_l\}$.

Gọi $L_i = \langle a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_{k-1}\rangle$ và N_i là phần bù trực giao của L_i trong V. Ta có

$$V = L_i \overset{\perp}{\bigoplus} N_i.$$

Quá trình trực giao hóa ta có

$$b_i = y_i + \rho_i,$$

với $y_i = \sum_{j=1}^{i-1} \rho_j \in \langle b_1, ..., b_{i-1}\rangle$ và $y_i \perp \rho_i$.

Mặt khác, ta có phân tích

$$\rho_i = y_i' + z_i,$$

với $y_i' \in L_i,\; x_i \in N_i$.

Hơn nữa, ta có $b_i = \beta_i + x_i$, với $x_i \in L_i$ và β_i trực giao với L_i nên $\beta_i \in N_i$. Vậy ta có 2 biểu diễn $b_i = x_i + \beta_i$ và $b_i = (y_i' + y_i) + z_i$. Suy ra $\beta_i = z_i$ và do đó $\|\beta_i\| = \|z_i\| \leq \|\rho_i\|$.

Ta lại có

$$\begin{aligned}
Gr(a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_l) &= \langle \alpha_1, \alpha_1\rangle ... \langle \alpha_k, \alpha_k\rangle \langle \beta_1, \beta_1\rangle ... \langle \beta_l, \beta_l\rangle \\
&= Gr(a_1, ..., a_k). \langle \beta_1, \beta_1\rangle ... \langle \beta_l, \beta_l\rangle \\
&\leq Gr(a_1, ..., a_k). \langle \rho_1, \rho_1\rangle ... \langle \rho_l, \rho_l\rangle \\
&= Gr(a_1, ..., a_k).Gr(\rho_1, ..., \rho_l) = Gr(a_1, ..., a_k).Gr(b_1, ..., b_l)
\end{aligned}$$

♡

Problem 2.26. Cho A là ma trận đối xứng thực cấp n với các định thức con chính đều không âm, A_1 là một ma trận con cấp k $(k < n)$ ở góc trên trái của ma trận A và A_2 là ma trận con cấp $k - n$ ở góc dưới phải của ma trận A. CMR,

$$\det(A) \leq \det(A_1)\det(A_2).$$

Problem 2.27. Cho A là ma trận vuông cấp n, gọi B và C là các ma trận tạo bởi k cột đầu và $n - k$ cột cuối tương ứng của ma trận A. Chứng minh rằng $\det(A)^2 \leq \det(B^t B)\det(A^t A)$.

Problem 2.28. Cho A, B là 2 ma trận vuông thực cấp n, giả sử $\det(A+B)$ và $\det(A-B)$ khác không. Chứng minh rằng ma trận

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

khả nghịch.

Hint. Ta có biểu diễn

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-B & 0 \\ 0 & A+B \end{pmatrix}$$

Có thể chứng minh trực tiếp nếu

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

thì $x = y = 0$. ♡

Problem 2.29. Cho $f : V \longrightarrow V$ là một tự đồng cấu tuyến tính. Chứng minh rằng tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $V = \operatorname{Im} f^k \oplus \ker f^k$.

Problem 2.30. Cho A là một ma trận vuông cấp 2. Giải phương trình sau

$$AX - XA = 0.$$

3. DẠNG CHÍNH TẮC

Problem 3.1. Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hãy biểu thị A^{-1} như là một đa thức của A với hệ số thực.

Hint. Ta có đa thức đặc trưng của A là:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 3$$

. Do đó: $A^2 - 3I = 0$ hay $A^2 = 3I$, suy ra A khả nghịch và $A^{-1} = \dfrac{1}{3}A$. ♡

Problem 3.2. Với $x \in \mathbb{R}$, đặt

$$A_x = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

a) Chứng minh rằng $\det A_x = (x-1)^3(x+3)$.
b) Chứng minh rằng nếu $x \neq 1, 3$, thì $A_x^{-1} = (x-1)^{-1}(x+3)^{-1}A_{-x-2}$.

Hint. a) Tính toán trực tiếp ta có $\det A_x = (x-1)^3(x+3)$.
b) Nếu $x \neq 1, 3$ thì A_x khả nghịch và đa thức đặc trưng của A_x là:

$$\chi(t) = (x-t-1)^3(x-t+3).$$

Suy ra đa thức tối tiểu của A_x là: $m(t) = (x-t-1)(x-t+3)$, do đó: $((x-1)I - A_x)((x+3)I - A_x) = 0$, khai triển ta có được: $(x-1)(x+3)I - 2(x-1)A_x + A_x^2 = 0$. Nhân hai vế với A_x^{-1} và biến đổi ta có

$$A_x^{-1} = -(x-1)-1(x+3)^{-1}A_{-x-2}.$$

♡

Problem 3.3. Tính A^{10} với
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problem 3.4. Chứng minh hoặc đưa ra phản ví dụ: Với mọi ma trận vuông phức A cấp 2, tồn tại ma trận vuông phức B cấp 2 sao cho $A = B^2$.

Hint. Chọn $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ thì sẽ không có một ma trận vuông phức B cấp 2 nào mà $A = B^2$. ♡

Problem 3.5. Cho
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Với số nguyên n nào thì sẽ tồn tại ma trận vuông phức X cấp 4 sao cho $X^n = A$.

Problem 3.6. Khẳng định sau đúng hay không:

Tồn tại ma trận vuông thực A cấp n sao cho
$$A^2 + 2A + 5I = 0,$$
nếu và chỉ nếu n là số chẵn.

Hint. Khẳng định đúng.

Giả sử A tồn tại, suy ra A có đa thức tối tiểu chia hết $t^2 + 2t + 5$ là đa thức bất khả qui trên $\mathbb{R}$ Vậy $m_A(t) = t^2 + 2t + 5$. Vì đa thức đặc trưng và đa thức tối tiểu có cùng nhân tử bất khả qui nên
$$\chi_A(t) = m_A(t)^k$$
suy ra $n = \deg \chi_A(t)$ phải là số chẵn.

Ngược lại, n chẵn, ta thấy $A_0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ là một nghiệm của phương trình $t^2 + 2t + 5 = 0$. Do đó ma trận khối gồm $\dfrac{n}{2}$ khối A_0 trên đường chéo chính là ma trận thỏa mãn yêu cầu của đề bài. ♡

Problem 3.7. Phương trình nào có nghiệm là một ma trận vuông thực (không nhất thiết phải chỉ ra nghiệm):
$$X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$2X^5 + X = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 9 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$
$$X^6 + 2X^4 + 10X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$X^4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Problem 3.8. Cho A và B là hai ma trận thực cấp n thoả mãn điều kiện tồn tại ma trận phức V sao cho $A = VBV^{-1}$. Chứng minh rằng tồn tại một ma trận thực U sao cho $A = UBU^{-1}$.

Hint. Giả sử $V = X + iY$, trong đó X, Y là các ma trận thực. Từ đẳng thức $AV = VB$, ta có $A(X + iY) = (X + iY)B$, suy ra $AX = XB$ và $AY = YB$, do đó $A(X + tY) = (X + tY)B$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Mặt khác xét đa thức $p(z) = \det(X + zY),\ z \in \mathbb{C}$. Ta có $p(i) \neq 0$ nên tồn tại một giá trị thực t_0 sao cho $p(t_0) \neq 0$. Vậy ta có $A(X + t_0Y) = B(X + t_0Y)$ trong đó $X + t_0Y$ là ma trận khả nghịch. ♡

Problem 3.9. Cho x là số thực dương. Hỏi có tồn tại hay không một ma trận vuông thực cấp 2 sao cho

$$A^{2004} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1-x \end{pmatrix}.$$

Problem 3.10. Cho ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Chứng minh rằng: mỗi ma trận B sao cho $AB = BA$ có dạng:

$$B = aI + bA + cA^2,$$

với a, b, c là các số thực nào đó.

Problem 3.11. Cho A là ma trận cấp n có n giá trị riêng phân biệt. Chứng minh rằng: mỗi ma trận B giao hoán được với ma trận A đều biểu diễn được dưới dạng: $B = f(A)$, với f là một đa thức hệ số thực, bậc không quá $n-1$.

Hint. Do A có n giá trị riêng phân biệt nên A chéo hóa được, tức là tồn tại ma trận C khả nghịch sao cho $C^{-1}AC = P$ là ma trận chéo. Khi đó, ma trận B giao hoán được với A khi và chỉ khi ma trận $Q = C^{-1}BC$ giao hoán được với P. Giả sử:

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

trong đó λ_i là các giá trị thực khác nhau từng đôi một. Bằng cách thử trực tiếp ta có: Q giao hoán được với P khi và chỉ khi Q có dạng:

$$Q = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$$

trong đó μ_i là các giá trị thực nào đó. Bây giờ ta cần tìm các số thực $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ sao cho

$$Q = \alpha_0 I + \alpha_1 P + \cdots + \alpha_{n-1} P^{n-1}$$

Điều này thực hiện được nhờ việc giải hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_1^{n-1} x_{n-1} = \mu_1 \\ x_0 + \lambda_2 x_1 + \cdots + \lambda_2^{n-1} x_{n-1} = \mu_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_0 + \lambda_n x_1 + \cdots + \lambda_n^{n-1} x_{n-1} = \mu_n \end{cases}$$

Từ đó ta suy ra:

$$B = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{n-1} A^{n-1}$$

♡

Problem 3.12. Cho A, B là các ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu B giao hoán với mọi ma trận giao hoán được với A thì tồn tại một đa thức $f(t)$ sao cho $B = f(A)$.

Hint. Cho A là ma trận thực cấp $n \times m$. Chứng minh rằng tồn tại ma trận thực B cấp n sao cho $AA^t = B^{2004}$ ♡

Problem 3.13. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ là ma trận lũy linh. Giải các phương trình sau $X - AX - A = 0$ và $X + AX + A = 0$.

Hint. Do A là ma trận lũy linh nên $A^n = 0$. Khi đó $I_n - A$ là ma trận khả nghịch và $(I_n - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$. Từ phương trình $X - AX - A = 0$ ta có $X = (I - A)^{-1}A = A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$. ♡

Problem 3.14. Cho A là ma trận cấp n thoả $A^2 = A$. Chứng minh rằng phương trình $AX - XA = 0$ có nghiệm, cần và đủ là: tồn tại ma trận X_0 sao cho $X = AX_0 + X_0A - X_0$.

Hint. Đưa A về dạng chéo. ♡

Problem 3.15. Cho A là ma trận vuông cấp n thoả mãn điều kiện $A^2 = A$. Hãy tính đa thức đặc trưng của A.

Hint. Đáp số $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^r(-\lambda)^{n-r}$, với r là hạng của A. ♡

Problem 3.16. Cho A và B là hai ma trận luỹ linh, $AB = BA$. Chứng minh rằng
a) $A + B$ cũng là một ma trận lũy linh.
b) $I - A$ khả nghịch.
c) $\det(I + A) = 1$.
d) $I + A + B$ khả nghịch.

Problem 3.17. Cho A là ma trận lũy linh và $f(t)$ là một đa thức với hệ số tự do khác 0. Chứng minh rằng ma trận $f(A)$ khả nghịch.

Problem 3.18. (1) Cho $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $AB = BA$, $B \neq 0$ và A là ma trận lũy linh. Chứng minh rằng $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank}(B) - 1$.
(2) Cho $A_1, A_2, \cdots, A_n \in M_n(\mathbb{K})$ là các ma trận lũy linh giao hoán với nhau từng đôi một. Chứng minh rằng
$$\prod_{i=1}^{n} A_i = 0.$$

Hint. Do A là ma trận lũy linh nên dạng chéo hóa Jordan của A có dạng
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Do đó tồn tại một cơ sở $\{u_1, u_2 \ldots, u_n\}$ của $\mathbb{R}^n$ sao cho $A(u_1) = u_2, A(u_2) = u_3, \cdots, A(u_{n-1}) = u_n$ và $A(u_n) = 0$.

Ta sẽ chứng minh nếu $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(B)$ thì $B = 0$, tức là $\operatorname{Im}(B) = \{0\}$. Thật vậy, ta có
$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(B) =& \operatorname{Im}(AB) = A(\operatorname{Im}(B)) = A(\operatorname{span}\{Bu_1, Bu_2, \ldots, Bu_n\}) = \operatorname{span}\{ABu_1, ABu_2, \ldots, ABu_n\} \\ =& \operatorname{span}\{Bu_2, Bu_3, \ldots, Bu_n\}\end{aligned}$$
Tương tự
$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(B) =& \operatorname{Im}(AB) = A(\operatorname{Im}(B)) = A(\operatorname{span}\{Bu_2, Bu_3, \ldots, Bu_n\}) = \operatorname{span}\{ABu_2, ABu_3, \ldots, ABu_n\} \\ =& \operatorname{span}\{Bu_3, Bu_4, \ldots, Bu_n\}\end{aligned}$$
Tiếp tục quá trình trên, ta có $\operatorname{Im}(B) = \operatorname{span}\{Bu_n\} = \{0\}$. Vậy $\operatorname{rank}(AB) < \operatorname{rank}(B)$.

2) Suy ra từ 1). ♡

Problem 3.19. Cho N là ma trận (phức) luỹ linh và r là một số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại ma trận phức A sao cho $A^r = I + N$.

4. VECTOR RIÊNG VÀ GIÁ TRỊ RIÊNG

Problem 4.1. Cho M là ma trận vuông thực cấp 3, $M^3 = I$ và $M \neq I$.

a) Tìm các giá trị riêng của M.

b) Cho một ma trận có tính chất như thế.

Hint. a) Do M là nghiệm của đa thức $x^3 - 1$ nên đa thức tối tiểu của M phải là ước của $x^3 - 1$. Mặt khác, M có ít nhất một giá trị riêng thực, nên đa thức tối tiểu có nhân tử (x-1). Vì $M \neq I$ nên đa thức tối tiểu của M không thể là $x - 1$. Do đó đa thức tối tiểu của M là $m(x) = x^3 - 1$. Vậy M có duy nhất một giá trị riêng thực là 1.

b) Một ma trận có tính chất như vậy là:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

♡

Problem 4.2. Cho F là một trường, n và m là các số nguyên và A là một ma trận vuông cấp n với các phần tử trong F sao cho $A^m = 0$. Chứng minh rằng: $A^n = 0$.

Hint. Do $A^n = 0$ nên đa thức tối tiểu $p(x)$ của A phải là ước của x^m. Suy ra $p(x) = x^k$, với $k \leq n$. Vậy $A^n = 0$. ♡

Problem 4.3. Cho V là không gian vector hữu hạn chiều trên trường số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, M là một tự đồng cấu của V, $M(x) \neq x$, $\forall x \in V \setminus 0$. Giả sử $M^p = Id_V$, với p là một số nguyên tố. Chứng minh rằng số chiều của V chia hết cho $p - 1$.

Hint. Do $M^p = I$ nên đa thức tối tiểu $p(x)$ của M phải là ước của

$$x^p - 1 = (x - 1)(x^{p-1} + \ldots + 1)$$

Do $M(x) \neq x$ với mọi $x \neq 0$ nên 1 không là giá trị riêng, suy ra $p(x)$ là ước của $(x^{p-1} + \ldots + 1)$. Nhưng $(x^{p-1} + \ldots + 1)$ là đa thức khả qui trên trường $\mathbb{Q}$ nên $p(x) = (x^{p-1} + \ldots + 1)$.

Mặt khác, đa thức đặc trưng χ_M và đa thức tối tiểu có chung nhân tử bất khả qui. Do đó $\chi_M(x) = (p(x))^k,\ k \geq 1$. Vậy $\dim V = \operatorname{rank} M = \deg \chi_M = k(p - 1)$. ♡

Problem 4.4. Chứng minh rằng ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+m & 1 \\ 1+m & 1 & 1+m \\ 1 & 1+m & 1 \end{pmatrix} \ (m > 0)$$

có một giá trị riêng dương và một giá trị riêng âm.

Problem 4.5. Cho a, b, c là các phần tử bất kì của trường F, hãy tính đa thức tối tiểu của ma trận

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

Hãy tổng quát hóa kết quả trên.

Hint. Đa thức đặt trưng là

$$\chi(t) = t^3 - ct^2 - bt - a.$$

Ta sẽ chứng tỏ đây là đa thức tối tiểu. Thật vậy, chọn $x_0 = (1, 0, 0)$, khi đó $x_0, Ax_0 = (0, 1, 0), A^2x_0 = (0, 0, 1)$ là độc lập tuyến tính. Giả sử A là nghiệm của một đa thức bậc 2, tức là $k_1A^2 + k_2A + k_3I = 0$, suy ra $k_1A^2x_0 + k_2Ax_0 + k_3x_0 = 0$ và ta có $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, điều này là vô lý. Vậy đa thức tối tiểu phải có bậc 3, hay $\chi(t) = t^3 - ct^2 - bt - a$. ♡

Problem 4.6. Giả sử A, B là các tự đồng cấu của không gian vector hữu hạn chiều V trên trường F. Đúng hay sai các khẳng định sau:

(1) Mỗi vector riêng của AB là một vector riêng của BA.

(2) Mỗi giá riêng của AB là một giá riêng của BA.

Hint. a) Sai, chẳn hạn $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

b) Đúng. Giả sử $\lambda \neq 0$ là giá trị riêng ứng với vector riêng x của AB. Khi đó $BA(Bx) = B(ABx) = \lambda Bx$ nên λ sẽ là giá trị riêng của BA (vì $B(x) \neq 0$). Nếu $\lambda = 0$ là một giá trị riêng của AB thì BA cũng suy biến, do đó BA cũng có giá trị riêng là 0. ♡

Problem 4.7. Cho A, B là các ma trận phức sao cho $A^2 = B^2 = I$. Chứng minh rằng tồn tại một không gian vector con 1-chiều hoặc 2-chiều bất biến đối với A và B.

Problem 4.8. Cho

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

là một ma trận thực với $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng A có một vector riêng

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2,$$

với $x, y > 0$.

Hint. Đa thức đặc trưng của A:

$$\chi_A(t) = t^2 - (a+d)t + ad - bc$$

có nghiệm

$$t_{1,2} = \frac{1}{2}(a+d) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} = \frac{1}{2}(a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}).$$

Đặt $\lambda = \frac{1}{2}(a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc})$ và $v = (x, y)$ là vector riêng ứng với $x > 0$. Biểu diễn hạng tử đầu tiên của Av ta được:

$$ax + by = \frac{1}{2}(a + d + \sqrt{\Delta})x$$
$$2by = (d - a + \sqrt{\Delta})x.$$

Do $b > 0$ và $d - a + \sqrt{\Delta} > 0$ nên $y > 0$. ♡

Problem 4.9. Cho A là ma trận vuông phức cấp n và $P(t)$ là một đa thức bậc m. Chứng minh rằng nếu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của ma trận A thì:

1) $|P(A)| = P(\lambda_1).P(\lambda_2)\ldots P(\lambda_n)$.

2) $P(\lambda_1), P(\lambda_2), \ldots, P(\lambda_n)$ là các giá trị riêng của $P(A)$.

Hint. 1) Gọi $\varphi(\lambda) = |A - \lambda E|$ là đa thức đặt trưng của ma trận A. Gọi $P(t)$ là đa thức bậc m và $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ là các nghiệm (thực hoặc phức kể cả bội) của $P(t)$. Ta có:

$$\varphi(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)...(\lambda - \lambda_n)$$
$$P(t) = c(t - \alpha_1)(t - \alpha_2)...(t - \alpha_m).$$

Do đó

$$P(A) = c(A - \alpha_1 E)(A - \alpha_2 E)...(A - \alpha_m E),$$
$$|P(A)| = c^n|A - \alpha_1 E|.|A - \alpha_2 E|...|A - \alpha_m E| = c^n \prod_{i=1}^{m} \varphi(\alpha_i).$$

Mặt khác:

$$\varphi(\alpha_i) = (-1)^n(\alpha_i - \lambda_1)(\alpha_i - \lambda_2)...(\alpha_i - \lambda_n) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda_j - \alpha_i)$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}|P(A)| =& c^n \prod_{i=1}^{m} \varphi(\alpha_i) = c^n \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(\lambda_j - \alpha_i)\\ =& \prod_{j=1}^{n} c \prod_{i=1}^{m}(\lambda_j - \alpha_i) = \prod_{j=1}^{n} P(\lambda_j).\end{aligned}$$

2) Đặt $p(t) = P(t) - \lambda$ và áp dụng kết quả trên ta có:

$$|p(A)| = p(\lambda_1).p(\lambda_2)...p(\lambda_n)$$

hay

$$|P(A) - \lambda E| = (-1)^n(\lambda - P(\lambda_1))(\lambda - P(\lambda_2))...(\lambda - P(\lambda_n)).$$

Vậy các giá trị riêng của $P(A)$ là $P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_n)$. ♡

Problem 4.10. Cho A và B là các ma trận đối xứng thực thoả mãn $AB = BA$. Chứng minh rằng A và B có chung 1 vector riêng trong $\mathbb{R}^n$.

Problem 4.11. Gọi S là tập không rỗng gồm các ma trận phức cấp n giao hoán được với nhau từng đôi một. Chứng minh rằng các phần tử của S có chung một vector riêng

Problem 4.12. Gọi A và B là các ma trận phức cấp n sao cho $AB = BA^2$. Giả sử rằng A không có các giá trị riêng có mođun bằng 1, chứng minh rằng A và B có chung một vectơ riêng.

Problem 4.13. Cho φ là tự đồng cấu tuyến tính chéo hoá được của $\mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng không gian con W của $\mathbb{R}^n$ là bất biến đối với φ khi và chỉ khi trong W chọn được một cơ sở gồm các vector riêng của φ.

Problem 4.14. Cho A và B là hai ma trận chéo hoá được và giao hoán được với nhau. Chứng minh rằng tồn tại một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ gồm toàn các vector riêng của A và B.

Problem 4.15. Cho A là ma trận phức cấp n và đa thức tối tiểu p có bậc k.

1) Chứng minh rằng nếu λ không là giá trị riêng của A thì tồn tại một đa thức p_λ bậc $k-1$ sao cho $p_\lambda(A) = (A - \lambda E)^{-1}$.

2) Gọi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ là các số phức phân biệt và không là giá trị riêng của A. Chứng minh rằng: tồn tại các số phức $c_1, c_2, \dots, c_k$ sao cho

$$\sum_{i=1}^{k} c_k(A - \lambda_k E)^{-1} = E.$$

Hint. Xét đẳng thức $p_\lambda(A)(A - \lambda E) = p(A) - p(\lambda)E = p(\lambda)E$ suy ra được đa thức p_λ. Với mỗi λ_i tồn tại các p_{λ_i} tương ứng. Xét hệ phương trình theo các ẩn c_i ta thu được hệ Crammer do đó tồn tại các c_i cần tìm. ♡

Problem 4.16. Cho A là ma trận vuông cấp n và B là ma trận vuông cấp m, A và B không có giá trị riêng chung. Chứng minh rằng

(1) Nếu ma trận X cấp $n \times m$ sao cho $AX - XB = 0$ thì $X = 0$.

(2) Phương trình $AX - XB = C$, với C là ma trận cấp $n \times m$ có không quá một nghiệm $X \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$.

Hint.

(1) Gọi $q(x)$ là đa thức tối tiểu của B. Giả sử $q(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - \lambda_i)^{\mu_i}$. Ta có $q(B) = \prod_{i=1}^{k}(B - \lambda_i I_m)^{\mu_i} = 0$.
Từ giả thiết ta có $(A - \lambda I_n)^k X = X(B - \lambda I_m)^k$, với mọi λ, với mọi $k \in \mathbb{N}$.
Từ đó suy ra $\prod_{i=1}^{k}(A - \lambda_i I_m)^{\mu_i} X = X \prod_{i=1}^{k}(B - \lambda_i I_m)^{\mu_i} = 0$. Vì các giá trị riêng λ_i của B không là giá trị riêng của A nên các ma trận $(A - \lambda_i I_n)$ đều khả nghịch. Vậy $X = 0$.

(2) Suy ra từ câu 1.

♡

Problem 4.17. Cho A, B là các ma trận vuông phức cấp n sao cho $\operatorname{rank}(AB - BA) \le 1$. Chứng minh rằng tồn tại vector riêng chung của A và B.

Problem 4.18. Cho E, F là các không gian vector hữu hạn chiều trên trường $\mathbb{K}$ và f, g là các ánh xạ tuyến tính từ E vào F. Chứng minh rằng $\operatorname{rank}(f+g) = \operatorname{rank}(f) + \operatorname{rank}(g)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g) = & \{0\} \\ \ker f + \ker g = & E \end{cases}$$

Hint. Từ giả thiết, ta có $\dim \operatorname{Im}(f+g)) = \dim \operatorname{Im}(f) + \dim \operatorname{Im}(g)$. Mặt khác ta có

$$\dim \operatorname{Im}(f+g) \le \dim(\operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)) = \dim \operatorname{Im}(f) + \dim \operatorname{Im}(g) - \dim(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g)).$$

Suy ra $\dim(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g)) = \{0\}$, hay $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g) = \{0\}$. Vậy $\operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Im}(g)$. Suy ra $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}(f+g)$. Do đó với mọi $x \in E$, ta có $f(x) = (f+g)(t) = f(t) + g(t)$. Suy ra $g(t) = f(x-t) \in \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g) = \{0\}$ nên $t \in \ker g$ và $x - t \in \ker f$. Vậy $x = (x-t) + t \in \ker f + \ker g$, tức là $\ker f + \ker g = E$.

Ngược lại, từ giả thiết $\ker f + \ker g = E$, ta chứng minh $\operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$. Từ đó suy ra điều cần chứng minh. Thật vậy, ta có $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$. Nếu $f(u) + g(v) \in \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$ thì ta có phân tích $u = x + y$ và $v = z + t$, với $x, z \in \ker f$ và $y, t \in \ker g$. Khi đó $f(u) + g(v) = (f+g)(y+z) \in \operatorname{Im}(f+g)$. ♡

Problem 4.19. Cho A là ma trận vuông cấp n và $\operatorname{rank}(A) = r$. Đặt $S = \{X \in M_{n\times m}(\mathbb{K}) \ : \ AX = 0\}$. Tính $\dim(S)$.

Problem 4.20. Giả sử A là ma trận cấp n hạng r. Tìm số nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình $AX = 0$ với X là ma trận cấp n.

Hint. Do A là ma trận cấp n có hạng r nên tồn tại các ma trận khả nghịch P, Q sao cho $A = PI_{n,r}Q$ với $I_{n,r}$ là ma trận có dạng:

$$I_{n,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(tức là ma trận có r phần tử đầu tiên trên đường chéo chính bằng 1 các phần tử còn lại bằng 0). Ta có nhận xét sau: k ma trận $X_1, \ldots, X_k$ độc lập khi và chỉ khi các ma trận $QX_1, \ldots, QX_k$ độc lập tuyến tính (do Q là ma trận khả nghịch). Phương trình $AX = 0$ tương đương với $I_{n,r}QX = 0$, nên từ nhận xét trên để tìm số nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình $AX = 0$ ta chỉ cần đi tìm số nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình $I_{n,r}Y = 0$. Ma trận Y thoả phương trình $I_{n,r}Y = 0$ phải có dạng sau:

$$Y = \begin{array}{c} \\ r \\ n-r \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y_1 & Y_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Suy ra số nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình $AX = 0$ là $n(n-r)$. ♡

Problem 4.21. Cho phương trình $AX = B$, trong đó A là hai ma trận cho trước cấp n, X là ẩn (X là ma trận cấp n). Chứng minh rằng phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|B)$, trong đó $(A|B)$ là ma trận cấp $n \times 2n$ có được bằng cách ghép ma trận B vào bên phải ma trận A.

Problem 4.22. Cho A, B, C, D là các ma trận cấp n, $AC = CA$. Đặt $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Chứng minh rằng $\det(M) = \det(AD - BC)$.

Hint. Giả sử A khả nghịch, ta phân tích: $M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{pmatrix}$, với $Y = D - CA^{-1}B$. Nếu A tuỳ ý thì thay A bởi $A - \lambda I$ và áp dụng lập luận trên. ♡

Problem 4.23. Cho không gian vector E và $E = M \oplus N$, gọi p là phép chiếu lên M theo phương N. Cho u là toán tử tuyến tính của E. Chứng minh rằng:
a) M là không gian con bất biến của u nếu và chỉ nếu $pup = up$.
b) M và N đều bất biến qua u khi và chỉ khi $pu = up$.

Problem 4.24. Nếu u là toán tử tuyến tính với trên không gian vector hữu hạn chiều và nếu u giao hoán với mọi phép chiếu có hạng 1, thì $u = \lambda I$.

Problem 4.25. Cho u là toán tử tuyến tính trên không gian vector hữu hạn chiều. CMR
a) Nếu u chéo hoá được và tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $u^{m+1} = u^m$, nếu và chỉ nếu u là phép chiếu.
b) Nếu u chéo hoá được và $u^m = I$ với một giá trị $m \in \mathbb{N}^*$, thì $u^2 = I$.

Problem 4.26. Cho u là toán tử trên không gian vector phức n-chiều. Ma trận của u đối với một cơ sở nào đó có dạng:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & . & . & \lambda_2 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & \lambda_{n-1} & . & . & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

CMR, u chéo hoá được khi và chỉ khi với mỗi $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, nếu $\lambda_k = 0$, thì $\lambda_{n+1-k} = 0$. Tìm đa thức tối tiểu của u^2.

Problem 4.27. Cho u và v là các toán tử chéo hoá được của không gian vector hữu hạn chiều E. CMR, tồn tại đẳng cấu tuyến tính f của E sao cho $f \circ u = v \circ f$ khi và chi khi u và v có tập các giá trị riêng trùng nhau và các không gian riêng ứng với từng giá trị riêng của u và v có cùng số chiều.

Problem 4.28. Cho u và v là các toán tử chéo hoá được trên không gian vector E n-chiều. CMR, các khẳng định sau là tương đương.
a) $uv = vu$.
b) Tồn tại một cơ sở của E gồm toàn các vector riêng của u và v.
c) Tồn tại một toán tử w chéo hoá được của E và các đa thức $f, g \in \mathbb{R}[x], h \in \mathbb{R}[x, y]$ sao cho $u = f(w), v = g(w), w = h(u, v)$.
Từ đó suy ra, một toán tử trên E giao hoán được với u và v khi và chỉ khi nó giao hoán được với w.

Problem 4.29. Cho $u_1, u_2, \dots, u_m$ là các toán tử chéo hoá được của không gian vector E n-chiều. CMR, các khẳng định sau là tương đương:
a) $u_i u_j = u_j u_i$ với mọi $i, j \in [1, m]$.
b) Tồn tại một cơ sở của E gồm toàn các vector riêng của u_i.
c) Tồn tại toán tử w chéo hoá được của E và các đa thức $f_1, f_2\ , \dots, f_m \in \mathbb{R}[X], h \in \mathbb{R}[X_1, X_2, \dots, X_m]$ sao cho $f_i(w) = u_i, 1 \leq i \leq m$ và $h(u_1, u_2, \dots, u_m) = w$.

Problem 4.30. Cho E là không gian vector hữu hạn chiều và $A \in Aut(E)$. Chứng tỏ các điều kiện sau là tương đương:
(i) $A = I + N$, trong đó N là tự đồng cấu luỹ linh.
(ii) Tồn tại một cơ sở của E sao cho ma trận của tự đồng cấu A đối với cơ sở đó có mọi phần tử nằm trên đường chéo chính bằng 1 còn mọi phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0.
(iii) Tất cả các nghiệm của đa thức đặc trưng của tự đồng cấu A (trong trường đóng đại số) đều bằng 1.

Problem 4.31. Cho E là không gian vector hữu hạn chiều trên trường phức. $A \in Aut(E)$. Chứng tỏ rằng tự đồng cấu A có thể phân tích dưới dạng tổng:

$$A = S + N,$$

trong đó S chéo hoá được, N luỹ linh và $SN = NS$. Chứng tỏ rằng S và N có thể biểu diễn dưới dạng các đa thức theo A.

Hint. Giả sử $P_A(t) = \prod_{i=1}^{s}(t - t_i)^{m_i}$, E_i là hạt nhân của $(A - t_i I)^{m_i}$. Thế thì E là tổng trực tiếp của các E_i. Xác định S trên E sao cho $Sv = \sum t_i v_i$, đặt $N = A - S$. Xét đa thức $g(t) = \sum t_i g_i(t)$, trong đó $g_i(t)$ được chọn sao cho thành phần của Av trong E_i bằng $g_i(t)v_i$. Khi đó $S = g(A)$. ♡

Problem 4.32. Chứng minh rằng nếu φ và ψ là các phép biến đổi đối xứng, trong đó φ xác định dương, thì các giá trị riêng của $\varphi \circ \psi$ đều thực và $\varphi \circ \psi$ chéo hoá được.

Hint. Do φ xác định dương nên tồn tại phép biến đổi toạ độ cùng đưa φ và ψ về dạng chéo. Từ đó ta có kết luận. ♡

5. BÀI TẬP BỔ SUNG

Problem 5.1 (Problem in net)**.** I have the following PROBLEM IN LINEAR ALGEBRA, I do not know the answer. Assume that d and n are natural numbers and define $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ by

$$f(x) = \left(\prod_{l=1}^{d} \cos^2(x^l)\right) - 1/n,$$

where $x = (x^1, ..., x^d)$. Hence x^l is the lth component of the vector x. Prove or disprove the following CONJECTURE: For any given $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^d$ the (n, n)-matrix A given by

$$a_{ij} = f(x_i - x_j)$$

is positive semidefinite, i.e., the eigenvalues are nonnegative. (Comment: I know that this is true for $n \geq 2^d$. So the interesting case would be $n < 2^d$.)

11TH VIETNAMESE MATHEMATICS OLYMPIAD FOR COLLEGE STUDENTS 2003

A1. A is the 4×4 matrix $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = a, a_{12} = a_{21} = a_{34} = a_{43} = b, a_{23} = a_{32} = -1$, other entries 0, where a, b are real with $a > |b|$. Show that the eigenvalues of A are positive reals.

A2. B is the 3×3 matrix with $b_{11} = a, b_{22} = d, b_{33} = q, b_{12} = b^{\frac{\alpha}{\beta}}, b_{13} = c^{\frac{\alpha}{\gamma}}, b_{21} = b^{\frac{\beta}{\alpha}}, b_{23} = p^{\frac{\beta}{\gamma}}, b_{31} = c^{\frac{\gamma}{\alpha}}, b_{32} = p^{\frac{\gamma}{\beta}}$, where a, b, c, d, p, q are reals and α, β, γ are non-zero reals. Show that B has real eigenvalues.

A3. D_k is the $k \times k$ matrix with 0s down the main diagonal, 1s for all other entries in the first row and first column, and x for all other entries. Find $\det D_2 + \det D_3 + \cdots + \det D_n$.

A4. I_n denotes the $n \times n$ unit matrix (so $I_{11} = I_{22} = \ldots = I_{nn} = 1$, other entries 0). P and Q are $n \times n$ matrices such that $PQ = QP$ and $P^r = Q^s = 0$ for some positive integers r, s. Show that $I_n + (P + Q)$ and $I_n - (P + Q)$ are inverses.

A5. A is a square matrix such that $A^{2003} = 0$. Show that $\text{rank}(A) = \text{rank}(A + A^2 + \cdots + A^n)$ for all n.

A6. A is the 4×4 matrix with $a_{11} = 1 + x_1, a_{22} = 1 + x_2, a_{33} = 1 + x_3, a_4 = 1 + x_4$, and all other entries 1, where x_i are the roots of $x^4 - x + 1$. Find $\det(A)$.

A7. $p(x)$ is a polynomial of order $n > 1$ with real coefficients and m real roots. Show that $(x^2+1)p(x) + p'(x)$ has at least m real roots.

6. BÀI TẬP ĐẠI SỐ ĐẠI CƯƠNG

Problem 6.1. Cho R là một vành có đơn vị 1. Giả sử rằng $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các Ideal trái của R sao cho $R = A_1 \bigoplus A_2 \bigoplus \cdots \bigoplus A_n$ (xem như một nhóm cộng). Chứng minh rằng tồn tại các phần tử $u_i \in A_i$ sao cho với mọi $a_i \in A_i$, $a_i u_i \in A_i$ và $a_i u_j = 0$ nếu $i \neq j$.

Problem 6.2. Chứng tỏ rằng nhóm G đẳng cấu với nhóm con (nhóm cộng) các số hữu tỉ nếu và chỉ nếu G đếm được và mọi tập con hữu hạn của G đều chứa trong một nhóm con xyclic vô hạn của G.

7. SOME ADVANCED RESULTS ON LINEAR ALGEBRA

Problem 7.1 (Spectral Resolutions theorem)**.** Cho A là một ma trận vuông cấp n. Khi đó A có phân tích như sau

$$A = \sum_{i=1}^{k} [\lambda_i P_i + N_i],$$

trong đó λ_i là các giá trị riêng của A, P_i là các phép chiếu ($P_i^2 = P_i$), N_i là lũy linh và thỏa mãn

$$N_i P_i = N_i, P_i P_j = N_i P_j = 0 \ (i \neq j), I = \sum_{i=1}^{k} P_i.$$

Hint. Gọi $p(x)$ là đa thức tối tiểu của A và $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ là các giá trị riêng của A. Ta có

$$p(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{\mu_i}$$

Gọi $q_1(x), q_2(x), \ldots, q_k(x)$ là các đa thức sao cho

$$\frac{1}{p(x)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{q_i(x)}{(x - \lambda_i)^{\mu_i}}.$$

Đặt $r_l(x) = \prod_{i \neq l} (x - \lambda_i)^{\mu_i}$, ta có

$$1 = \sum_{i=1}^{k} r_l(x) q_l(x).$$

Do đó $I = \sum_{i=1}^{k} r_l(A) q_l(A)$. Đặt $P_l = \sum_{i=1}^{k} r_l(A) q_l(A)$ thì $P_i P_j = 0$ với $i \neq j$ (Định lý Caley-Hamilton). Kiểm tra $P_i = P_i^2$ nên các P_i là các phép chiếu. Đặt

$$N_i = P_i (A - \lambda_i I) = r_i(A) q_i(A) (A - \lambda_i I),$$

ta có $N_i^{\mu_i} = 0$.

Cuối cùng ta có

$$A = \sum_i P_i A = \sum_i P_i (\lambda_i I + A - \lambda_i I) = \sum_i [\lambda_i P_i + N_i].$$

♡