ĐỀ VDC SỐ 05 Cơ bản về cực trị hàm số

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-2018)(x-2019)(x-2020)^4$. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 2: Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=3$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x-3)^3(2x+3), \forall x\in\mathbb{R}$. Số cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 2 . **C.** 0 . **D.** 3.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)=x^2(x-1)(x+2)^5$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 5: Hàm số $y=2x^3-x^2+5$ có điểm cực đại là

A. $x=\frac{1}{3}$. **B.** $x=0$. **C.** $M(0;5)$. **D.** $y=5$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)=x(x-1)(x+2)^2$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2 . **B.** 3 . **C.** 4 . **D.** 1.

Câu 7: Hàm số $y=\frac{2x+5}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 8: Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

A. $M(0;-1)$. **B.** $Q(-1;10)$. **C.** $P(1;0)$. **D.** $N(1;-10)$.

Câu 9: Số nào sau đây là điểm cực đại của hàm số $y=x^4-2x^3+x^2+2$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 0 . **D.** 2 .

Câu 10: Cho $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)(x-3)^2$. Khi đó số cực trị của hàm số $y=f(2x+1)$ là

A. 0 . **B.** 2 . **C.** 1. **D.** 3 .

Câu 11: Cho hàm số $y=x^4-2x^2+1$. Xét các mệnh đề sau đây

1) Hàm số có 3 điểm cực trị; 2) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$; $(1;+\infty)$

3) Hàm số có 1 điểm cực trị; 4) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$; $(0;1)$

Có bao nhiêu mệnh đề **đúng** trong bốn mệnh đề trên?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 12: Hàm số $f(x)=C_{2019}^0+C_{2019}^1x+C_{2019}^2x^2+...+C_{2019}^{2019}x^{2019}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B.** 2018. **C.** 1. **D.** 2019.

Câu 13: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Tọa độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là

A. $(-2;0)$. **B.** $(-1;4)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;0)$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = 1 + C_{10}^1 x + C_{10}^2 x^2 + ... + C_{10}^{10} x^{10}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho bằng

A. 10. **B.** 0. **C.** 9. **D.** 1.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x-2)(3^x - 1), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 3x)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Gọi T là giá trị cực đại của hàm số đã cho. Chọn khẳng định đúng.

A. $T = f(0)$. **B.** $T = f(9)$. **C.** $T = f(-3)$. **D.** $T = f(3)$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 3x)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Gọi T là giá trị cực đại của hàm số đã cho. Chọn khẳng định đúng.

A. $T = f(0)$. **B.** $T = f(9)$. **C.** $T = f(-3)$. **D.** $T = f(3)$.

Câu 18: Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

A. $\sqrt{2} + 1$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2} - 1$. **D.** 1.

Câu 19: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác, gọi là ΔABC. Tính diện tích ΔABC.

A. $S = 2$. **B.** $S = 1$. **C.** $S = \dfrac{1}{2}$. **D.** $S = 4$.

Câu 20: Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 4. **C.** 0. **D.** Vô số.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1; 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = x^2(x-1)e^{3x}$ có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Số điểm cực trị của hàm số $F(x)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 23: Số điểm cực trị của hàm số $y = \left|\sin x - \dfrac{x}{4}\right|$, $x \in (-\pi; \pi)$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 24: Biết phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực. Hỏi đồ thị hàm số $y = \left|ax^3 + bx^2 + cx + d\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4 . **B.** 5 . **C.** 2 . **D.** 3 .

Câu 25: Số điểm cực trị của hàm số $f\left(x\right)=\int\limits_{2x}^{x^2}\frac{2t\mathrm{d}t}{1+t^2}$ là

A. 0 . **B.** 1. **C.** 2 . **D.** 3 .

Câu 26: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(-2x^2+4x)$ là.

A. 3 . **B.** 4 . **C.** 2 . **D.** 5 .

Câu 27: Biết rằng đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{1}{x}$ có ba điểm cực trị thuộc một đường tròn $\left(C\right)$. Bán kính của $\left(C\right)$ gần đúng với giá trị nào dưới đây?

A. 12,4 . **B.** 6,4 . **C.** 4,4 . **D.** 27 .

Câu 28: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(3-x\right)\left(x^2-1\right)+2x,\forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y=f'\left(x\right)-x^2-1$ có bao nhiêu điểm cực tiểu.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 29: Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị trái dấu.

B. Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.

C. Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị nằm bên phải trục tung.

D. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ nằm bên trái trục tung.

Câu 30: Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$ với $a>0$, $c>2018$ và $a+b+c<2018$. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f\left(x\right)-2018\right|$ là

A. 1. **B.** 3 . **C.** 5 . **D.** 7 .

Câu 31: Hàm số $f\left(x\right)=\left|\frac{x}{x^2+1}-m\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2 . **B.** 3 . **C.** 5 . **D.** 4 .

Câu 32: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x^2-1\right)\left(x-4\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(3-x\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.B	3.B	4.B	5.B	6.A	7.B	8.D	9.A	10
11	12.A	13.D	14.D	15.C	16.C	17.C	18.C	19.B	20.B
21	22.A	23.D	24.D	25.D	26.D	27.B	28.D	29.A	30.D
31	32.B	33.D							

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn A**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2018 \\ x=2019 \\ x=2020 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của $f'(x)$:

x	$-\infty$		2018		2019		2020		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ đổi dấu qua hai điểm $x=2018; x=2019$ nên hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Câu 2: **Chọn B**

Ta có hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=x^2+2x-3$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$; $y''=2x+2$; $y''(-3)=-4<0$; $y''(1)=4>0$.

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

Câu 3: **Chọn B**

Ta có $f'(x)$ đổi dấu khi qua các giá trị $x=3$ và $x=\frac{-3}{2}$ nên hàm số có 2 cực trị.

Câu 4: **Chọn B**

Xét phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	−	0	+	

Dễ thấy $f'(x)$ đổi dấu khi qua $x=-2$ và $f'(x)$ đổi dấu khi qua $x=1$ nên hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 5: **Chọn B**

Ta có $y' = 6x^2 - 2x,\ y'' = 12x - 2.$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

$y''(0) = -2 < 0 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực đại của hàm số $y = 2x^3 - x^2 + 5$.

Chú ý: phân biệt điểm cực đại của hàm số là $x_{cđ}$, còn điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(x_{cđ}; y_{cđ})$.

Câu 6: **Chọn A**

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Nhận thấy $(x+2)^2 > 0\ \forall x \ne -2 \Rightarrow f'(x)$ không đổi dấu khi qua nghiệm $x = -2$ nên $x = -2$ không phải là điểm cực trị hàm số.

Ngoài ra $f'(x)$ cùng dấu với tam thức bậc hai $x(x-1) = x^2 - x$ nên suy ra $x = 0; x = 1$ là hai điểm cực trị của hàm số.

Câu 7: **Chọn B**

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có $y' = \dfrac{-3}{(x+1)^2} < 0\ \ \forall x \in D$.

Do y' không đổi dấu nên hàm số không có cực trị.

Câu 8: **Chọn D**

Cách 1: Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$, $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

Ta có $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}\right).f'(x) - 8x - 2$.

Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị A và B nên $f'(x_A) = f'(x_B) = 0$.

Suy ra $\begin{cases} y_A = f(x_A) = -8x_A - 2 \\ y_B = f(x_B) = -8x_B - 2 \end{cases}$

Do đó phương trình đường thẳng AB là $y = -8x - 2$.

Khi đó ta có $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng AB.

Cách 2: Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$,

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Suy ra tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(3;-26)$ và $B(-1;6)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-4;32)$ cùng phương với $\vec{u}(-1;8)$.

Phương trình đường thẳng AB đi qua $B(-1;6)$ và nhận $\vec{u}(-1;8)$ làm vecto chỉ phương là $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 6 + 8t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

Khi đó ta có $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng AB.

Câu 9: **Chọn A**

Tập xác định : $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-6x^2+2x$; $y'=0\Leftrightarrow 2x\left(2x^2-3x+1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=1\\ x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có điểm cực đại của hàm số đã cho là $x=\dfrac{1}{2}$.

Câu 10: Chọn C

$y'=2.f'(2x+1)=2(2x+1-2)(2x+1-3)^2=2(2x-1)(2x-2)^2$.

$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}\\ x=1\end{array}\right.$. Nên hàm số có một cực trị.

Câu 11: Chọn D

$y'=4x^3-4x\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \;\Rightarrow y=1\\ x=1 \;\Rightarrow y=0\\ x=-1\Rightarrow y=0\end{array}\right.$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$+$		$-$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số có 3 điểm cực trị, đồng biến trên khoảng $(-1;0)$; $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$; $(0;1)$. Vậy mệnh đề 1, 2, 4 đúng.

Câu 12: Chọn A

Ta có: $f(x)=C_{2019}^0+C_{2019}^1x+C_{2019}^2x^2+...+C_{2019}^{2019}x^{2019}=(1+x)^{2019}$

$\Rightarrow f'(x)=2019.(1+x)^{2018}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$

Vì $x=-1$ là nghiệm bội chẵn nên $x=-1$ không phải là điểm cực trị của hàm số.

Câu 13: Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$; $y'' = 6x \Rightarrow y''(1) = 6 > 0; y''(-1) = -6 < 0$.

Vậy điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(1;0)$.

Câu 14: Chọn D

Áp dụng khai triển nhị thức Niu tơn, ta có:

$f(x) = 1 + C_{10}^1 x + C_{10}^2 x^2 + ... + C_{10}^{10} x^{10} = (1+x)^{10} \Rightarrow f'(x) = 10(1+x)^9$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đã cho có duy nhất một điểm cực trị $x = -1$.

Câu 15: Chọn C

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)(x-2)(3^x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Câu 16: Chọn C

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 9)(x^2 - 3x)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-3)^3(x+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 3 \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-3)$	$\searrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực đại của hàm số là $T = f(-3)$.

Câu 17: Chọn C

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 9)(x^2 - 3x)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-3)^3(x+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 3 \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-3)$	$\searrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực đại của hàm số là $T = f(-3)$.

Câu 18: Chọn C

Cách 1:

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$.

Suy ra đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$ có ba điểm cực trị là $A(0;4)$, $B(1;3)$ và $C(-1;3)$.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ta có $BC.\overrightarrow{IA} + AC.\overrightarrow{IB} + AB.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Mà $AB = AC = \sqrt{2}$ và $BC = 2$ nên suy ra $I\left(0;\dfrac{4+3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)$.

Phương trình đường thẳng BC là $y = 3$.

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r = d(I,BC) = \sqrt{2} - 1$.

Cách 2:

Áp dụng công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC ta có:

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \sqrt{2} - 1$$

trong đó $a = BC = 2;\ b = c = AB = AC = \sqrt{2};\ p = \dfrac{a+b+c}{2}$

Cách 3:

Áp dụng công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC ta có:

$r = (p-a)\tan\dfrac{A}{2} = \sqrt{2} - 1$ với $\cos A = \dfrac{(-2)^3 + 8.1}{(-2)^3 - 8 - 1} = 0 \Rightarrow \widehat{A} = 90^0$.

Câu 19: Chọn B

Ta có $y' = 4x^3 - 4x; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0;1)$, $B(-1;0)$, $C(1;0)$

$\overrightarrow{AB} = (-1;-1); \overrightarrow{AC} = (1;-1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ AB = AC = \sqrt{2} \end{array}\right.$.

Suy ra ΔABC vuông cân tại A do đó $S = \dfrac{1}{2}AB.AC = 1$.

Câu 20: Chọn B

Xét hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x \Rightarrow y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3(7m-3)$.

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 7m - 3 = 0$. Hàm số đã cho không có cực trị

$\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta'_{(2)} \le 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 1.(7m-3) \le 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le m \le 4$.

Do m là số nguyên nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$. Vậy tập S có 4 phần tử.

Câu 21: Chọn D

Do hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1; 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f'(x) = 0$ có ba nghiệm là $x = -2; x = -1; x = 0$.

Đặt $g(x) = f(x^2 - 2x) \Rightarrow g'(x) = (2x - 2).f'(x^2 - 2x)$. Vì $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g'(x)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó những điểm $g'(x)$ có thể đổi dấu thuộc tập các điểm thỏa mãn

$$\left[\begin{array}{l} 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Ba nghiệm trên đều là nghiệm đơn hoặc bội lẻ nên hàm số $g(x)$ có ba điểm cực trị.

Câu 22: Chọn A

Hàm số $f(x)$ có TXĐ là $\mathbb{R}$, có một nguyên hàm là hàm số $F(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)e^{3x} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu $F'(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng trên, ta thấy hàm số $F(x)$ có một điểm cực trị.

Câu 23: Chọn D

Xét hàm số $y = f(x) = \sin x - \dfrac{x}{4}$ với $x \in (-\pi; \pi)$.

Ta có $f'(x) = \cos x - \dfrac{1}{4}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; 0\right) \\ x = x_2 \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \end{array}\right.$.

$$f(x_1) = \sin x_1 - \frac{x_1}{4} = -\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{x_1}{4} < -\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\pi}{8} < 0.$$

$$f(x_2) = \sin x_2 - \frac{x_2}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{x_2}{4} > \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\pi}{8} > 0.$$

Bảng biến thiên

x	$-\pi$		x_1		x_2		π
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	$\frac{-\pi}{4}$

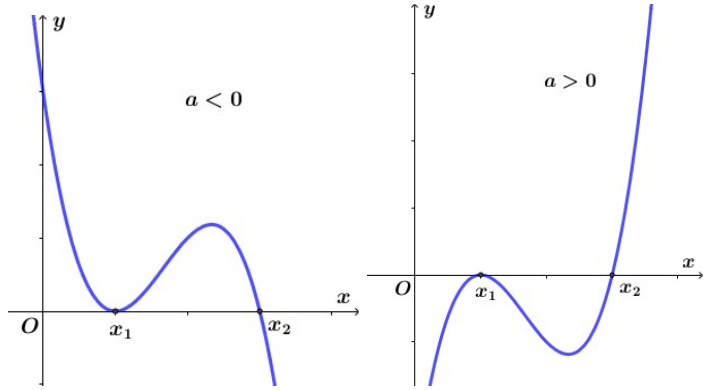
Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có hai điểm cực trị và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khác x_1, x_2. Suy ra hàm số $y=\left|\sin x-\frac{x}{4}\right|$, với $x\in(-\pi;\pi)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 24: Chọn D

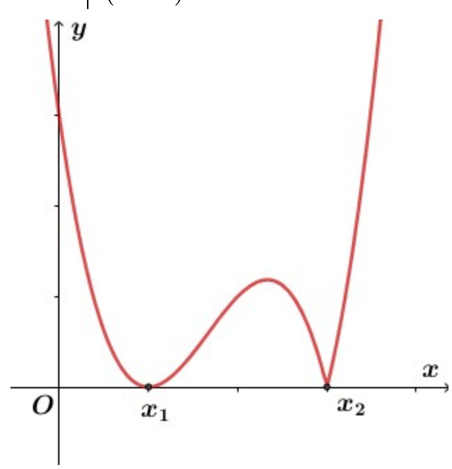
Phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a\neq 0$ là sự tương giao của đồ thị hàm số $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a\neq 0$ và trục hoành.

Do phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a\neq 0$ có đúng hai nghiệm thực nên phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có thể viết dưới dạng $a(x-x_1)^2(x-x_2)=0$ với x_1, x_2 là hai nghiệm thực của phương trình . Khi đó đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ x_1 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ x_2.

Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ ứng với từng trường hợp $a>0$ và $a<0$:



Đồ thị hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|$ $(a\neq 0)$ tương ứng là



Vậy đồ thị hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|$ $(a\neq 0)$ có tất cả 3 điểm cực trị.

Câu 25: Chọn D

Gọi $F(t)$ là nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{2t}{1+t^2}$.

Khi đó: $f(x)=F(t)\Big|_{2x}^{x^2}=F(x^2)-F(2x)\Rightarrow f'(x)=2x.F'(x^2)-2F'(2x)$

$=2x.\dfrac{2x^2}{1+x^4}-2.\dfrac{4x}{1+4x^2}\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{8x^5+4x^3-8x}{(1+x^4)(1+4x^2)}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 8x^5+4x^3-8x=0$ $\Leftrightarrow 4x(2x^4+x^2-2)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}\\x^2=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=x_1=\dfrac{\sqrt{-1+\sqrt{17}}}{2}\\x=x_2=-\dfrac{\sqrt{-1+\sqrt{17}}}{2}\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_2		0		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra: Hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 26: Chọn D

Quan sát đồ thị $f(x)$, ta thấy hàm số có hai điểm cực trị $x=-2;x=0$ vì vậy $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ có hai nghiệm $x=-2;x=0$ nên $f'(x)=3a(x+2)x$.

Ta có:

$y'=\left[f(-2x^2+4x)\right]'=(-4x+4)f'(-2x^2+2x)=(-4x+4)(-2x^2+4x)$.

$=3a(-4x+4)(-2x^2+4x)(-2x^2+4x+2)$

$\Leftrightarrow y'=-48ax(x-2)(x-1)(x^2-2x-1)$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\\x=1+\sqrt{2}\\x=1-\sqrt{2}\end{array}\right.$ và dấu của y' đổi khi x qua mỗi nghiệm trên.

Vậy hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Câu 27: Chọn B

TXĐ: $D=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

$y'=x-3+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^3-3x^2+1}{x^2}$

$$y'=0 \Leftrightarrow x^3-3x^2+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \approx 2,8794 \\ x_2 \approx 0,6527 \\ x_3 \approx -0,5321 \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ Tọa độ các điểm cực trị: $A \approx (2,879;-4,84), B \approx (0,653;-3,277), C \approx (-0,532;3,617)$.

Gọi $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (1) là đường tròn đi qua ba điểm cực trị.

Thay tọa độ ba điểm A,B,C vào (1) ta được hệ phương trình 3 ẩn sau:

$$\begin{cases} 5,758a-9,68b-c \approx 31,71 \\ 1,306a-6,554b-c \approx 11,17 \\ -1,064a+7,234b-c \approx 13,37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \approx 5,374 \\ b \approx 1,0833 \\ c \approx -11,25 \end{cases}$$

$\Rightarrow R \approx \sqrt{a^2+b^2-c} \approx \sqrt{41,3} \approx 6,4$

Câu 28: Chọn D

Ta có $f'(x)=-x^3+3x^2+3x-3 \Rightarrow y'=f''(x)-2x=-3x^2+4x+3$.

$y'=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{13}}{3}$;

$y''=-6x+4$; $y''\left(\dfrac{2+\sqrt{13}}{3}\right)=-2\sqrt{13}<0$; $y''\left(\dfrac{2-\sqrt{13}}{3}\right)=2\sqrt{13}>0$

Suy ra hàm số có 1 điểm cực tiểu.

Câu 29: Chọn A

Từ đồ thị ta có: $\begin{cases} \dfrac{a}{c}<0 \\ -\dfrac{d}{c}<0 \\ \dfrac{b}{d}>0 \\ -\dfrac{b}{a}>0 \\ a.d-b.c<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{c}<0 & (1) \\ \dfrac{d}{c}>0 & (2) \\ \dfrac{b}{d}>0 & (3) \\ \dfrac{b}{a}<0 & (4) \\ a.d-b.c<0 & (5) \end{cases}$

A. Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị trái dấu

$\Leftrightarrow y'=3ax^2+2bx+c$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 3a.c<0 \Leftrightarrow a.c<0$. Đúng với (1)

B. Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.

Sai Suy ra $d>0$ Chưa đủ để kết luận $\dfrac{d}{c}>0$ vì ở đây $c>0$ hoặc $c<0$ ví dụ như hàm số

$y=\dfrac{-x-2}{-3x-5}; y=\dfrac{x+2}{3x+5}$ rõ ràng $\dfrac{-2}{-5}=\dfrac{2}{5}>0$.

C. Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị nằm bên phải trục tung.

Sai vì

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ -\dfrac{2b}{3a} > 0 \\ \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ \dfrac{b}{a} < 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases}$ **Trái với** (1)

D. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ nằm bên trái trục tung.

Sai vì

Hoành độ tâm đối xứng là nghiệm của $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{3a}$

Yêu cầu của đề hoành độ tâm đối xứng âm nên $-\dfrac{b}{3a} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} > 0$ Trái với (3)

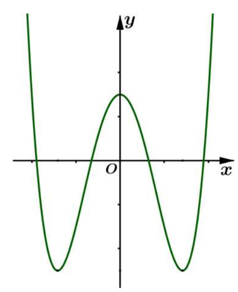
Câu 30: Chọn D

Xét hàm số $g(x) = f(x) - 2018 = ax^4 + bx^2 + c - 2018$.

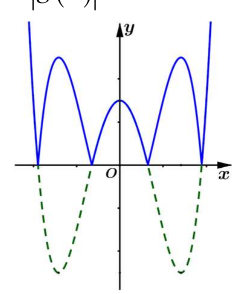
Ta có $\begin{cases} a > 0 \\ c > 2018 \\ a + b + c < 2018 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c > 2018 \end{cases} \Rightarrow a.b < 0 \Rightarrow$ hàm số $y = g(x)$ là hàm trùng phương có 3 điểm cực trị.

Mà $g(0) = c - 2018 \Rightarrow g(0) > 0$, $g(1) = a + b + c - 2018 < 0 \Rightarrow g(x_{CT}) \le g(1) < 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có dáng điệu như sau



Từ đồ thị $y = g(x)$, ta giữ nguyên phần phía trên trục Ox, phần dưới trục Ox ta lấy đối xứng qua trục Ox, ta được đồ thị hàm số $y = |g(x)|$.



Từ đó ta nhận thấy đồ thị $y = |g(x)|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 31: Chọn D

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1} - m$, TXĐ: $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $y=g(x)$ luôn có hai điểm cực trị.

Xét phương trình $g(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2+1}-m=0 \Leftrightarrow mx^2-x+m=0$, phương trình này có nhiều nhất hai nghiệm.

Vậy hàm số $f(x)$ có nhiều nhất bốn điểm cực trị.

Câu 32: Chọn B

Từ giả thiết, ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Ta có $g(x)=f(3-x) \Rightarrow g'(x)=-f'(3-x)$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có

$$g'(x)\ge 0 \Leftrightarrow f'(3-x)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x\le -1 \\ 1\le 3-x\le 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 4 \\ -1\le x\le 2 \end{array}\right..$$

Như thế ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy hàm số $g(x)$ có một điểm cực đại.

Câu 33: Chọn D

Có $y'=-(12x^3-24x).f'(-x^4+4x^2-6)+12x^5-12x^3-24x$

$= -12x(x^2-2).f'(-x^4+4x^2-6)+12x\left(x^4-x^2-2\right)$

$= -12x(x^2-2).\left(f'(-x^4+4x^2-6)-\left(x^2+1\right)\right)$.

Khi đó $y'=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ f'(-x^4+4x^2-6)-(x^2+1)=0 \\ x^2-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \\ f'(-x^4+4x^2-6)=x^2+1 \end{array}\right.$.

Ta có $-x^4+4x^2-6=-(x^2-2)^2-2 \le -2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $f'(-x^4+4x^2-6) \le f'\left(-2\right)=0, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Mà $x^2+1 \ge 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó phương trình $f'(-x^4+4x^2-6)=x^2+1$ vô nghiệm.

Hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có 2 điểm cực tiểu.