

Bài 6. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

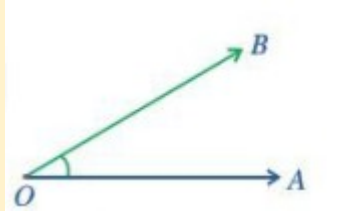
|FanPage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Định nghĩa

1. Tích vô hướng của hai vectơ có cùng điểm đầu

Cho hai vectơ $\vec{OA}, \vec{OB}$ khác $\vec{0}$ trong mặt phẳng



- Góc giữa hai vectơ $\vec{OA}, \vec{OB}$ là góc giữa hai tia $\vec{OA}, \vec{OB}$ và được kí hiệu là $(\vec{OA}, \vec{OB})$.
- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{OA}$ và $\vec{OB}$ là một số, kí hiệu $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$, được xác định bởi công thức:
$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \cdot \cos(\vec{OA}, \vec{OB})$$

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $AB = 4\text{ cm}$.

a) Tính độ dài cạnh huyền BC .

b) Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}; \vec{BA} \cdot \vec{BC}$.

Giải

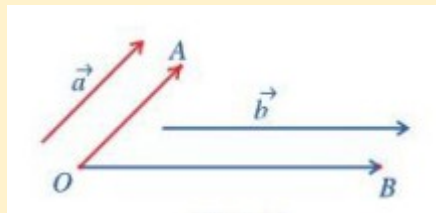
a) $BC = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2}(\text{cm})$

b) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = 4 \cdot 4 \cdot \cos \angle BAC = 16 \cdot \cos 90^\circ = 16 \cdot 0 = 0$

$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = |\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos(\vec{BA}, \vec{BC})$
 $= 4 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos \angle ABC = 16\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 16\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 16$

2. Tích vô hướng của hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O và vẽ vectơ $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$



- Góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$, kí hiệu $(\vec{a}, \vec{b})$, là góc giữa hai vectơ $\vec{OA}, \vec{OB}$.
- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, là tích vô hướng của hai vectơ $\vec{OA}$ và $\vec{OB}$. Như vậy, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Quy ước: Tích vô hướng của một vectơ bất kì với vectơ $\vec{0}$ là số 0.

Chú ý

$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$

- Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$. Khi đó $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0$.

- Tích vô hướng của hai vectơ cùng hướng bằng tích hai độ dài của chúng.

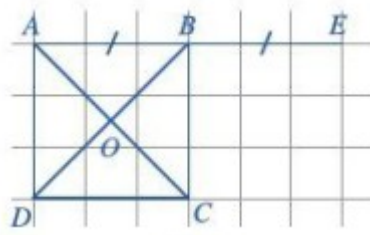
- Tích vô hướng của hai vectơ ngược hướng bằng số đối của tích hai độ dài của chúng.

Ta có thể chứng minh chú ý thứ ba như sau:

Nếu a, b là hai vectơ (khác 0) cùng hướng thì $(a, b) = 0^\circ$. Do đó, $\cos(a, b) = 1$. Vì vậy, $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos(a, b) = |a| \cdot |b|$.

Nếu một trong hai vectơ a, b là vectơ 0 thì $a \cdot b = 0$ và $|a| \cdot |b| = 0$ nên $a \cdot b = |a| \cdot |b|$. Chú ý thứ tư được chứng minh tương tự như trên.

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O có độ dài cạnh bằng a . Tính:



- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC}$ b) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}$ c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD}$

Giải.

a) Ta có: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \angle BAO = 45^\circ$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}$$

Vậy

b) Vẽ vectơ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$. Ta có: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}) = \angle EBD = 135^\circ$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD})$$

$$= a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ = a^2\sqrt{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = -a^2$$

c) Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BO}) = \angle EBO = 135^\circ$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{OD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OD}) = a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \cos 135^\circ = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{-a^2}{2}$$

Vậy

II. Tính chất

Với hai vectơ bất kì a, b và số thực k tùy ý, ta có:

- $a \cdot b = b \cdot a$ (tính chất giao hoán);
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (tính chất phân phối);
- $(ka) \cdot b = k(a \cdot b) = a \cdot (kb)$;
- $a^2 \geq 0, a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Trong đó, kí hiệu $a \cdot a = a^2$ và biểu thức này được gọi là bình phương vô hướng của vectơ a .

Ví dụ 3. Cho đoạn thẳng AB và I là trung điểm của AB . Chứng minh rằng với mỗi điểm O ta có:

a) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$

$$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2)$$

b)

Giải

a) Vì I là trung điểm AB nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{OI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{OI} \cdot \vec{0} = 0$$

$$2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA})$$

b) Vì I là trung điểm AB nên

$$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \cdot (-\overrightarrow{OA})$$

Vậy

$$= \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2)$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A . Tính:

Giải

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos 90^\circ$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot 0 = 0$$

III. Một số ứng dụng

1. Tính độ dài của đoạn thẳng

Nhận xét

Với hai điểm A, B phân biệt, ta có: $\overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$.

Do đó độ dài đoạn thẳng AB được tính như sau: $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

Ví dụ 5. (Định lý cosin trong tam giác) Chứng minh rằng trong tam giác ABC , ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

Giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Suy ra: } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

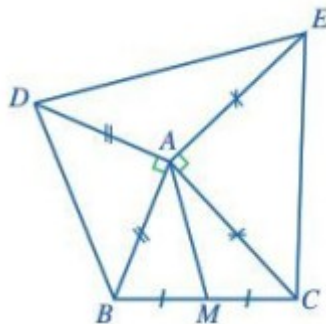
2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Nhận xét: Cho hai vector bất kì a và b khác vector 0 . Ta có: $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a \perp b$.

Hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Cũng như vậy, hai đường thẳng a và b vuông góc khi và chỉ khi $u \cdot v = 0$, trong đó $u \neq 0, v \neq 0$, giá của vector u song song hoặc trùng với đường thẳng a và giá của vector v song song hoặc trùng với đường thẳng b .

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có $AB = 3, AC = 4, \angle A = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC . Về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân tại A là ABD và ACE



a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$;

b) Biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Từ đó chứng minh $AM \perp DE$.

Giải

$$\text{a) Do } \angle BAE = \angle BAC + \angle CAE = 150^\circ, \angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = 150^\circ \text{ nên}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = AB \cdot AE \cdot \cos \angle BAE = 3 \cdot 4 \cdot \cos 150^\circ = 12 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3}$$

$$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \cos \angle CAD = 4 \cdot 3 \cdot \cos 150^\circ = 12 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} \vec{AM} &= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}), \vec{DE} = \vec{AE} - \vec{AD} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot (\vec{AE} - \vec{AD}) = \frac{1}{2}(\vec{AB} \cdot \vec{AE} + \vec{AC} \cdot \vec{AE} - \vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{AC} \cdot \vec{AD}) \\ \text{Vì } \vec{AB} \perp \vec{AD}, \vec{AC} \perp \vec{AE} \text{ nên } \vec{AB} \cdot \vec{AD} &= 0, \vec{AC} \cdot \vec{AE} = 0 \\ \text{Suy ra } \vec{AM} \cdot \vec{DE} &= \frac{1}{2}(-6\sqrt{3} + 0 - 0 + 6\sqrt{3}) = 0. \Rightarrow \vec{AM} \perp \vec{DE} \end{aligned}$$

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. TÍNH TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ, TÍNH GÓC GIỮA HAI VECTƠ

Câu 1. Cho tam giác ABC đều cạnh a , tâm O . Hãy tính:

- $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$
- $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$
- $(\vec{OB} + \vec{OC})(\vec{AB} - \vec{AC})$
- $(\vec{AB} + 2\vec{AC})(\vec{AB} - 3\vec{BC})$

Câu 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Hãy tính:

- $\vec{AB} \cdot \vec{BC}; \vec{AB} \cdot \vec{BD}; (\vec{AB} + \vec{AD})(\vec{BD} + \vec{BC}); (\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})(\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC})$
- $\vec{ON} \cdot \vec{AB}; \vec{NA} \cdot \vec{AB}$ với N là điểm trên cạnh BC .
- $\vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MC} \cdot \vec{MD}$ với M nằm trên đường tròn nội tiếp hình vuông.

Câu 3. Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $BC = 3a$, đáy nhỏ $AD = a$, đường cao $AB = 2a$

- Tính $\vec{AB} \cdot \vec{CD}; \vec{BC} \cdot \vec{BD}; \vec{AC} \cdot \vec{BD}$
- Gọi I là trung điểm của CD . Hãy tính góc giữa AI và BD .

Câu 4. Cho tam giác ABC đều cạnh a , đường cao AH . Tính:

- $\vec{AB} \cdot \vec{AC}; \vec{BA} \cdot \vec{AH}$
- $(\vec{CB} - \vec{CA})(2\vec{CA} - 3\vec{AH})$

Câu 5. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O cạnh bằng 7, góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC}; \vec{AB} \cdot \vec{OA}; \vec{AC} \cdot \vec{BD}; \vec{AB} \cdot \vec{OB}$$

Câu 6. Cho các vector a, b có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $|2a - 3b| = 3$. Tính $\cos(a, b)$.

Câu 7. Cho các vector a, b có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vector bằng 60° . Xác định cosin góc giữa hai vector u và v với $u = a + 2b, v = a - b$.

Câu 8. Cho hai vector a và b . Cho biết $|a| = 6, |b| = 3, (a, b) = 45^\circ$. Hãy tính các tích vô hướng $a(2a - b), (3a + 4b)(-2a + 3b)$.

Câu 9. Cho $|a| = 3, |b| = \sqrt{2}, |a - 3b| = 3$. Tính $|2a + b|$

Câu 10. Cho hai vector đơn vị a, b thỏa mãn điều kiện $|2a - b| = \sqrt{3}$. Tính $a \cdot b$; $|a + b|$

DẠNG 2. TÍNH ĐỘ DÀI CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG

Câu 11. Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 3, \angle BAC = 60^\circ$. Cho điểm M thỏa $\vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{0}$. Tính độ dài AM .

Câu 12. Cho tam giác ABC có $AB = a\sqrt{2}, BC = 5a, \angle ABC = 135^\circ$. Gọi điểm M thuộc AC sao cho $AM = \frac{3}{2}MC$

a). Tính $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$

b). Tìm x, y sao cho $\vec{BM} = x\vec{BA} + y\vec{BC}$ và tính BM .

Câu 13. Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 3, \angle BAC = 120^\circ$

a). Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ và độ dài trung tuyến AM .

b). Gọi AD là phân giác trong của góc A của tam giác ABC . Phân tích $\vec{AD}$ theo hai vector $\vec{AB}, \vec{AC}$. Suy ra độ dài đoạn AD .

Câu 14. Cho tam giác ABC có $AB = 2a, BC = a\sqrt{7}, AC = 3a$. Gọi M trung điểm của AB, N thuộc AC sao cho $AN = 2NC$ và D thuộc MN sao cho $2\vec{DM} = \vec{DN}$

a). Tìm x, y sao cho $\vec{AD} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$.

b). Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ và độ dài đoạn AD theo a .

DẠNG 3. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG

Sử dụng định nghĩa $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos(a, b)$

Sử dụng quy tắc chen điểm, quy tắc công trừ các vector và một số quy tắc trung điểm, trọng tâm, tính chất hình bình hành...

Tính chất giao hoán và phân phối về tích vô hướng.

Nếu trong đẳng thức chứa bình phương độ dài của đoạn thẳng, ta chú ý có thể chuyển về vector nhờ đẳng thức $AB^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB}$

Câu 15. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh $AC = a\sqrt{2}$, gọi O là giao điểm của AC và BD .

a). Tính tích vô hướng $\vec{AD} \cdot \vec{AC}$ theo a .

b). Gọi M là trung điểm cạnh BC . Chứng minh rằng $\vec{AB} \cdot \vec{OC} = 2(\vec{OC}^2 - \vec{OM}^2)$

Câu 16. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh $a\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm của AD và M là điểm bất kỳ.

a). Tính $\vec{IB} \cdot \vec{IC}$

b). Chứng minh rằng $\vec{MA} \cdot \vec{MC} = \vec{MB} \cdot \vec{MD}$

Câu 17. Cho H là trung điểm của AB và M là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{HM}^2 - \vec{HA}^2$

Câu 18. Chứng minh rằng với bốn điểm bất kỳ A, B, C, D ta có:

$\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$ (hệ thức Ô – le).

Câu 19. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$a). \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2}(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2)$$

$$b). \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos A$$

Câu 20. Cho tam giác ABC có I trung điểm của BC . Chứng minh:

$$a). \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AI}^2 + \frac{\overline{BC}^2}{2}$$

$$b). \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 2\overline{BC} \cdot \overline{IH} \text{ (Với } H \text{ là hình chiếu của } A \text{ xuống } BC).$$

Câu 21. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Chứng minh rằng

$$a). \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AM}^2 - \frac{1}{4}\overline{BC}^2$$

$$b). \overline{AM}^2 = \frac{2(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2) - \overline{BC}^2}{4}$$

Câu 22. Cho tam giác ABC , biết $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{AC} = b$. Có trọng tâm G . Chứng minh rằng

$$\overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 = \frac{1}{3}(\overline{a}^2 + \overline{b}^2 + \overline{c}^2) \text{ (hệ thức Lép – nit).}$$

Câu 23. Cho tam giác ABC , trọng tâm G . Chứng minh rằng với mọi điểm M , ta có

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 + 3\overline{MG}^2$$

Câu 24. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Chứng minh với điểm M bất kỳ ta luôn có:

$$\overline{MG}^2 = \frac{1}{3}(\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2) - \frac{1}{9}(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2)$$

Câu 25. Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính $\overline{AB} = 2R$. Gọi I là giao điểm hai đường thẳng AM và BN . Chứng minh:

$$a). \overline{AM} \cdot \overline{AI} = \overline{AB} \cdot \overline{AI}; \overline{BN} \cdot \overline{BI} = \overline{BA} \cdot \overline{BI}$$

$$b). \overline{AM} \cdot \overline{AI} + \overline{BN} \cdot \overline{BI} = 4R^2$$

Câu 26. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O và M là một điểm tùy ý. Chứng minh:

$$a). \overline{MA} \cdot \overline{MC} = \overline{MB} \cdot \overline{MD}$$

$$b). \overline{MA}^2 + \overline{MB} \cdot \overline{MD} = 2\overline{MA} \cdot \overline{MO}$$

Câu 27. Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R .

a). Chứng minh $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = 6R^2$ khi và chỉ khi M thuộc (O) .

b). Chứng minh với mọi điểm M :

$$\overline{AM}^2 + 2\overline{MB}^2 - 3\overline{MC}^2 = 2\overline{MO}(\overline{MA} + 2\overline{MB} - 3\overline{MC})$$

Câu 28. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của $\overline{AC}, \overline{BD}$. Chứng minh rằng

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{IJ}^2$$

Câu 29. Cho tam giác ABC , biết $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{CA} = b$, các đường trung tuyến tương ứng $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng với mọi M bất kì, ta có

$$2\overline{MA} \cdot \overline{MA'} + \overline{MB} \cdot \overline{MC} = 3\overline{MG}^2 - \frac{\overline{a}^2 + \overline{b}^2 + \overline{c}^2}{6}$$

- Câu 30.** Cho tam giác ABC , gọi H là trực tâm, M là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh rằng $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4} BC^2$.
- Câu 31.** Cho tam giác ABC , có $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$ lần lượt là các đường trung tuyến. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$.

DẠNG 4. CHỨNG MINH SỰ VUÔNG GÓC CỦA HAI VECTO, HAI ĐƯỜNG THẲNG.

Điều kiện $a \perp b \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$.

Điều kiện $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Lưu ý chọn gốc, chọn hệ cơ sở để biểu diễn và chứng minh vuông góc.

- Câu 32.** Cho tam giác ABC đều cạnh a . Gọi M, N là các điểm sao cho $\overrightarrow{3BM} = \overrightarrow{2BC}$, $\overrightarrow{5AN} = \overrightarrow{4AC}$.
- a). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$
- b). Chứng minh AM vuông góc với BN .
- Câu 33.** Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Về bên ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE . Gọi M trung điểm của đoạn BC . Chứng minh rằng AM vuông góc với DE .
- Câu 34.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AH và HC . Chứng minh $BI \perp AJ$.
- Câu 35.** Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi H là trung điểm của đoạn BC , D là hình chiếu vuông góc của H trên AC , M trung điểm của đoạn HD . Chứng minh AM vuông góc với DB .
- Câu 36.** Cho tứ giác $ABCD$ có E là giao của hai đường chéo AC và BD . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC, AD và H, K là trực tâm của các tam giác ABE, CDE .
- a). Chứng minh $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
- b). Chứng minh $HK \perp IJ$
- Câu 37.** Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại M . Gọi P là trung điểm của cạnh AD . Chứng minh MP vuông góc với BC khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$.
- Câu 38.** Cho hình chữ nhật $ABCD$, vẽ $BH \perp AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AH và DC . Chứng minh $BM \perp MN$.
- Câu 39.** Cho hình vuông $ABCD$, điểm M thuộc đoạn thẳng AC sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AC}}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng BC . Chứng minh rằng DMN là tam giác vuông cân.
- Câu 40.** Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O . Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABO và CDO . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC . Chứng minh $HK \perp IJ$.
- Câu 41.** Cho tam giác ABC đều cạnh $3a$. Lấy M, N, P lần lượt trên 3 cạnh BC, CA, AB sao cho $\overrightarrow{BM} = a, \overrightarrow{CN} = 2a, \overrightarrow{AP} = x$. Tìm x để AM vuông góc với PN .
- Câu 42.** Tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) . D là trung điểm của AB , E là trọng tâm tam giác ACD . Chứng minh $OE \perp CD$.

DẠNG 5. TẬP HỢP ĐIỂM

Dạng 1: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ (1) (A, B là hai điểm cố định).

- $k = 0$: Tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB .
- $k \neq 0$: Gọi I trung điểm của AB .

$$(1) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = k \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$$

+ Nếu $k + \frac{AB^2}{4} > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{AB^2}{4}$: Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $\sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$

+ Nếu $k + \frac{AB^2}{4} = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{AB^2}{4}$: Tập hợp điểm M là điểm I.

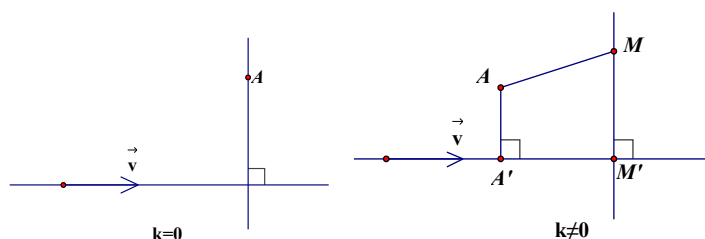
+ Nếu $k + \frac{AB^2}{4} < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{AB^2}{4}$: Tập hợp các điểm M là rỗng.

Dạng 2: $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = k$ (2) (A cố định, $\vec{v}$ có hướng, độ dài xác định).

$k = 0$: Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua A và vuông góc với giá của $\vec{v}$

$k \neq 0$: Gọi $A'M'$ là hình chiếu của $\overrightarrow{AM}$ trên giá của vector $\vec{v}$; ta có: (2) $\Leftrightarrow \overrightarrow{A'M'} \cdot \vec{v} = k$ (định lý

hình chiếu). A' cố định $\Rightarrow M'$ cố định (M' nằm trên giá của $\vec{v}$ định bởi $\overrightarrow{A'M'} = \frac{k}{|\vec{v}|} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$). Tập hợp các điểm M là đường thẳng vuông góc với giá của vector $\vec{v}$ tại M' .



Dạng 3: $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k$ (3) (A, B cố định, α, β là hằng số và $\alpha + \beta \neq 0$).

Gọi I là điểm thỏa $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow$ I là điểm cố định.

$$(3) \Leftrightarrow \alpha (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + \beta (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta) MI^2 + 2(\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{MI} + \alpha IA^2 + \beta IB^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta) MI^2 = k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta}$$

Nếu $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} > 0 \Leftrightarrow k > \alpha IA^2 + \beta IB^2$: Tập hợp điểm M là đường tròn tâm I, bán kính

$$\sqrt{\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta}}$$

Nếu $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} = 0 \Leftrightarrow k = \alpha IA^2 + \beta IB^2$: Tập hợp điểm M là điểm I.

Nếu $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} < 0 \Leftrightarrow k < \alpha IA^2 + \beta IB^2$: Tập hợp điểm M là rỗng.

Chú ý:

Để giải các bài toán thuộc loại trên, ta nên thu gọn biểu thức đã cho bằng cách sử dụng công thức thu gọn vec tơ dưới đây:

- Cho hai điểm A, B cố định α, β là hằng số thỏa $\alpha + \beta \neq 0$ thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho $\alpha \vec{IA} + \beta \vec{IB} = \vec{0}$. Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có: $\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} = (\alpha + \beta) \vec{MI}$.
- Cho ba điểm A, B, C cố định α, β, γ là hằng số thỏa $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho $\alpha \vec{IA} + \beta \vec{IB} + \gamma \vec{IC} = \vec{0}$. Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có: $\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \vec{MI}$.

Câu 43. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$

Câu 44. Cho tam giác ABC , tìm tập hợp điểm M thỏa:

- $\vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MA} \cdot \vec{MC} = 0$
- $\vec{MB} (\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}) = \vec{0}$
- $(\vec{MA} + 3\vec{MB}) (\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC}) = \vec{0}$
- $\vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MA} \cdot \vec{MC} + 9\vec{MB} \cdot \vec{MC} = 3MB^2 + 4MC^2$

Câu 45. Cho tam giác ABC , tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn điều kiện sau: $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MA} \cdot \vec{MC}$

Câu 46. Cho tam giác ABC , tìm tập hợp những điểm M sao cho: $(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}) (\vec{AC} - \vec{AB}) = \vec{AB}^2$

Câu 47. Cho tam giác ABC cân tại A có $\vec{AB} = \vec{AC} = a, \vec{BC} = 3a$. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $2MA^2 + 3MB^2 - MC^2 + 2\vec{MB} \cdot \vec{MC} = 0$

Câu 48. Cho A, B, C, D là bốn điểm cố định cho trước, tìm tập hợp những điểm M sao cho: $(\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC}) (\vec{MA} + \vec{MD}) = \vec{0}$

Câu 49. Cho đoạn $AB = a > 0$ và số k . Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 = k$

Câu 50. Cho tam giác ABC , tìm tập hợp những điểm M sao cho

- $\vec{MA} (\vec{MB} + \vec{MC}) = \vec{0}$;
- $(\vec{MA} - \vec{MC}) (\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}) = \vec{0}$.

Câu 51. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

- $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$;
- $\vec{MA} (\vec{MC} - \vec{MB}) = \vec{0}$;
- $(\vec{MA} + \vec{MB}) (\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}) = \vec{0}$;
- $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = -\vec{MA} \cdot \vec{MB}$.

Câu 52. Cho hai điểm A, B và k là một số không đổi. Tìm tập hợp những điểm M thỏa điều kiện: $MA^2 + MB^2 = k^2$.

Câu 53. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M sao cho $(\vec{MB} + \vec{MC}) (\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC}) = \vec{0}$

Câu 54. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M sao cho:

- $MB^2 + MC^2 - MA^2 = 0$

b). $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 0$

Câu 55. Cho hai điểm A, B cố định và số k cho trước. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$

Câu 56. Cho tam giác ABC , tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MG} = AB^2$ (với G là trọng tâm tam giác ABC).

Câu 57. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có trọng tâm G .

a). Xác định vị trí điểm P thỏa $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}$.

b). Chứng minh C, G, P thẳng hàng.

c). Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$

Câu 58. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC và M là một điểm thay đổi:

a). Chứng minh $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}^2$ không đổi.

b). Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = k$ (k là số thực cho trước).

Câu 59. Cho tam giác ABC . Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn:

a). $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = k$

b). $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} - 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = k$

(với k là một số cho trước).

Câu 60. Cho tam giác ABC số a . Tìm tập hợp các điểm M sao cho $3MA^2 + MB^2 - 4MC^2 = a$.

Câu 61. Cho tam giác ABC và số k . Tìm tập hợp các điểm M sao cho $2MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2 = k^2$.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho a và b là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a \cdot b = |a| \cdot |b|$. B. $a \cdot b = 0$. C. $a \cdot b = -1$. D. $a \cdot b = -|a| \cdot |b|$.

Câu 2. Cho hai vectơ a và b khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ a và b khi $a \cdot b = -|a| \cdot |b|$.

A. $\alpha = 180^\circ$. B. $\alpha = 0^\circ$. C. $\alpha = 90^\circ$. D. $\alpha = 45^\circ$.

Câu 3. Cho hai vectơ a và b thỏa mãn $|a| = 3, |b| = 2$ và $a \cdot b = -3$. Xác định góc α giữa hai vectơ a và b .

A. $\alpha = 30^\circ$. B. $\alpha = 45^\circ$. C. $\alpha = 60^\circ$. D. $\alpha = 120^\circ$.

Câu 4. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$.

Câu 5. Cho M, N, P, Q là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

A. $\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}$. B. $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.

C. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MN}$. D. $(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ})(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN}^2 - \overrightarrow{PQ}^2$.

Câu 6. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$.

- Câu 7.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$. B. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$. C. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$. D. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$.
- Câu 8.** Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ là:
- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.
- Câu 9.** Cho tam giác đều ABC cạnh $a = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây sai?
- A. $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -2$.
C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = -4$. D. $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BA} = 2$.
- Câu 10.** Cho tam giác ABC cân tại A , $\hat{A} = 120^\circ$ và $AB = a$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$
- A. $\frac{a^2}{2}$. B. $-\frac{a^2}{2}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. D. $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
- Câu 11.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Hỏi mệnh đề nào sau đây sai?
- A. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$. B. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.
- Câu 12.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Hỏi mệnh đề nào sau đây sai?
- A. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -a^2$.
C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.
- Câu 13.** Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$; I là trung điểm của AD . Khi đó $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{ID}$ bằng:
- A. $\frac{9a^2}{2}$. B. $-\frac{9a^2}{2}$. C. 0 . D. $9a^2$.
- Câu 14.** Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\hat{B} = 50^\circ$. Hệ thức nào sau đây là sai?
- A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$. B. $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$. C. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$. D. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$.
- Câu 15.** Cho hình vuông $ABCD$, tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$
- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Câu 16.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$
- A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$. B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a$. C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a\sqrt{2}$.
- Câu 17.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
- A. 0 . B. a . C. $\frac{a^2}{2}$. D. a^2 .
- Câu 18.** Cho M là trung điểm AB , tìm biểu thức sai:
- A. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB}$. B. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.
C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}$. D. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

- Câu 19.** Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a và H là trung điểm BC . Tính $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}$
- A. $\frac{3a^2}{4}$. B. $-\frac{3a^2}{4}$. C. $\frac{3a^2}{2}$. D. $-\frac{3a^2}{2}$.
- Câu 20.** Biết $a, b \neq 0$ và $\overrightarrow{ab} = -|a| \cdot |b|$. Câu nào sau đây đúng
- A. a và b cùng hướng.
 B. a và b nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc 120° .
 C. a và b ngược hướng.
 D. A, B, C đều sai.
- Câu 21.** Cho 2 vector a và b có $|a|=4$, $|b|=5$ và $(a, b)=120^\circ$. Tính $|a+b|$
- A. $\sqrt{21}$. B. $\sqrt{61}$. C. 21. D. 61.
- Câu 22.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B}=60^\circ$, $AB=a$. Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$
- A. $3a^2$. B. $-3a^2$. C. $3a$. D. 0.
- Câu 23.** Cho 2 vector đơn vị a và b thỏa $|a+b|=2$. Hãy xác định $(3a-4b)(2a+5b)$
- A. 7. B. 5. C. -7. D. -5.
- Câu 24.** Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB=4a$, đáy nhỏ $CD=2a$, đường cao $AD=3a$. Tính $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$
- A. $-9a^2$. B. $15a^2$. C. 0. D. $9a^2$.
- Câu 25.** Cho tam giác ABC vuông tại C có $AC=9$, $BC=5$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- A. 9. B. 81. C. 3. D. 5.
- Câu 26.** Cho hai vector a và b . Biết $|a|=2$, $|b|=\sqrt{3}$ và $(a, b)=120^\circ$. Tính $|a+b|$
- A. $\sqrt{7+\sqrt{3}}$. B. $\sqrt{7-\sqrt{3}}$. C. $\sqrt{7-2\sqrt{3}}$. D. $\sqrt{7+2\sqrt{3}}$.
- Câu 27.** Cho hai điểm B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2$ là :
- A. Đường tròn đường kính BC . B. Đường tròn $(B; BC)$.
 C. Đường tròn $(C; CB)$. D. Một đường khác.
- Câu 28.** Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ là :
- A. Đường tròn đường kính AB .
 B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .
 C. Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC .
 D. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB .
- Câu 29.** Cho hai điểm $A(2, 2)$, $B(5, -2)$. Tìm M trên tia Ox sao cho $\angle AMB = 90^\circ$
- A. $M(1, 6)$. B. $M(6, 0)$. C. $M(1, 0)$ hay $M(6, 0)$. D. $M(0, 1)$.
- Câu 30.** Cho hai vector a và b . Đẳng thức nào sau đây sai?
- A. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \frac{1}{2}(|a+b|^2 - |a|^2 - |b|^2)$ B. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 - |a-b|^2)$

$$C. \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|a+b|^2 - |a-b|^2)$$

$$D. \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|a+b|^2 - |a-b|^2)$$

Câu 31. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$.

$$A. \vec{AB} \cdot \vec{BC} = a^2$$

$$B. \vec{AB} \cdot \vec{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$C. \vec{AB} \cdot \vec{BC} = -\frac{a^2}{2}$$

$$D. \vec{AB} \cdot \vec{BC} = \frac{a^2}{2}$$

Câu 32. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH . Mệnh đề nào sau đây là sai?

$$A. \vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$$

$$B. (\vec{AB}, \vec{HA}) = 150^\circ$$

$$C. \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{2}$$

$$D. \vec{AC} \cdot \vec{CB} = \frac{a^2}{2}$$

Câu 33. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = c, AC = b$. Tính $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$.

$$A. \vec{BA} \cdot \vec{BC} = b^2$$

$$B. \vec{BA} \cdot \vec{BC} = c^2$$

$$C. \vec{BA} \cdot \vec{BC} = b^2 + c^2$$

$$D. \vec{BA} \cdot \vec{BC} = b^2 - c^2$$

Câu 34. Cho ba điểm A, B, C thỏa $AB = 2\text{cm}, BC = 3\text{cm}, CA = 5\text{cm}$. Tính $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$.

$$A. \vec{CA} \cdot \vec{CB} = 13$$

$$B. \vec{CA} \cdot \vec{CB} = 15$$

$$C. \vec{CA} \cdot \vec{CB} = 17$$

$$D. \vec{CA} \cdot \vec{CB} = 19$$

Câu 35. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Tính $P = (\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \vec{BC}$.

$$A. P = b^2 - c^2$$

$$B. P = \frac{c^2 + b^2}{2}$$

$$C. P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$$

$$D. P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$$

Câu 36. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = \vec{AC} \cdot (\vec{CD} + \vec{CA})$.

$$A. P = -1$$

$$B. P = 3a^2$$

$$C. P = -3a^2$$

$$D. P = 2a^2$$

Câu 37. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

$$A. \vec{AM} \cdot \vec{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$$

$$B. \vec{AM} \cdot \vec{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$$

$$C. \vec{AM} \cdot \vec{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$$

$$D. \vec{AM} \cdot \vec{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$$

Câu 38. Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $(\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot \vec{AB} = 0$ là

A. tam giác OAB đều. B. tam giác OAB cân tại O .

C. tam giác OAB vuông tại O .

D. tam giác OAB vuông cân tại O .

Câu 39. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8, AD = 5$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

$$A. \vec{AB} \cdot \vec{BD} = 62.$$

$$B. \vec{AB} \cdot \vec{BD} = 64.$$

$$C. \vec{AB} \cdot \vec{BD} = -62.$$

$$D. \vec{AB} \cdot \vec{BD} = -64.$$

Câu 40. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$ và $BD = 6$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

$$A. \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 24.$$

$$B. \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 26.$$

$$C. \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 28.$$

$$D. \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 32.$$

Câu 41. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\vec{MA} \cdot (\vec{MB} + \vec{MC}) = 0$ là:

A. một điểm.

B. đường thẳng.

C. đoạn thẳng.

D. đường tròn.

Câu 42. Tìm tập các hợp điểm M thỏa mãn $\vec{MB} \cdot (\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}) = 0$ với A, B, C là ba đỉnh của tam giác.

A. một điểm.

B. đường thẳng.

C. đoạn thẳng.

D. đường tròn.

Câu 43. Cho hai điểm A, B cố định có khoảng cách bằng a . Tập hợp các điểm N thỏa mãn $\vec{AN} \cdot \vec{AB} = 2a^2$ là:

A. một điểm.

B. đường thẳng.

C. đoạn thẳng.

D. đường tròn.

- Câu 44.** Cho hai điểm A, B cố định và $AB = 8$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -16$ là:
 A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.
- Câu 45.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a, BC = 2a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$
 A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 4a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -a^2$.
 C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -2a^2$.
- Câu 46.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính giá trị của biểu thức $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$
 A. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 3a^2$. B. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 2a^2$.
 C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a^2$. D. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 4a^2$.
- Câu 47.** Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = BC = 2\sqrt{5}, CD = BD = 5\sqrt{2}, AD = 3\sqrt{10}, AC = 10$. Tìm cosin góc giữa hai vector $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{DB}$
 A. $-\frac{4}{5\sqrt{2}}$. B. $-\frac{3}{5\sqrt{2}}$. C. $\frac{4}{5\sqrt{2}}$. D. $\frac{3}{5\sqrt{2}}$.
- Câu 48.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DA, BC . Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD biết $AB = CD = 2a, MN = a\sqrt{3}$.
 A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 50^\circ$. B. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 60^\circ$. C. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 80^\circ$. D. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 30^\circ$.
- Câu 49.** Cho tam giác OAB vuông cân tại O , cạnh $OA = 4$. Tính $|\overrightarrow{2OA} - \overrightarrow{OB}|$.
 A. $|\overrightarrow{2OA} - \overrightarrow{OB}| = 4$ B. $|\overrightarrow{2OA} - \overrightarrow{OB}| = 2$
 C. $|\overrightarrow{2OA} - \overrightarrow{OB}| = 12$ D. $|\overrightarrow{2OA} - \overrightarrow{OB}| = 4\sqrt{5}$
- Câu 50.** Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A, D ; $AB \parallel CD$; $AB = 2a$; $AD = DC = a$. O là trung điểm của AD . Độ dài vector tổng $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ bằng
 A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{3a}{2}$. C. a . D. $3a$.
- Câu 51.** Cho ABC đều cạnh $2a$ với M là trung điểm BC . Khẳng định nào đúng?
 A. $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$. B. $|\overrightarrow{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\overrightarrow{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $|\overrightarrow{AM}| = a\sqrt{3}$.
- Câu 52.** Cho tam giác vuông cân ABC với $AB = AC = a$. Khi đó $|\overrightarrow{2AB} + \overrightarrow{AC}|$ bằng
 A. $a\sqrt{3}$. B. $a\sqrt{5}$. C. $5a$. D. $2a$.
- Câu 53.** Cho hai vectơ a, b thỏa mãn: $|a| = 4; |b| = 3; |a - b| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ a, b . Chọn phát biểu đúng.
 A. $\alpha = 60^\circ$. B. $\alpha = 30^\circ$. C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. D. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$.
- Câu 54.** Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $4a$. Tích vô hướng của hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là
 A. $8a^2$. B. $8a$. C. $8\sqrt{3}a^2$. D. $8\sqrt{3}a$.
- Câu 55.** Cho $\triangle ABC$ đều; $AB = 6$ và M là trung điểm của BC . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA}$ bằng
 A. -18 . B. 27 . C. 18 . D. -27 .

- Câu 56.** Cho hai vectơ a và b . Biết $|a|=2, |b|=\sqrt{3}$ và $(a, b)=30^\circ$. Tính $|a+b|$.
A. $\sqrt{11}$. B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{12}$. D. $\sqrt{14}$.
- Câu 57.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $B=30^\circ, AC=2$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính giá trị của biểu thức $P=AM \cdot BM$.
A. $P=-2$. B. $P=2\sqrt{3}$. C. $P=2$. D. $P=-2\sqrt{3}$.
- Câu 58.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=2a, AD=3a, \angle BAD=60^\circ$. Điểm K thuộc AD thỏa mãn $\vec{AK}=-2\vec{DK}$. Tính tích vô hướng $\vec{BK} \cdot \vec{AC}$.
A. $3a^2$. B. $6a^2$. C. 0 . D. a^2 .
- Câu 59.** Cho tam giác ABC có $AB=5, AC=8, BC=7$ thì $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ bằng:
A. -20 . B. 40 . C. 10 . D. 20 .
- Câu 60.** Cho hai vectơ a, b sao cho $|a|=\sqrt{2}, |b|=2$ và hai vectơ $x=a+b, y=2a-b$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai vectơ a và b .
A. 120° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .
- Câu 61.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a$ và $AD=a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Đẳng thức nào sau đây đúng?
A. $\vec{BK} \cdot \vec{AC}=0$. B. $\vec{BK} \cdot \vec{AC}=-a^2\sqrt{2}$. C. $\vec{BK} \cdot \vec{AC}=a^2\sqrt{2}$. D. $\vec{BK} \cdot \vec{AC}=2a^2$.
- Câu 62.** Cho tam giác ABC vuông tại $A, BC=a\sqrt{3}$, M là trung điểm của BC và có $\vec{AM} \cdot \vec{BC}=\frac{a^2}{2}$. Tính cạnh AB, AC .
A. $AB=a, AC=a\sqrt{2}$. B. $AB=a, AC=a$.
C. $AB=a\sqrt{2}, AC=a$. D. $AB=a\sqrt{2}, AC=a\sqrt{2}$.
- Câu 63.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ADM . Tính giá trị của biểu thức $\vec{CG} \cdot (\vec{CA} + \vec{DM})$.
A. $\frac{21a^2}{4}$. B. $\frac{11a^2}{4}$. C. $\frac{9a^2}{4}$. D. $\frac{a^2}{4}$.
- Câu 64.** Cho các vectơ a, b có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $|2a-3b|=\sqrt{7}$. Tính $\cos(a, b)$.
A. $\cos(a, b)=\frac{\sqrt{2}}{4}$. B. $\cos(a, b)=\frac{1}{4}$. C. $\cos(a, b)=\frac{1}{2}$. D. $\cos(a, b)=\frac{1}{3}$.
- Câu 65.** Cho các vectơ a, b có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vectơ bằng 60° . Xác định cosin góc giữa hai vectơ u và v với $u=a+2b, v=a-b$.
A. $\cos(u, v)=-\frac{1}{2}$. B. $\cos(u, v)=-\frac{1}{6}$. C. $\cos(u, v)=-\frac{1}{4}$. D. $\cos(u, v)=-\frac{1}{3}$.
- Câu 66.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM=1$, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $DN=1$ và P là trung điểm BC . Tính $\cos \angle MNP$.
A. $\cos \angle MNP=\frac{13}{5\sqrt{10}}$. B. $\cos \angle MNP=\frac{13}{4\sqrt{10}}$.

C. $\cos \angle MNP = \frac{13}{\sqrt{10}}$. D. $\cos \angle MNP = \frac{13}{45\sqrt{10}}$.

- Câu 67.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2$. M là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$, G là trọng tâm tam giác ADM . Tính $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC}$.
- A. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{5}{8}$. B. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{3}{8}$. C. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{3}{7}$. D. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{1}{8}$.

- Câu 68.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a$, $BC=2a$ và G là trọng tâm. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$.
- A. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{a^2}{3}$. B. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{2a^2}{3}$.
- C. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{4a^2}{3}$. D. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{5a^2}{3}$.

- Câu 69.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = -4$. B. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$. C. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 4$. D. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 16$.

- Câu 70.** Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2}$ nằm trên một đường tròn (C) có bán kính R . Tính R .
- A. $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$. B. $R = \frac{a}{4}$. C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $R = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

- Câu 71.** Cho tam giác đều ABC cạnh 18cm. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ là
- A. Tập rỗng. B. Đường tròn cố định có bán kính $R=2$ cm.
- C. Đường tròn cố định có bán kính $R=3$ cm. D. Một đường thẳng.

- Câu 72.** Cho tam giác ABC , điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$, I là trung điểm của cạnh AB , điểm K thỏa mãn $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

Một điểm M thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$.

Tập hợp điểm M là đường nào trong các đường sau.

- A. Đường tròn đường kính IJ . B. Đường tròn đường kính IK .
- C. Đường tròn đường kính JK . D. Đường trung trực đoạn JK .

- Câu 73.** Cho tam giác ABC đều cạnh a . Lấy M, N, P lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB sao cho $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AP} = x, x > 0$. Tìm x để AM vuông góc với NP .
- A. $x = \frac{5a}{12}$. B. $x = \frac{a}{2}$. C. $x = \frac{4a}{5}$. D. $x = \frac{7a}{12}$.

- Câu 74.** Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AB=2a$, các cạnh đáy $AD=a$ và $BC=3a$. Gọi M là điểm trên đoạn AC sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$. Tìm k để $BM \perp CD$.
- A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{3}{7}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{5}$.