

ĐỀ ÔN TẬP SỐ 22

- Câu 1.** Giải phương trình $\frac{2\sqrt{3}\sin^2 x - \sqrt{3}\cos x - 2\sin x}{(1 - 2\cos x)\tan x} = \cos x$.
- Câu 2.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (2x^2y - 7)(\sqrt{3x - 2} - \sqrt{x + 3xy}) = 5 \\ \sqrt{x^2(4 + y^2)} - 1 = \sqrt{1 + 4x^2} - xy \end{cases}$$
.
- Câu 3.** Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng $y = -2x + m$ luôn cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt A, B . Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A, B . Tìm m để biểu thức $P = (k_1)^{2019} + (k_2)^{2019}$ đạt giá trị nhỏ nhất
- Câu 4.** Cho dãy số (u_n) thỏa mãn:
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n^2 + \frac{n+2}{n^2+n}}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$
. Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .
- Câu 5.** Có hai chiếc hộp chứa bi, mỗi viên bi chỉ mang màu xanh hoặc đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp đúng 1 viên bi. Biết tổng số bi trong hai hộp là 20 và xác suất để lấy được hai viên bi màu xanh là $\frac{55}{84}$. Tính xác suất để lấy được hai viên bi màu đỏ.
- Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết $AB = 7a, BC = 7a\sqrt{3}$. E là điểm trên cạnh SC sao cho $CE = 2ES$.
- a)** Tính thể tích khối chóp $E.ABC$.
- b)** Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BE .
- Câu 7.** Cho các số thực không âm a, b, c thỏa $c < a, c < b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P = (a-b)^2 \left[\left(\frac{2a+c}{b^2+c^2} \right)^2 + \left(\frac{2b+c}{a^2+c^2} \right)^2 - \frac{64}{ab+bc+ca} + \frac{8(a^2+1)}{a(a-b)^2} \right].$$

ĐÁP ÁN ĐỀ ÔN SỐ 22

Câu 1. Giải phương trình $\frac{2\sqrt{3}\sin^2 x - \sqrt{3}\cos x - 2\sin x}{(1 - 2\cos x)\tan x} = \cos x$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos x \neq \frac{1}{2} \\ \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq 0 \end{cases}$$

Khi đó

$$\frac{2\sqrt{3}\sin^2 x - \sqrt{3}\cos x - 2\sin x}{(1 - 2\cos x)\tan x} = \cos x \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin^2 x - \sqrt{3}\cos x - 2\sin x = \sin x - 2\sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin^2 x - \sqrt{3}\cos x - 3\sin x + 2\sin x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x(2\sin x - \sqrt{3}) + \cos x(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - \sqrt{3})(\sqrt{3}\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}\sin x + \cos x = 0 & (1) \\ 2\sin x - \sqrt{3} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$+) (1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$+) (2) \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Kết hợp điều kiện ta suy ra nghiệm của phương trình là: } \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2x^2y - 7)(\sqrt{3x - 2} - \sqrt{x + 3xy}) = 5 \\ \sqrt{x^2(4 + y^2)} - 1 = \sqrt{1 + 4x^2 - xy} \end{cases}$.

Lời giải

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} (2x^2y - 7)(\sqrt{3x - 2} - \sqrt{x + 3xy}) = 5 & (1) \\ \sqrt{x^2(4 + y^2)} - 1 = \sqrt{1 + 4x^2 - xy} & (2) \end{cases}$$

$$+) \text{ Điều kiện: } \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x + 3xy \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ y \geq -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (*)$$

$$+) \text{ Với điều kiện } (*), \text{ từ } (2) \Rightarrow \sqrt{(y^2 + 4)} + y = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 4} + \frac{1}{x}. \quad (3)$$

+) Xét hàm số: $f(t) = \sqrt{t^2 + 4} + t, t \geq -\frac{1}{3}$.

$$f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}} + 1 > 0, \forall t \geq -\frac{1}{3}.$$

□

□ Suy ra, hàm số $f(t) = \sqrt{t^2 + 4} + t$ đồng biến trên $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Mặt khác $f(t)$ liên tục trên $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Do đó, từ (3) $\Leftrightarrow f(y) = f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$.

+) Thay $y = \frac{1}{x}$ vào (1), ta được: $(2x-7)(\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+3}) = 5$. (4)

□ Nhận thấy, $x = \frac{7}{2}$ không là nghiệm của (4), nên (4) có thể viết lại:

$$\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+3} = \frac{5}{2x-7} \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} - \sqrt{x+3} - \frac{5}{2x-7} = 0.$$

□ Đặt $g(x) = \sqrt{3x-2} - \sqrt{x+3} - \frac{5}{2x-7}, \forall x \geq \frac{2}{3}, x \neq \frac{7}{2}$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{x+3}} + \frac{10}{(2x-7)^2} = \frac{3\sqrt{x+3} - \sqrt{3x-2}}{2\sqrt{x+3}\sqrt{3x-2}} + \frac{10}{(2x-7)^2} \\ &= \frac{6x+29}{2\sqrt{x+3}\sqrt{3x-2}(3\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2})} + \frac{10}{(2x-7)^2} > 0, \forall x > \frac{2}{3}, x \neq \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{2}{3}; \frac{7}{2}\right)$ và $\left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$.

Mà $g(1) = g(6) = 0$, nên (4) có hai nghiệm $x=1, x=6$.

+) Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ phương trình là $(1; 1)$ và $\left(6; \frac{1}{6}\right)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng

$y = -2x + m$ luôn cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt A, B . Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các

tiếp tuyến với (C) tại A, B . Tìm m để biểu thức $P = (k_1)^{2019} + (k_2)^{2019}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x+1} = -2x + m$ (1)

Điều kiện: $x \neq -1$

Từ (1) $\Leftrightarrow 2x^2 + (4-m)x + 1 - m = 0$

Vì $\Delta_{(1)} = (4-m)^2 - 4.2.(1-m) = m^2 + 8 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $x = -1$ không là nghiệm (1) nên phương

trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Gọi $A(x_1, -2x_1 + m); B(x_2, -2x_2 + m)$ là hoành độ tiếp điểm với x_1, x_2 lần lượt là hai nghiệm

của (1).

$$\text{Hệ số góc } \begin{cases} k_1 = \frac{1}{(x_1+1)^2} \\ k_2 = \frac{1}{(x_2+1)^2} \end{cases} \Rightarrow P = (k_1)^{2019} + (k_2)^{2019} \geq 2\sqrt{(k_1.k_2)^{2019}}$$

$$\text{Mà } k_1.k_2 = \frac{1}{(x_1.x_2 + x_1 + x_2 + 1)^2} = 4 \Rightarrow P \geq 2^{2020} \Rightarrow P_{\min} = 2^{2020}$$

$$\text{Dấu "}" xảy ra khi } k_1 = k_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 (l) \\ x_1 + x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow m = 0$$

Câu 4. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n^2 + \frac{n+2}{n^2+n}}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Lời giải

+) Dễ thấy (u_n) là dãy số dương. Khi đó:

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n^2 + \frac{n+2}{n^2+n}} \Leftrightarrow u_{n+1}^2 = 2u_n^2 + \frac{n+2}{n^2+n}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1}^2 = 2u_n^2 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow u_{n+1}^2 + \frac{1}{n+1} = 2\left(u_n^2 + \frac{1}{n}\right)$$

Xét dãy số (v_n) với $v_n = u_n^2 + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh được (v_n) là cấp số nhân

có số

hạng đầu $v_1 = 5$ và công bội $q = 2$ nên có số hạng tổng quát là $v_n = 5.2^{n-1}$

Từ đó, suy ra $u_n = \sqrt{5.2^{n-1} - \frac{1}{n}}$.

Câu 5. Có hai chiếc hộp chứa bi, mỗi viên bi chỉ mang màu xanh hoặc đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp đúng 1 viên bi. Biết tổng số bi trong hai hộp là 20 và xác suất để lấy được hai viên bi màu xanh là $\frac{55}{84}$. Tính xác suất để lấy được hai viên bi màu đỏ.

Lời giải

Giả sử hộp thứ nhất có x viên bi, trong đó có a viên bi xanh, hộp thứ hai có y viên bi, trong đó có b viên bi xanh (điều kiện x, y, a, b nguyên dương, $x \geq y, x \geq a, y \geq b$).

Từ giả thiết ta có:
$$\begin{cases} x + y = 20 & (1) \\ \frac{ab}{xy} = \frac{55}{84} & (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow 55xy = 84ab \Rightarrow xy:84$, mặt khác: $xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2 = 100 \Rightarrow xy = 84$ (3).

Từ (1) và (3) suy ra $\begin{cases} x = 14 \\ y = 6 \end{cases}$.

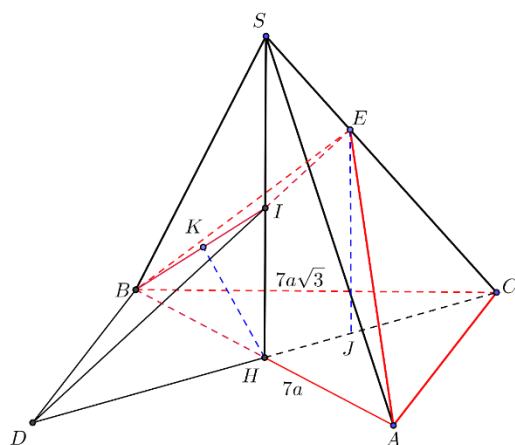
Từ (2) và (3) suy ra $ab = 55$, mà $a \leq x \leq 14, b \leq y \leq 6 \Rightarrow a = 11, b = 5$.

Vậy xác suất lấy được hai viên bi đỏ là: $P = \frac{x-a}{x} \cdot \frac{y-b}{y} = \frac{1}{28}$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết $AB = 7a, BC = 7a\sqrt{3}$. E là điểm trên cạnh SC sao cho $CE = 2ES$.

a) Tính thể tích khối chóp $E.ABC$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BE .



a) Tam giác ABC vuông tại A nên $AC = \sqrt{7a\sqrt{3}^2 - 7a^2} = 7a\sqrt{2}$

Gọi H là trung điểm của AB

$$\begin{cases} SAB \perp ABC \\ SAB \cap ABC = AB \Rightarrow SH \perp ABC, \\ SH \subset SAB, SH \perp AB \end{cases}$$

Tam giác SAB đều nên $SH = \frac{7a\sqrt{3}}{2}$

Cách 1: Ta có $\frac{V_{S.ABE}}{V_{S.ABC}} = \frac{SE}{SC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{E.ABC}}{V_{S.ABC}} = \frac{2}{3}$

$$V_{E.ABC} = \frac{2}{3} V_{S.ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{7a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 7a \cdot 7a\sqrt{2} = \frac{343a^3\sqrt{6}}{18}.$$

Cách 2: Dựng $EJ \parallel SH$ cắt HC tại J . Khi đó $\Rightarrow EJ \perp ABC$,

$$\frac{EJ}{SH} = \frac{2}{3} \Rightarrow EJ = \frac{2}{3} \cdot \frac{7a\sqrt{3}}{2} = \frac{7a\sqrt{3}}{3} \quad V_{E.ABC} = \frac{1}{3} \cdot EJ \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{7a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 7a \cdot 7a\sqrt{2} = \frac{343a^3\sqrt{6}}{18}.$$

b) Dựng D sao cho $BCAD$ là hình bình hành. Khi đó $AC \parallel BED$.

$$d_{AC, BE} = d_{AC, BED} = d_{A, BED} = 2d_{H, BED}$$

Vì $BD \perp SAB \Rightarrow BDE \perp SAB$. Gọi $I = SH \cap DE \Rightarrow SAB \cap BDE = BI$.

Từ H kẻ $HK \perp BI$ tại K . Khi đó $HK \perp BDE \Rightarrow d_{AC, BE} = 2HK$

$$\text{Ta có } HI = \frac{1}{2} SH = \frac{7a\sqrt{3}}{4}$$

Trong tam giác vuông BIH :

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{HB^2} = \left(\frac{4}{7a\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{2}{7a} \right)^2 = \frac{4}{21a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{21}}{2}$$

$$\Rightarrow d_{AC, BE} = 2HK = a\sqrt{21}.$$

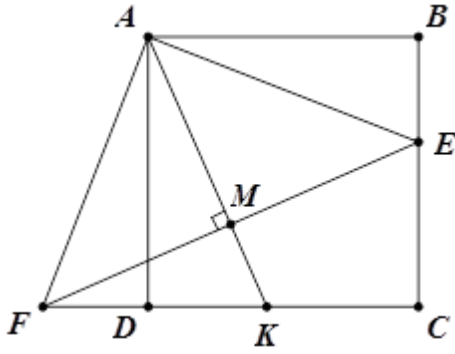
Câu 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ và điểm E thuộc cạnh BC . Đường thẳng qua A và vuông góc với AE cắt CD tại F . Gọi M là trung điểm EF ,

đường thẳng AM cắt CD tại K . Tìm tọa độ điểm D biết $A(-6;6)$, $M(-4;2)$, $K(-3;0)$

và E

có tung độ dương.

Lời giải



Ta có $\triangle ABE = \triangle ADF$ vì $AB = AD$ và $BAE = DAF$ (cùng phụ với DAE).

Suy ra $\triangle AEF$ vuông cân

Do M là trung điểm $EF \Rightarrow AM \perp EF$ và $ME = MA = MF$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = (2; -4)$ và $AM = \sqrt{20}$.

Đường thẳng EF đi qua M và vuông góc với MA nên có phương trình $x - 2y + 8 = 0$.

Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác AFE : $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 20$

Tọa độ điểm E, F thỏa hệ
$$\begin{cases} (x+4)^2 + (y-2)^2 = 20 \\ x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta được tọa độ $E(0;4)$, $F(-8;0)$, ($y_E > 0$).

Với $E(0;4)$, $F(-8;0)$

Đường thẳng CD qua $F(-8;0)$ và $K(-3;0)$ nên có phương trình $y = 0$.

Đường thẳng AD qua $A(-6;6)$ và vuông góc với FK nên có phương trình $x + 6 = 0$.

$D = CD \cap AD \Rightarrow D(-6,0)$.

Câu 8. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa $c < a, c < b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a-b)^2 \left[\left(\frac{2a+c}{b^2+c^2} \right)^2 + \left(\frac{2b+c}{a^2+c^2} \right)^2 - \frac{64}{ab+bc+ca} + \frac{8(a^2+1)}{a(a-b)^2} \right].$$

Lời giải

Ta có: $c < a, c < b \Rightarrow b^2 + c^2 \leq (b + \frac{c}{2})^2; a^2 + c^2 \leq (a + \frac{c}{2})^2; ab + bc + ca \geq (a + \frac{c}{2})(b + \frac{c}{2})$

$$\frac{1}{(a^2+c^2)^2} \geq \frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^4}; \frac{1}{(b^2+c^2)^2} \geq \frac{1}{\left(b+\frac{c}{2}\right)^4}; \frac{-1}{ab+bc+ca} \geq \frac{-1}{\left(a+\frac{c}{2}\right) \cdot \left(b+\frac{c}{2}\right)}$$

$$\text{Suy ra } P \geq (a-b)^2 \left[\frac{4\left(a+\frac{c}{2}\right)^2}{\left(b+\frac{c}{2}\right)^4} + \frac{4\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^4} - \frac{64}{\left(a+\frac{c}{2}\right)\left(b+\frac{c}{2}\right)} \right] + 8\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

Đặt $a+\frac{c}{2}=x$; $b+\frac{c}{2}=y$; ($x>0; y>0$). Ta có

$$P \geq (x-y)^2 \left[4\frac{x^2}{y^4} + 4\frac{y^2}{x^4} - \frac{64}{xy} \right] + 16\frac{1}{(a^2+c^2)^2} \geq \frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^4}$$

$$\text{Hay } P \geq 4\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right) \left[\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - 16 \right] + 16.$$

Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, ($t \geq 2$). Xét hàm số $f(t) = 4(t-2)(t^3 - 3t - 16)$

Ta có $f'(t) = 4(4t^3 - 6t^2 - 6t - 10)$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$

Lập bảng biến thiên suy ra $f(t) \geq -\frac{63}{4}$.

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{1}{4} \text{ và } P = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{2} \\ c=0 \end{cases}. \text{ Vậy } P_{\min} = \frac{1}{4}.$$