

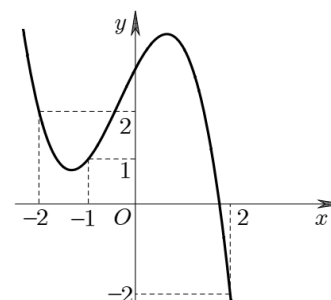
Câu I.(6.0 điểm)

1. Cho hàm số $y = f(x) = mx^8 + 2(m-1)x^4$ với m là tham số thực. Biết rằng $\min_{[0;2]} f(x) = f(1)$. Tính $\max_{[0;2]} f(x)$.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \end{cases}$$

Câu II.(5.0 điểm)

1. Cho hàm số bậc bốn có đồ thị hàm số $y = f'(x-1)$ cho ở hình vẽ bên. Hãy tìm các khoảng đồng biến của hàm số cho bởi công thức $y = g(x) = f(2x) + 2x^2 + 2x$



2. Giải đặc biệt số Vietlott Mega 6/45 là một dãy gồm 6 số được lựa chọn ngẫu nhiên từ 45 số tự nhiên dương đầu tiên. Người tham gia lựa chọn cho mình dãy 6 số bất kỳ trong 45 số tự nhiên đó không quan tâm đến thứ tự. Người chơi trúng giải ba thì trong dãy 6 số mình chọn phải trùng ba số so với số trúng giải đặc biệt. Tính xác suất trúng giải ba của người chơi ?

Câu III.(1.5 điểm). Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a > b > c$ và $3ab + 5bc + 7ca \leq 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{32}{(a-b)^4} + \frac{1}{(b-c)^4} + \frac{1}{(c-a)^4}$.

Câu IV.(6.0 điểm). Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

a. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng $(BCC'B')$.

b. Tính thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Câu V.(1.5 điểm.) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Trên đường thẳng AA' lấy điểm M và trên đường thẳng BC lấy điểm N sao cho đường thẳng MN cắt cạnh $C'D'$. Tính theo a giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng MN .

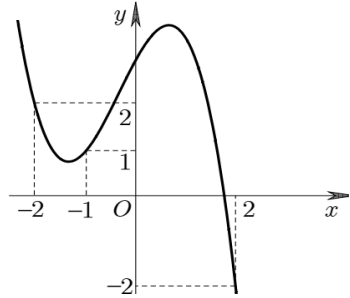
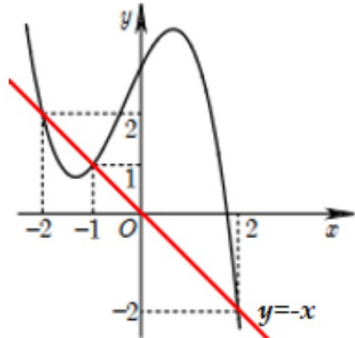
..... Hết

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

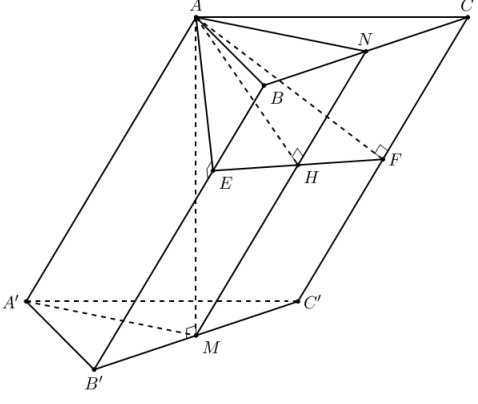
HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI KSCL ĐỘI TUYỂN HSG CỤM THPT ĐÔ LƯƠNG

(Hướng dẫn chấm này gồm 06 trang)

Câu	Nội dung	Điểm
Câu I (6,0đ)	1. Cho hàm số $y = f(x) = mx^8 + 2(m-1)x^4$ với m là tham số thực. Biết rằng $\min_{[0;2]} f(x) = f(1)$. Tính $\max_{[0;2]} f(x)$	3,0
	Ta có: $y' = 8mx^7 + 8(m-1)x^3 = 8x^3(mx^4 + m - 1)$	0,5
	Vì $y' = 0$ có tối đa 3 nghiệm trong đó có nhiều nhất một nghiệm dương kết hợp $\min_{[0;2]} f(x) = f(1)$ nên $x = 1$ phải là điểm cực tiểu của hàm số.	0,5
	Khi đó $y' = 0$ có một nghiệm $x = 1$ hay $m = \frac{1}{9}$ (1)	0,5
	Thử lại với $m = \frac{1}{9}$ ta có $y' = 8mx^7 + 8(m-1)x^3 = 8x^3\left(\frac{x^4}{9} - \frac{1}{9}\right)$ Dễ thấy $[0;2]$ hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ thỏa mãn $\min_{[0;2]} f(x) = f(1)$	0,5
	Với $m = \frac{1}{9}$ có $\max_{[0;2]} f(x) =$ khi $x = 2$	1,0
	2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0 & (1) \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7 & (2) \end{cases}$	3,0
	Điều kiện xác định: $x \leq \frac{3}{4}, y \leq \frac{5}{2}$.	0,5
	Đặt $t = \sqrt{5 - 2y} (t \geq 0)$. Từ phương trình (1) ta được $(4x^2 + 1)x + \left(\frac{5 - t^2}{2} - 3\right)t = 0$ $2x(4x^2 + 1) + (-1 - t^2)t = 0 \Leftrightarrow (2x)^3 + 2x = t^3 + t$	
	Xét hàm đặc trưng $f(t) = t^3 + t$, trên $[0; +\infty)$. Ta có: $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ Do đó (*) $2x = t \Leftrightarrow 2x = \sqrt{5 - 2y} \rightarrow y = \frac{5 - 4x^2}{2} (x \geq 0)$	0,5
	Thế $y = \frac{5 - 4x^2}{2}$ vào pt (2) ta có :	0,5

	$4x^2 + \left(\frac{5-4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7(3)$	
	Xét hàm số $f(x) = 4x^2 + \left(\frac{5-4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} - 7$ trên $\left[0; \frac{3}{4}\right]$ có đạo hàm $f'(x) = -4x(3+4x^2) - \frac{4}{\sqrt{3-4x}} < 0$ với $\forall x \in \left[0; \frac{3}{4}\right]$ nên hàm số nghịch biến	1,0
	Khi đó (3) có nghiệm duy nhất. Nhận thấy $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm. Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$	0,5
Câu II. (5,0đ)	1. Cho hàm số bậc bốn có đồ thị hàm số $y = f'(x-1)$ cho ở hình vẽ bên. Hãy tìm các khoảng đồng biến của hàm số cho bởi công thức $y = g(x) = f(2x) + 2x^2 + 2x$ 	2,5
	Ta có $y' = g'(x) = 2f'(2x) + 4x + 2$, Hàm số đồng biến khi $g'(x) > 0$ hay $2f'(2x) + 4x + 2 > 0 \Leftrightarrow f'(2x) + 2x + 1 > 0$	0,5
	Đặt $2x = t - 1$ ta được phương trình $f'(t-1) + t > 0 \Leftrightarrow f'(t-1) > -t$ (4)	0,5
	Dựa vào đồ thị hai hàm số $y = f'(x-1)$ và đồ thị hàm số $y = -x$ khi đó nghiệm của BPT (4) là $t < -2$ và $-1 < t < 2$ 	0,5
	Với $t < -2$. $2x + 1 < -2 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{2}$. Với $-1 < t < 2$. $-1 < 2x + 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{2}$.	0,5
	Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$ và $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$	0,5
	2. Giải đặc biệt số số Vietlott Mega 6/45 là một dãy gồm 6 số được lựa chọn ngẫu nhiên từ 45 số tự nhiên dương đầu tiên. Người tham gia lựa chọn cho mình dãy 6 số bất kỳ trong 45 số tự nhiên đó không quan tâm đến thứ tự. Người chơi trúng giải ba thì trong dãy 6 số mình chọn phải trùng ba số so với số trúng giải đặc biệt. Tính	2,5

	xác suất trúng giải ba của người chơi ?	
	Không gian mẫu: Số cách chọn 6 số bất kỳ trong 45 số tự nhiên dương đầu tiên là $n(\Omega) = C_{45}^6$	0,5
	Người chơi muốn trúng giải 3 cần trùng với 3 trong 6 số của giải đặc biệt có C_6^3 cách trùng 3/6 số	0,5
	Do dãy số của người chơi cần có thêm 3 số nữa không trùng với 3 số còn lại trong giải đặc biệt. Nên 3 số còn lại phải được chọn trong $45 - 9 = 39$ số. Hay có $C_6^3 \cdot C_{39}^3$ cách chọn số để người chơi trúng giải 3	0,5
	Vậy xác suất để người chơi trúng giải ba là: $P(A) = \frac{C_6^3 \cdot C_{39}^3}{C_{45}^6} = \frac{9139}{407253}$	1,0
Câu III. (1,5đ)	Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a > b > c$ và $3ab + 5bc + 7ca \leq 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{32}{(a-b)^4} + \frac{1}{(b-c)^4} + \frac{1}{(c-a)^4}$.	3,0
	Từ giả thiết $a > b > c \geq 0 \rightarrow 9 \geq 7ca + 5bc + 3ab \geq 3ab \rightarrow ab \leq 3$ khi đó $P \geq \frac{32}{(a-b)^4} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} \geq \frac{a^2 b^2}{9} \left[\frac{32}{(a-b)^4} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} \right]$ $= \frac{1}{9} \left[\frac{32a^2 b^2}{(a^2 - 2ab + b^2)^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \right] = \frac{1}{9} \left[\frac{32}{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right)^2} + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 2 \right]$	0,5
	Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} (t > 2)$ Do $a > b$ khi đó $P \geq f(t) = \frac{1}{9} \left[\frac{32}{(t-2)^2} + t^2 - 2 \right]$ với $t > 2$ Ta có $f'(t) = \frac{1}{9} \left[-\frac{64}{(t-2)^3} + 2t \right]$ cho $f'(t) = 0$ ta được $2t(t-2)^3 = 64 \Leftrightarrow t = 4$	0,5
	Ta có $f'(x)$ đổi dấu từ âm qua dương khi đi qua $t = 4$ thì $f(t)$ đạt cực tiểu hay $P \geq f(t) \geq f(4) = \frac{10}{9}$ Dấu bằng xảy ra khi $c = 0, ab = 3, \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 4$ hay $a = \sqrt{6+3\sqrt{3}}, b = \sqrt{2+\sqrt{3}}(2\sqrt{3}-3), c = 0$	0,5

Câu IV. (6,0đ)	Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. a. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng $(BCC'B')$. b. Tính thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$.	1,0
	Gọi N là trung điểm BC. Kẻ $AE \perp BB'$ tại E, $AF \perp CC'$ tại F. Ta có $EF \cap MN = H$ nên H là trung điểm EF. 	1,0
	Ta có $\begin{cases} AE \perp AA' \\ AF \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AA' \perp (AEF) \Rightarrow AA' \perp EF \Rightarrow EF \perp BB'$. Khi đó $d(A, BB') = AE = 1$, $d(A, CC') = AF = \sqrt{3}$, $d(C, BB') = EF = 2$. Nhận xét: $AE^2 + AF^2 = EF^2$ nên tam giác AEF vuông tại A, suy ra $AH = \frac{EF}{2} = 1$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên EF. Khi đó $AK \perp EF$ và $AK \perp MN$ nên $AK \perp (BB'C'C)$, hay AK là khoảng cách từ A đến $(BCC'B')$. Xét tam giác vuông AEF ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$. Suy ra $AK = \frac{\sqrt{3}}{2}$	1,0
	Ta lại có $\begin{cases} AA' \perp (AEF) \\ MN \parallel AA' \end{cases} \Rightarrow MN \perp (AEF) \Rightarrow MN \perp AH$. Tam giác AMN vuông tại A có đường cao AH nên $\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AN^2} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow AM = 2$. Mặt khác $\begin{cases} (AA'NM) \perp (ABC) \\ (AA'NM) \perp (AEF) \\ (AA'NM) \cap (ABC) = AN \\ (AA'NM) \cap (AEF) = AH \end{cases} \Rightarrow$ Góc giữa mặt phẳng (ABC) và (AEF) là HAN. Hình chiếu của tam giác ABC lên mặt phẳng (AEF) là tam giác AEF nên $S_{\triangle AEF} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos HAN \Rightarrow \frac{1}{2} AE \cdot AF = S_{\triangle ABC} \cdot \frac{AH}{AN} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AE \cdot AF \cdot AN}{AH}$	1,0

	$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}}{1} = 1.$ Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot AM = 2.$	
V. (1,5đ)	Cho hình lập phương $ABCD A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Trên đường thẳng AA' lấy điểm M và trên đường thẳng BC lấy điểm N sao cho đường thẳng MN cắt cạnh $C'D'$. Tính theo a giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng MN.	2.0
	Gọi L giao điểm của MN và $C'D'$. Đặt $AM = x, BN = y$. Từ giả thiết ta suy ra $x > a, y > a$. Chiếu tất cả các điểm lên mặt phẳng $(ABB'A')$ ta được $\frac{C'L}{LD'} = \frac{a}{x-a}$. Và chiếu chúng lên $(ABCD)$ ta được $\frac{C'L}{LD'} = \frac{y-a}{a}$. Do đó $\frac{a}{x-a} = \frac{y-a}{a}$, khi đó $xy = (x+y)a$. Nhưng $(x+y)^2 \geq 4xy$. Nên $xy \geq 4a^2$.	1
	$MN^2 = x^2 + y^2 + a^2 = (x+y)^2 - 2xy + a^2$ Bây giờ ta được $= \frac{(xy)^2}{a^2} - 2xy + a^2 = \frac{1}{a^2} (xy - a^2)^2 \geq 9a^2$ MN là $3a$ Vậy giá trị nhỏ nhất của	0,5
	Hết..... <u>Ghi chú:</u> HS giải cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.	