BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
Bắc Từ Liêm

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi có một trang thi)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2023-2024
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Bài 1 *(5.0 điểm)*

a) Chứng minh rằng n^5+5n^3-6n chia hết cho 30 với mọi số nguyên dương n.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương $(x;y)$ sao cho x^2+8y và y^2+8x đều là số chính phương.

Bài 2 *(5.0 điểm).*

a) Giải phương trình $\sqrt{2x-\frac{3}{x}}+\sqrt{\frac{6}{x}-2x}=1+\frac{3}{2x}$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{\frac{4x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\\ \sqrt{\frac{5y}{x}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\end{cases}$

Bài 3 *(3.0 điểm).*

Với mọi số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=2$

a) Chứng minh rằng $x+y+z\le 2+xy$

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x}{2+yz}+\frac{y}{2+zx}+\frac{z}{2+xy}$

Bài 4 *(6.0 điểm).*

Cho tam giác ABC (BC > CA > AB) nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm H. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC cắt tia phân giác của $\widehat{ABC}$ tại điểm thứ hai là M. Gọi P là trực tâm của tam giác BMC.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, P cùng huộc một đường tròn.

b) Đường thẳng qua H song song với AO cắt cạnh BC tại E. Gọi F là điểm trên cạnh BC sao cho CF = BE. Chứng minh ba điểm A, F, O thẳng hàng.

c) Gọi N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM. Chứng minh rằng PN = PO

Bài 5 *(1.0 điểm).*

Trên bàn có 100 thẻ được đánh số từ 1 đến 100.Hai người A và B lần lượt chọn lấy

a) Chứng minh rằng $n^5 + 5n^3 - 6n$ chia hết cho 30 với mọi số nguyên dương n.

một tấm thẻ trên bàn sao cho nếu người A lấy tấm thẻ đánh số n thì đảm bảo người B chọn được tấm thẻ đánh số 2n + 2. Hỏi người A có thể lấy được nhiều nhất bảo nhiêu tấm thẻ trên bàn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

ĐỀ SỐ 6

Bài 1 *(5.0 điểm).*

- **Phân tích.** Đặt $A = n^5 + 5n^3 - 6n$ và để ý là 30 = 2.3.5 *(2, 3, 5 nguyên tố cùng nhau theo từng đôi một) do đó ta phân tích A sao cho A chia hết cho 2, 3, 5.*
- **Lời giải.** Đặt $A = n^5 + 5n^3 - 6n$ khi đó ta có

$$A = n^5 + 5n^3 - 6n = n(n-1)(n+1) = (n^2 + 6) = n(n-1)(n+1)(n^2 - 4 + 10)$$

$$= n(n-1)(n+1)(n^2 - 4) + 10n(n-1)(n+1)$$

$$= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 10(n-1)n(n+1)$$

b) Tìm tất cả các số nguyên dương $(x;y)$ sao cho $x^2 + 8y$ và $y^2 + 8x$ đều là số chính phương.

Do $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ là tích của năm số tự nhiên liên tiếp nên tích này chia hết cho cả 2, 3, 5. Mà 2, 3, 5 nguyên tố cùng nhau theo từng đội 1 nên $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 30. Mặt khác ta lại có $(n-1)n(n+1)$ chia hết cho 2,
3 nên chia hết cho 6. Do đó $10(n-1)n(n+1)$ chia hết cho 30. Vậy A chia hết cho 30 hay $n^5 + 5n^3 - 6n$ chia hết cho 30.

- **Phân tích.** *Dễ thấy vai trò của hai biến x và y trong bài toán như nhau nên ta có thể giả sử* $x \ge y$ *khi đó ta có thấy được mới liên hệ* $x^2 + 8y \le x + 8x < x^2 + 8y + 16 = (x+4)^2$. *Để ý là* $x^2 < x^2 + 8y$. *Như vậy ta được sử* $x^2 < x^2 + 8y < (x+4)^2$ *.Do* $x^2 + 8y$ *là số chính phương nên ta có thể suy ra được*

$$x^2 + 8y = (x+1)^2, (x+2)^2, (x+3)^2.$$

Đến đây ta xét các trường hợp để tìm (x; y) thỏa mãn.

- **Lời giải.** Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x \geq y$. Khi đó ta có
$$x^2 + 8y \leq x + 8x < x^2 + 8y + 16 = (x+4)^2$$
Mà $x^2 + 8y$ là số chính phương nên ta có thể suy ra được $x^2 + 8y$ nhận một trong các giá trị
$$(x+1)^2; (x+2)^2; (x+3)^2$$
+ Trường hợp 1. Khi $x^2 + 8y = (x+1)^2$ ta được $x^2 + 8y = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow 8y = 2x + 1$, trường hợp này không xẩy ra do $8y$ là số chẵn và $2x + 1$ là số lẻ.
+ Trường hợp 2. Khi $x^2 + 8y = (x+2)^2$ ta được $x^2 + 8y = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow x = 2y - 1$.
Do $y^2 + 8x$ là số chính phương nên suy ra $y^2 + 16y - 8$ là số chính phương.
Khi y = 1 ta được x = 1 và cặp số $(x; y) = (1; 1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Xét $y \geq 2$, khi đó ta có $y^2 + 16y - 8 = (y+3)^3 + (10y - 17) > (y+3)^3$
Đồng thời ta cũng có $y^2 + 16y - 8 = (y+6)^2 - 72 < (y+8)^2$
Do đó suy ra $(y+3)^3 < y^2 + 16y - 8 < (y+8)^2$. Mà $y^2 + 16y - 8$ là số chính phương. Suy ra $y^2 + 16y - 8 \in \{(y+4)^4; (y+5)^2; (y+6)^2; (y+7)^2\}$
Giải trực tiếp các trường hợp ta được các cặp số $(x; y) = (5; 3), (21; 11)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
+ Trường hợp 3. Khi $x^2 + 8y = (x+3)^2$ ta được $x^2 + 8y = x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow 8y = 6x + 9$ trường hợp này không xảy ra do $8y$ là số chẵn và $6x + 9$ là số lẻ.

Vậy các cặp số (5) thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x; y) = (1; 1), (3; 5), (5; 3), (11; 21), (21; 11)$

- **Nhận xét.** Để tìm y thỏa mãn $y^2 + 16y - 8$ là số chính phương ta có thể xử lý theo cách khác Đặt $y^2 + 16y - 8 = k^2 (k \in N)$. Khi đó ta có
$$y^2 + 16y - 8 = k^2 \Leftrightarrow (y+8)^2 = k^2 + 72 \Leftrightarrow (y + 8 - k)(y + 8 + k) = 72$$
Để ý rằng $y + 8 + k > y + 8 - k > 0$ cùng tính chẵn lẻ.
Lại có 72 = 2.36 = 4.15 = 6.12 . Đến đây ta xét các trường hợp xảy ra để tìm y theo bảng sau

$y+8-k$	2	4	6
$y+8+k$	36	18	12
k	17	7	3
y	11	3	1

Đến đây ta có kết quả tương tự như trên.

Bài 2 (5.0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{2x - \frac{3}{x}} + \sqrt{\frac{6}{x} - 2x} = 1 + \frac{3}{2x}$

- **Phân tích**. *Phương trình đã cho có chứa hai căn thức và có ẩn ở mẫu. Quan sát kỹ phương trình ta nhận thấy* $(2x - \frac{3}{x}) + (\frac{6}{x} - 2x) = \frac{3}{x}$ *có mối liên hệ với vế phải của phương trình, do đó ta sử dụng các đánh giá để làm mất căn thức hoặc đưa hai biểu thức trong căn vào cùng một căn thức.*
  Theo bất đẳng thức AM – GM ta có
  $\sqrt{2x - \frac{3}{x}} + \sqrt{\frac{6}{x} - 2x} \le \frac{1}{2}\left(1 + 2x - \frac{3}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{6}{x} - 2x\right) = 1 + \frac{3}{2x}$
  Đến đây ta giải quyết được phương trình.
- **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là : $x \ne 0; 2x - \frac{3}{x} \ge 0; \frac{6}{x} - 2x \ge 0$ hay $\frac{\sqrt{6}}{2} \le x \le \sqrt{3}$.
  Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có
  $\sqrt{2x - \frac{3}{x}} + \sqrt{\frac{6}{x} - 2x} \le \frac{1}{2}\left(1 + 2x - \frac{3}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{6}{x} - 2x\right) = 1 + \frac{3}{2x}$
  Kết hợp với phương trình đã cho suy ra dấu bằng của các bất đẳng thức trên xảy ra

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{\frac{4x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} \\ \sqrt{\frac{5y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} \end{cases}$

Do đó ta có $\begin{cases} 2x - \frac{3}{x} = 1 \\ \frac{6}{x} - 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$,thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = \frac{3}{2}$

- **Phân tích**. Quan sát hệ phương trình ta nhận thấy $\sqrt{\frac{4x}{5y}}.\sqrt{\frac{5y}{x}} = 2$ và khi nhân hai vế phải của hai phương trình thì ta lại có và khi nhân hai vế phải của $(\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y})(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}) = 2y$. Đến đây ta được y =1, khi $\sqrt{\frac{5}{x}} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$

- **Lời giải**. Điều kiện xác định của hệ phương trình là $x \ge y > 0$. Nhận theo vế hai phương trình của hệ đã cho ta được
$\sqrt{\frac{4x}{5y}}.\sqrt{\frac{5y}{x}} = (\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y})(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}) \Leftrightarrow 2 = 2y \Leftrightarrow y = 1$

  Thay vào phương trình thứ hai của hệ đã cho ta được $\sqrt{\frac{5}{x}} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$

  + Xét $x = \frac{5}{4}$. Khi đó ta được và $\sqrt{4} = \sqrt{\frac{5}{4}+1} + \sqrt{\frac{5}{4}-1}$, đẳng thức đúng. Do đó $x = \frac{5}{4}$
  là một nghiệm của phương trình.

  + Xét $x > \frac{5}{4}$.Khi đó ta có $\sqrt{\frac{5}{x}} < \sqrt{4} = \sqrt{\frac{5}{4}+1} + \sqrt{\frac{5}{4}-1} < \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$,do đó phương trình không có nghiệm.

  + Xét $x < \frac{5}{4}$. Khi đó ta có $\sqrt{\frac{5}{x}} > \sqrt{4} = \sqrt{\frac{5}{4}+1} + \sqrt{\frac{5}{4}-1} > \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$
  , do đó phương trình không có nghiệm.

  Do đó $x = \frac{5}{4}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 3. Với mọi số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x;y) = \left(\frac{5}{4};1\right)$

a) Chứng minh rằng $x + y + z \le 2 + xy$

- **Lời giải**. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được
$x + y + x = (x+y).1 + z.1 \le \frac{(x+y)^2+1}{2} + \frac{z^2+1}{2} = \frac{x^2+y^2+z^2+2xy+2}{2} = 2 + xy$

Dấu bằng xảy ra tại $\begin{cases} x+y=1 \\ z=1 \\ x^2+y^2+z^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=z=1; y=0 \\ y=z=1; x=0 \end{array}\right.$

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{2+yz}+\dfrac{y}{2+zx}+\dfrac{z}{2+xy}$

- **Lời giải.**
  + Tìm giá trị lớn nhất của P.
  Áp dụng kết quả câu a ta có các bất đẳng thức
  $$x+y+z\le 2+xy; x+y+z\le 2+yz; x+y+z\le 2+zx$$
  Khi đó ta được $P=\dfrac{x}{2+yz}+\dfrac{y}{2+zx}+\dfrac{z}{2+xy}<\dfrac{x}{x+y+z}+\dfrac{y}{x+y+z}+\dfrac{z}{x+y+z}=1$
  Do đó giá trị lớn nhất của P là 1, dấu bằng xảy ra tại $x=y=1; z=0$ và các hoán vị.
  + Tìm giá trị nhỏ nhất của P.
  Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $\dfrac{x}{2+yz}=\dfrac{2x}{4+2yz}\ge\dfrac{2x}{4+y^2+z^2}=\dfrac{2x}{6-x^2}$
  Ta sẽ chứng minh khi $0\le x\le\sqrt{2}$ thì $\dfrac{2x}{6-x^2}\ge\dfrac{x^2}{2\sqrt{2}}$.Thật vậy, đặt $t=x\sqrt{2}$ thì ta có $0\le t\le 1$. Ta cần chứng minh $\dfrac{t\sqrt{2}}{3-t^2}\ge\dfrac{t^2}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow t(1-t)^2(2+t)\ge 0$ là một bất đẳng thức đúng.
  Vậy ta có $\dfrac{2x}{6-x^2}\ge\dfrac{x^2}{2\sqrt{2}}$, dấu bằng xảy ra tại $x=0$ hoặc $x=\sqrt{2}$
  Như vậy ta có $\dfrac{x}{2+yz}\ge\dfrac{x^2}{2\sqrt{2}}$
  Áp dụng tương tự ta được $\dfrac{y}{2+zx}\ge\dfrac{y^2}{2\sqrt{2}}; \dfrac{z}{2+xy}\ge\dfrac{z^2}{2\sqrt{2}}$.Công theo vế các bất đẳng thức ta
  $$P=\frac{x}{2+yz}+\frac{y}{2+zx}+\frac{z}{2+xy}\ge\frac{x^2+y^2+z^2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$
  Dấu bằng xảy ra khi $x=\sqrt{2}; y=z=0$ và các hoán vị.
  Vậy giá trị nhỏ nhất của P là lạ, đạt được tại $x=\sqrt{2}; y=z=0$ và các hoán vị

• ***Nhận xét***. *Câu a của bài toán chính là gợi ý để tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P. Ngoài ra ta có thể tìm giá trị lớn nhất của P độc lập với gợi ý ở câu a như sau*

$$2P = \frac{2x}{2+yz} + \frac{2y}{2+zx} + \frac{2z}{2+xy} = x+y+z - xyz\left(\frac{1}{2+yz} + \frac{1}{2+zx} + \frac{1}{2+xy}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta được

$$\frac{1}{2+yz} + \frac{1}{2+zx} + \frac{1}{2+xy} \geq \frac{9}{6+xy+yz+zx} \geq \frac{9}{6+x^2+y^2+z^2} = \frac{9}{8} > 1$$

Khi đó ta có $2P \leq x+y+z - xyz = x(1-yz) + y + z$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta được ta lại có

$$\left[x(1-yz) + (y+z)\right]^2 \leq \left[x^2 + (y+z)^2\right]\left[(1+yz)^2 + 1\right]$$

$$= (2+2yz)(2-2yz+y^2z^2) = 4 + 2y^2z^2(yz-1) \leq 4$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng vì $yz \leq \frac{y^2+z^2}{2} \leq 2$. *Do đó ta được* $4P^2 \leq 4 \Rightarrow P \leq 1$.

Với ý thứ hai của câu b ta có thể trình bày cách khác như sau

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta được

$$P = \frac{x}{2+yz} + \frac{y}{2+zx} + \frac{z}{2+xy} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x(2+yz)+y(2+zx)+z(2+xy)} = \frac{(x+y+x)^2}{2(x+y+z)+3xyz}$$

Đặt $t = x+y+z$ *z, khi đó ta* $t^2 \geq x^2+y^2+z^2 = 2$ *và* $^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2) = 6$

Từ đó suy ra $\sqrt{2} \leq t \leq 6$. *Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được*

$$9xyz \leq (x+y+z)(xy+yz+zx) = \frac{t^2(t^2-2)}{2}$$

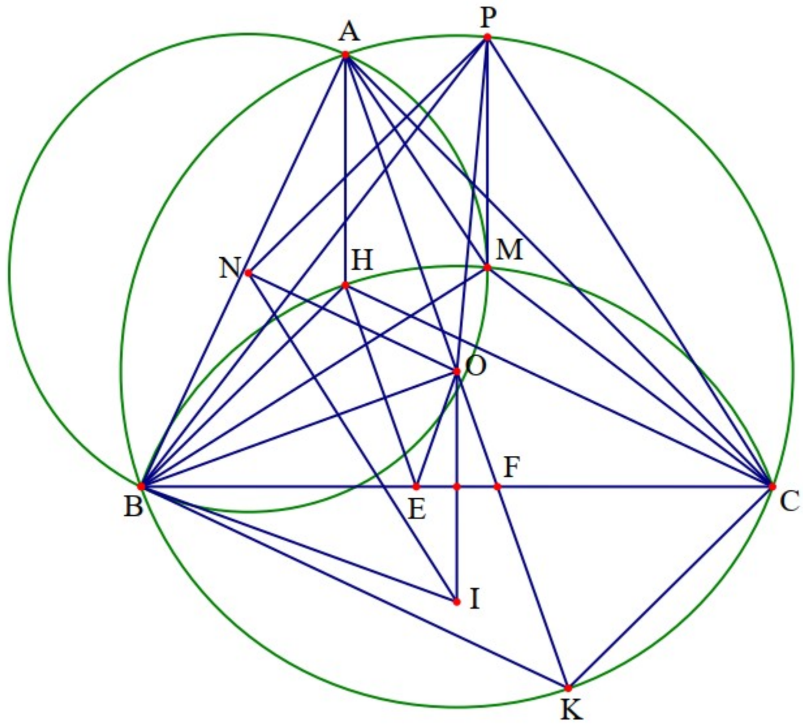
Kết hợp với bất đẳng thức trên ta được $P \geq \dfrac{t^2}{2t + \dfrac{t(t^2-2)}{2}} = \dfrac{6t}{t^2+10}$

Ta có $\frac{6t}{t^2+10} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}(t^2+10) \Leftrightarrow (t+\sqrt{2})(t-5\sqrt{2}) \leq 0$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do $\sqrt{2} \leq t \leq 6$. *Vậy ta được* $P \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 4 (6.0 điểm).

Cho tam giác ABC (BC > CA > AB) nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm H. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC cắt tia phân giác của $\widehat{ABC}$ tại điểm thứ hai là M. Gọi P là trực tâm của tam giác BMC.



a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, P cùng thuộc một đường tròn.

- **Phân tích**. Để chứng minh bốn điểm A, B, C, P cùng thuộc một đường tròn ta cần có $\widehat{BPC} = \widehat{BAC}$
  Do P là trực tâm tam giác BMC nên M là
  trực tâm tam giác PBC. Từ đó ta có
  $\widehat{BPC} = 180^o - \widehat{BMC}$.
  Lại thấy $\widehat{BAC} = 180^o - \widehat{BHC}$. Đến đây ta có điều cần chứng minh vì
  $\widehat{BHC} = \widehat{BMC}$
- **Lời giải**. Do P là trực tâm tam giác BMC nên M là trực tâm tam giác PBC. Từ đó ta có $\widehat{BPC} = 180^O - \widehat{BMC}$. Do H là trực tâm tam giác ABC nên $\widehat{BAC} = 180^o - \widehat{BHC}$. Mà ta lại có $\widehat{BHC} = \widehat{BMC}$ do tứ giác BHMC nội tiếp. Do đó ta được $\widehat{BPC} = 180^o - \widehat{BMC} = 180^o - \widehat{BHC} = \widehat{BAC}$. Suy ra bốn điểm A, B, C, P cùng thuộc một đường tròn.

b) Đường thẳng qua H song song với AO cắt cạnh BC tại E. Gọi F là điểm trên cạnh BC sao cho CF = BE . Chứng minh ba điểm A, F, O thẳng hàng.

- **Phân tích**. Để chứng minh ba điểm A, F, O thẳng hàng ta cần chứng minh F thuộc đường kính đi qua A của đường tròn (O). Giả sử AK là đường kính, khi đó ta đi chứng minh ba điểm A, F, K thẳng hàng. Giả thiết cho HE song song với AK nên ta đi chứng minh FK song song với EH. Dễ thấy hai tam giác HBE và CKF bằng nhau nên $\widehat{KFC} = \widehat{HEB}$, đến đây ta có điều phải chứng minh.

- **Lời giải.** Dựng đường kính AK của đường tròn (O). Khi đó dễ dàng chứng minh được tứ giác BHCK là hình bình hành.

  Xét hai tam giác BHE và CKF có BE = CF; $\widehat{KFC} = \widehat{HEB}$; BH = CK nên $\Delta BHE = \Delta CKF$.

  Từ đó ta được $\widehat{KFC} = \widehat{HEB}$, từ đó ta được HE song song với KF. Lại có AK song song với HE nên ba điểm A, F, K thẳng hàng. Suy ra ba điểm A, F, O thẳng hàng.

c) Gọi N là tam đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM. Chứng minh rằng PN = PO.

Phân tích và lời giải. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC. Ta có ABHC = ACKB nên bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BKB. Từ đó ta suy ra được OB = OC = IB = IC . Chú ý rằng ON là đường trung trực của AB và OI là đường trung trực của BC, IN là đường trung trực của BM nên ta suy ra được $\widehat{ONI} = \widehat{ABM}$ và $\widehat{OIN} = \widehat{MBC}$.

Từ đó dẫn đến $\widehat{ABM} = \widehat{MBC} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$ nên $\widehat{OIN} = \widehat{ONI} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$ hay tam giác OIN cân tại O, đồng thời ta có $\widehat{NOI} = 180^o - 2\widehat{NIO} = 180^o - \widehat{ABC}$.

Lại có $\widehat{POB} = 2\widehat{PCB} = 2(90^o - \widehat{MBC}) = 180^o - 2\widehat{MBC} = 180^0 - \widehat{ABC}$.

Từ đó ta được $\widehat{NOI} = \widehat{POB}$ nên suy ra $\widehat{NOP} = \widehat{IOB}$.

Hai tam giác OBI và OPN có OI = ON; $\widehat{NOP} = \widehat{IOB}$, OB = ON nên $\Delta OBI = \Delta POB$.

Mà tam giác OBO cân tại B nên tam giác OPN cân tại P. Từ đó suy ra PN = PO

Bài 5 (1.0 điểm).

Trên bàn có 100 thẻ được đánh số từ 1 đến 100. Hai người A và B lần lượt chọn lấy một tầm thẻ trên bàn sao cho nếu người A lấy tấm thẻ đánh số n thì đảm bảo người B chọn được tấm thẻ đánh số 2n + 2. Hỏi người A có thể lấy được nhiều nhất bao nhiêu tấm thẻ trên bàn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Phân tích. Vì B bốc thẻ có đánh số 2n+2 nền 2n+2 ≤ 100. Suy ra n ≤ 49 . Do đó A chỉ được bốc các tấm thẻ có đánh số từ 1 đến 49. Ta xét tập {1:2;3;4;...;49). Giả sử ta cho A bốc các tâm thẻ
có đánh các số lẻ từ 1 đến 49. Như vậy A có thể bốc được 25 số. Khi đó B bốc được các 12 tấm thẻ đánh số chẵn là 4;8;12....,48 có trong tập hợp trên và 13 tấm thẻ đánh số lấy từ các số còn lại. Cho A bốc các tâm thẻ có đánh số chẵn, khi đó A bốc được 8 số tương ứng với B bốc được 8 số trong đó có bố số thuộc tập hợp trên. Như vậy tập hợp trên vừa hết số. Do đó tối đa A chỉ bốc được 33 số. Để chứng minh điều này ta chia tập hợp {1;2;3;4;...;49} thành các như sau
+Nhóm 1 gồm {1;4},{3;8},{5;12},{7;16}....(23;48}, trong đó có 12 số A bốc được và 12 số B bốc được có trong tập hợp trên.
+ Nhóm 2 gồm {2;6},{10;22} ,{14;30},{18;38}, trong đó có 4 số A bốc được và 4 số B bốc được có
trong tập hợp trên.
+ Nhóm 3 gồm {25},{27},{29},{31},…,{49}, trong đó có 13 số A bốc được có trong tập hợp trên và tương ứng 13 số B bốc được từ các số còn lại.
+Nhóm 4 gồm {26},{32},{42},{46}, trong đó có 4 số A bốc được có trong tập hợp trên và tương ứng 4 số B bốc được từ các số còn lại.
Như vậy nếu A bốc được từ 34 số trở lên thì sẽ có hai số trùng nhau. Từ đó ta có lời giải như sau
Lời giải. Vì B bốc thẻ có đánh số $2n+2$ nên $2n+2 \leq 100$. Suy ra n ≤ 49 . Do đó A chỉ được bốc các tấm thẻ có đánh số từ 1 đến 49. Ta chia tập hợp {1;2;3;...;49} thành 33 tập hợp con như sau
+ Nhóm 1 gồm {1;4},{3;8},{5;12},{7;16}....{23;48}(12 nhóm).
+ Nhóm 2 gồm {2;6},{10;22} ,{14;30},{18;38} (4 nhóm).
+ Nhóm 3 gồm {25},{27},{29},{31},…,{49}(13 nhóm).
+ Nhóm 4 gồm {26},{32},{42},{46} (4 nhóm).
Trong mỗi nhóm A được chọn tối đa một số. Nếu A chọn được nhiều hơn 34 số trong các số từ 1 đến 49 thì theo nguyên lý Dirichlet sẽ tồn tại hai số bằng nhau. Do đó A chỉ chọn được tối đa 33 số.Mặt khác A chỉ chọn được 33 số sau thỏa mãn yêu cầu bài toán là

{1:3;5;…; 23; 2;10;14;18; 25; 27; 29;…; 49; 26; 32; 42;46}

Vậy A có thể lấy tối đa 33 tấm thẻ.