

Chuyên đề 13. BIẾN ĐỔI CÁC PHÂN THỨC HỮU TỈ

A. Kiến thức cần nhớ

- Một biểu thức là một phân thức hoặc biểu thị một dãy phép toán cộng, trừ, nhân, chia trên những phân thức gọi là biểu thức hữu tỉ.
- Nhờ các quy tắc của các phép toán cộng, trừ, nhân, chia các phân thức ta có thể biến đổi biểu thức hữu tỉ thành một phân thức.
- Điều kiện của biến để giá trị tương ứng của mẫu thức khác 0 là điều kiện để giá trị của phân thức được xác định.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức:
$$A = x - 3 + \frac{6 - x}{2} - \frac{x - 3 + x}{4}$$

Giải

Tìm cách giải. Đối với những biểu thức phức tạp, nhiều tầng lớp phân thức, chúng ta nên biến đổi dần dần ở tử thức của từng phân thức trước. Sau đó được biểu thức đơn giản hơn, rồi rút gọn tiếp.

Trình bày lời giải

Ta có:
$$\begin{aligned} A &= x - 3 + \frac{6 - x}{2} - \frac{x - 3 + x}{4} \\ &= x - 3 + \frac{3 - 6 + x}{4} - \frac{2x - 3 - x}{8} \\ &= x - 3 + \frac{x - 3}{12} - \frac{x - 3}{8} = (x - 3) \left(1 + \frac{1}{12} - \frac{1}{8} \right) = \frac{23x - 69}{24} \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Cho biểu thức

$$A = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} - \frac{x(4x - 1)}{x^7 + 6x^6 - x} - \frac{x^2 + 29x + 78}{3x^2 + 12x - 36}$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho A có giá trị nguyên.

Giải

Tìm cách giải. Những biểu thức có nhiều ngoặc, chúng ta thực hiện trong ngoặc tròn trước, sau đó thực hiện đến ngoặc vuông. Khi thực hiện chúng ta nên rút gọn biểu thức nếu có thể nhằm đưa về những phân thức đơn giản hơn.

Trình bày lời giải

a) Ta có

$$A = \frac{x^6 + x^4 - x^4 - 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{x^3 - 4x^2 + x - 4}{(x + 6)(x^6 - 1)} - \frac{(x + 3)(x + 26)}{3(x + 6)(x - 2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^6 - 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{(x-4)(x^2+1)3(x+6)(x-2)}{(x+6)(x^6-1)(x+3)(x+26)} \\
&= \frac{x-4}{x+6} \cdot \frac{3(x+6)(x-2)}{(x+3)(x+26)} \\
&= \frac{3x+18-2x+8}{2(x+6)} \cdot \frac{3(x+6)(x-2)}{(x+3)(x+26)} \\
&= \frac{x+26}{2(x+6)} \cdot \frac{3(x+6)(x-2)}{(x+3)(x+26)} = \frac{3x-6}{2(x+6)} = \frac{3x-6}{2x+6}
\end{aligned}$$

b) Tập xác định $x \in \{1; -3; -6; -26\}$

$$A \cap Z \cap 2A = \frac{6x-12}{2x+6} = \frac{3x-6}{x+3} = 3 - \frac{15}{x+3} \in Z$$

Suy ra các trường hợp sau:

$x+3$	1	-1	3	-3	5	-5	15	-15
x	-2	-4	0	-6	2	-8	12	-18

So sánh với tập xác định và thử lại thì $x \in \{-2; -4; 0; -8; 12; -18\}$ thì $A \cap Z$

Ví dụ 3. Cho biểu thức $M = \frac{a^2 + a - 2}{a^{n+1} - 3a^n} \cdot \frac{(a+2)^2 - a^2}{4a^2 - 4} - \frac{3}{a^2 - a}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

a) Rút gọn M.

b) Với $a > 2$. Chứng minh rằng: $0 < M < 1$

Giải

$$\begin{aligned}
\text{a) Ta có: } M &= \frac{(a-1)(a+2)}{a^n(a-3)} \cdot \frac{4a+4}{4(a+1)(a-1)} - \frac{3}{a(a-1)} \\
&= \frac{(a-1)(a+2)}{a^n(a-3)} \cdot \frac{4a}{4a(a-1)} - \frac{12}{4a(a-1)} \\
&= \frac{(a-1)(a+2)}{a^n(a-3)} \cdot \frac{a-3}{a(a-1)} = \frac{a+2}{a^{n+1}}
\end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có: } M = \frac{a+2}{a^{n+1}} < \frac{a+a}{a^{n+1}} \text{ (vì } a < 2) \Rightarrow M < \frac{2a}{a^{n+1}} = \frac{2}{a^n} < \frac{2}{2^n} < 1$$

mặt khác: $a+2 > 0; a^{n+1} > 0 \Rightarrow M > 0$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

$$\text{Ví dụ 4. Rút gọn biểu thức } P = \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1}{\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{1}{xy}} - \frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}$$

Giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } P &= \frac{\frac{x^2+y^2+xy}{xy} \cdot \frac{x-y}{x^2-y^2}}{\frac{x^2+y^2}{y^2} + \frac{y^2+x^2}{x^2} - \frac{x^2+y^2}{xy}} \\
 &= \frac{x^2+xy+y^2}{xy} \cdot \frac{(x-y)^2}{x^2y^2} \cdot \frac{x^4+y^4-(x^2+y^2)xy}{x^2y^2} \\
 &= \frac{x^2+xy+y^2}{xy} \cdot \frac{(x-y)^2}{x^2y^2} \cdot \frac{x^4+y^4-x^3y-y^3x}{x^2y^2} \\
 &= \frac{x^2+xy+y^2}{xy} \cdot \frac{(x-y)^2}{x^2y^2} \cdot \frac{x^2y^2}{(x-y)(x^3-y^3)} \\
 &= \frac{x^2+xy+y^2}{xy} \cdot \frac{(x-y)^2}{x^2y^2} \cdot \frac{x^2y^2}{(x-y)^2(x^2+xy+y^2)} = \frac{1}{xy}
 \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Giả sử x, y, z là các số thực khác không, thỏa mãn hệ đẳng thức:

$$\begin{cases}
 x\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + y\frac{1}{z} + \frac{1}{x} + z\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -2 \\
 x^3 + y^3 + z^3 = 1
 \end{cases}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

(Tuyển sinh lớp 10, Trường THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội,
năm học 2001 – 2002)

Giải

Tìm cách giải. Bài toán này thuộc dạng tính giá trị biết điều kiện của biến số. Quan sát, nhận thấy bài toán có hai điều kiện nhưng có ba biến số (số biến nhiều hơn số điều kiện). Do điều kiện hai đơn giản, không phân tích tiếp được. Với điều kiện thứ nhất, chúng ta biến đổi và nhận thấy phân tích thành nhân tử được, tìm được mối quan hệ giữa hai trong ba biến. Từ đó tìm được cách giải sau.

Trình bày lời giải.

$$\text{Từ đẳng thức: } x\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + y\frac{1}{z} + \frac{1}{x} + z\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -2$$

$$\text{Ta có: } 2xyz + x^2z + x^2y + y^2z + z^2y + z^2x = 0$$

$$\hat{U} \quad (xyz + x^2z) + (xyz + y^2z) + (x^2y + y^2x) + (z^2x + z^2y) = 0$$

$$\hat{U} \quad (x+y)(y+z)(z+x) = 0 \hat{U} \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+x=0 \end{cases}$$

Không mất tổng quát, giả sử $x+y=0 \Rightarrow x^3+y^3=0$

Từ $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ thì $z^3 = 1 \Rightarrow z = 1$

$$\text{Vậy } P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{x+y}{xy} + \frac{1}{1} = 0 + 1 = 1$$

C. Bài tập vận dụng

13.1. Rút gọn

$$A = \frac{a^3 - 8}{0,5a + 10} + \frac{2}{2a - a^2}$$

13.2. Rút gọn biểu thức:

$$a) A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{1 + \frac{a}{b+c}}{1 - \frac{a}{b+c}} \cdot \frac{b^2 + c^2 - (b-c)^2}{a+b+c}$$

$$b) B = \frac{y^2 - yz + z^2}{x} + \frac{x^2}{y+z} - \frac{3}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \cdot \frac{\frac{2}{y} + \frac{2}{z}}{\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz}} + (x+y+z)^2$$

$$13.3. \text{ Cho } A = \frac{a}{a^3 - 3} + \frac{3}{x^2 - 3x} \cdot \frac{x^2}{27 - 3x^2} + \frac{1}{x+3}$$

a) Rút gọn A

b) Tìm x để $A < -1$

$$13.4. \text{ Cho biểu thức } M = \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 - 3x} \cdot \frac{(x+2)^2 - x^2}{4x^2 - 4} - \frac{3}{x^2 - x}$$

Rút gọn biểu thức M và tính giá trị của x khi $M = 3$

$$13.5. \text{ Cho biểu thức: } A = \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2 - x} + \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x}{x-2} + \frac{10 - x^2}{x+2}$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của A. Biết $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

d) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

$$13.6. \text{ Cho } Q = \frac{12x - 45}{x^2 - 7x + 12} - \frac{x+5}{x-4} + \frac{2x+3}{3-x}$$

a) Rút gọn biểu thức Q.

b) Tính giá trị Q tại $|x| = 3$

c) Tìm giá trị nguyên của x để Q nhận giá trị nguyên.

13.7. Cho x, y là hai số thay đổi luôn thỏa mãn điều kiện: $x > 0, y < 0$ và $x + y = 1$.

a) Rút gọn biểu thức:
$$A = \frac{y-x}{xy} \cdot \frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{2x^2y}{(x^2-y^2)^2} + \frac{x^2}{y^2-x^2}$$

b) Chứng minh rằng: $A = -4$

13.8. Cho x, y, z thỏa mãn $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ và $xyz = 1$

Tính giá trị $M = \frac{x^6 + y^6 + z^6}{x^3 + y^3 + z^3}$

13.9. Cho $a \in \{0; 1\}$ và $x_1 = \frac{a-1}{a+2}; x_2 = \frac{x_1-1}{x_1+1}; x_3 = \frac{x_2-1}{x_2+1}; \dots$

Tìm a nếu $x_{2020} = 3$

13.10. Cho
$$M = \frac{x + \frac{1}{x} - x^6 + \frac{1}{x^6}}{x + \frac{1}{x} + x^3 + \frac{1}{x^3}}$$

a) Rút gọn M .

b) Cho $x > 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của M .

13.11. Cho biểu thức
$$A = \frac{1-x^3}{1-x} + \frac{1+x^3}{1+x} - \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2}$$

Chứng tỏ rằng biểu thức A dương với mọi $x^2 \neq 1$

13.12. Cho
$$P = \frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2} + \frac{2}{xy} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x-y}$$

Và
$$Q = \frac{1}{x+y} + \frac{2xy}{(x^2-y^2)(x+y)} + \frac{3}{x^2-2x+2}$$

Với giá trị nào của $x; y$ thì $P - Q$ đạt giá trị nhỏ nhất.

13.13. Rút gọn
$$A = 2 \left| \frac{y-x}{xy} \right| + \left| \frac{y+x}{xy} - \frac{2}{z} \right| + \frac{y+x}{xy} + \frac{2}{z}$$
 trong đó $x > 5$ và

$$y = \frac{x^2-25}{x + \frac{10x+25}{x}}; z = \frac{x^2-25}{x + \frac{15x+25}{x-5}}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

13.1. Ta có:
$$A = \frac{1}{a} + \frac{2}{0,5a+1} \cdot \frac{a^3-8}{a+2} + \frac{2}{2a-a^2} (a^2 \neq 0)$$

$$A = \frac{a^2+2a}{a+2} + \frac{4}{a+2} \cdot \frac{(a-2)(a^2+2a+4)}{a+2} - \frac{2}{a(a-2)}$$

$$= \frac{a^2 + 2a + 4}{a + 2} : \frac{(a - 2)(a^2 + 2a + 4)}{a + 2} - \frac{2}{a(a - 2)}$$

$$= \frac{1}{a - 2} - \frac{2}{a(a - 2)} = \frac{a - 2}{a(a - 2)} = \frac{1}{a}$$

13.2.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{b+c+a}{b+c-a} \cdot \frac{b^2+c^2 - b^2+2bc - c^2}{a+b+c} \\ &= \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc} \cdot \frac{b+c+a}{b+c-a} \cdot \frac{2bc}{a+b+c} = a+b+c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{y^2 - yz + z^2}{x} + \frac{x^2}{y+z} - \frac{3yz}{y+z} \cdot \frac{2(x+y)}{x+y+z} + (x+y+z)^2 \\ &= \frac{(y+z)(y^2 - yz + z^2) + x^3 - 3xy \cdot 2x(x+y)}{x(y+z)} + (x+y+z)^2 \\ &= \frac{y^3 + z^3 + x^3 - 3xyz}{1} \cdot \frac{2}{x+y+z} + (x+y+z)^2 \\ &= \frac{(x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \cdot 2}{(x+y+z)} + (x+y+z)^2 \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx + x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \\ &= 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 \end{aligned}$$

13.3.

$$\text{a) Ta có } A = \frac{1}{x^2 - 3x + 9} + \frac{3}{x^2 - 3x + 9} \cdot \frac{x^2}{27 - 3x^2} + \frac{1}{x + 3}$$

$$= \frac{x^2 - 3x + 9}{3x(x-3)} + \frac{x^2}{3(x-3)(x+3)} + \frac{3x-9}{3(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{x^2 - 3x + 9}{3x(x-3)} + \frac{x^2 + 3x - 9}{3(x-3)(x+3)} = \frac{x-3}{x}$$

$$\text{b) } A < -1 \hat{=} A + 1 < 0 \hat{=} \frac{x-3}{x} + 1 < 0 \hat{=} \frac{-3}{x} < 0 \hat{=} x > 0$$

vậy $x > 0; x \neq 3$ thì $A < -1$

13.4.

$$\text{Ta có: } M = \frac{x^2(x+2) - (x+2)}{x^2(x+1) - 3x(x+1)} \cdot \frac{x-3}{x(x-1)} \cdot \text{TXĐ } x \in \{0; 1; -1\}$$

$$= \frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{x(x-3)(x+1)} = \frac{x-3}{x} = \frac{x+2}{x^2}$$

$$M = \frac{x+2}{x^2} = 3 \Leftrightarrow 3x^2 = x+2 \Leftrightarrow (3x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = -\frac{2}{3} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

13.5.

a) Ta có: $A = \frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2} = \frac{x}{(x-2)(x+2)} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2}$

$$A = \frac{x}{(x-2)(x+2)} - \frac{2(x+2)}{(x-2)(x+2)} + \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2-4}{(x-2)(x+2)} + \frac{10-x^2}{(x-2)(x+2)}$$

$$A = \frac{x^2-4+10-x^2}{(x-2)(x+2)} = \frac{6}{(x-2)(x+2)}$$

$$A = \frac{6}{(x-2)(x+2)} : \frac{6}{x+2} = \frac{1}{x-2}$$

b) $|x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -\frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

với $x = \frac{1}{2}$ thì $A = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$

với $x = -\frac{1}{2}$ thì $A = \frac{1}{2,5} = \frac{2}{5}$

c) $A < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} < 0 \Leftrightarrow x > 2$

Vậy với $x > 2$ thì $A < 0$

d) $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-2 \in \{\pm 1\} \Leftrightarrow x \in \{3, 1\}$

Vậy với $x \in \{3, 1\}$ thì $A \in \mathbb{Z}$

13.6.

a) TXĐ: $x \neq 3; x \neq 4$

Ta có: $Q = \frac{12x-45}{(x-3)(x-4)} - \frac{x+5}{x-4} - \frac{2x+3}{x-3}$

$$= \frac{12x-45 - (x+5)(x-3) - (2x+3)(x-4)}{(x-3)(x-4)}$$

$$= \frac{12x-45 - x^2+3x-5x+15 - 2x^2+8x-3x+12}{(x-3)(x-4)}$$

$$= \frac{-3x^2 + 15x - 18}{(x-3)(x-4)} = \frac{-3(x-2)(x-3)}{(x-3)(x-4)} = \frac{-3(x-2)}{x-4}$$

$$b) |x| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

$x = 3$ (loại)

$$\text{Với } x = -3 \text{ thì } Q = \frac{-15}{7}$$

$$c) Q = \frac{-3x+6}{(x-4)} = -3 - \frac{6}{x-4}$$

$$Q \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{6}{x-4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-4 \mid 6$$

$$\text{Mà } U(6) = \{1; 2; 3; 6; -1; -2; -3; -6\}$$

$x-4$	1	2	3	6	-1	-2	-3	-6
x	5	6	7	10	3	2	1	-2

Kết hợp với tập xác định, ta có:

$x \in \{-2; 1; 2; 5; 6; 7; 10\}$ thì Q nhận giá trị nguyên.

13.7.

a) Do $x+y=1$ suy ra $(x-y)^2 = (x-y)^2$ và $y^2 - x^2 = -(x-y)$

$$\begin{aligned} \text{suy ra: } A &= \frac{y-x}{xy} \cdot \frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{2x^2y}{(x^2-y^2)^2} + \frac{x^2}{y^2-x^2} \\ &= \frac{y-x}{xy} \cdot \frac{y^2-2x^2y-x^2(x-y)}{(x-y)^2} = \frac{y-x}{xy} \cdot \frac{y^2-2x^2y-x^3+x^2y}{(x-y)^2} \\ &= \frac{y-x}{xy} \cdot \frac{y^2-x^3-x^2y}{(x-y)^2} = \frac{y-x}{xy} \cdot \frac{y^2-x^2(x+y)}{(x-y)^2} \\ &= \frac{y-x}{xy} \cdot \frac{y^2-x^2}{(x-y)^2} = \frac{y-x}{xy} \cdot \frac{(x-y)^2}{y-x} = \frac{(x-y)^2}{xy} \end{aligned}$$

$$b) \text{ Ta có: } A = \frac{(x+y)^2 - 4xy}{xy} = \frac{(x+y)^2}{xy} - 4 = \frac{1}{xy} - 4 < -4 \text{ vì theo giả thiết } x > 0, y < 0$$

$$\mathbf{13.8.} \text{ Ta có: } x+y+z=0 \Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz=3$$

$$xy+yz+zx=0 \Rightarrow x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3=3xy \cdot yz \cdot zx=3$$

$$x^6+y^6+z^6 = (x^3+y^3+z^3)^2 - 2x^3y^3 - 2y^3z^3 - 2z^3x^3 = 0 - 2 \cdot 3 = -3$$

Vậy $M = 1$

13.9. Ta có: $x_2 = \frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} = \frac{-3}{2a+1}$; $x_3 = \frac{-2a-4}{2a-2} = \frac{-a-2}{a-1}$;

$$x_4 = \frac{-a-2-a+1}{-3} = \frac{2a+1}{3}; x_5 = \frac{a-1}{a+2}$$

Vậy $x_k = x_{k+4} = x_{k+8} = \dots$

$$x_{2020} = x_4 = 3 \Rightarrow \frac{2a+1}{3} = 3$$

Vậy $a = 4$

13.10.

a) Ta có:

$$M = \frac{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \frac{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^3} = 3x + \frac{3}{x}$$

b) $M = 3x + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{3x \cdot \frac{3}{x}} = 6$

dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 6 khi $x = 1$.

13.11. Ta có

$$A = \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x} + x \cdot \frac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x} - x^2 \cdot \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2}$$

$$= (1+x+x^2+x)(1-x+x^2-x) \cdot \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2}$$

$$= (1+x)^2(1-x)^2 \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} = (1-x^2)^2 \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} = 1+x^2$$

Vì $x^2 \geq 0$ do đó $A = 1+x^2 > 0$ với mọi $x \neq \pm 1$

13.12.

Ta có: $P = \frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)^2} + \frac{2}{xy} \cdot \frac{(x+y)^2}{x^2y^2} \cdot \frac{1}{x-y}$

$$P = \frac{x-y}{x+y} + \frac{2}{xy} \cdot \frac{x^2y^2}{(x+y)^2} \cdot \frac{1}{x-y} = \frac{x-y}{x+y} + \frac{2xy}{(x+y)^2} \cdot \frac{1}{x-y}$$

$$P = \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{1}{x-y} + \frac{2xy}{(x+y)^2} \cdot \frac{1}{x-y} = \frac{1}{x+y} + \frac{2xy}{(x^2-y^2)(x+y)}$$

$$\text{Suy ra } P - Q = -\frac{3}{x^2 - 2x + 2} = \frac{-3}{(x-1)^2 + 1}^3 - 3$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P - Q$ là -3 khi $x = 1$; y tùy ý khác $\{1; 0; -1\}$

$$\text{13.13. Ta có } y = \frac{(x-5)(x+5)}{x+10x+5} = \frac{x(x-5)(x+5)}{(x+5)^2} = \frac{x(x-5)}{(x+5)}$$

$$z = \frac{(x-5)(x+5)}{x^2 - 5x + 15x + 25} = \frac{(x-5)^2(x+5)}{(x+5)^2} = \frac{(x-5)^2}{x+5}$$

$$\text{Từ đó suy ra: } xy = \frac{x^2(x-5)}{x+5}$$

$$y - x = \frac{x^2 - 5x}{x+5} - x = \frac{x^2 - 5x - x^2 - 5x}{x+5} = \frac{-10x}{x+5}$$

$$\text{p } \frac{y-x}{xy} = \frac{-10x}{x+5} : \frac{x^2(x-5)}{x+5} = \frac{-10x}{x+5} \cdot \frac{x+5}{x^2(x-5)} = \frac{-10}{x(x-5)}$$

$$y + x = \frac{x^2 - 5x}{x+5} + x = \frac{x^2 - 5x + x^2 + 5x}{x+5} = \frac{2x^2}{x+5}$$

$$\text{p } \frac{y+x}{xy} = \frac{2x^2}{x+5} : \frac{x^2(x-5)}{x+5} = \frac{2x^2}{x+5} \cdot \frac{x+5}{x^2(x-5)} = \frac{2}{x-5}$$

$$\text{Do vậy } A = 2 \left| \frac{-10}{x(x-5)} \right| + \left| \frac{2}{x-5} - \frac{2(x+5)}{(x-5)^2} \right| + \frac{2}{x-5} + \frac{2(x+5)}{(x-5)^2}$$

$$= 2 \frac{10}{x(x-5)} + \left| \frac{2(x-5) - 2(x+5)}{(x-5)^2} \right| + \frac{2(x-5) + 2(x+5)}{(x-5)^2}$$

$$= \frac{20}{x(x-5)} + \left| \frac{-20}{(x-5)^2} \right| + \frac{4x}{(x-5)^2} = \frac{20}{x(x-5)} + \frac{20}{(x-5)^2} + \frac{4x}{(x-5)^2}$$

$$= \frac{20(x-5) + 20x + 4x^2}{x(x-5)^2} = \frac{4x^2 + 40x - 100}{x(x-5)^2}$$