

SỞ GD&ĐT THANH HOÁ
KHỐI TRƯỜNG THPT HUYỆN
HOÀNG HÓA

ĐỀ KHẢO SÁT ĐỘI TUYỂN HSG TỈNH
NĂM HỌC 2024 – 2025

Môn thi: Toán

Thời gian: 90 phút (Không kể thời gian phát đề)

Ngày thi: 19/9/2024

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT MỘT SỐ CÂU VD

Thang điểm:

Phần I. TN: 26 câu x 0,4 đ

Phần II. Đ-S: 6 câu; Đúng 1 ý được 0,2 điểm; đúng 2 ý được 0,4 điểm; đúng 3 ý được 0,7 điểm; đúng 4 ý được 1,1 điểm.

Phần III. TLN: 6 câu x 0,5đ

PHẦN I. Câu trả lời trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 26. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

1A	2D	3C	4D	5A	6B	7D	8D	9C	10A	11B	12B	13D
14A	15B	16D	17C	18C	19A	20C	21B	22B	23A	24C	25D	26B

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 27 đến câu 31. Trong mỗi ý a),b),c),d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 27	Câu 28	Câu 29	Câu 30	Câu 31	Câu 32
a)S	a)S	a)S	a)Đ	a)Đ	a)Đ
b)Đ	b)Đ	b)S	b)Đ	b)Đ	b)Đ
c)Đ	c)Đ	c)Đ	c)Đ	c)S	c)S
d)S	d)S	d)S	d)S	d)Đ	d)S

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 32 đến câu 37, đáp số là số nguyên hoặc số thập phân có không quá 4 kí tự kể cả dấu “-” và dấu “,”.

Câu 33: 0,45

Câu 34: 108

Câu 35: 2005

Câu 36: 621

Câu 37: 5,06

Câu 38: 13

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 26. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 22: Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC . Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$

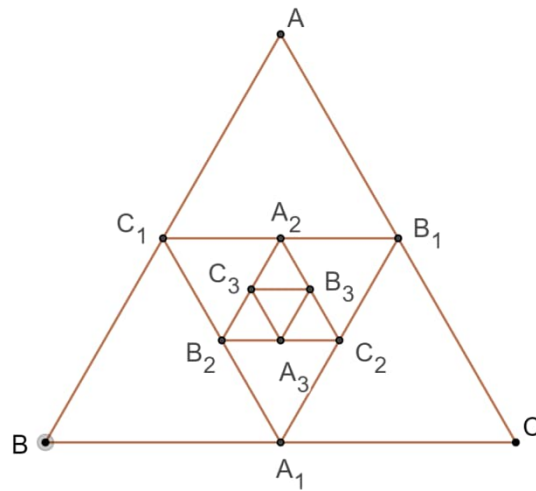
A. $S = \frac{15\pi}{4}$.

B. $S = 4\pi$.

C. $S = \frac{9\pi}{2}$.

D. $S = 5\pi$.

Lời giải



Vì dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ là các tam giác đều nên bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác bằng $\text{cạnh} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Với $n = 1$ thì tam giác đều $A_1B_1C_1$ có cạnh bằng 3 nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ có bán kính $R_1 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_1 = \pi \left(3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2$.

Với $n = 2$ thì tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng $\frac{3}{2}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ có bán kính $R_2 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_2 = \pi \left(3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{1}{4} \cdot S_1$.

$$S_3 = \frac{1}{4^2} \cdot S_1$$

...

$$S_n = \frac{1}{4^{n-1}} \cdot S_1$$

$$\Rightarrow S = S_1 + S_2 + \dots + S_n = S_1 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}}\right)$$

$$= \pi \left(3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{\frac{3}{4}} = 4\pi \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$$

$$\Rightarrow \lim S = \lim 4\pi \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) = 4\pi$$

Câu 25: Một nhóm gồm 5 bạn nam, 4 bạn nữ và thầy giáo đứng thành 2 hàng, mỗi hàng 5 người để chụp ảnh kỉ niệm. Xác suất để khi đứng, thầy giáo xen giữa hai bạn nam đồng thời các bạn nữ không đứng cạnh nhau trong cùng một hàng bằng

A. $\frac{1}{35}$.

B. $\frac{1}{105}$.

C. $\frac{1}{70}$.

D. $\frac{2}{105}$.

Lời giải

*) Ta có: $|\Omega| = 10!$.

*) Chọn hàng cho thầy giáo, có 2 cách chọn.

*) Đối với hàng có thầy giáo, có 2 cách xếp như sau:

+) TH1: Trong hàng thầy giáo có 2 nam, 2 nữ.

Vì thầy giáo xen giữa hai bạn nam nên xếp 2 bạn nam đứng hai bên thầy giáo, có: A_5^2 cách.

Vì các bạn nữ không đứng cạnh nhau trong cùng một hàng nên ta xếp hai bạn nữ đứng ở hai đầu hàng, có A_4^2 cách xếp.

Hàng còn lại gồm 3 bạn nam và 2 bạn nữ còn lại.

Ta xếp 3 bạn nam, có $3!$ cách, tạo ra 4 vị trí giữa các bạn.

Xếp 2 bạn nữ vào 2 trong 4 vị trí đó, có: A_4^2 cách xếp.

Do đó, trường hợp này có: $A_5^2 \cdot A_4^2 \cdot 3! \cdot A_4^2$ cách xếp.

+) TH2: Trong hàng thầy giáo có 3 nam, 1 nữ.

Xếp 1 bạn nam, 1 bạn nữ và thầy giáo thành một hàng, có $C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot 3!$.

Xếp hai bạn nam trong 4 bạn nam còn lại đứng hai bên thầy giáo, có A_4^2 cách.

Hàng còn lại gồm 3 bạn nữ và 2 bạn nam còn lại.

Ta xếp 3 bạn nữ, có $3!$ cách, tạo ra 2 vị trí xen giữa các bạn.

Xếp 2 bạn nam vào 2 vị trí đó, có: $2!$ cách xếp.

Do đó, trường hợp này có: $C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot 3! \cdot A_4^2 \cdot 3! \cdot 2!$ cách xếp.

$$\text{Vậy xác suất cần tính là: } \frac{2(A_5^2 \cdot A_4^2 \cdot 3! \cdot A_4^2 + C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot 3! \cdot A_4^2 \cdot 3! \cdot 2!)}{10!} = \frac{2}{105}$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 5. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 30: Cho phương trình $\left(\log_3 \left(\frac{x}{3}\right)\right)^2 + 3m \log_3 x + 2m^2 - 2m - 1 = 0$, (m là tham số). Các mệnh đề sau

đúng hay sai?

a) Điều kiện xác định của phương trình là $x > 0$.

b) Khi $m = 0$, phương trình nhận $x = 1$ làm nghiệm.

c) Đặt $t = \log_3 x$ phương trình đã cho trở thành $t^2 + (3m - 2)t + 2m^2 - 2m = 0$.

- d) Có 2025 giá trị nguyên của tham số m lớn hơn -2025 thỏa mãn phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và $x_1 + x_2 > 10$.

Lời giải

a) Phương trình $\left(\log_3\left(\frac{x}{3}\right)\right)^2 + 3m\log_3 x + 2m^2 - 2m - 1 = 0$, (m là tham số).

Điều kiện xác định $x > 0$.

Suy ra **a) đúng**.

b) Khi $m = 0$, ta có phương trình $\left(\log_3\left(\frac{x}{3}\right)\right)^2 - 1 = 0$

Thay $x = 1$ vào phương trình trên thấy thỏa mãn $\left(\log_3\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2 - 1 = 0$.

Suy ra **b) đúng**.

c) $\left(\log_3\left(\frac{x}{3}\right)\right)^2 + 3m\log_3 x + 2m^2 - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow (\log_3 x - 1)^2 + 3m\log_3 x + 2m^2 - 2m - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow (\log_3 x)^2 + (3m - 2)\log_3 x + 2m^2 - 2m = 0$

Đặt $t = \log_3 x$ phương trình đã cho trở thành $t^2 + (3m - 2)t + 2m^2 - 2m = 0$.

Suy ra **c) đúng**.

d) $\left(\log_3\left(\frac{x}{3}\right)\right)^2 + 3m\log_3 x + 2m^2 - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow (\log_3 x - 1)^2 + 3m\log_3 x + 2m^2 - 2m - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow (\log_3 x)^2 + (3m - 2)\log_3 x + 2m^2 - 2m = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 2 - 2m \\ \log_3 x = -m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3^{2-2m} \\ x = 3^{-m} \end{cases}.$$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 > 10$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2 - 2m \neq -m \\ 3^{2-2m} + 3^{-m} > 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ 9 \cdot (3^{-m})^2 + 3^{-m} - 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ \begin{cases} 3^{-m} < -\frac{10}{9} \\ 3^{-m} > 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ 3^m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Kết hợp với m nguyên, m lớn hơn -2025 ta được tập hợp các giá trị của m là

$$S = \{m \in \mathbb{Z} \mid -2024 \leq m \leq -1\}.$$

Vậy có 2024 giá trị của m thỏa mãn đề bài. Suy ra **d) sai**.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O và $AB = a$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SB tạo với đáy góc 60° . Vẽ các đường cao AH của tam giác SAB , AK của tam giác SAD và AE của tam giác SAO . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

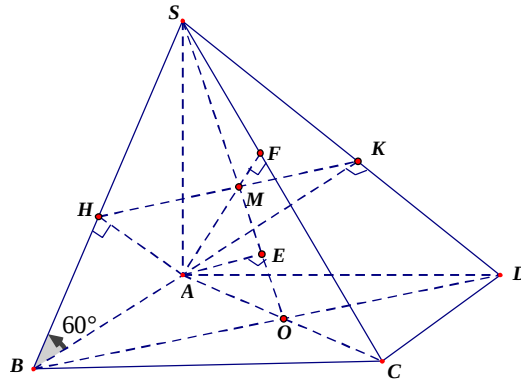
a) $AB \parallel (SCD)$.

b) $AE \perp (SBD)$.

c) Thể tích khối chóp $S.ABO$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

d) Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (AHK) bằng $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải



a) Đúng

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AB \parallel CD$, $CD \subset (SCD)$ nên: $AB \parallel (SCD)$.

b) Đúng

Có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC), AE \subset (SAC) \Rightarrow BD \perp AE$

Và $AE \perp SO$ nên: $AE \perp (SBD)$.

c) Sai

$$S_{ABO} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{a^2}{4}$$

Góc giữa SB và mặt phẳng đáy là $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

$$SA = \tan 60^\circ \cdot AB = a\sqrt{3}$$

$$V_{SAOB} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABO} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

d) Đúng

Có: $AH \perp SB$, $AH \perp BC$ (Do $BC \perp (SAB)$) nên: $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$

Tương tự: $AK \perp SC$, suy ra: $SC \perp (AHK)$

Gọi $M = SO \cap HK$, $F = AM \cap SC$

Khi đó: $CF \perp (AHK)$ nên: $d(C, (AHK)) = CF$

$$\text{Xét: } \triangle SAC \text{ có: } SC = a\sqrt{5}, AF = \frac{SA \cdot AC}{SC} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$$

$$FC = \sqrt{AC^2 - AF^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{6a^2}{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Vậy: } d(C, (AHK)) = CF = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 33. Ba cầu thủ An, Bình, Vui sút phạt đền 11m, mỗi người đá một lần với xác suất ghi bàn lần lượt là x, y và $0,6$ (với $x > y$). Biết xác suất để ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn là $0,976$ và xác suất để cả 3 cầu thủ đều ghi bàn là $0,336$. Tính xác suất để có đúng hai cầu thủ ghi bàn (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp án: 0,45

Giải thích

Gọi A_i là biến cố “người thứ i ghi bàn” với $i = 1, 2, 3$.

Ta có các A_i độc lập với nhau và $P(A_1) = x, P(A_2) = y, P(A_3) = 0,6$.

Gọi A là biến cố: “Có ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn”

B: “Cả ba cầu thủ đều ghi bàn”

C: “Có đúng hai cầu thủ ghi bàn”

Ta có: $\overline{A} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \Rightarrow P(\overline{A}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 0,4(1-x)(1-y)$

Nên $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,4(1-x)(1-y) = 0,976$

Suy ra $(1-x)(1-y) = \frac{3}{50} \Leftrightarrow xy - x - y = -\frac{47}{50}$ (1).

Tương tự: $B = A_1.A_2.A_3$, suy ra:

$$P(B) = P(A_1).P(A_2).P(A_3) = 0,6xy = 0,336$$

hay là $xy = \frac{14}{25}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} xy = \frac{14}{25} \\ x + y = \frac{3}{2} \end{cases}$, giải hệ này kết hợp với $x > y$ ta tìm được

$x = 0,8$ và $y = 0,7$.

Ta có: $C = \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \bar{A}_3$

Nên $P(C) = (1-x)y.0,6 + x(1-y).0,6 + xy.0,4 = 0,452$.

Câu 35: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^5}{5} - x^2 + (m-1)x - 4029$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = |f(x-1) + 2023|$ nghịch biến trên $(-\infty; 2)$?

Lời giải

Đáp án: 2005

Đặt $h(x) = f(x-1) + 2023$.

★ Trường hợp 1

$$\begin{cases} h(2) \leq 0 \\ h'(x) \geq 0 \end{cases} \forall x \in (-\infty; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) + 2023 \leq 0 \quad (1) \\ f'(x-1) \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty; 2) \quad (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{10039}{5} \quad (1) \\ (x-1)^4 - 2(x-1) + m - 1 \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty; 2) \quad (2) \end{cases}$$

Đặt $t = x-1$, $t \in (-\infty; 1)$, khi đó ta có $(2) \Leftrightarrow t^4 - 2t + m - 1 \geq 0 \quad \forall t \in (-\infty; 1)$

$$\Leftrightarrow -t^4 + 2t + 1 \leq m \quad \forall t \in (-\infty; 1)$$

Đặt $g(t) = -t^4 + 2t + 1 \Rightarrow g'(t) = -4t^3 + 2$.

Xét $g'(t) = 0 \Leftrightarrow -4t^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Nên $\Leftrightarrow g\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \leq m \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2\sqrt[3]{2}} + 1$

Từ và suy ra $\frac{3}{2\sqrt[3]{2}} + 1 \leq m \leq \frac{10039}{5}$

★ Trường hợp 2

$$\begin{cases} h(2) \geq 0 \\ h'(x) \leq 0 \end{cases} \forall x \in (-\infty; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) + 2023 \geq 0 \quad (1) \\ f'(x-1) \leq 0 \quad \forall x \in (-\infty; 2) \quad (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{10039}{5} \quad (1) \\ (x-1)^4 - 2(x-1) + m - 1 \leq 0 \quad \forall x \in (-\infty; 2) \quad (2) \end{cases}$$

Đặt $t = x-1$, $t \in (-\infty; 1)$, khi đó ta có $(2) \Leftrightarrow t^4 - 2t + m - 1 \leq 0 \quad \forall t \in (-\infty; 1)$

$$\Leftrightarrow -t^4 + 2t + 1 \geq m \quad \forall t \in (-\infty; 1) \text{ Không tồn tại giá trị } m$$

Vậy: $\frac{3}{2\sqrt[3]{2}} + 1 \leq m \leq \frac{10039}{5}$, mà $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2005 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 36: Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $0 < (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 \leq 18$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 4^{\frac{x}{3}} + 4^{\frac{y}{3}} + 4^{\frac{z}{3}} - \frac{1}{108}(x+y+z)^4$ là $\frac{a}{b}$, với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = 25a + 24b$.

Lời giải

Đáp án: 621

Từ giả thiết ta có: $2x^2 \leq 2(x^2 + y^2 + z^2) \leq (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 \leq 18 \Rightarrow x \in [0; 3]$.

Một cách tương tự ta có $y, z \in [0; 3]$.

Do đó ta có $4^{\frac{x}{3}} \leq x+1, 4^{\frac{y}{3}} \leq y+1, 4^{\frac{z}{3}} \leq z+1, \forall x, y, z \in [0; 3]$.

Vì vậy $P \leq x + y + z + 3 - \frac{1}{108}(x+y+z)^4$.

Đặt $t = x + y + z \in [0; 9]$, ta có $P \leq f(t) = t + 3 - \frac{1}{108}t^4 \leq \max_{[0; 9]} f(t) = f(3) = \frac{21}{4}$.

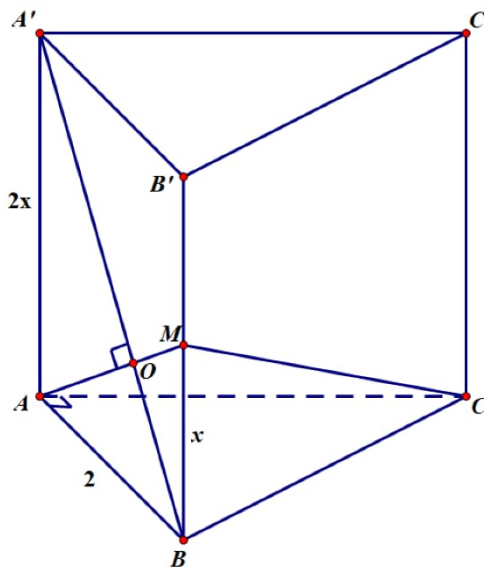
Dấu bằng đạt tại $(x; y; z) = (3; 0; 0); (0; 3; 0); (0; 0; 3)$.

Vậy $S = 25 \cdot 21 + 24 \cdot 4 = 621$

Câu 37: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = 2; AC = \sqrt{3}$. Góc $\widehat{CAA'} = 90^\circ, \widehat{BAA'} = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh BB' . Biết CM vuông góc với $A'B$, tính thể tích lăng trụ đã cho (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp án: 5,06



Ta có: $\begin{cases} CA \perp AB \\ CA \perp AA' \end{cases} \Rightarrow CA \perp (ABB'A')$

Lại có: $\begin{cases} A'B \perp CM \\ A'B \perp CA (\text{Vì } CA \perp (ABB'A')) \end{cases} \Rightarrow A'B \perp (ACM)$

$\Rightarrow A'B \perp AM$

* Đặt $AA' = 2x \Rightarrow BM = x$

$$\Rightarrow \text{Xét } \triangle ABM : AM = \sqrt{x^2 + 2^2 - 2 \cdot x \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$$

$$\Rightarrow AO = \frac{2}{3} \cdot AM = \sqrt{x^2 - 2x + 4} \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow OB = \sqrt{2^2 - \frac{4}{9}(x^2 - 2x + 4)}$$

$$A'B = 3 \cdot OB$$

$$\text{Xét } \triangle A'AB : A'B = \sqrt{4x^2 + 2^2 - 2 \cdot 2x \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{4x^2 + 4x + 4}$$

$$\left. \begin{array}{l} A'B = 3 \cdot \sqrt{2^2 - \frac{4}{9}(x^2 - 2x + 4)} \\ A'B = \sqrt{4x^2 + 4x + 4} \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{33} + 1}{4}$$

$$\Rightarrow V_{LT} = 3V_{CABA'} = \frac{3(\sqrt{33} + 1)}{4} \approx 5,06$$