**CHỦ ĐỀ 7: TỔNG ÔN CHƯƠNG II**

**PHIẾU SỐ 1**

**Bài 1**. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

Chứng minh rằng:

1/ Bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

2/ AE.AC = AH.AD; AD.BC = BE.AC.

**Lời giải:**

1/ Theo giả thiết: BE là đường cao => BE ⊥ AC => ∠BEC = 900.

 CF là đường cao => CF ⊥ AB => ∠BFC = 900.

Lấy I là trung điểm của BC => IB = IC = IF = IE.

Vậy bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn đường kính BC

1. Xét hai tam giác AEH và ADC ta có: ∠ AEH = ∠ ADC = 900 ; ∠A là góc chung

=> Δ AEH ~ ΔADC =>  => AE.AC = AH.AD.

\* Xét hai tam giác BEC và ADC ta có: ∠ BEC = ∠ ADC = 900 ; ∠C là góc chung

=> Δ BEC ~ ΔADC =>  => AD.BC = BE.AC.

**Bài 2**. Cho tam giác cân ABC (AB = AC), các đường cao AD, BE, cắt nhau tại H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE.

1/ Bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.

2/ Chứng minh ED = BC.

3/ Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

4/ Tính độ dài DE biết DH = 2 Cm, AH = 6 Cm.

**Lời giải:**

**1**. Chứng minh như bài 1

**2**. Theo giả thiết tam giác ABC cân tại A có AD là đường cao nên cũng là đường trung tuyến

=> D là trung điểm của BC. Theo trên ta có ∠BEC = 900 .

Vậy tam giác BEC vuông tại E có ED là trung tuyến => DE = BC.

3. Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE nên O là trung điểm của AH => OA = OE => tam giác AOE cân tại O => ∠E1 = ∠A1 (1).

Theo trên DE = BC => tam giác DBE cân tại D => ∠E3 = ∠B1 (2)

Mà ∠B1 = ∠A1 ( vì cùng phụ với góc ACB) => ∠E1 = ∠E3 => ∠E1 + ∠E2 = ∠E2 + ∠E3

Mà ∠E1 + ∠E2 = ∠BEA = 900 => ∠E2 + ∠E3 = 900 = ∠OED => DE ⊥ OE tại E.

Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại E.

**4**. Theo giả thiết AH = 6 Cm => OH = OE = 3 cm.; DH = 2 Cm => OD = 5 cm.

Áp dụng định lí Pitago cho tam giác OED vuông tại E ta có

ED2 = OD2 – OE2 ⬄ ED2 = 52 – 32 ⬄ ED = 4cm

**Bài 3:** Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax , By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

1/ Chứng minh AC + BD = CD.

 2/ Chứng minh ∠COD = 900.

 3/ Chứng minh AC. BD = .

 4/ Chứng minh OC // BM

 5/ Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

 6/ Chứng minh MN ⊥ AB.

 7/ Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

1/ Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:

 CA = CM; DB = DM => AC + BD = CM + DM.

 Mà CM + DM = CD => AC + BD = CD

2/ Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OC là tia phân giác của góc AOM; OD là tia phân giác của góc BOM, mà ∠AOM và ∠BOM là hai góc kề bù => ∠COD = 900.

3/ Theo trên ∠COD = 900 nên tam giác COD vuông tại O có OM ⊥ CD ( OM là tiếp tuyến ).

 Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có OM2 = CM. DM,

 Mà OM = R; CA = CM; DB = DM => AC. BD =R2 => AC. BD = .

4/ Theo trên ∠COD = 900 nên OC ⊥ OD . (1)

 Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: DB = DM; lại có OM = OB =R

 => OD là trung trực của BM => BM ⊥ OD . (2).

 Từ (1) Và (2) => OC // BM ( Vì cùng vuông góc với OD).

5/ Gọi I là trung điểm của CD ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác COD đường kính CD có IO là bán kính.

 Theo tính chất tiếp tuyến ta có AC ⊥ AB; BD ⊥ AB => AC // BD => tứ giác ACDB là hình thang.

 Lại có I là trung điểm của CD; O là trung điểm của AB

 => IO là đường trung bình của hình thang ACDB

  IO // AC , mà AC ⊥ AB => IO ⊥ AB tại O

 => AB là tiếp tuyến tại O của đường tròn đường kính CD

**6**/ Theo trên AC // BD => , mà CA = CM; DB = DM nên suy ra 

 => MN // BD mà BD ⊥ AB => MN ⊥ AB.

**7**/ Ta có chu vi tứ giác ACDB = AB + AC + CD + BD mà AC + BD = CD

 => Chu vi tứ giác ACDB = AB + 2CD mà AB không đổi

 => Chu vi tứ giác ACDB nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất , mà CD nhỏ nhất khi CD là khoảng cách giữ Ax và By tức là CD vuông góc với Ax và By. Khi đó CD // AB

 => M phải là trung điểm của cung AB.

**Bài 4**. Cho tam giác cân ABC (AB = AC), I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc

A , O là trung điểm của IK.

 1/ Chứng minh B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.

 2/ Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

 3/ Tính bán kính đường tròn (O) Biết AB = AC = 20 Cm, BC = 24 Cm.

**Lời giải**

**1.** Vì I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A nên BI và BK là hai tia phân giác của hai góc kề bù đỉnh B

 Do đó BI ⊥ BK hay ∠IBK = 900 .

 Tương tự ta cũng có ∠ICK = 900

 Lấy O’ là trung điểm của IK => O’K = O’I = OC = OB

 => B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.

**2.** Ta có ∠C1 = ∠C2 (1) ( vì CI là phân giác của góc ACH.

 ∠C2 + ∠I1 = 900 (2) ( vì ∠IHC = 900 ).

 ∠I1 = ∠ ICO (3) ( vì tam giác OIC cân tại O)

 Từ (1), (2) , (3) => ∠C1 + ∠ICO = 900 hay AC ⊥ OC. Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

**3.** Từ giả thiết AB = AC = 20 Cm, BC = 24 Cm => CH = 12 cm.

 AH2 = AC2 – HC2 => AH =  = 16 ( cm)

 CH2 = AH.OH => OH =  = 9 (cm)

 OC =  = 15 (cm)

**Bài 5.** Cho đường tròn (O; R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì ( M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ AC ⊥ MB, BD ⊥ MA, gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

 1/ Chứng minh tứ A, M, B, O cùng thuộc một đường tròn.

 2/ Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn .

 3/ Chứng minh OI.OM = R2; OI. IM = IA2.

4/ Chứng minh OAHB là hình thoi.

 5/ Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.

 6/ Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d

**Lời giải**

1. (HS tự làm).

2. Vì K là trung điểm NP nên OK ⊥ NP (quan hệ đường kính

Và dây cung) => ∠OKM = 900.

 Theo tính chất tiếp tuyến ta có ∠OAM = 900; ∠OBM = 900.

 => K, A, B cùng nhìn OM dưới một góc 900 nên cùng nằm trên đường tròn đường kính OM.

 Vậy năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.

**3**. Ta có MA = MB ( t/c hai tiếp tuyến cắt nhau); OA = OB = R

 => OM là trung trực của AB => OM ⊥ AB tại I .

 Theo tính chất tiếp tuyến ta có ∠OAM = 900 nên tam giác OAM vuông tại A có AI là đường cao.

 Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao => OI.OM = OA2 hay OI.OM = R2; và OI. IM = IA2.

**4**. Ta có OB ⊥ MB (tính chất tiếp tuyến) ; AC ⊥ MB (gt) => OB // AC hay OB // AH.

 OA ⊥ MA (tính chất tiếp tuyến) ; BD ⊥ MA (gt) => OA // BD hay OA // BH.

 => Tứ giác OAHB là hình bình hành; lại có OA = OB (=R) => OAHB là hình thoi.

**5**. Theo trên OAHB là hình thoi. => OH ⊥ AB; cũng theo trên OM ⊥ AB

 => O, H, M thẳng hàng( Vì qua O chỉ có một đường thẳng vuông góc với AB).

**6**. Theo trên OAHB là hình thoi. => AH = AO = R.

 Vậy khi M di động trên d thì H cũng di động nhưng luôn cách A cố định một khoảng bằng R.

 Do đó quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d là nửa (A) bán kính AH = R

**Bài 6**: Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Gọi HD là đường kính của đường tròn (A; AH). Tiếp tuyến của đường tròn tại D cắt CA ở E.

 1/ Chứng minh tam giác BEC cân.

 2/ Gọi I là hình chiếu của A trên BE, Chứng minh rằng AI = AH.

 3/ Chứng minh rằng BE là tiếp tuyến của đường tròn (A; AH).

 4/ Chứng minh BE = BH + DE.

**Lời giải**

1. Δ AHC = ΔADE (g.c.g) => ED = HC (1) và AE = AC (2).

Vì AB ⊥CE (gt), do đó AB vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của ΔBEC

=> BEC là tam giác cân. => ∠B1 = ∠B2

**2**. Hai tam giác vuông ABI và ABH có cạnh huyền AB chung, ∠B1 = ∠B2

 => Δ AHB = ΔAIB => AI = AH.

**3**. AI = AH và BE ⊥ AI tại I => BE là tiếp tuyến của (A; AH) tại I.

**4**. DE = IE và BI = BH => BE = BI+IE = BH + ED

**Bài 7:** Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao

cho AP > R, từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M.

 1/ Chứng minh rằng A, P, M, O cùng thuộc đường tròn.

 2/ Chứng minh BM // OP.

 3/ Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác OBNP là hình bình hành.

 4/ Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại I; PN và OM kéo dài cắt nhau tại J. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

**Lời giải**

**1.** (HS tự làm).

**2.** Ta có é ABM nội tiếp chắn cung AM; ∠AOM là góc ở tâm chắn cung AM

 => ∠ABM =  (1)

 OP là tia phân giác ∠AOM ( t/c hai tiếp tuyến cắt nhau )

 => ∠AOP =  (2)

 Từ (1) và (2) => ∠ABM = ∠AOP (3)

 Mà ∠ABM và ∠AOP là hai góc đồng vị nên suy ra BM // OP. (4)

**3**. Xét hai tam giác AOP và OBN ta có : ∠PAO = 900 (vì PA là tiếp tuyến ); ∠NOB = 900 (gt NO⊥AB).

 => ∠PAO = ∠NOB = 900; OA = OB = R; ∠AOP = ∠OBN (theo (3))

 => ΔAOP = ΔOBN => OP = BN (5)

 Từ (4) và (5) => OBNP là hình bình hành ( vì có hai cạnh đối song song và bằng nhau).

**4**. Tứ giác OBNP là hình bình hành => PN // OB hay PJ // AB, mà ON ⊥ AB => ON ⊥ PJ

 Ta cũng có PM ⊥ OJ ( PM là tiếp tuyến ), mà ON và PM cắt nhau tại I

 => I là trực tâm tam giác POJ. (6)

 Dễ thấy tứ giác AONP là hình chữ nhật vì có ∠PAO = ∠AON = ∠ONP = 900

 => K là trung điểm của PO ( t/c đường chéo hình chữ nhật). (6)

 AONP là hình chữ nhật => ∠APO = ∠NOP ( so le) (7)

 Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau Ta có PO là tia phân giác ∠APM => ∠APO = ∠MPO (8).

 Từ (7) và (8) => ΔIPO cân tại I có IK là trung tuyến đông thời là đường cao => IK ⊥ PO. (9)

 Từ (6) và (9) => I, J, K thẳng hàng.

**Bài 8**: Cho nửa đường tròn tâm O đường kớnh AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn ( M khác A,B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F, tia BE cắt AM tại K.

 1) Chứng minh rằng E, F, M, K cùng thuộc một đường tròn.

 2) Chứng minh rằng: AI2 = IM **.** IB.

**Lời giải**

**1**. Dùng đường tròn O và xét ∆AEB , ∆AMB đều là các tam giác vuông (suy ra từ đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh ấy)

 => ∆FEK , ∆FMK cũng là các tam giác vuông.

 Lấy O’ là trung điểm của FK => OF = OK = OM = OE = FK/2

 => E, F, M, K cùng thuộc đường tròn (O’) đường kính FK

2. Ta có ∠IAB = 900 ( vì AI là tiếp tuyến ) => ΔAIB vuông tại A có AM ⊥ IB ( theo trên).

 Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao => AI2 = IM **.** IB.

**Bài 9:** Cho đoạn thẳng AB, điểm C nằm giữa A và B. Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, AC, CB. Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn lớn tại D. DA,DB cắt các nửa đường tròn có đường kính AC, CB theo thứ tự tại M, N.

Hướng dẫn

a, Ta có: Tam giác AMC nội tiếp đường tròn đường kính AC

=> ∠AMC = 90o

Tam giác CNB nội tiếp đường tròn đường kính CB

=> ∠CNB = 90o

Tam giác ADB nội tiếp đường tròn đường kính AB

=> ∠ADB = 900

Suy ra tứ giác DMCN là hình chữ nhật.

b, Xét tam giác vuông DCA có :

DC2 = DM.MA (1) (theo hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Xét tam giác vuông DCB có: DC2 = DN.DB (2) (theo hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Từ (1) và (2) ta suy ra DM.MA = DN.NB

c, Vì DMCN là hình chữ nhật nên IM = IC suy ra tam giác IMC cân tại I => ∠M2 = ∠C2

Vì tam giác MFC cân tại F nên ∠M1 = ∠C1 Mà ∠C1 + ∠C2 = 90o

=> ∠M1 + ∠M2 = 90o Hay ∠FMN = 90o => FM ⊥ MN

Chứng minh tương tự ∠MNC = 90o

=> HN ⊥ MN d, Ta có: DC = MN (vì DMCN là hình chữ nhật) mà DC ≤ DO

=> MN ≤ DO MN = DO khi C ≡ O Suy ra C là trung điểm của AB.

**Bài 10:** Cho hai đường tròn (O) và (O’) tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung DE, D thuộc đường tròn tâm O, E thuộc đường tròn tâm O’. Kẻ tiếp tuyến chung trong tại A, cắt DE ở I. Gọi M là giao điểm của OI và AD, N là giao điểm của O’I và AE.

a, Tứ giác AMIN là hình gì? Vì sao?

b, Chứng minh IM.IO=IN.IO’

c, Chứng minh rằng O O’ là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính là DE.

d, Tính độ dài DE biết rằng OA=5cm, O’A=3,2 cm.

Hướng dẫn

a) Ta có: ID và IA là 2 tiếp tuyến cắt nhau tại I.

Suy ra ID = IA (1) Mà OD = OA

Suy ra IO là trung trực của AD => IO ⊥ AD

=> ∠IMA = 90o + IE và IA là 2 tiếp tuyến cắt nhau tại I

Suy ra IA = IE (2) Mà O’A = O’E

Suy ra IO’ là trung trực của AE => IO ⊥ AE

=> ∠INA = 90o

Từ (1) và (2) suy ra IA = ID = IE Suy ra tam giác DAE vuông tại A

=> ∠DAE = 90o

Tứ giác MINA có 3 góc ∠IMA = 90o ; ∠INA = 90o; ∠DAE = 90o nên tứ giác MINA là hình chữ nhật.

b) Xét tam giác vuông IAO có AN ⊥ IO' : IA2 = IM.IO (3) (theo hệ thức lượng trong tam giác).

Xét tam giác vuông IAO’ có : IA2 = IN.IO' (4) (theo hệ thức lượng trong tam giác).

Từ (3) và (4) ta suy ra IM.IO = IN.IO'

c) Theo trên ta có tam giác DAE vuông tại A

=> 3 điểm D, E, A nội tiếp đường tròn đường kính DE (5)

Do IA là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn (O) và (O’) => IA ⊥ OO' (6)

Từ (5) và (6) ta suy ra OO’ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE.

d) Xét tam giác vuông IOO’ có IA2 = OA . OA' => IA2 = 5.3,2 =16(cm)

Vậy IA = 4cm.

**Bài 11:** Cho đường tròn (O), đường kính AB, đểm M thuộc đường tròn. Vẽ điểm N đối xứng với A qua M.BN cắt đường tròn ở C.Gọi E là giao điểm của AC và BM.

a, Chứng minh rằng NE ⊥ AB .

b, Gọi F là điểm đối xứng với E qua M. Chứng minh rằng FA là tiếp tuyến của đường tròn(O).

c, Chứng minh rằng FN là tiếp tuyến của đường tròn(B; BA).

Hướng dẫn

a) Tam giác AMB nội tiếp đường tròn đường kính AB

=> ∠AMB = 90o => AM ⊥ MB

Tam giác ACB nội tiếp đường tròn đường kính AB

=> ∠ACB = 90o => AC ⊥ CB

Suy ra E là trực tâm của tam giác NAB, do đó NE ⊥ AB .

b) Tứ giác AFNE có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành( tứ giác này còn là hình thoi).

Do đó FA//NE.

Do NE ⊥ AB nên FA ⊥ AB .

Suy ra FA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) Tam giác ABN có đường cao BM cũng là đường trung tuyến nên là tam giác cân.

Suy ra BN = BA.

Do đó BN là bán kính của đường tròn (B;BA).

Tam giác ABN cân tại B nên ∠BNA = ∠BAN (1)

Tam giác AFN có đường cao FM là đường trung tuyến nên là tam giác cân, suy ra ∠N1 = ∠A1 (2)

Từ (1) và (2) suy ra ∠BNA + ∠N1 = ∠BAN + ∠A1 tức là ∠FNB = ∠FAB

Ta lại có: ∠FAB = 90o (câu b), nên ∠FNB = 90o .

Do đó FN là tiếp tuyến của đường tròn (B).

**Bài 12:** Cho tam giác vuông tại A( AB < AC) nội tiếp đường tròn (O) có đường kính BC. Kẻ dây AD vuông góc với BC. Gọi E là giao điểm của DB và CA. Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với BC, cắt BC ở H, cắt AB ở F. Chứng minh rằng:

a) Tam giác EBF là tam giác cân.

b) Tam giác HAF là tam giác cân.

c) HA là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Hướng dẫn

a) Ta có: OB ⊥ AD tại I nên AI = ID.

Suy ra tam giác BAD cân, ∠B1 = ∠B2 , do đó ∠B3 = ∠B4 .

Tam giác EBF có đường cao cũng là đường phân giác nên là tam giác cân.

b) Tam giác BEF cân nên EH = HF.

Tam giác AEF vuông tại A có AH là đường trung tuyến nên AH = HE = HF.

Do đó tam giác HAF cân tại H.

c) Tam giác HAF cân tại H nên ∠A1 = ∠F (1)

Tam giác OAB cân tại O nên ∠OAB = ∠B1 = ∠B4 (2)

Từ (1) và (2) suy ra ∠OAH = ∠A1 + ∠OAB = ∠F + ∠B4 = 90o

Suy ra HA là tiếp tuyến của đường tròn (O).