

PHẦN E. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m - 1)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 Trả lời:.....

Lời giải

$$y' = 3x^2 - 6mx + 3(2m - 1)$$

Ta có: $\Delta' = (-3m)^2 - 3 \cdot 3 \cdot (2m - 1)$. Để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $\Delta' \leq 0$

$$\Leftrightarrow 9m^2 - 18m + 9 < 0 \Leftrightarrow 9(m^2 - 2m + 1) \leq 0 \Leftrightarrow 9(m - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Câu 2. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - 2mx^2 + (3m + 5)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 Trả lời:.....

Lời giải

$$Ta\ có\ y' = mx^2 - 4mx + 3m + 5.$$

Với $a = 0 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow y' = 5 > 0$. Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ (2m)^2 - m(3m + 5) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 5m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 0 \leq m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 5$$

$$Vi\ m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

Câu 3. (THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên - 2018) Số giá trị nguyên của m để hàm số $y = (4 - m^2)x^3 + (m - 2)x^2 + x + m - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ bằng.
 Trả lời:.....

Lời giải

$$TH1: 4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

$$m = 2: (1) \Leftrightarrow y = x + 1 \Rightarrow \text{hàm số luôn tăng trên } \mathbb{R} \Rightarrow m = 2 \text{ (nhận).}$$

$$m = -2: (1) \Leftrightarrow y = -4x^2 + x - 3 \text{ là hàm số bậc hai nên tăng trên khoảng } \left(-\infty; \frac{1}{8}\right), \text{ giảm trên}$$

$$\text{khoảng } \left(\frac{1}{8}; +\infty\right) \Rightarrow m = -2 \text{ (loại).}$$

$$TH2: 4 - m^2 \neq 0.$$

$$y' = 3(4 - m^2)x^2 + 2(m - 2)x + 1 \quad \Delta' = (m - 2)^2 - 3(4 - m^2) = 4m^2 - 4m - 8.$$

$$\text{hàm số đồng biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m^2 > 0 \\ 4m^2 - 4m - 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-2; 2) \\ m \in [-1; 2] \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-1; 2]. m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = -1; m = 0; m = 1.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 4. (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2018) Số các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-100; 100]$ để hàm số $y = mx^3 + mx^2 + (m+1)x - 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là:

Trả lời:.....

Lời giải

Trường hợp 1: $m = 0$. Ta có:

$y = x - 3$ có $y' = 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó loại $m = 0$.

Trường hợp 2: $m \neq 0$. Ta có: $y' = 3mx^2 + 2mx + m + 1$, $\Delta' = -2m^2 - 3m = m(-2m - 3)$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m(-2m - 3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -2m - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{2}.$$

Vì m là số nguyên thuộc đoạn $[-100; 100]$ nên $m \in \{-2; -3; \dots; -99; -100\}$.

Vậy có 99 giá trị m .

Câu 5. (Chuyên Thái Nguyên - 2020) Cho hàm số $y = \frac{mx - 2m + 3}{x + m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Tìm số phần tử của S .

Trả lời:.....

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \neq -m$.

$$y' = \frac{m^2 + 2m - 3}{(x + m)^2}$$

Ta có:

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$ thì:

$$\begin{cases} y' < 0; \forall x \in (2; +\infty) \\ x \neq -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 < 0 \\ -m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 1 \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < 1.$$

Vậy giá trị nguyên của m là $S = \{-2; -1; 0\}$.

Câu 6. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+18}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$?
 Trả lời:.....

Lời giải

Điều kiện $x \neq -4m$.

Ta có $y = \frac{x+18}{x+4m} \Rightarrow y' = \frac{4m-18}{(x+4m)^2}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0 \\ -4m \notin (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m-18 < 0 \\ -4m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{2} \\ m \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < \frac{9}{2}$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+18}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 7. (Kim Liên - Hà Nội - 2020) Số giá trị nguyên thuộc khoảng $(-2020; 2020)$ của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2019$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ là

Trả lời:.....

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - m$.

Hàm số đồng biến trên khi $y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - m \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x \geq m, \forall x \in (0; +\infty) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x$ trên $(0; +\infty)$

Ta có $f'(x) = 6x - 6, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Do đó $\min_{(0; +\infty)} f(x) = f(1) = -3$

$(1) \Leftrightarrow m \leq -3$. Kết hợp với giả thiết ta được $m \in (-2020; -3]$. Nên có 2017 số nguyên thỏa mãn

Câu 8. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-2020; 2020]$ để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.
 Trả lời:.....

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + m$

Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + m \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

Do đó $m \geq -3x^2 + 12x, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \geq \max_{(0; +\infty)} g(x)$ với $g(x) = -3x^2 + 12x$

Ta có: $g(x) = -3(x-2)^2 + 12 \leq 12, \forall x \in (0; +\infty)$ nên $\max_{(0; +\infty)} g(x) = 12 = g(2)$

Vậy $m \geq 12$

Số các số nguyên m cần tìm là: $2020 - 12 + 1 = 2009$

Câu 9. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Cho hàm số $f(x) = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?
Trả lời:.....

Lời giải

$$f(x) = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2(m+1)x - (2m^2 - 3m + 2)$$

Nhận xét $2m^2 - 3m + 2 > 0 \forall m \in \mathbb{R}$ nên $f'(x) = 3x^2 - 2(m+1)x - (2m^2 - 3m + 2) = 0$

luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (2; +\infty)$

$$\begin{cases} 3 \cdot f'(2) \geq 0 \\ x_1 < x_2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot [3 \cdot 4 - 4(m+1) - (2m^2 - 3m + 2)] \geq 0 \\ \frac{S}{2} < 2 \end{cases}$$

Điều này xảy ra khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 - m + 6 \geq 0 \\ \frac{(m+1)}{3} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \leq \frac{3}{2} \\ m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq \frac{3}{2}$$

Do m nguyên nên $m \in \{-2; -1; 0; 1\}$

Câu 10. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020; 2020)$ sao cho hàm số $y = 2x^3 + mx^2 + 2x$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$. Tính số phần tử của tập hợp S .
Trả lời:.....

Lời giải

$$\text{Ta có } y = 2x^3 + mx^2 + 2x \Rightarrow y' = 6x^2 + 2mx + 2$$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-2; 0) \Leftrightarrow y' = 6x^2 + 2mx + 2 \geq 0, \forall x \in (-2; 0)$

$$\Leftrightarrow m \leq -3x - \frac{1}{x}, \forall x \in (-2; 0)$$

Xét hàm số $g(x) = -3x - \frac{1}{x}, \forall x \in (-2; 0)$

$$\Rightarrow g'(x) = -3 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow -3 + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Bảng biến thiên

x	-2	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\frac{13}{2}$	$2\sqrt{3}$	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên suy ra $m \leq 2\sqrt{3}$. Mà $m \in \mathbb{Z}, m \in (-2020; 2020)$ nên $m \in \{-2019; -2018; \dots; 3\}$.

Vậy có 2023 giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020; 2020)$ sao cho hàm số $y = 2x^3 + mx^2 + 2x$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Câu 11. (Kim Liên - Hà Nội - 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2}{2} - mx + \ln(x-1)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

Trả lời:.....

Lời giải

Ta có $y' = x - m + \frac{1}{x-1}$.

Để hàm số $y = \frac{x^2}{2} - mx + \ln(x-1)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ thì $y' \geq 0$ với $\forall x \in (1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{x-1} \geq m \text{ với } \forall x \in (1; +\infty) \Rightarrow m \leq \min_{(1; +\infty)} f(x)$$

Xét hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ ta có

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 1 \geq 2\sqrt{(x-1)\frac{1}{(x-1)}} + 1 \geq 3 \Rightarrow \min_{(1; +\infty)} f(x) = 3. \text{ Do } m \in \mathbb{Z}^+ \text{ nên } m \in \{1; 2; 3\}.$$

Câu 12. (Chuyên Vinh - 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = m^2 x^4 - 2(4m - 1)x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?
 Trả lời:.....

Lời giải

+ Với $m = 0$, hàm số trở thành $y = 2x^2 + 1$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên hàm số cũng đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$, do đó $m = 0$ thỏa mãn.

+ Với $m \neq 0$, hàm số đã cho làm hàm số trùng phương với hệ số $a = m^2 > 0$.

$$y' = 4m^2 x^3 - 4(4m - 1)x = 4x(m^2 x^2 - 4m + 1) \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{4m - 1}{m^2} \end{cases}$$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ thì phương trình $x^2 = \frac{4m - 1}{m^2}$ vô nghiệm hoặc có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m - 1 \leq 0 \\ 4m - 1 > 0 \\ \sqrt{\frac{4m - 1}{m^2}} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{4} \\ m > \frac{1}{4} \\ -m^2 + 4m - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} < m < 2 - \sqrt{3} \\ m > 2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy điều kiện để hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ là $m \in (-\infty; 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}; +\infty)$.

Vì m nguyên, $m \in (-10; 10)$ nên $m \in \{-9; -8; \dots; 0; 4; 5; \dots; 9\}$, có 16 giá trị.

Câu 13. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{1 - \ln x} + 1}{\sqrt{1 - \ln x} + m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-5; 5]$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{e^3}; 1\right)$.
 Trả lời:.....

Lời giải

Ta có đạo hàm của $y = \frac{\sqrt{1 - \ln x} + 1}{\sqrt{1 - \ln x} + m}$ là $y' = \frac{1 - m}{2x\sqrt{1 - \ln x}(\sqrt{1 - \ln x} + m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{e^3}; 1\right)$ khi và chỉ khi $y' > 0, \forall x \in \left(\frac{1}{e^3}; 1\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ \sqrt{1 - \ln x} + m \neq 0, \forall x \in \left(\frac{1}{e^3}; 1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ \sqrt{1 - \ln x} + m \neq 0, \forall x \in \left(\frac{1}{e^3}; 1\right) \end{cases} (*)$$

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{1 - \ln x}, x \in \left(\frac{1}{e^3}; 1\right)$, ta có $g'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{1 - \ln x}} < 0, \forall x \in \left(\frac{1}{e^3}; 1\right)$ do đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau

x	$-\infty$	$\frac{1}{e^3}$		1	$+\infty$
$g'(x)$			—		
$g(x)$		2		1	

Qua bảng biến thiên ta có $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \notin (-2; -1) \end{cases}$, kết hợp với $m \in [-5; 5]$ ta có 6 giá trị nguyên của m là $m \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0\}$.

Câu 14. (Sở Ninh Bình) Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$. Tổng giá trị các phần tử của T bằng?
Trả lời:.....

Lời giải

+ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

+ Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$

Theo đề $m > 0$ nên $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x = -\sqrt{m}, x = 0, x = \sqrt{m}$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-	0	+

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (3; +\infty) \Leftrightarrow \sqrt{m} \leq 3 \Leftrightarrow m \leq 9$

Vì m nguyên dương nên $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ (là cấp số cộng)

Vậy Tổng giá trị các phần tử của T bằng $\frac{9}{2}(1+9) = 45$.

Câu 15. (Sở Bắc Giang 2023) Cho hàm số $y = 12x^5 - (15m + 30)x^4 + 20x^3 - 30(m^2 - 4m + 3)x^2 + 120(m^2 + 1)x + 2023 + m$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; 3)$?
Trả lời:.....

Lời giải

Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

$$y = |f(x)| \text{ đồng biến trên } (a; b) \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (a; b) \\ f(a) \geq 0 \\ f'(x) \leq 0, \forall x \in (a; b) \\ f(a) \leq 0 \end{cases}$$

Có $f(x) = 12x^5 - (15m + 30)x^4 + 20x^3 - 30(m^2 - 4m + 3)x^2 + 120(m^2 + 1)x + 2023 + m$

$$f'(x) = 60[x^4 - (m + 2)x^3 + x^2 - (m^2 - 4m + 3)x + 2m^2 + 2]$$

$$f''(x) = 60[4x^3 - 3(m + 2)x^2 + 2x - (m^2 - 4m + 3)]$$

Nhận xét: $f'(2) = 0$

Điều kiện cần: $f''(2) = 0 \Leftrightarrow m = 1 \vee m = -9$

Điều kiện đủ: $m = 1$ (thỏa mãn)

$$m = -9 \Rightarrow f'(x) = 60(x - 2)^2(x^2 + 11x + 41) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(1) = 12 - (-105) + 20 - 30 \cdot 120 + 9840 + 2014 > 0$$

$$\Rightarrow m = -9 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m \in \{-9; 1\}$

Câu 16. (Sở Yên Bái 2023) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong khoảng $(-\infty; 10)$ để hàm số

$$y = \left| \frac{mx + 4}{x + m + 3} \right| \text{ đồng biến trên khoảng } (1; +\infty) ?$$

Trả lời:.....

Lời giải

Đặt hàm số $f(x) = \frac{mx + 4}{x + m + 3}$, với điều kiện $x \neq -m - 3$, và $f(1) = \frac{m + 4}{m + 4} = 1 > 0, \forall m \neq -4$.

Ta có: $f'(x) = \frac{m^2 + 3m - 4}{(x + m + 3)^2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) > 0, \forall x > 1 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m - 4 > 0 \\ -m - 3 \leq 1 \\ m \neq -4 \end{cases} \Rightarrow m > 1$$

Điều kiện bài toán

Kết hợp với điều kiện $m \in (-\infty; 10)$ và $m \in \mathbb{Z}$, ta có: $m \in \{2; 3; 4; \dots; 9\}$.

Câu 17. (Sở Bà Rịa - Vũng Tàu 2023) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số

$$y = x^5 - \frac{2023}{x} - mx \text{ đồng biến trên khoảng } (0; +\infty)$$

Trả lời:.....

Lời giải

Để hàm số đồng biến trên $(0; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow 5x^4 + \frac{2023}{x^2} - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 5x^4 + \frac{2023}{x^2}, \forall x \in (0; +\infty), \text{ đặt } g(x) = 5x^4 + \frac{2023}{x^2}$$

$$\Rightarrow m \leq \min_{(0; +\infty)} g(x), g'(x) = 20x^3 - \frac{4046}{x^3}, g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[6]{\frac{2023}{10}}$$

$$\Rightarrow \min_{(0; +\infty)} g(x) = g\left(\sqrt[6]{\frac{2023}{10}}\right) \approx 516,91 \dots \Rightarrow m \leq 516,91 \dots$$

Vậy có 516 giá trị nguyên dương tham số m cần tìm.

Câu 18. (Sở Hậu Giang 2023) Có bao nhiêu số nguyên của tham số m để hàm số $y = |mx^3 - mx^2 + 16x - 32|$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$?

Trả lời:.....

Lời giải

Đặt $f(x) = mx^3 - mx^2 + 16x - 32$, ta có $f'(x) = 3mx^2 - 2mx + 16 = m(3x^2 - 2x) + 16$.

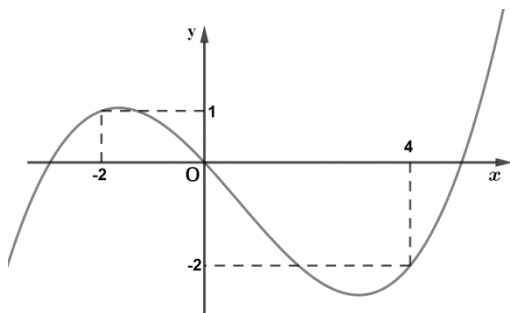
Hàm số $y = |mx^3 - mx^2 + 16x - 32|$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; 2) \\ f(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{16}{3x^2 - 2x}, \forall x \in (1; 2) \\ 4m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0.$$

$$\begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (1; 2) \\ f(2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{16}{3x^2 - 2x}, \forall x \in (1; 2) \\ 4m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -16 \\ m \geq 0 \end{cases}$$

Vậy có 3 số nguyên của tham số m để hàm số $y = |mx^3 - mx^2 + 16x - 32|$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 19. (Sở Hà Nội - Lần 2 - 2020) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, a \neq 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-6; 6)$ của tham số m để hàm số $g(x) = f(3 - 2x + m) + x^2 - (m + 3)x + 2m^2$ nghịch biến trên $(0; 1)$. Khi đó, tổng giá trị

các phần tử của S là?

Trả lời:.....

Lời giải

Xét $g'(x) = -2f'(3-2x+m) + 2x - (m+3)$. Xét phương trình $g'(x) = 0$, đặt $t = 3 - 2x + m$ thì phương trình trở thành

$$-2 \cdot \left[f'(t) - \frac{-t}{2} \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 4 \\ t = 0 \end{cases}$$

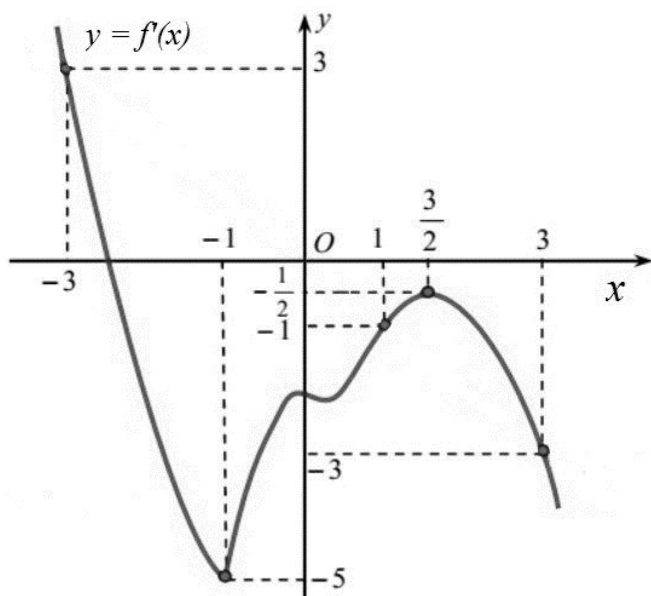
Từ đó, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{5+m}{2}, x_2 = \frac{m+3}{2}, x_3 = \frac{-1+m}{2}$. Lập bảng xét dấu, đồng thời lưu ý nếu $x > x_1$ thì $t < t_1$ nên $f'(x) > 0$. Và các dấu đan xen nhau do các nghiệm đều làm đổi dấu đạo hàm nên suy ra $g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [x_2; x_1] \cup (-\infty; x_3]$.

Vì hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$ nên $g'(x) \leq 0, \forall x \in (0; 1)$ từ đó suy ra

$$\begin{cases} \frac{3+m}{2} \leq 0 < 1 \leq \frac{5+m}{2} \\ 1 \leq \frac{-1+m}{2} \end{cases}$$

và giải ra các giá trị nguyên thuộc $(-6; 6)$ của m là -3; 3; 4; 5.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(x - 2m) + \frac{1}{2}(2m - x)^2 + 2020$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3; 4)$. Hỏi số phần tử của S bằng bao nhiêu?

Trả lời:.....

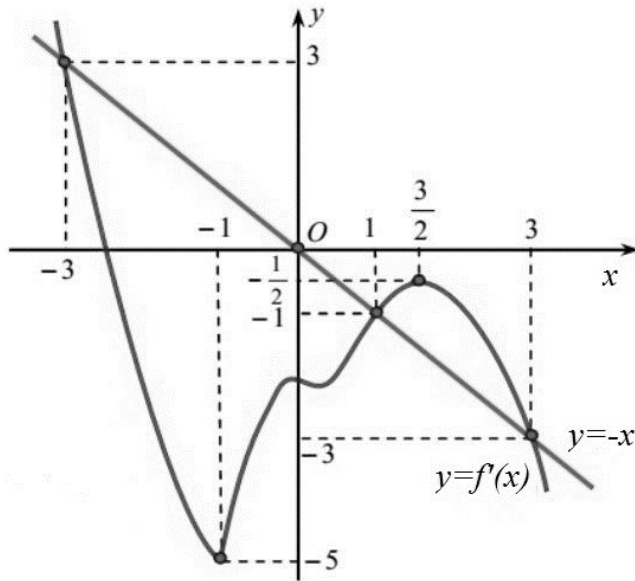
Lời giải

Ta có $g'(x) = f'(x-2m) - (2m-x)$

Đặt $h(x) = f'(x) - (-x)$. Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đồ thị hàm số $y = -x$ trên hình vẽ suy

$$h(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x) \leq -x \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

ra:



$$g'(x) = h(x-2m) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x-2m \leq 1 \\ x-2m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3 \leq x \leq 2m+1 \\ x \geq 2m+3 \end{cases}$$

Ta có

Suy ra hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(2m-3; 2m+1)$ và $(2m+3; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3 \leq 3 \\ 2m+1 \geq 4 \\ 2m+3 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} \leq m \leq 3 \\ m \leq 0 \end{cases}$$

Do đó hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3; 4)$

Mặt khác, do m nguyên dương nên $m \in [2; 3] \Rightarrow S = [2; 3]$. Vậy số phần tử của S bằng 2.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)^2(x^2 + 2mx + 1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(2x+1)$ đồng biến trên khoảng $(3; 5)$?
Trả lời:.....

Lời giải

$$\text{Ta có: } g'(x) = 2f'(2x+1) = 2(2x+1)(2x+2)^2[(2x+1)^2 + 2m(2x+1) + 1]$$

$$t = 2x + 1$$

Đặt

Đề hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3; 5)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0, \forall x \in (3; 5)$

$$\Leftrightarrow t(t^2 + 2mt + 1) \geq 0, \forall t \in (7; 11) \Leftrightarrow t^2 + 2mt + 1 \geq 0, \forall t \in (7; 11) \Leftrightarrow 2m \geq \frac{-t^2 - 1}{t}, \forall t \in (7; 11)$$

Xét hàm số $h(t) = \frac{-t^2 - 1}{t}$ trên $[7; 11]$, có $h'(t) = \frac{-t^2 + 1}{t^2}$

BBT:

t	$-\infty$	7	11	$+\infty$
$h'(t)$			-	
		$-\frac{50}{7}$	$-\frac{122}{11}$	

Dựa vào BBT ta có $2m \geq \frac{-t^2 - 1}{t}, \forall t \in (7; 11) \Leftrightarrow 2m \geq \max_{[7; 11]} h(t) \Leftrightarrow m \geq -\frac{50}{14}$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1\}$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'		+	0	-
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên $m < 2019$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x + m)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

Trả lời:.....

Lời giải

$$g'(x) = (x^2 - 2x + m)f'(x^2 - 2x + m) = 2(x - 1)f'(x^2 - 2x + m)$$

Ta có

$$y = g(x) \quad (1; +\infty) \quad g'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$$

Hàm số đồng biến trên khoảng khi và chỉ khi và

$$g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow 2(x - 1)f'(x^2 - 2x + m) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$$

tại hữu hạn điểm

$$\Leftrightarrow f'(x^2 - 2x + m) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + m \geq 2, \forall x \in (1; +\infty) \\ x^2 - 2x + m \leq 0, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases}$$

$$y = x^2 - 2x + m$$

Xét hàm số , ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	$m-1$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$x^2 - 2x + m \geq 2, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow m - 1 \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 3$$

TH1:

$$x^2 - 2x + m \leq 0, \forall x \in (1; +\infty)$$

TH2: : Không có giá trị m thỏa mãn.

$$m < 2019$$

Vậy có 2016 số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 2x - 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để hàm số $g(x) = f(x^2 + 3x - m) + m^2 + 1$ đồng biến trên $(0; 2)$?

Trả lời:.....

Lời giải

$$f'(t) = t^2 + 2t - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -3 \\ t \geq 1 \end{cases} (*)$$

Ta có

$$G'(x) = (2x + 3)f'(x^2 + 3x - m)$$

Vì $2x + 3 > 0, \forall x \in (0; 2)$ nên $g(x)$ đồng biến trên $(0; 2) \Leftrightarrow g'(x) \geq 0, \forall x \in (0; 2)$

$$\Leftrightarrow f'(x^2 + 3x - m) \geq 0, \forall x \in (0; 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - m \leq -3, \forall x \in (0; 2) \\ x^2 + 3x - m \geq 1, \forall x \in (0; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x \leq m - 3, \forall x \in (0; 2) \\ x^2 + 3x \geq m + 1, \forall x \in (0; 2) \end{cases} (**)$$

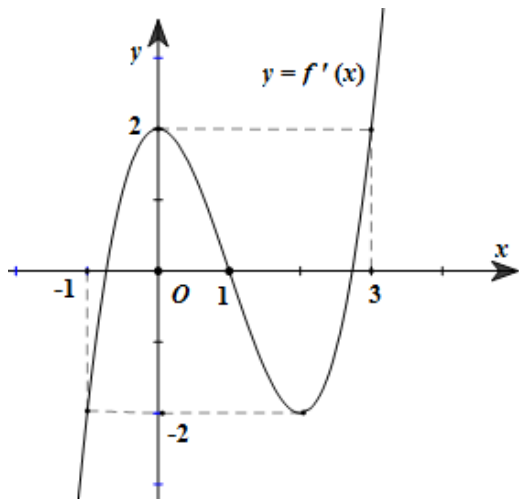
$$\text{Có } h(x) = x^2 + 3x \text{ luôn đồng biến trên } (0; 2) \text{ nên từ } (**) \Rightarrow \begin{cases} m - 3 \geq 10 \\ m + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 13 \\ m \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{Vì } \begin{cases} m \in [-10; 20] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

Có 18 giá trị của tham số m .

Vậy có 18 giá trị của tham số m cần tìm.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



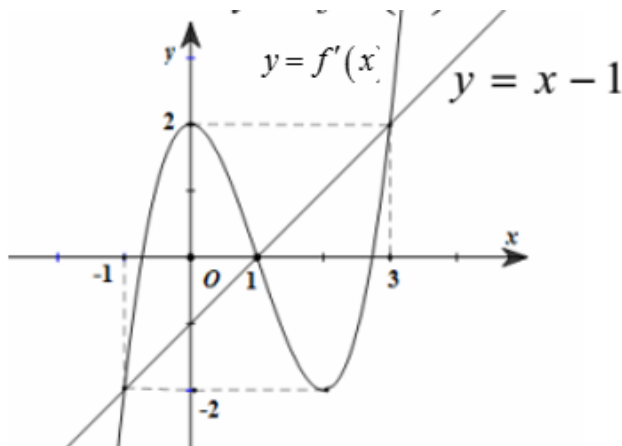
Đặt $g(x) = f(x - m) - \frac{1}{2}(x - m - 1)^2 + 2019$ với m là tham số thực. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6)$. Tổng các phần tử của S bằng?

Trả lời:.....

Lời giải

Ta có $g'(x) = f'(x - m) - (x - m - 1)$

Đặt $h(x) = f'(x) - (x - 1)$. Từ đồ thị $y = f'(x)$ và đồ thị $y = x - 1$ trên hình vẽ ta suy ra

$$h(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$$


Ta có $g'(x) = h(x - m) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x - m \leq 1 \\ x - m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \leq x \leq m + 1 \\ x \geq m + 3 \end{cases}$

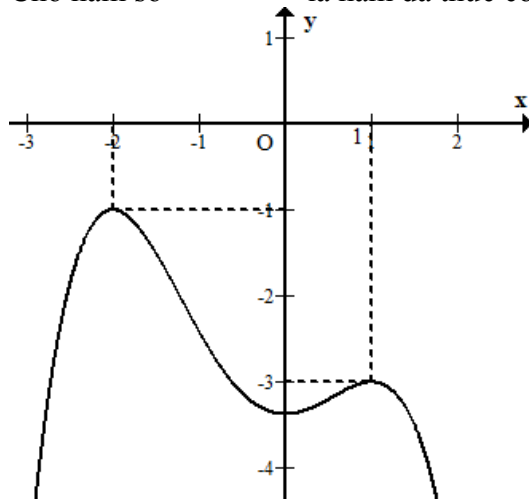
Do đó hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(m - 1; m + 1)$ và $(m + 3; +\infty)$

Do vậy, hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \leq 5 \\ m + 1 \geq 6 \\ m + 3 \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq m \leq 6 \\ m \leq 2 \end{cases}$

Do m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 5; 6\}$, tức $S = \{1; 2; 5; 6\}$

Tổng các phần tử của S bằng 14.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m , $m \in \mathbb{Z}$, $-2020 < m < 2020$ để hàm số $g(x) = f(x^2) + mx^2 \left(x^2 + \frac{8}{3}x - 6 \right)$ đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$

Trả lời:.....

Lời giải

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2) + 4mx(x^2 + 2x - 3)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$ suy ra $g'(x) \geq 0, \forall x \in (-3; 0)$.

$$2xf'(x^2) + 4mx(x^2 + 2x - 3) \geq 0, \forall x \in (-3; 0) \Leftrightarrow f'(x^2) - 2m(-x^2 - 2x + 3) \leq 0, \forall x \in (-3; 0)$$

$$\Leftrightarrow f'(x^2) \leq 2m(-x^2 - 2x + 3), \forall x \in (-3; 0) \Leftrightarrow m \geq \frac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)}, \forall x \in (-3; 0)$$

$$\Leftrightarrow m \geq \max_{x \in (-3; 0)} \frac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)}$$

Ta có $-3 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^2 < 9 \Rightarrow f'(x^2) \leq -3$ dấu “=” khi $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$.

$$-x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4 \Rightarrow 0 < -x^2 - 2x + 3 \leq 4, \forall x \in (-3; 0)$$

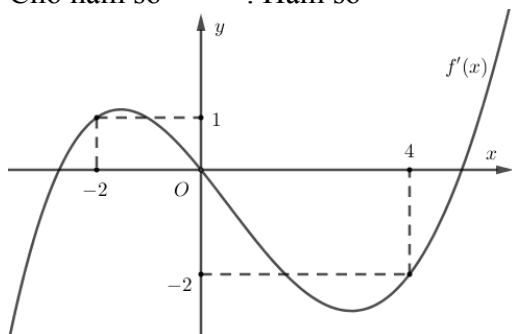
$$\Leftrightarrow \frac{1}{-x^2 - 2x + 3} \geq \frac{1}{4}, \text{ dấu “=” khi } x = -1.$$

$$\text{Suy ra } \frac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)} \leq \frac{-3}{2 \cdot 4} = -\frac{3}{8}, \forall x \in (-3; 0), \text{ dấu “=” khi } x = -1.$$

$$\Rightarrow \max_{(-3;0)} \frac{f'(x^2)}{2(x^2+2x+3)} = -\frac{3}{8}$$

Vậy $m \geq -\frac{3}{8}$, mà $m \in \mathbb{Z}$, $-2020 < m < 2020$ nên có 2020 giá trị của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = 4f(x-m) + x^2 - 2mx + 2020$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Trả lời:.....

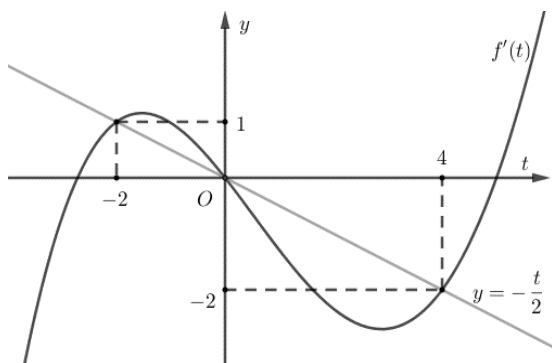
Lời giải

Ta có $g'(x) = 4f'(x-m) + 2x - 2m$

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x-m) \geq -\frac{x-m}{2} \quad (*)$$

Đặt $t = x - m$ thì $(*) \Leftrightarrow f'(t) \geq -\frac{t}{2}$

Vẽ đường thẳng $y = -\frac{x}{2}$ trên cùng hệ trục Oxy với đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ sau



Từ đồ thị ta có $f'(t) \geq -\frac{t}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq t \leq 0 \\ t \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \leq x \leq m \\ x \geq m+4 \end{cases}$

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2) \Leftrightarrow g'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (1;2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \leq 1 < 2 \leq m \\ m+4 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq m \leq 3 \\ m \leq -3 \end{cases}$$

Vì m nguyên dương nên $m \in [2; 3]$.

Vậy có hai giá trị nguyên dương của m để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-4); \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên

$m < 2020$ để hàm số $g(x) = f\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Trả lời:.....

Lời giải

Ta có:
$$g'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2} f'\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right)$$

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow g'(x) \geq 0; \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{(x+1)^2} f'\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right) \geq 0; \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow f'\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right) \leq 0; \forall x \in (2; +\infty)$$

Ta có: $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-4) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$

Do đó: $f'\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right) \leq 0; \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-x}{1+x} - m \leq -1; \forall x \in (2; +\infty) & (1) \\ 1 \leq \frac{2-x}{1+x} - m \leq 4; \forall x \in (2; +\infty) & (2) \end{cases}$

Hàm số $h(x) = \frac{2-x}{1+x} - m; x \in (2; +\infty)$ có bảng biến thiên:

x		2	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$		$-m$	$-\infty$

Căn cứ bảng biến thiên suy ra: Điều kiện (2) không có nghiệm m thỏa mãn.

Điều kiện (1) $\Leftrightarrow -m \leq -1 \Leftrightarrow m \geq 1$, kết hợp điều kiện $m < 2020$ suy ra có 2019 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét: Có thể mở rộng bài toán đã nêu như sau:

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-4); \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m < 2020$ để hàm số $g(x) = f\left(\frac{2-x}{1+x} + h(m)\right)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)e^x$, có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $y = g(x) = f(\ln x) - mx^2 + mx - 2$ nghịch biến trên $(1; e^2)$

Trả lời:.....

Lời giải

Trên $(1; e^2)$ ta có $g'(x) = \frac{1}{x} \cdot f'(\ln x) - 2mx + m = \ln x + 1 - (2x-1)m$

Để hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(1; e^2)$ thì $g'(x) = \ln x + 1 - (2x-1)m \leq 0, \forall x \in (1; e^2)$

$$\Leftrightarrow \ln x + 1 - (2x-1)m \leq 0, \forall x \in (1; e^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x + 1}{2x-1} \leq m, \forall x \in (1; e^2)$$

Xét hàm số $h(x) = \frac{\ln x + 1}{2x-1}$ trên $(1; e^2)$, ta có $h'(x) = \frac{-\frac{1}{x} - 2\ln x}{(2x-1)^2} < 0, \forall x \in (1; e^2)$, từ đây suy ra $m \geq 1$. Vậy có 2019 giá trị nguyên của m thỏa bài toán.

Câu 29. (Liên trường Quỳnh Lưu - Hoàng Mai - Nghệ An - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)e^x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong $[-2020; 2021]$ để hàm số $g(x) = f(\ln x) - mx^2 + 4mx - 2$ nghịch biến trong $(e; e^{2020})$.

Trả lời:.....

Lời giải

Ta có $g'(x) = \frac{1}{x} f'(\ln x) - 2mx + 4m = \frac{1}{x} (\ln x + 1) e^{\ln x} - 2mx + 4m = \ln x + 1 - 2mx + 4m$

Hàm số nghịch biến trong khoảng $(e; e^{2020})$ khi và chỉ khi $\ln x + 1 - 2mx + 4m \leq 0, \forall x \in (e; e^{2020})$

$$\Leftrightarrow 2m \geq \frac{\ln x + 1}{x-2}, \forall x \in (e; e^{2020})$$

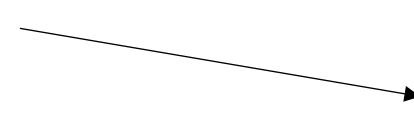
Xét hàm số $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x-2}, x \in (e; e^{2020})$

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x+1) - \ln x - 1}{(x-2)^2} = \frac{1 - x \ln x}{x(x-2)^2}, x \in (e; e^{2020})$$

Ta có

$$g'(x) < 0, \forall x \in (e, e^{2020})$$

BBT

x	e e^{2020}
$g'(x)$	-
$g(x)$	$\frac{2}{e-2}$ 

Quan sát bảng biến thiên ta có $2m \geq \frac{2}{e-2} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{e-2} \Rightarrow m \geq 2$. Vậy có 2020 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 30. (Chuyên KHTN - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $-10 < m < 10$ và hàm số $y = f(x^2 + 2x + m)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

Trả lời:.....

Lời giải

Xét $y = g(x) = f(x^2 + 2x + m)$

Ta có: $y' = g'(x) = 2(x+1)f'(x^2 + 2x + m)$

Vì $x+1 > 0 \forall x \in (0;1)$ nên để hàm số $y = f(x^2 + 2x + m)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi $f'(x^2 + 2x + m) > 0 \forall x \in (0;1)$, do hàm số $x^2 + 2x + m$ luôn đồng biến trên $(0;1)$ nên

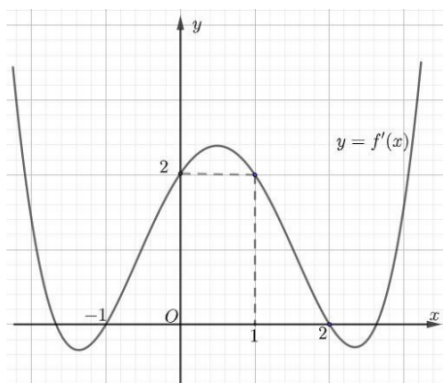
Đặt $t = x^2 + 2x + m$. Vì $x \in (0;1)$ nên $t \in (m; m+3)$

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có:
$$\begin{cases} m+3 \leq -2 \\ m \geq 0 \\ m+3 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -5 \\ m = 0 \end{cases}$$

Mà $-10 < m < 10$ nên $m = \{-9; -8; -7; -6; -5; 0\}$

Vậy có tất cả 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn đề bài.

Câu 31. (THPT Đồng Quan - Hà Nội - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số tham số m nguyên thuộc đoạn $[-20; 20]$ để hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$ biết

$$g(x) = 3f(-x^3 - 3x + m) + (x^3 + 3x - m)^2(-2x^3 - 6x + 2m - 6)$$


Trả lời:.....

Lời giải

$$\begin{aligned} g(x) &= 3f(-x^3 - 3x + m) + 2(-x^3 - 3x + m)^2(-x^3 - 3x + m - 3) \\ &= 3f(-x^3 - 3x + m) + 2(-x^3 - 3x + m)^3 - 6(-x^3 - 3x + m)^2 \end{aligned}$$

Ta có

$$g'(x) = -9(x^2 + 1)f'(-x^3 - 3x + m) - 18(x^2 + 1)(-x^3 - 3x + m)^2 + 36(x^2 + 1)(-x^3 - 3x + m)$$

Để hàm số nghịch biến trên $(-1; 2)$

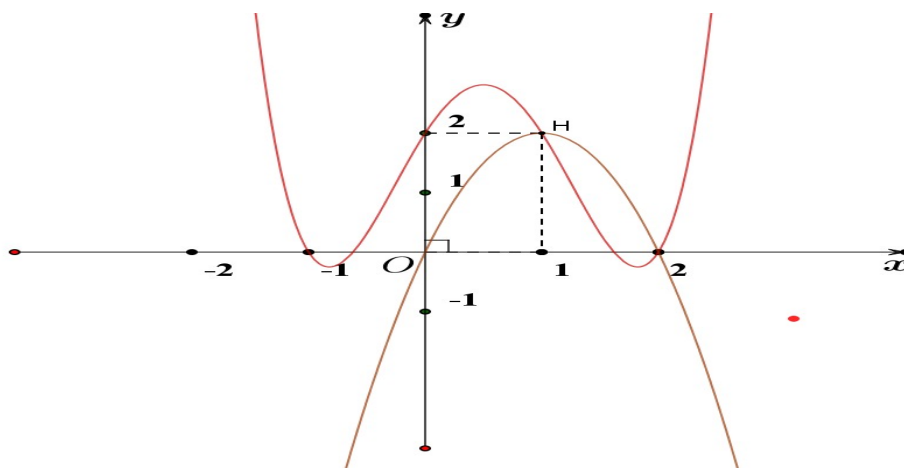
$$\begin{aligned} g'(x) &\leq 0 \quad \forall x \in (-1; 2) \Leftrightarrow f'(-x^3 - 3x + m) + 2(-x^3 - 3x + m)^2 - 4(-x^3 - 3x + m) \geq 0 \quad \forall x \in (-1; 2) \\ &\Leftrightarrow f'(-x^3 - 3x + m) \geq -2(-x^3 - 3x + m)^2 + 4(-x^3 - 3x + m) \quad \forall x \in (-1; 2) \end{aligned}$$

Đặt $t = -x^3 - 3x + m$. Với $x \in (-1; 2)$

$$t' = -3x^2 - 3 < 0 \quad \forall x \in (-1; 2) \Rightarrow t \in (m - 14; m + 4)$$

Xét bất phương trình (1) $f'(t) \geq -2t^2 + 4t$ (1)

Đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = -2t^2 + 4t$ trên cùng hệ trục tọa độ

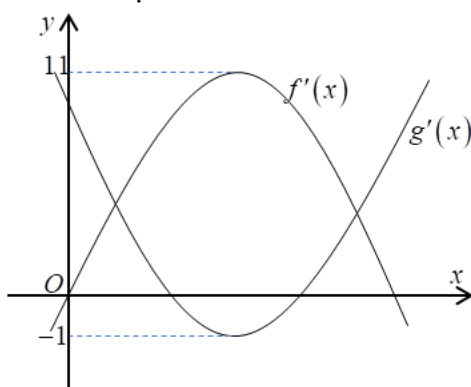


$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \in (m-14, m+4) \\ t \leq 1 \\ t \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in (m-14, m+4) \\ t \leq 1 \\ t \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+4 \leq 1 \\ m-14 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 16 \end{cases}$$

Để (1) luôn đúng

Do $m \in [-20; 20]$ nên số giá trị của m là $(-3+20)+1+(20-16)+1=23$.

Câu 32. (THPT Chu Văn An - Thái Nguyên - 2021) Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có một phần đồ thị biểu diễn đạo hàm $f'(x)$ và $g'(x)$ như hình vẽ.



Biết rằng hàm số $y = h(x) = f(x) - g(x) - a^2x + 2021$ luôn tồn tại một khoảng đồng biến $(\alpha; \beta)$. Số giá trị nguyên dương của a thỏa mãn?

Trả lời:.....

Lời giải

Ta có: $y' = h'(x) = f'(x) - g'(x) - a^2$.

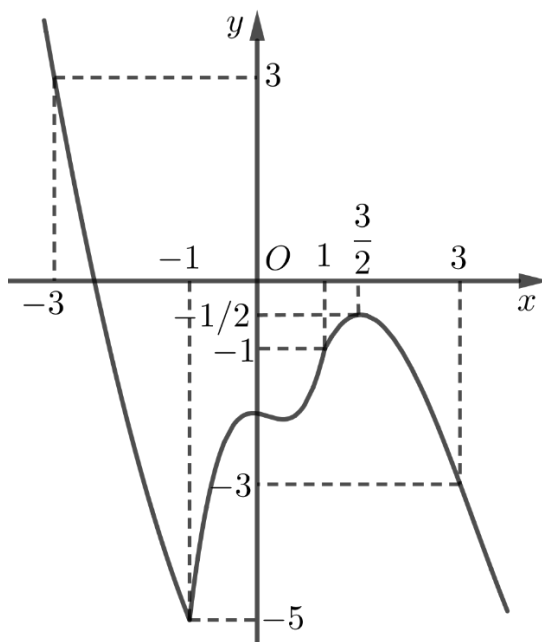
Hàm số $y = h(x)$ đồng biến khi $y' \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) - g'(x) - a^2 \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq g'(x) + a^2$

Đồ thị hàm số $y = g'(x) + a^2$ là đồ thị hàm số $y = g'(x)$ tịnh tiến lên phía trên a^2 đơn vị.

Hàm số $y = h(x) = f(x) - g(x) - a^2x + 2021$ luôn tồn tại một khoảng đồng biến $(\alpha; \beta)$ khi $a^2 < 11 \Leftrightarrow -3 \leq a \leq 3$.

Mà $a \in \mathbf{Z}_+^*$, suy ra: $a \in \{1; 2; 3\}$.

Câu 33. (THPT PTNK Cơ sở 2 - TP.HCM - 2021) Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục và có đồ thị như hình vẽ



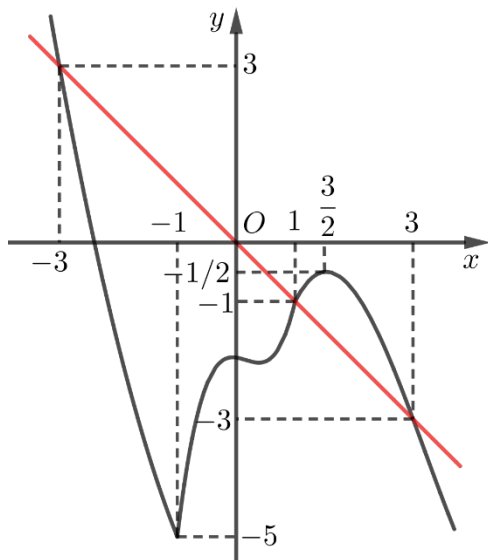
Xét hàm số $g(x) = f(x - 2m) + \frac{1}{2}(2m - x)^2 + 2020$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3; 4)$. Số phần tử của S bằng bao nhiêu?

Trả lời:.....

Lời giải

Ta có $g'(x) = f'(x - 2m) + (x - 2m)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = -t \quad (t = x - 2m) \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 1 \\ t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2m - 3 \\ x = 2m + 1 \\ x = 2m + 3 \end{cases}$$



Từ đồ thị suy ra $g'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2m+3 \\ 2m-3 < x < 2m+1 \end{cases}$

Vậy hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3; 4)$ khi

$$\begin{cases} 2m+3 \leq 3 \\ 2m-3 \leq 3 \\ 2m+1 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ \frac{3}{2} \leq m \leq 3 \end{cases}$$

Vì m nguyên dương nên $m=2; m=3$.

Câu 34. (THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội – 2022) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-3; 2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10; 10]$ để hàm số $y = f(x^2 + 2x - m)$ đồng biến trên $(-1; 1)$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''		$-$	$+$
f'	$+\infty$		$+\infty$

Trả lời:.....

Lời giải

Từ bảng biến thiên của $f'(x)$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3; x = 2$ ta có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-3		2		$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0

$$\begin{aligned}
\text{ycbt} &\Leftrightarrow (2x+2)f'(x^2+2x-m) \geq 0, \forall x \in [-1;1] \\
&\Leftrightarrow f'(x^2+2x-m) \geq 0, \forall x \in [-1;1] \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-m \geq 2, \forall x \in [-1;1] \\ x^2+2x-m \leq -3, \forall x \in [-1;1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq g(x) = x^2+2x-2, \forall x \in [-1;1] \\ m \geq h(x) = x^2+2x+3, \forall x \in [-1;1] \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \min_{[-1;1]} g(x) = g(-1) = -3 \\ m \geq \max_{[-1;1]} h(x) = h(1) = 6 \end{cases} \Rightarrow m \in \{-10, \dots, -3, 6, \dots, 10\}
\end{aligned}$$

Câu 35. (THPT Hoàng Hoa Thám - Đà Nẵng 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x^2 - 2x + 3$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số $g(x) = f(\sin^2 x + 3 \sin x - m) + m^2 + 2$ đồng biến trên $\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right)$ là?

Trả lời:.....

Lời giải

$$g(x) = f(\sin^2 x + 3 \sin x - m) + m^2 + 2$$

$$g'(x) = (2 \sin x \cos x + 3 \cos x) f'(\sin^2 x + 3 \sin x - m) = \cos x (2 \sin x + 3) f'(\sin^2 x + 3 \sin x - m)$$

$$g(x) \text{ đồng biến trên } \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow g'(x) \geq 0, \forall x \in \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos x (2 \sin x + 3) f'(\sin^2 x + 3 \sin x - m) \geq 0, \forall x \in \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow f'(\sin^2 x + 3 \sin x - m) \leq 0, \forall x \in \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$+ \text{ Theo giả thiết: } f'(x) = -x^2 - 2x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -3 \end{cases}, \text{ ta có:}$$

$$f'(\sin^2 x + 3 \sin x - m) \leq 0, \forall x \in \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x + 3 \sin x - m \geq 1, \forall x \in \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right) \\ \sin^2 x + 3 \sin x - m \leq -3, \forall x \in \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x + 3 \sin x \geq m + 1, \forall x \in \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right) \\ \sin^2 x + 3 \sin x \leq m - 3, \forall x \in \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right) \end{cases} \quad (1)$$

+ Xét hàm số $u(x) = \sin^2 x + 3 \sin x$ trên $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$, ta có $\max_{\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]} u(x) = \frac{3+6\sqrt{3}}{4}$,
 $\min_{\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]} u(x) = \frac{7}{4}$, do đó (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} m-3 \geq \frac{3+6\sqrt{3}}{4} \\ m+1 \leq \frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{15+6\sqrt{3}}{4} \\ m \leq \frac{3}{4} \end{cases}$, kết hợp với $m \in \mathbb{Z}$ và thuộc $[-10; 10]$ ta được $m \in \{-10, -9, \dots, 0, 7, \dots, 10\}$. Vậy có 15 số nguyên m thỏa mãn bài toán.

Câu 36. (Sở Nam Định 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $-20 < m < 20$ và hàm số $y = f(x^2 + 2x + m)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$?

Trả lời:.....

Lời giải

Ta có: $y = f(x^2 + 2x + m) \Rightarrow y' = (2x + 2) \cdot f'(x^2 + 2x + m)$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$ thì $y' = (2x + 2) \cdot f'(x^2 + 2x + m) \geq 0, \forall x \in (0; 1)$

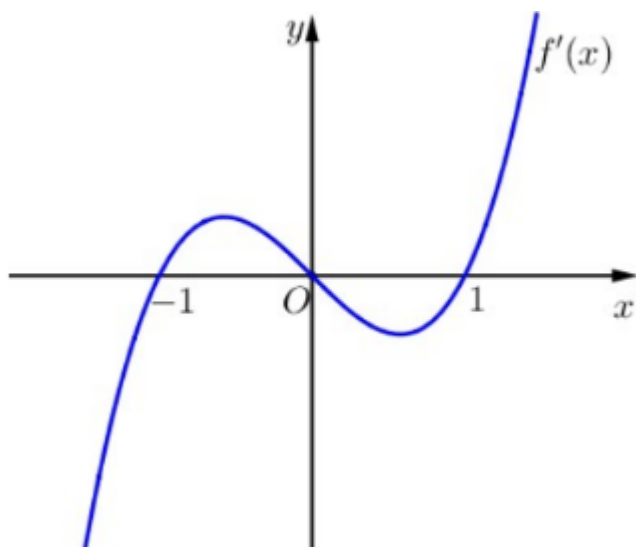
$\Leftrightarrow f'(x^2 + 2x + m) \geq 0, \forall x \in (0; 1)$ do $2x + 2 \geq 0, \forall x \in (0; 1)$

Suy ra $\begin{cases} x^2 + 2x + m \leq -2, \forall x \in (0; 1) \\ 0 \leq x^2 + 2x + m \leq 3, \forall x \in (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -x^2 - 2x - 2, \forall x \in (0; 1) \\ -x^2 - 2x \leq m \leq -x^2 - 2x + 3, \forall x \in (0; 1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \min_{(0;1)} (-x^2 - 2x - 2) \\ \max_{(0;1)} (-x^2 - 2x) \leq m \leq \min_{(0;1)} (-x^2 - 2x + 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -5 \\ 0 \leq m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -5 \\ m = 0 \end{cases}$

Do $-20 < m < 20$ nên $m = \{-19; -18; \dots; -5; 0\}$. Vậy có tất cả 16 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 37. (Cụm thi THPT huyện Mỹ Lộc – Vụ Bản – Nam Định 2023) Cho hàm số bậc bốn $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ thỏa mãn $f(0) = -3; f(2) = -1$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-20; 20)$ để hàm số $g(x) = f[4f(x) - f''(x) + m]$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$?

Trả lời:.....

Lời giải

Ta có ycbt $\Leftrightarrow g'(x) = (4f'(x) - f'''(x)) \cdot f[4f(x) - f''(x) + m] \geq 0, \forall x \in [0; 1]$ (*)

Tìm hàm số $f(x)$:

Ta có $f'(x) = 4a(x+1)x(x-1) = 4ax(x^2 - 1) = 4a(x^3 - x) \Rightarrow f(x) = a(x^4 - 2x^2) + e$

Do $f(0) = -3 \Rightarrow e = -3; f(2) = -1 \Rightarrow 8a + e = -1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}(x^4 - 2x^2) - 3; f'(x) = x^3 - x; f''(x) = 3x^2 - 1; f'''(x) = 6x$

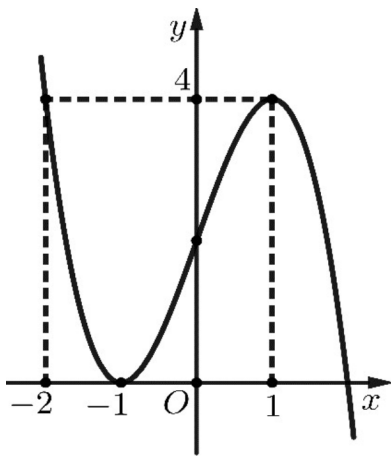
$\Rightarrow 4f'(x) - f'''(x) = 4(x^3 - x) - 6x = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5) \leq 0, \forall x \in [0; 1]$

Do đó (*) $\Leftrightarrow f[4f(x) - f''(x) + m] \leq 0, \forall x \in [0; 1] \Leftrightarrow \begin{cases} 4f(x) - f''(x) + m \leq -1 \\ 0 \leq 4f(x) - f''(x) + m \leq 1 \end{cases}, \forall x \in [0; 1]$ (**)

Xét $u(x) = 4f(x) - f''(x) + m = x^4 - 2x^2 - 12 - (3x^2 - 1) + m = x^4 - 5x^2 - 11 + m$ để có
 $\min_{[0; 1]} u(x) = u(1) = m - 15; \max_{[0; 1]} u(x) = u(0) = m - 11$

Do đó (**) $\Leftrightarrow \begin{cases} m - 11 \leq -1 \\ m - 15 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 10 \Rightarrow m \in \{-19, \dots, 10\} \\ m - 11 \leq 1 \end{cases}$

Câu 38. (Chuyên Thái Bình 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-2022; 2022)$ để hàm số $g(x) = f(2x - 3) - \ln(1 + x^2) - 2mx$ nghịch biến trên $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$?
 Trả lời:.....

Lời giải

$$\bullet \text{yctt} \Leftrightarrow g'(x) = 2f'(2x - 3) - \frac{2x}{x^2 + 1} - 2m \leq 0, \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$$

$$\Leftrightarrow m \geq h(x) = f'(2x - 3) - \frac{x}{x^2 + 1}, \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right] \Leftrightarrow m \geq \max_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} h(x)$$

$$t = 2x - 3 \in [-2; 1], \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right] \Rightarrow \max_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} f'(2x - 3) = \max_{[-2; 1]} f'(t) = f'(-2) = f'(1) = 4$$

Đặt đạt

$$t = 2x - 3 \in \{-2, 1\} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$$

tại

$$\text{Và hàm số } k(x) = -\frac{x}{x^2 + 1} \text{ có } k(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow \max_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} k(x) = k\left(\frac{1}{2}\right) = k(2) = -\frac{2}{5}$$

$$m \geq \max_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} h(x) = h\left(\frac{1}{2}\right) = h(2) = 4 - \frac{2}{5} \Rightarrow m \in \{4, \dots, 2021\}$$

Từ đó suy ra

Câu 39. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên 2023) Cho hàm số $y = mx^4 + (3m - 1)x^2 + 5$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (f(3x + 1))^2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Số phần tử của S là?
 Trả lời:.....

Lời giải

$$\text{Đặt } g(x) = (f(3x + 1))^2 \Rightarrow g'(x) = 2f(3x + 1) \cdot 3 \cdot f'(3x + 1) = 6f(3x + 1) \cdot f'(3x + 1)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f(3x + 1) \cdot f'(3x + 1) = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = 3x + 1$ thì (1) trở thành

$$[mt^4 + (3m - 1)t^2 + 5] \cdot [4mt^3 + 2(3m - 1)t] = 0 \Leftrightarrow [mt^4 + (3m - 1)t^2 + 5] \cdot [2mt^2 + (3m - 1)] \cdot t = 0$$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì điều kiện cần là phương trình $h(t) = [mt^4 + (3m-1)t^2 + 5] \cdot [2mt^2 + (3m-1)] = 0$ có nghiệm $t=0 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$.

Thử lại với $m = \frac{1}{3}$ ta có, $h(t) \cdot t = \left(\frac{1}{3}t^4 + 5\right) \left(\frac{2}{3}t^2\right) \cdot t$ đổi dấu khi qua $t=0$. Do đó hàm số $g(x)$ không đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy không tồn tại tham số m để hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 40. (Sở Bình Phước 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x^2 + mx + 16)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm

số $g(x) = f(x) + \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2023$ đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$

Trả lời:.....

Lời giải

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) + \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2023 \\ \Rightarrow g'(x) &= f'(x) + x^3 - 2x^2 + x \\ &= x(x-1)^2(x^2 + mx + 16) + x(x^2 - 2x + 1) \\ &= x(x-1)^2(x^2 + mx + 16) + x(x-1)^2 \\ &= x(x-1)^2(x^2 + mx + 17) \end{aligned}$$

Để $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$ thì $g'(x) \geq 0 \forall x \in (5; +\infty)$

$$\Leftrightarrow x(x-1)^2(x^2 + mx + 17) \geq 0, \quad \forall x \in (5; +\infty).$$

$$\forall x \in (5; +\infty) \text{ thì } x(x-1)^2 > 0 \Rightarrow x^2 + mx + 17 \geq 0, \quad \forall x \in (5; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow -m \leq \frac{x^2 + 17}{x} \quad \forall x \in (5; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow -m \leq \min h(x) = x + \frac{17}{x}, \quad \forall x \in [5; +\infty)$$

Ta có $h'(x) = 1 - \frac{17}{x^2} = \frac{x^2 - 17}{x^2} > 0, \quad \forall x \in [5; +\infty)$, suy ra $h(x)$ đồng biến.

Do đó giá trị nhỏ nhất của $h(x)$ trên $[5; +\infty)$ là $h(5) = \frac{42}{5}$.

Suy ra $-m \leq \frac{42}{5} \Leftrightarrow m \geq -\frac{42}{5}$.

Mà m nguyên và $m \in [-10; 10]$ nên $m \in \{-8; -7; \dots; 10\}$.

Có 19 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 41. (THPT Thị xã Quảng Trị 2023) Cho hàm số $f(x) = \frac{x^5}{5} - x^2 + (m-1)x - 4029$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(x-1) + 2022$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$?

Trả lời:.....

Lời giải

Ta có: $f'(x) = x^4 - 2x + m - 1$

Đặt $g(x) = f(x - 1) + 2022 \rightarrow g'(x) = f'(x - 1) = (x - 1)^4 - 2(x - 1) + m - 1$

Điều kiện bài toán

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g'(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty; 2) \text{ (loại i)}, \text{ vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \\ g(2) \geq 0 \\ g'(x) \geq 0, \forall x \in (-\infty; 2) \\ g(2) \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} m \geq -(x - 1)^4 + 2x - 1, \forall x < 2 \\ f(1) + 2022 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \geq \max h(x) \approx 2, 2 \\ (2; +\infty) \end{cases}$$

Từ

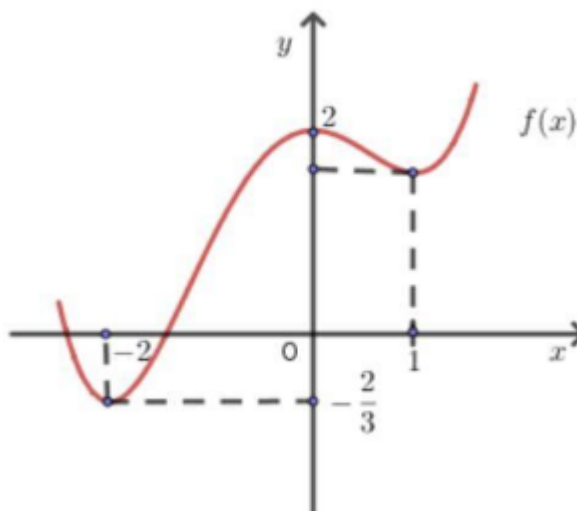
$$h(x) = -(x - 1)^4 + 2x - 1 \rightarrow h'(x) = -4(x - 1)^3 + 2, h'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} + 1 \approx 1,8$$

Vì hàm

x	$-\infty$	$1,8$	2
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$-\infty$	$2,2$	2

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{3; 4; \dots; 2008\} \rightarrow$ có 2006 giá trị nguyên.

Câu 42. (Sở Hải Phòng 2023) Cho hàm số bậc 4 có đồ thị như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-25; 20)$ để hàm số

$$g(x) = \frac{1}{3}f^3(x) + \frac{1}{2}m \cdot f^2(x) + (3m - 5)f(x) - 7$$

đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$?

Trả lời:.....

Lời giải

$$g(x) = \frac{1}{3}f^3(x) + \frac{1}{2}m \cdot f^2(x) + (3m - 5)f(x) - 7$$

$$YCBT \Rightarrow g'(x) = f'(x) \cdot [f^2(x) + mf(x) + 3m - 5] \geq 0, \forall x \in (-2; 0)$$

Dựa vào đồ thị ta suy ra $f'(x) \geq 0, \forall x \in (-2; 0)$ nên để $g'(x) \geq 0, \forall x \in (-2; 0)$

thì $f^2(x) + mf(x) + 3m - 5 \geq 0, \forall x \in (-2; 0)$ (1)

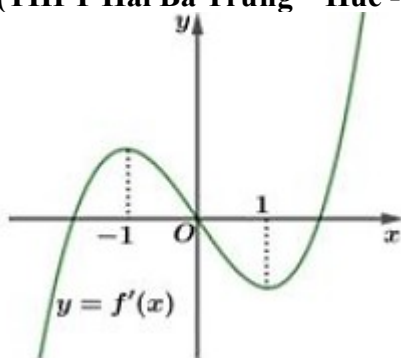
$$\text{Đặt } u = f(x) \text{ khi } x \in (-2; 0) \text{ thì } u \in \left(-\frac{2}{3}; 2\right)$$

$$(1) \Leftrightarrow u^2 + mu + 3m - 5 \geq 0, \forall u \in \left(-\frac{2}{3}; 2\right) \Leftrightarrow m \geq \max_{u \in \left(-\frac{2}{3}; 2\right)} \left(\frac{5 - u^2}{u + 3} \right), \forall u \in \left(-\frac{2}{3}; 2\right)$$

Khi đó ta được

Kết hợp với điều kiện $m \in (-25; 20)$ ta được $m \in [2; 3; \dots; 19]$

Câu 43. (THPT Hai Bà Trưng – Huế – 2023) Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

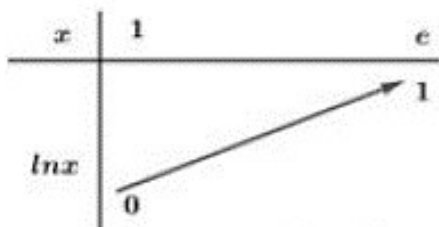


Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |2f(\ln x) - \ln^2 x + 1 - m|$ nghịch biến trên $(1; e)$, biết $f(1) = 2$?

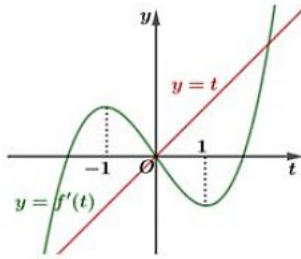
Trả lời:.....

Lời giải

Đặt $t = \ln x$, ta có:



Bài toán trở thành tìm giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |2f(t) - t^2 + 1 - m|$ nghịch biến trên $(0; 1)$.



Xét hàm số $h(t) = 2f(t) - t^2 + 1 - m$ trên $(0;1)$ có $h'(t) = 2[f'(t) - t] < 0, \forall t \in (0;1)$.

Do đó ycbt $\Leftrightarrow h(1) \geq 0 \Leftrightarrow 2f(1) - 1^2 + 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 4$.

Vậy có 4 giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn.