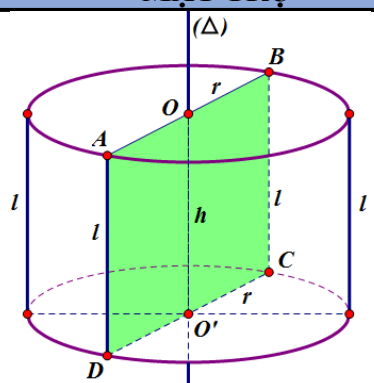


TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

MẶT TRỤ	Các yếu tố mặt trụ:	Một số công thức:
 Hình thành: Quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh đường trung bình OO', ta có mặt trụ như hình bên.	▪ Đường cao: $h = OO'$. ▪ Đường sinh: $l = AD = BC$. Ta có: $l = h$. ▪ Bán kính đáy: $r = OA = OB = O'C = O'D$. ▪ Trục (Δ) là đường thẳng đi qua hai điểm O, O'. ▪ Thiết diện qua trục: Là hình chữ nhật $ABCD$.	▪ Chu vi đáy: $p = 2\pi r$. ▪ Diện tích đáy: $S_d = \pi r^2$. ▪ Thể tích khối trụ: $V = h.S_d = h.\pi r^2$. ▪ Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi r.h$. ▪ Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 2\pi r.h + 2\pi r^2$.

MỘT SỐ BÀI TOÁN VD – VDC LIÊN QUAN ĐẾN KHỐI TRỤ (CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ - CỰC TRỊ)

Câu 1. (Mã 104 - 2019) Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1 m và 1,5 m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm gần nhất với kết quả nào dưới đây?

- A. 1,8 m. B. 2,1 m. C. 1,6 m. D. 2,5 m.

Lời giải

Chọn A

Gọi h là chiều cao của các bể nước và r là bán kính đáy của bể nước dự định làm.

Theo giả thiết, ta có $\pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot h + \pi \cdot (1,5)^2 \cdot h \Leftrightarrow r^2 = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}$.

Suy ra $r = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,8$.

Câu 2. (Mã 101 2019) Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1m và 1,2m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm gần nhất với kết quả nào dưới đây?

- A. 2,2m. B. 1,6m. C. 1,8m. D. 1,4m.

Lời giải

Chọn B

Gọi $R_1; R_2; R$ lần lượt là bán kính của trụ thứ nhất, thứ hai và dự kiến sẽ làm, ta có:

$$V = V_1 + V_2 = \pi R^2 h = \pi R_1^2 h + \pi R_2^2 h \Leftrightarrow R^2 = R_1^2 + R_2^2.$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = \sqrt{1^2 + (1,2)^2} \approx 1,56(m).$$

Vậy: Giá trị cần tìm là: 1,6 m.

Câu 3. (Mã 102 - 2019) Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1m và 1,4 m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều

cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?

A. 1,7 m.

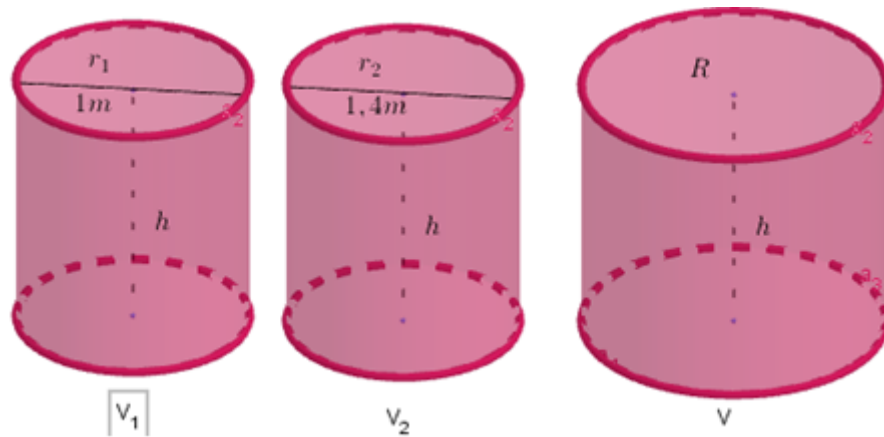
B. 1,5 m.

C. 1,9 m.

D. 2,4 m.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $V = V_1 + V_2 \Leftrightarrow h\pi R^2 = h\pi r_1^2 + h\pi r_2^2$.

$$\Rightarrow R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \approx 1,72 \text{ m}.$$

Câu 4. (Mã 103 - 2019) Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1m và 1,8m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?

A. 2,8m.

B. 2,6m.

C. 2,1m.

D. 2,3m.

Lời giải

Chọn C

Gọi hai bể nước hình trụ ban đầu lần lượt có chiều cao là h , bán kính r_1, r_2 , thể tích là V_1, V_2 .

Ta có một bể nước mới có chiều cao h , $V = V_1 + V_2$.

$$\Rightarrow \pi r^2 h = \pi r_1^2 h + \pi r_2^2 h \Rightarrow \pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot h + \pi \cdot 1,8^2 \cdot h \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{106}{25}} \approx 2,1 \text{ m}.$$

Câu 5. (Mã 102 2018) Một chiếc bút chì có dạng khối trụ lục giác đều có cạnh đáy 3 (mm) và chiều cao bằng 200 (mm). Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính 1 (mm). Giả định 1 m^3 gỗ có giá a triệu đồng, 1 m^3 than chì có giá $6a$ triệu đồng. Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?

A. 8,45.a đồng

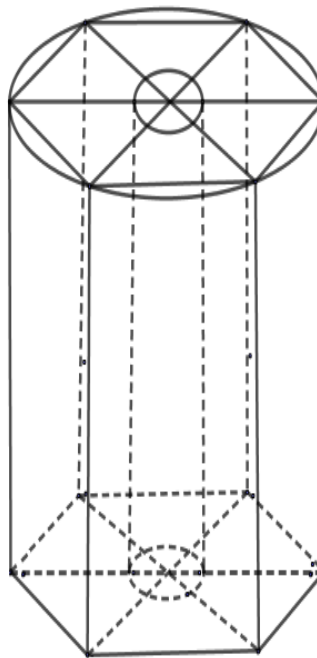
B. 7,82.a đồng

C. 84,5.a đồng

D. 78,2.a đồng

Lời giải

Chọn B



1 m^3 gỗ có giá a triệu đồng suy ra 1 mm^3 gỗ có giá $\frac{a}{1000}$ đồng.

1 m^3 than chì có giá $6a$ triệu đồng suy ra 1 mm^3 than chì có giá $\frac{6a}{1000}$ đồng.

Phần chì của cái bút có thể tích bằng $V_1 = 200 \cdot \pi \cdot 1^2 = 200\pi (\text{mm}^3)$.

Phần gỗ của của bút chì có thể tích bằng $V_2 = 200 \cdot 6 \cdot \frac{3^2 \sqrt{3}}{4} - 200\pi = 2700\sqrt{3} - 200\pi (\text{mm}^3)$.

Số tiền làm một chiếc bút chì là $\frac{6a \cdot V_1 + a \cdot V_2}{1000} \approx 7,82a$ đồng.

Câu 6. (Mã 101 2018) Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy 3 mm và chiều cao bằng 200 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính đáy 1 mm. Giả định 1 m^3 gỗ có giá a (triệu đồng), 1 m^3 than chì có giá $8a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

- A. $9,07a$ (đồng) B. $97,03a$ (đồng) C. $90,7a$ (đồng) D. $9,7a$ (đồng)

Lời giải

Chọn.

D.

Diện tích của khối lăng trụ lục giác đều là $S = 6 \cdot \left((3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \right) (\text{m}^2)$

Thể tích của chiếc bút chì là: $V = S \cdot h = 6 \cdot \left((3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot 200 \cdot 10^{-3} = 27\sqrt{3} \cdot 10^{-7} (\text{m}^3)$.

Thể tích của phần lõi bút chì là $V_1 = \pi r^2 h = \pi \cdot (10^{-3})^2 \cdot 200 \cdot 10^{-3} = 2\pi \cdot 10^{-7} (\text{m}^3)$.

Suy ra thể tích phần thân bút chì là $V_2 = V - V_1 = (27\sqrt{3} - 2\pi) \cdot 10^{-7} (\text{m}^3)$.

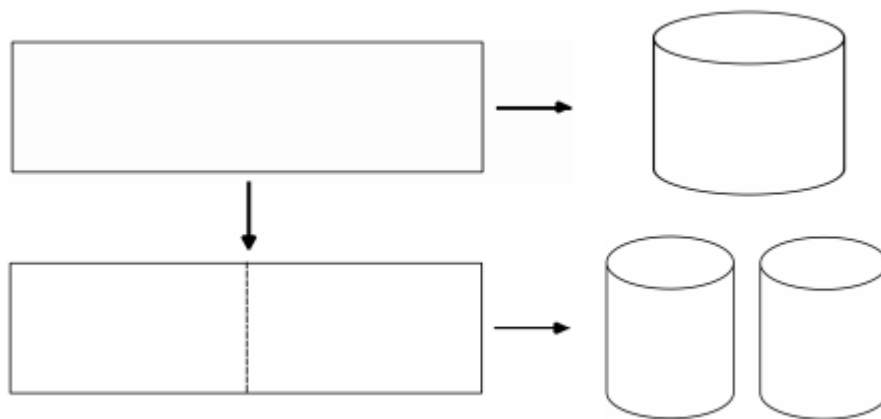
Giá nguyên liệu làm một chiếc bút chì như trên là:

$V_2 \cdot a \cdot 10^6 + V_1 \cdot 8a \cdot 10^6 = (27\sqrt{3} - 2\pi) \cdot 10^{-7} \cdot a \cdot 10^6 + 2\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8a \cdot 10^6 = (2,7\sqrt{3} + 1,4\pi)a \approx 9,07a$ (đồng).

Câu 7. (Đề Minh Họa 2017) Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50cm.240cm$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng $50cm$, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):.

- Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.
- Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$

B. $\frac{V_1}{V_2} = 1$

C. $\frac{V_1}{V_2} = 2$

D. $\frac{V_1}{V_2} = 4$

Lời giải

Chọn C

Ban đầu bán kính đáy là R , sau khi cắt tấm tôn bán kính đáy là $\frac{R}{2}$

Đường cao của các khối trụ là không đổi

Ta có $V_1 = h\pi R^2$, $V_2 = 2.h\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = h\pi\frac{R^2}{2}$. Vậy tỉ số $\frac{V_1}{V_2} = 2$.

Câu 8. (Mã 104 2018) Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy 3 mm và chiều cao 200 mm . Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều cao của bút và đáy là hình tròn có bán kính 1 mm . Giả định 1 m^3 gỗ có giá a (triệu đồng), 1 m^3 than chì có giá $7a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $85,5.a$ (đồng)

B. $9,07.a$ (đồng)

C. $8,45.a$ (đồng)

D. $90,07.a$ (đồng)

Lời giải

Chọn C

Thể tích phần lõi than chì: $V_1 = \pi.0,001^2.0,2 = 2\pi.10^{-7}\text{ m}^3$.

Số tiền làm lõi than chì $T_1 = (2\pi.10^{-7})7a.10^6 = 1,4\pi a$ (đồng).

Thể tích phần thân bằng gỗ của bút

$$V_2 = 6.\frac{(0,003)^2\sqrt{3}}{4}.0,2 - 2\pi.10^{-7} = \left[\sqrt{3}.27.10^{-7} - 2\pi.10^{-7}\right]\text{ m}^3.$$

Số tiền làm phần thân bằng gỗ của bút

$$T_2 = \left[27\sqrt{3}.10^{-7} - \pi.2.10^{-7}\right]a.10^6 = \left[2,7\sqrt{3} - \pi.0,2\right]a \text{ (đồng)}.$$

Vậy giá vật liệu làm bút chì là: $T = T_1 + T_2 \approx 8,45.a$ (đồng).

- Câu 9. (Mã 103 2018)** Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy bằng 3 mm và chiều cao bằng 200 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 mm. Giả định $1m^3$ gỗ có giá a (triệu đồng). $1m^3$ than chì có giá $9a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?
- A. $103,3a$ đồng B. $97,03a$ đồng C. $10,33a$ đồng D. $9,7a$ đồng

Lời giải

Chọn D

$$3mm = 0,003m; 200mm = 0,2m; 1mm = 0,001m$$

$$\text{Diện tích đáy của phần than chì: } S_1 = \pi r^2 = \pi \cdot 10^{-6} (m^2)$$

$$\text{Diện tích đáy phần bút bằng gỗ: } S_2 = 6S_{OAB} - S_1 = \left(6 \cdot \frac{3^2 \sqrt{3}}{4} - \pi \right) \cdot 10^{-6} = \left(\frac{27\sqrt{3}}{2} - \pi \right) \cdot 10^{-6} (m^2)$$

$$\text{Thể tích than chì cần dùng: } V_1 = S_1 \cdot h = \pi r^2 \cdot 0,2 = 0,2\pi \cdot 10^{-6} (m^3)$$

$$\text{Thể tích gỗ làm bút chì: } V_2 = S_2 \cdot h = \left(\frac{27\sqrt{3}}{2} - \pi \right) \cdot 0,2 \cdot 10^{-6} (m^3)$$

Tiền làm một cây bút:

$$V_1 \cdot 9a + V_2 \cdot a = (9V_1 + V_2) a = \left(9 \cdot 0,2\pi \cdot 10^{-6} + \left(\frac{27\sqrt{3}}{2} - \pi \right) \cdot 0,2 \cdot 10^{-6} \right) a = 9,7a \text{ (đồng)}$$

- Câu 10. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Người ta làm tạ tập cơ tay như hình vẽ với hai đầu là hai khối trụ bằng nhau và tay cầm cũng là khối trụ. Biết hai đầu là hai khối trụ đường kính đáy bằng 12, chiều cao bằng 6, chiều dài tay bằng 30 và bán kính tay cầm là 2. Hãy tính thể tích vật liệu làm nên tạ tay đó.



- A. 108π . B. 6480π . C. 502π . D. 504π .

Lời giải

Gọi h_1 , R_1 , V_1 lần lượt là chiều cao, bán kính đáy, thể tích khối trụ nhỏ mỗi đầu.

$$V_1 = h_1 \cdot \pi \cdot R_1^2 = 6 \cdot \pi \cdot 6^2 = 216\pi .$$

Gọi h_2 , R_2 , V_2 lần lượt là chiều cao, bán kính đáy, thể tích của tay cầm.

$$V_2 = h_2 \cdot \pi \cdot R_2^2 = (30 - 2 \cdot 6) \cdot \pi \cdot 2^2 = 72\pi .$$

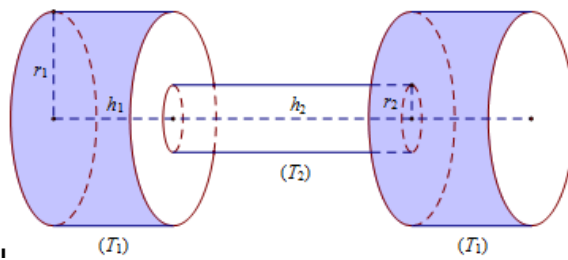
$$\text{Thể tích vật liệu làm nên tạ tay bằng } V = 2V_1 + V_2 = 504\pi .$$

- Câu 11. (THPT Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Một người thợ có một khối đá hình trụ. Kẻ hai đường kính MN , PQ của hai đáy sao cho $MN \perp PQ$. Người thợ đó cắt khối đá theo các mặt đi qua 3 trong 4 điểm M, N, P, Q để khối đá có hình tứ diện $MNPQ$. Biết $MN = 60$ cm và thể tích khối tứ diện $MNPQ = 30 \text{ dm}^3$. Hãy tính thể tích lượng đá cắt bỏ (làm tròn đến một chữ số thập phân sau dấu phẩy).

- A. $101,3 \text{ dm}^3$ B. $111,4 \text{ dm}^3$ C. $121,3 \text{ dm}^3$ D. $141,3 \text{ dm}^3$

Lời giải

Chọn B



Biết rằng thể tích của khối trụ tay cầm (T_2) bằng $30 \text{ (cm}^3\text{)}$ và chiếc tạ làm bằng inox có khối lượng riêng là

$D = 7,7 \text{ g/cm}^3$. Khối lượng của chiếc tạ tay bằng

- A.** $3,927 \text{ (kg)}$. **B.** $2,927 \text{ (kg)}$. **C.** $3,279 \text{ (kg)}$. **D.** $2,279 \text{ (kg)}$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích của hai khối trụ làm đầu tạ (T_1):

$$V_1 = 2\pi r_1^2 h_1 = 2\pi (4r_2)^2 \frac{1}{2} h_2 = 16\pi r_2^2 h_2 = 16 \cdot 30 = 480 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Tổng thể tích của chiếc tạ tay: $V = V_1 + V_2 = 480 + 30 = 510 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Khối lượng của chiếc tạ: $m = D \cdot V = 7,7 \cdot 510 = 3927 \text{ (g)} = 3,927 \text{ (kg)}$.

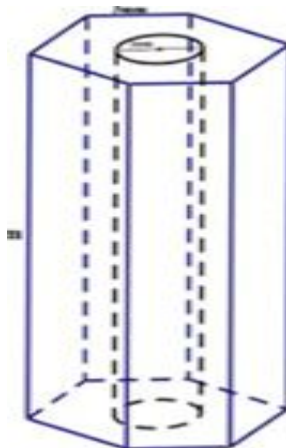
Câu 14. (Thi thử hội 8 trường chuyên 2019) Một công ty sản xuất bút chì có dạng hình lăng trụ lục giác đều có chiều cao 18cm và đáy là hình lục giác nội tiếp đường tròn đường kính 1cm. Bút chì được cấu tạo từ hai thành phần chính là than chì và bột gỗ ép, than chì là một khối trụ ở trung tâm có đường kính $\frac{1}{4}$ cm, giá thành 540 đồng/cm³. Bột gỗ ép xung quanh có giá thành 100 đồng/cm³.

Tính giá của một cái bút chì được công ty bán ra biết giá nguyên vật liệu chiếm 15,58% giá thành sản phẩm.

- A.** 10000 đồng. **B.** 8000 đồng. **C.** 5000 đồng. **D.** 3000 đồng.

Lời giải

Chọn A



Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp lục giác đều và bán kính của lõi than chì.

Ta có $R = \frac{1}{2}$ cm và $r = \frac{1}{8}$ cm.

Suy ra diện tích của lục giác đều là $S = 6 \cdot R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Gọi V là thể tích của khối lăng trụ lục giác đều. V_1 , V_2 lần lượt là thể tích của khối than chì và bột gỗ dùng để làm ra một cây bút chì.

$$\text{Ta có } V = S.h = \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot 18 = \frac{27\sqrt{3}}{4} (\text{cm}^3); V_1 = \pi r^2 h = \pi \cdot \frac{1}{8^2} \cdot 18 = \frac{9\pi}{32} (\text{cm}^3).$$

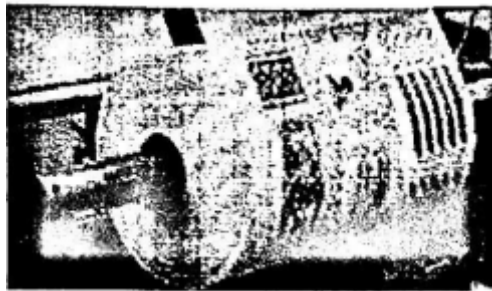
$$\Rightarrow V_2 = V - V_1 = \frac{27\sqrt{3}}{4} - \frac{9\pi}{32} (\text{cm}^3).$$

Do đó, giá nguyên vật liệu dùng để làm một cây bút chì là $540V_1 + 100V_2$ (đồng).

Vậy giá bán ra của cây bút chì là

$$(540V_1 + 100V_2) \cdot \frac{100}{15,58} = \left[540 \cdot \frac{9\pi}{32} + 100 \left(\frac{27\sqrt{3}}{4} - \frac{9\pi}{32} \right) \right] \cdot \frac{100}{15,58} \approx 10000 \text{ (đồng)}.$$

Câu 15. (THPT Hậu Lộc 2 2019) Một cuộn đề can hình trụ có đường kính 44,9 cm. Trong thời gian diễn ra AFF cup 2018, người ta đã sử dụng để in các băng rôn, khẩu hiệu cổ vũ cho đội tuyển Việt Nam, do đó đường kính của cuộn đề can còn lại là 12,5 cm. Biết độ dày của tấm đề can là 0,06 cm, hãy tính chiều dài L của tấm đề can đã sử dụng? (Làm tròn đến hàng đơn vị).



A. $L = 24344 \text{ cm}$

B. $L = 97377 \text{ cm}$

C. $L = 848 \text{ cm}$

D. $L = 7749 \text{ cm}$

Lời giải

Chọn A

Ta có mỗi lần bán đi một vòng đề can thì bán kính của cuộn đề can giảm đi số cm là: $0,06 \text{ cm}$

Bán kính lúc đầu là $22,45 \text{ cm}$, bán kính lúc sau là $6,25 \text{ cm}$. Số vòng đề can đã bán đi là:

$$(22,45 - 6,25) : 0,06 = 270$$

Chu vi một vòng đề can bán kính r là chiều dài của vòng đề can đó. Nó bằng:

$$L_r = 2\pi r$$

Chiều dài L của tấm đề can đã bán bằng $L = L_1 + L_2 + \dots + L_{270}$ với L_1 là độ dài vòng đầu tiên của cuộn đề can, bán kính là $r_1 = 22,45 \text{ cm}$. L_1 cũng chính là chu vi của đường tròn bán kính

$$r_1 = 22,45 \text{ cm} \Rightarrow L_1 = 2\pi r_1. \text{ Vòng thứ 2, bán kính giảm đi } 0,06 \text{ cm do đó nó sẽ có bán kính bằng}$$

$$r_2 = 22,45 - 0,06 = 22,39 \text{ cm}, L_2 \text{ cũng chính là chu vi của đường tròn bán kính}$$

$$r_2 = 22,39 \text{ cm} \Rightarrow L_2 = 2\pi r_2$$

$$\text{Suy ra } L = 2\pi r_1 + 2\pi r_2 + \dots + 2\pi r_{270} = 2\pi (r_1 + r_2 + \dots + r_{270})$$

Trong đó $r_1, r_2, \dots, r_{270}$ là một cấp số cộng có $u_1 = 22,45; d = -0,06$, suy ra

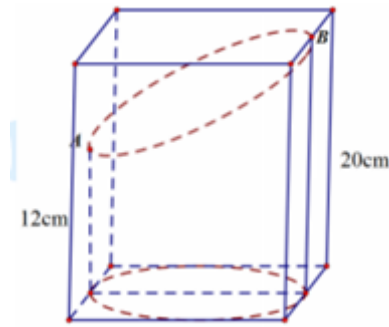
$$u_{270} = u_1 + 269d = 22,45 - 269 \cdot 0,06 = 6,25 + 0,06 = 6,31 \text{ cm}$$

$$\text{Tổng } r_1 + r_2 + \dots + r_{270} = \frac{(r_1 + r_{270}) \times 270}{2} = \frac{(22,45 + 6,31) \times 270}{2} = 3882,6 \text{ cm}$$

$$\text{Suy ra } L = 2\pi \cdot 3882,6 \approx 24382 \text{ cm}.$$

Câu 16. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh -1819) Một khúc gỗ hình trụ có bán kính R bị cắt bởi một mặt phẳng không song song với đáy ta được thiết diện là một hình elip. Khoảng cách từ điểm A đến mặt đáy là 12 cm , khoảng cách từ điểm B đến mặt đáy là 20 cm . Đặt khúc gỗ đó vào trong hình

hộp chữ nhật có chiều cao bằng 20 cm chứa đầy nước sao cho đường tròn đáy của khúc gỗ tiếp xúc với các cạnh đáy của hình hộp chữ nhật. Sau đó, người ta đo lượng nước còn lại trong hình hộp chữ nhật là 2 lít. Tính bán kính của khúc gỗ (giả sử khúc gỗ không thấm nước và kết quả làm tròn đến phần hàng chục).



A. $R = 5,2$ cm.

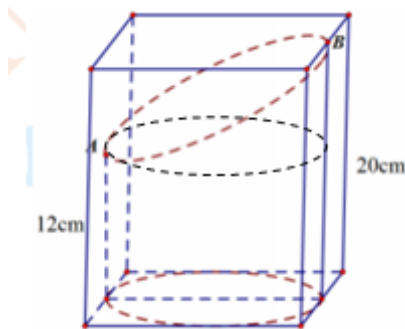
B. $R = 4,8$ cm.

C. $R = 6,4$ cm.

D. $R = 8,2$ cm.

Lời giải

Chọn D



Gọi bán kính đáy hình trụ là R .

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích hình hộp chữ nhật và khối gỗ.

Ta có $V_1 = B.h = 4R^2.20 = 80R^2$

Chia khối gỗ làm hai phần bằng một mặt phẳng qua A và song song đáy.

Ta có $V_2 = \pi R^2.h_1 + \frac{1}{2}\pi R^2.(h - h_1) = 16\pi R^2$.

h_1 là khoảng cách từ điểm A đến mặt đáy, h khoảng cách từ điểm B đến mặt đáy.

Thể tích nước còn lại là

$V = V_1 - V_2 = 16R^2(5 - \pi) = 2000 \Rightarrow R \approx 8,2$.

Câu 17. (Ngô Quyền - Hải Phòng 2019) Một hộp đựng bóng tennis có dạng hình trụ. Biết rằng hộp chứa vừa khít ba quả bóng tennis được xếp theo chiều dọc, các quả bóng tennis có kích thước như nhau. Thể tích phần không gian còn trống chiếm tỉ lệ $a\%$ so với hộp đựng bóng tennis. Số a gần đúng với số nào sau đây?

A. 50.

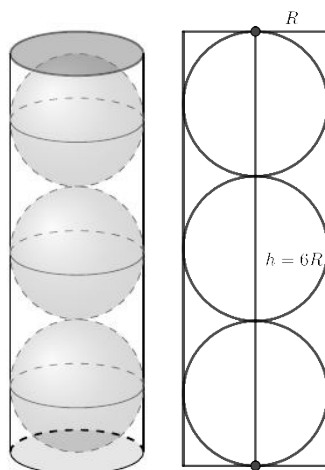
B. 66.

C. 30.

D. 33.

Lời giải

Chọn D



Đặt h , R lần lượt là đường cao và bán kính hình tròn đáy của hộp đựng bóng tennis.

Dễ thấy mỗi quả bóng tennis có cùng bán kính R với hình tròn đáy của hộp đựng bóng tennis và $h = 6R$.

Do đó ta có:

Tổng thể tích của ba quả bóng là $V_1 = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi R^3$;

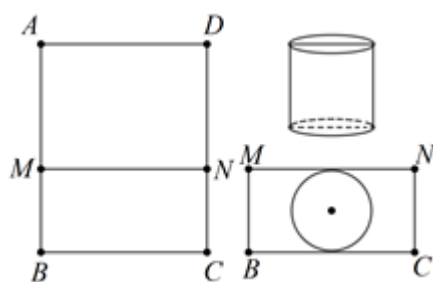
Thể tích của hình trụ (hộp đựng bóng) là $V_0 = \pi R^2 h = 6\pi R^3$;

Thể tích phần còn trống của hộp đựng bóng là $V_2 = V_0 - V_1 = 2\pi R^3$.

Khi đó tỉ lệ phần không gian còn trống so với hộp đựng bóng là $\frac{V_2}{V_0} = \frac{1}{3} \approx 0,33$.

Suy ra $a \approx 33$.

- Câu 18. (Chuyên Ngữ Hà Nội 2019)** Sử dụng mảnh inox hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 1m^2 và cạnh $BC = x$ (m) để làm một thùng đựng nước có đáy, không có nắp theo quy trình như sau: Chia hình chữ nhật $ABCD$ thành hai hình chữ nhật $ADNM$ và $BCNM$, trong đó phần hình chữ nhật $ADNM$ được gò thành phần xung quanh hình trụ có chiều cao bằng AM ; phần hình chữ nhật $BCNM$ được cắt ra một hình tròn để làm đáy của hình trụ trên (phần inox còn thừa được bỏ đi). Tính gần đúng giá trị x để thùng nước trên có thể tích lớn nhất (coi như các mép nối không đáng kể).



- A. 1,37 m. **B. 1,02 m.** C. 0,97 m. D. 1 m.

Lời giải

Chọn B

Ta có $AB \cdot BC = 1 \Rightarrow AB = \frac{1}{BC} = \frac{1}{x}$ (m).

Gọi R (m) là bán kính đáy hình trụ inox gò được, ta có chu vi hình tròn đáy bằng $BC = x$ (m).

Do đó $2\pi R = x \Leftrightarrow R = \frac{x}{2\pi}$ (m); $BM = 2R = \frac{x}{\pi} \Rightarrow AM = AB - BM = \frac{1}{x} - \frac{x}{\pi}$ (m).

$$\text{Thể tích khối trụ inox gò được là } V = \pi R^2 h = \pi \cdot \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{\pi}\right) = \frac{1}{4\pi^2} x(\pi - x^2).$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = x(\pi - x^2) \ (x > 0) \Rightarrow f'(x) = \pi - 3x^2.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\pi}{3}}; \ f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(0; \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) \text{ và } f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}; +\infty\right).$$

$$\text{Vậy } f(x) \text{ đồng biến trên khoảng } \left(0; \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) \text{ và nghịch biến trên khoảng } \left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}; +\infty\right).$$

$$\text{Suy ra } \max_{(0; +\infty)} f(x) = f\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{2\pi\sqrt{3\pi}}{9}.$$

$$\text{Từ đó ta có thể tích } V \text{ lớn nhất khi và chỉ khi } f(x) \text{ lớn nhất } \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{\pi}{3}} \approx 1,02 \text{ (m)}.$$

Câu 19. Một đại lý xăng dầu cần làm một cái bồn dầu hình trụ bằng tôn có thể tích 16π (m^3). Tìm bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra ít tốn nguyên vật liệu nhất.

A. 0,8 m.

B. 1,2 m.

C. 2 m.

D. 2,4 m.

Lời giải

Chọn C

Để ít tốn nguyên vật liệu nhất thì diện tích toàn phần S_{tp} phải nhỏ nhất.

Gọi h ($h > 0$) là chiều cao của bồn dầu. Ta có: $S_{\text{tp}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

$$\text{Mặt khác, theo giả thiết: } V = 16\pi \Leftrightarrow \pi r^2 h = 16\pi \Leftrightarrow h = \frac{16}{r^2}.$$

$$\Rightarrow S_{\text{tp}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{16}{r^2} = 2\pi \left(r^2 + \frac{16}{r}\right) = 2\pi \left(r^2 + \frac{8}{r} + \frac{8}{r}\right).$$

$$\text{Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số dương: } r^2, \frac{8}{r}, \frac{8}{r}, \text{ ta được: } r^2 + \frac{8}{r} + \frac{8}{r} \geq 3\sqrt{r^2 \cdot \frac{8}{r} \cdot \frac{8}{r}} = 12.$$

$$\Rightarrow S_{\text{tp}} \geq 24\pi. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow r^2 = \frac{8}{r} \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = 2.$$

$$\Rightarrow \min(S_{\text{tp}}) = 24\pi.$$

Vậy để ít tốn nguyên vật liệu nhất thì $r = 2$ (m).

Câu 20. (THPT Cẩm Bình Hà Tĩnh 2019) Anh H dự định làm một cái thùng đựng dầu hình trụ bằng sắt có nắp đậy thể tích 12m^3 . Chi phí làm mỗi m^2 đáy là 400 ngàn đồng, mỗi m^2 nắp là 200 ngàn đồng, mỗi m^2 mặt xung quanh là 300 ngàn đồng. Để chi phí làm thùng là ít nhất thì anh H cần chọn chiều cao của thùng gần nhất với số nào sau đây? (Xem độ dày của tấm sắt làm thùng là không đáng kể).

A. 1,24 m.

B. 1,25 m.

C. 2,50 m.

D. 2,48 m.

Lời giải

Chọn D

Gọi bán kính đáy của hình trụ là R . Ta có

$$V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{12}{\pi R^2}.$$

Suy ra chi phí (đơn vị ngàn đồng) làm thùng

$$C = \pi R^2 \cdot 400 + \pi R^2 \cdot 200 + 2\pi R h \cdot 300$$

$$= 600 \left(\pi R^2 + \frac{12}{R} \right)$$

$$= 600 \left(\pi R^2 + \frac{6}{R} + \frac{6}{R} \right) \geq 600 \cdot 3 \sqrt[3]{\pi R^2 \cdot \frac{6}{R} \cdot \frac{6}{R}} = 1800 \sqrt[3]{36\pi}$$

Dẫn đến

$$\min C = 1800 \sqrt[3]{36\pi} \Leftrightarrow \pi R^2 = \frac{6}{R} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}.$$

Vậy để chi phí nhỏ nhất thì chiều cao của hình trụ là $h = \frac{12}{\sqrt[3]{36\pi}} \approx 2,48m$.

Câu 21. (Bỉ Sơn - Thanh Hóa - 2019) Người ta cần làm một cái bồn chứa dạng hình trụ có thể tích 1000 lít bằng inox để chứa nước, tính bán kính R của hình trụ đó sao cho diện tích toàn phần của bồn chứa có giá trị nhỏ nhất.

A. $R = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}.$

B. $R = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}.$

C. $R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}.$

D. $R = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có 1000 lít = $1m^3$.

Gọi h là chiều cao của hình trụ ta có $V = \pi R^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\pi R^2}.$

Diện tích toàn phần là: $S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi R h = 2\pi R^2 + 2\pi R \frac{1}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \frac{2}{R}$

$$= 2 \left(\pi R^2 + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} \right) \geq 2 \cdot 3 \sqrt[3]{\pi R^2 \cdot \frac{1}{2R} \cdot \frac{1}{2R}} = 6 \sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\pi R^2 = \frac{1}{2R} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}.$

Câu 22. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có chu vi bằng 12. Giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là

A. $16\pi.$

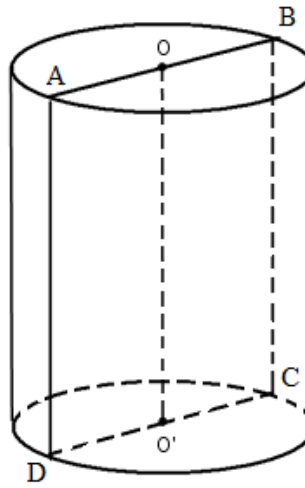
B. $32\pi.$

C. $8\pi.$

D. $64\pi.$

Lời giải

Chọn C



Từ hình vẽ ta có $ABCD$ là hình chữ nhật, gọi chiều cao của hình trụ là h và bán kính đáy của hình trụ là r , theo giả thiết ta có $2(h+2r)=12 \Leftrightarrow h+2r=6$.

Thể tích của khối trụ tương ứng là $V = \pi r^2 h$, theo bất đẳng thức Cô si ta có

$$r+r+h \geq 3\sqrt[3]{r^2 \cdot h} \Leftrightarrow V = \pi r^2 h \leq \pi \cdot \left(\frac{2r+h}{3}\right)^3 = 8\pi$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $r=h=2$.

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là 8π .

Câu 23. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019) Cần sản xuất một vỏ hộp sữa hình trụ có thể tích V cho trước. Để tiết kiệm vật liệu nhất thì bán kính đáy phải bằng

A. $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

B. $\sqrt[3]{\frac{V}{2}}$.

C. $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

D. $\sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi h, r là chiều cao và bán kính đường tròn đáy của hình trụ.

Ta có $V = \pi r^2 h \Leftrightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$.

Để tiết kiệm vật liệu nhất thì diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Ta có $S_{tp} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} = 2\pi r^2 + \frac{V}{r} + \frac{V}{r}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số $2\pi r^2, \frac{V}{r}, \frac{V}{r}$ ta có

$S_{tp} \geq 3\sqrt[3]{2\pi r^2 \cdot \frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r}} = 3\sqrt[3]{\frac{2\pi V^2}{r}}$ không đổi

Dấu bằng xảy ra khi $2\pi r^2 = \frac{V}{r} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ ta có

Câu 24. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Trong các hình trụ có diện tích toàn phần bằng 1000cm^2 thì hình trụ có thể tích lớn nhất là bao nhiêu cm^3

A. 2428.

B. 2532.

C. 2612.

D. 2740.

Lời giải

Chọn A

Ta có $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 \Rightarrow Rh + R^2 = \frac{S}{2\pi}$

Vậy thể tích khối trụ $V = \pi R^2 h = \pi R \left(\frac{S}{2\pi} - R^2 \right) = \frac{S}{2} R - \pi R^3 = F(R)$

Ta có: $F'(R) = \frac{S}{2} - 3\pi R^2 = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$

Bảng biến thiên

R	0	$R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$	$+\infty$	
$F'(R)$		+	0	-
$F(R)$			$F\left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right)$	

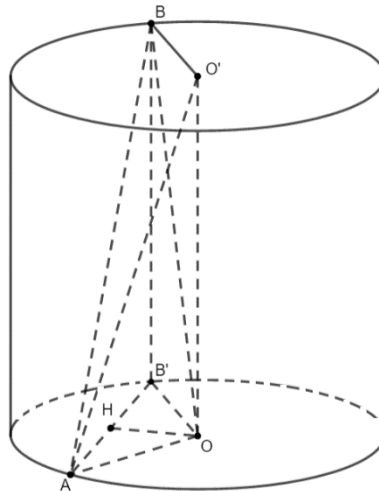
Từ bảng biến thiên ta có $V_{\max} = \frac{S}{2} R - \pi R^3 = \frac{1000}{2} \sqrt{\frac{1000}{6\pi}} - \pi \sqrt{\frac{1000}{6\pi}}^3 \approx 2428$.

Câu 25. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O' , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A , trên đường tròn tâm O' lấy điểm B . Đặt α là góc giữa AB và đáy. Biết rằng thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $\tan \alpha = \sqrt{2}$. B. $\tan \alpha = 1$. C. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\tan \alpha = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi B' là hình chiếu của B trên mặt phẳng chứa đường tròn (O) , khi đó AB' là hình chiếu của AB trên mặt phẳng chứa đường tròn (O) .

Suy ra $\left(\widehat{AB, (OAB')} \right) = \left(\widehat{AB, AB'} \right) = \widehat{BAB'} = \alpha, \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$.

Xét tam giác vuông ABB' vuông tại B' có $\tan \widehat{BAB'} = \frac{BB'}{AB'} \Rightarrow AB' = \frac{BB'}{\tan \alpha} = \frac{2a}{\tan \alpha}$.

Gọi H là trung điểm AB' , khi đó $OH \perp AB'$ và

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{R^2 - \frac{AB'^2}{4}} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{\tan^2 \alpha}} = a \sqrt{4 - \frac{1}{\tan^2 \alpha}}$$

$$\text{Lại có } S_{\Delta OAB'} = \frac{1}{2} OH \cdot AB' = \frac{1}{2} \cdot OB' \cdot d(A, OB')$$

$$\Rightarrow d(A, OB') = \frac{OH \cdot AB'}{OB'} = \frac{a \sqrt{4 - \frac{1}{\tan^2 \alpha}} \cdot \frac{2a}{\tan \alpha}}{2a} = \frac{a}{\tan \alpha} \sqrt{4 - \frac{1}{\tan^2 \alpha}} = d(A, (OO'BB')).$$

$$\text{Vậy } V_{A.OO'B} = \frac{1}{3} d(A, (OO'BB')) \cdot S_{\Delta OO'B} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\tan \alpha} \sqrt{4 - \frac{1}{\tan^2 \alpha}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a = \frac{2a^3}{3} \cdot \frac{1}{\tan \alpha} \sqrt{4 - \frac{1}{\tan^2 \alpha}}$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có } \frac{1}{\tan \alpha} \sqrt{4 - \frac{1}{\tan^2 \alpha}} \leq \frac{\frac{1}{\tan^2 \alpha} + 4 - \frac{1}{\tan^2 \alpha}}{2} = 2$$

$$\Rightarrow V_{A.OO'B} \leq \frac{2a^3}{3} \cdot 2 = \frac{4a^3}{3}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \frac{1}{\tan \alpha} = \sqrt{4 - \frac{1}{\tan^2 \alpha}} \Leftrightarrow \frac{1}{\tan^2 \alpha} = 4 - \frac{1}{\tan^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{2}{\tan^2 \alpha} = 4$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ do } \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Câu 26. (Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019) Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O' , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A , trên đường tròn tâm O' lấy điểm B . Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan \alpha$ khi thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\tan \alpha = \frac{1}{2}$.

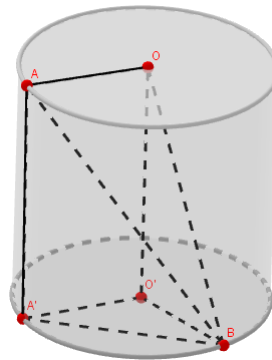
B. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

C. $\tan \alpha = 1$.

D. $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi A' là hình chiếu của A trên đường tròn tâm O' khi đó ta có

$$V_{OO'AB} = \frac{1}{2} V_{B.OO'A'A} = \frac{1}{6} \cdot S_{\Delta OO'A'A} \cdot d(B, (OO'A'A)) \text{ với } d(B, (OO'A'A)) = OB \cdot \sin \widehat{BO'A'}$$

Do $S_{\Delta OO'A'A}$ là hằng số nên để thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất thì

$$d(B, (OO'A'A)) \text{ là lớn nhất hay } \widehat{BO'A'} = 90^\circ$$

$$\text{Khi đó ta có } \tan \alpha = \tan \widehat{ABA'} = \frac{AA'}{A'B} = \frac{2a}{2a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 27. (Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019) Một xí nghiệp chế biến sữa bò muốn sản xuất lon đựng sữa có dạng hình trụ bằng thiếc có thể tích không đổi. Để giảm giá một lon sữa khi bán ra thị trường người ta cần chế tạo lon sữa có kích thước sao cho ít tốn kém vật liệu. Để thỏa mãn yêu cầu đặt ra (diện tích toàn phần bé nhất), người ta phải thiết kế lon sữa thỏa mãn điều kiện nào trong các điều kiện sau:

A. Chiều cao bằng đường kính của đáy.

- B. Chiều cao bằng bán kính của đáy.
 C. Chiều cao bằng 3 lần bán kính của đáy.
 D. Chiều cao bằng bình phương bán kính của đáy.

Lời giải

Chọn A

Gọi V , r , h , l lần lượt là thể tích, bán kính đáy, đường cao, đường sinh của lon sữa.

$$\text{Ta có: } V = \pi.r^2.h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi.r^2} \text{ và } h = l.$$

$$\text{Mặt khác: } V = \pi.r^2.h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi.r^2}.$$

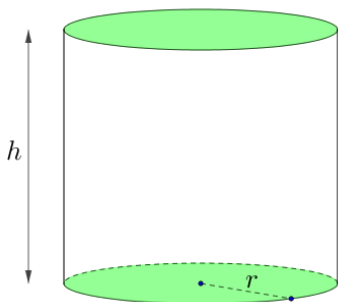
$$S_{tp} = 2\pi rl + 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi.r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 = \frac{V}{r} + \frac{V}{r} + 2\pi r^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta được:

$$S_{tp} \geq 3\sqrt[3]{\frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r} \cdot 2\pi r^2} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \frac{V}{r} = 2\pi r^2 \Leftrightarrow \frac{V}{\pi} = 2r^3. \text{ Do } h = \frac{V}{\pi.r^2} \text{ nên } 2r = h.$$

- Câu 28. (SGD Nam Định 2019)** Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ (như hình vẽ) có thể tích V nhất định. Biết rằng giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và đắt gấp ba lần so với giá vật liệu để làm mặt xung quanh của thùng (chi phí cho mỗi đơn vị diện tích). Gọi chiều cao của thùng là h và bán kính đáy là r . Tính tỉ số $\frac{h}{r}$ sao cho chi phí vật liệu sản xuất thùng là nhỏ nhất?



A. $\frac{h}{r} = \sqrt{2}.$

B. $\frac{h}{r} = 2.$

C. $\frac{h}{r} = 6.$

D. $\frac{h}{r} = 3\sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn C.

Gọi x là giá vật liệu làm mặt xung quanh (cho mỗi đơn vị diện tích).

$$\text{Thể tích của thùng } V = \pi r^2.h \text{ không đổi. Suy ra } h = \frac{V}{\pi r^2}. (*)$$

$$\text{Khi đó, chi phí để làm thùng bằng } P = S_{xq}.x + 2S_d.3x = 2\pi rh.x + 2\pi r^2.3x = 2\pi x(3r^2 + rh).$$

$$\Rightarrow P = 2\pi x\left(3r^2 + \frac{V}{\pi r}\right) = 2\pi x\left(3r^2 + \frac{V}{2\pi r} + \frac{V}{2\pi r}\right) \geq 6\pi x \cdot \sqrt[3]{\frac{3V^2}{4\pi^2}}.$$

$$P = 6\pi x \cdot \sqrt[3]{\frac{3V^2}{4\pi^2}} \Leftrightarrow 3r^2 = \frac{V}{2\pi r} \Leftrightarrow r^3 = \frac{V}{6\pi}.$$

$$\text{Từ (*) suy ra } \frac{h}{r} = \frac{V}{\pi r^3} = \frac{V}{\pi \frac{V}{6\pi}} = 6.$$

Câu 29. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Một hình trụ có độ dài đường cao bằng 3, các đường tròn đáy lần lượt là $(O;1)$ và $(O';1)$. Giả sử AB là đường kính cố định của $(O;1)$ và CD là đường kính thay đổi trên $(O';1)$. Tìm giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của thể tích khối tứ diện $ABCD$.

A. $V_{\max} = 2.$

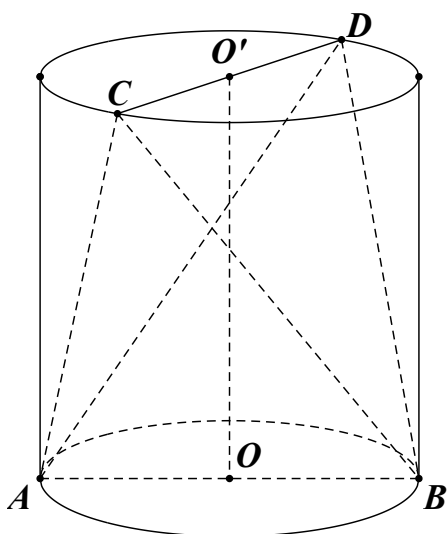
B. $V_{\max} = 6.$

C. $V_{\max} = \frac{1}{2}.$

D. $V_{\max} = 1.$

Lời giải

Chọn A



Gọi α là số đo góc giữa AB và CD .

$$\text{Ta có } V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d(AB; CD) \cdot \sin \alpha = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin \alpha = 2 \sin \alpha \leq 2.$$

Do đó V_{ABCD} đạt giá trị lớn nhất là 2, đạt được khi $AB \perp CD$.

Câu 30. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019) Cần sản xuất một vỏ hộp sữa hình trụ có thể tích V cho trước. Để tiết kiệm vật liệu nhất thì bán kính đáy phải bằng

A. $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$

B. $\sqrt[3]{\frac{V}{2}}.$

C. $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$

D. $\sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}.$

Lời giải

Giả sử vỏ hộp sữa có bán kính đáy là R , chiều cao là h ($R, h > 0$).

$$\text{Vì thể tích vỏ hộp là } V \text{ nên ta có } V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi R^2}.$$

Để tiết kiệm vật liệu nhất thì hình trụ vỏ hộp sữa phải có diện tích toàn phần

$$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2 \text{ nhỏ nhất.}$$

Cách 1:

$$\text{Ta có } S_{tp} = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2 = \frac{V}{R} + \frac{V}{R} + 2\pi R^2 \geq 3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

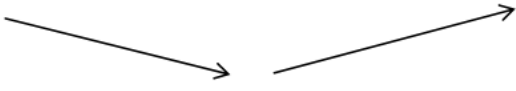
$$S_{tp} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi } \frac{V}{R} = 2\pi R^2 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Cách 2:

Xét hàm số $f(R) = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(R) = -\frac{2V}{R^2} + 4\pi R = \frac{4\pi R^3 - 2V}{R^2}$. $f'(R) = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Bảng biến thiên:

R	0	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$+\infty$
$f'(R)$	-	0	+
$f(R)$			

Từ BBT ta thấy $f(R)$ đạt nhỏ nhất khi $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Vậy để tiết kiệm vật liệu nhất thì bán kính đáy vỏ hộp phải bằng $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Câu 31. Thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có chu vi là 12 cm. Giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là:

A. $64\pi \text{ cm}^3$.

B. $16\pi \text{ cm}^3$.

C. $8\pi \text{ cm}^3$.

D. $32\pi \text{ cm}^3$.

Lời giải

Gọi chiều cao và bán kính đáy của hình trụ lần lượt là x, y ($x, y > 0$).

Khi đó ta có thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có kích thước lần lượt là $x, 2y$

Theo giả thiết ta có $2.(x + 2y) = 12 \Leftrightarrow x + 2y = 6$.

Cách 1.

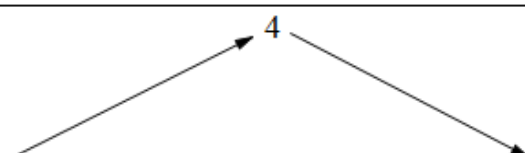
Thể tích khối trụ: $V = \pi y^2 . x = \pi y^2 (6 - 2y) = 2\pi (-y^3 + 3y^2)$.

Vì $x + 2y = 6 \Rightarrow 0 < 2y < 6 \Leftrightarrow 0 < y < 3$.

Xét hàm số $f(y) = -y^3 + 3y^2$ trên khoảng $(0; 3)$

Ta có $f'(y) = -3y^2 + 6y \Rightarrow f'(y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

y	0	2	3
$f'(y)$	+	0	-
$f(y)$			

Suy ra $\max_{(0;3)} f(y) = f(2) = 4$.

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ bằng $2\pi . 4 = 8\pi \text{ cm}^3$.

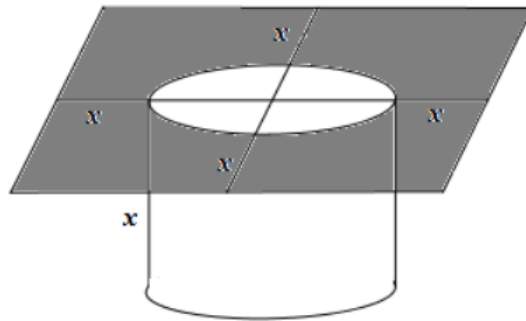
Cách 2.

$$\text{Thể tích khối trụ: } V = \pi y^2 x = \pi \cdot x \cdot y \cdot y \leq \pi \left(\frac{x+y+y}{3} \right)^3 = \pi \left(\frac{x+2y}{3} \right)^3 = \pi \left(\frac{6}{3} \right)^3 = 8\pi$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ bằng $V = 8\pi \text{ cm}^3$.

- Câu 32. (Chuyên Thái Nguyên 2019)** Trên một mảnh đất hình vuông có diện tích $81m^2$ người ta đào một cái ao nuôi cá hình trụ (như hình vẽ) sao cho tâm của hình tròn đáy trùng với tâm của mảnh đất. Ở giữa mép ao và mép mảnh đất người ta để lại một khoảng đất trống để đi lại, biết khoảng cách nhỏ nhất giữa mép ao và mép mảnh đất là $x(m)$. Giả sử chiều sâu của ao cũng là $x(m)$. Tính thể tích lớn nhất V của ao.



- A.** $V = 13,5\pi(m^3)$. **B.** $V = 27\pi(m^3)$. **C.** $V = 36\pi(m^3)$. **D.** $V = 72\pi(m^3)$.

Lời giải

Chọn A.

Phương pháp

Xác định bán kính đáy và chiều cao của hình trụ, sử dụng công thức $V = \pi R^2 h$ tính thể tích của hình trụ.

+) Lập BBT tìm GTLN của hàm thể tích.

Cách giải

Ta có: Đường kính đáy của hình trụ là $9 - 2x \Rightarrow$ Bán kính đáy hình trụ là $\frac{9-2x}{2}$.

Khi đó ta có thể tích ao là $V = \pi \left(\frac{9-2x}{2} \right)^2 x = \frac{\pi}{4} (9-2x)^2 x = \frac{\pi}{4} f(x)$

Xét hàm số $f(x) = (9-2x)^2 x = 4x^3 - 36x^2 + 81x$ với $0 < x < \frac{9}{2}$ ta có:

$$f'(x) = 12x^2 - 72x + 81 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

BBT:

x	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$		
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$	0	54	0		

Dựa vào BBT ta thấy $f(x)_{\max} = 54 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. Khi đó $V_{\max} = \frac{\pi}{4} \cdot 54 = \frac{27\pi}{2} = 13,5\pi(m^3)$.

Câu 33. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O' , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A , trên đường tròn tâm O' lấy điểm B . Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan \alpha$ khi thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\tan \alpha = \sqrt{2}$

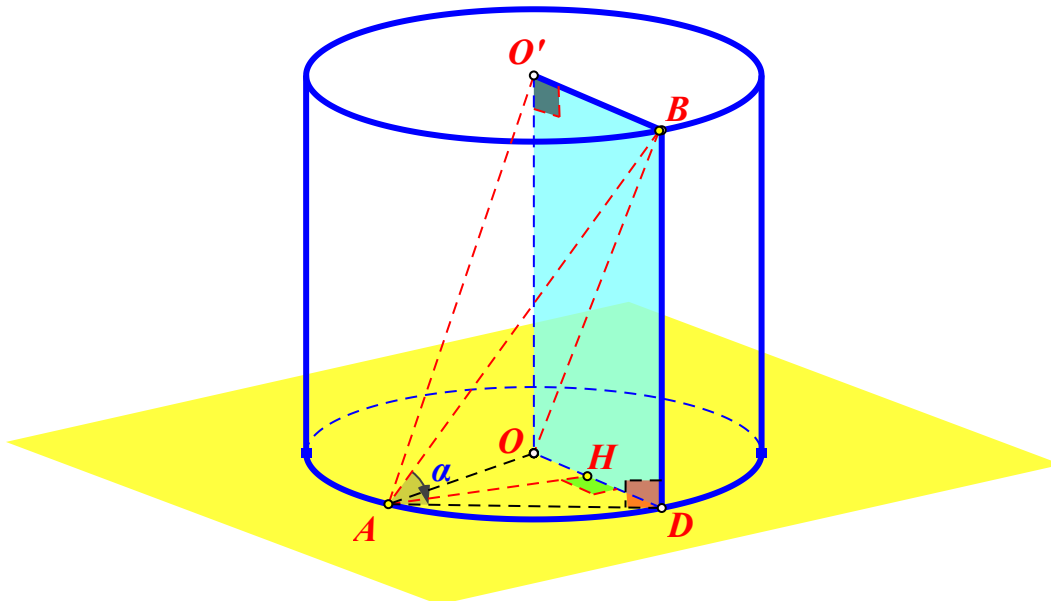
B. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

C. $\tan \alpha = \frac{1}{2}$

D. $\tan \alpha = 1$

Lời giải

Cách 1:



Gọi D là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (O) .

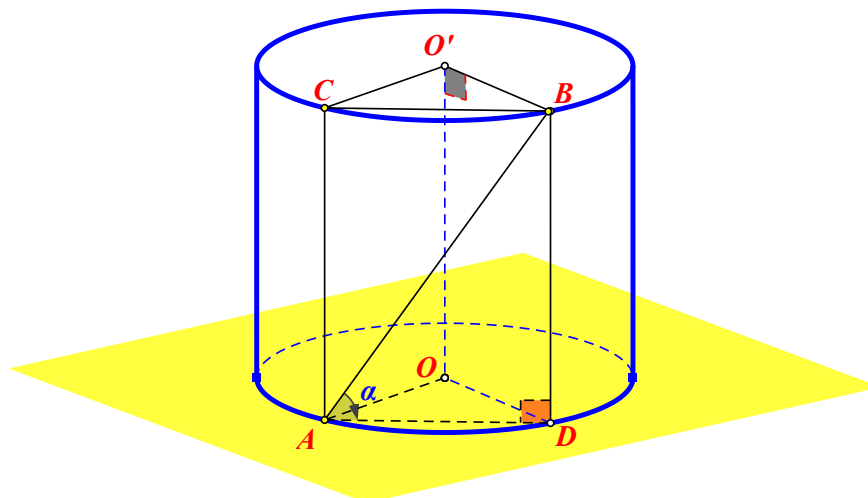
Kẻ $AH \perp OD$, $H \in OD$.

Ta có thể tích của khối chóp $OO'AB$: $V_{OO'AB} = \frac{1}{3} AH \cdot S_{\triangle OO'B} = \frac{2a^2}{3} \cdot AH \leq \frac{2a^2}{3} \cdot AO = \frac{4a^3}{3}$.

$(V_{OO'AB})_{\max} \Leftrightarrow H \equiv O$. Suy ra $AD = 2\sqrt{2}a$.

Suy ra: $\tan \alpha = \tan \widehat{BAD} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Nhận xét: Nên thêm giả thiết AB chéo với OO' để tứ diện $OO'AB$ tồn tại.



Gọi D là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng chứa đường tròn (O) .

Gọi C là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng chứa đường tròn (O') .

Ta có $O'CB.OAD$ là một hình lăng trụ đứng.

Ta có thể tích của khối chóp $OO'AB$:

$$V_{OO'AB} = V_{O'BC.OAD} = \frac{1}{3} 2a \cdot S_{\triangle OAD} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \sin \widehat{AOD} \leq \frac{4a^3}{3}.$$

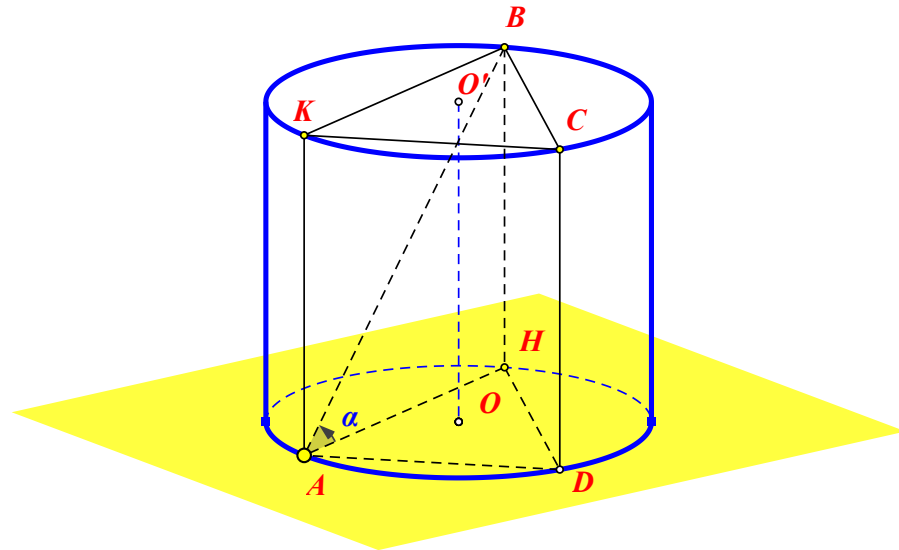
$$(V_{O'ABCD})_{\max} \Leftrightarrow \widehat{AOD} = 90^\circ \Leftrightarrow AD = 2\sqrt{2}a.$$

$$\text{Suy ra: } \tan \alpha = \tan \widehat{BAD} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 34. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O' , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, D sao cho $AD = 2\sqrt{3}a$; gọi C là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng chứa đường tròn (O') ; trên đường tròn tâm O' lấy điểm B (AB chéo với CD). Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan \alpha$ khi thể tích khối tứ diện $CDAB$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\tan \alpha = \sqrt{3}$ B. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $\tan \alpha = 1$ **D. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$**

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng chứa đường tròn (O) .

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng chứa đường tròn (O') .

Ta có $HAD.BKC$ là một hình lăng trụ đứng.

Ta có thể tích của tứ diện $CDAB$ là

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} V_{HAD.BKC} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot S_{\triangle HAD} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot AD \cdot d(H; AD) = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot d(H; AD).$$

$$(V_{ABCD})_{\max} \Leftrightarrow (d(H; AD))_{\max} \Leftrightarrow H \text{ là điểm chính giữa cung lớn } \widehat{AD} \text{ của đường tròn } (O) \quad (1).$$

$$\text{Theo định lý sin ta có } \frac{AD}{\sin \widehat{AHD}} = 2 \cdot 2a \Leftrightarrow \sin \widehat{AHD} = \frac{AD}{4a} = \frac{2\sqrt{3}a}{4a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ nên } \widehat{AHD} = 60^\circ.$$

$$\text{Do đó (1) xảy ra khi } \triangle AHD \text{ đều } \Leftrightarrow AH = AD = 2\sqrt{3}a.$$

$$\text{Suy ra: } \tan \alpha = \tan \widehat{BAH} = \frac{BH}{AH} = \frac{2a}{2a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 35. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O' , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, D trên đường tròn tâm O' lấy điểm B, C sao cho $AB \parallel CD$ và AB không cắt OO' . Tính AD để thể tích khối chóp $O'.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

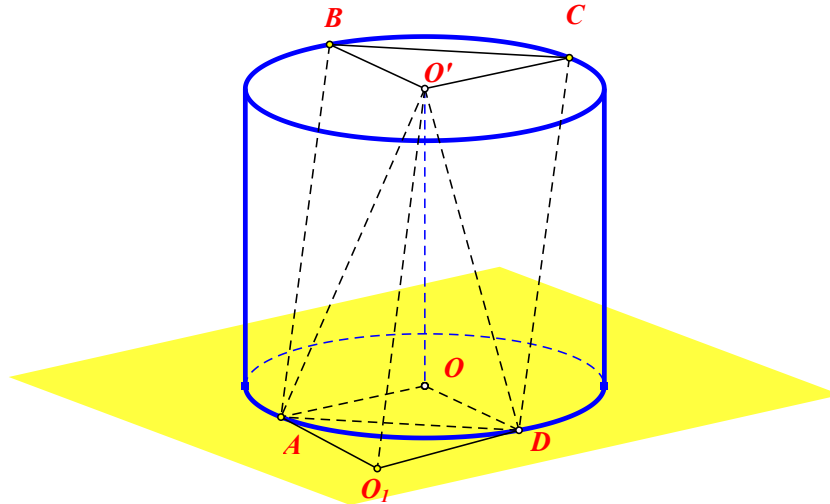
A. $AD = 2\sqrt{2}a$

B. $AD = 4a$

C. $AD = \frac{4\sqrt{3}}{3}a$

D. $AD = \sqrt{2}a$

Lời giải



Kẻ đường thẳng qua O' song song với AB cắt mặt phẳng chứa đường tròn (O) tại O_1 .

Lúc đó $AO_1D.BO'C$ là một hình lăng trụ chiều cao bằng $2a$.

Vì $AD = BC$ nên $S_{\Delta BO'C} = S_{\Delta OAD}$

Ta có thể tích của khối chóp $O'.ABCD$:

$$V_{O'.ABCD} = \frac{1}{3}V_{AO_1D.BO'C} = \frac{2}{3}.2a.S_{\Delta BO'C} = \frac{2}{3}.2a.S_{\Delta OAD} = \frac{2}{3}.2a.\frac{1}{2}.2a.2a.\sin \widehat{AOD} \leq \frac{8a^3}{3}.$$

$$(V_{O'.ABCD})_{\max} \Leftrightarrow \widehat{AOD} = 90^\circ \Leftrightarrow AD = 2\sqrt{2}a.$$

Câu 36. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình chữ nhật có chu vi bằng 12cm. Thể tích lớn nhất mà hình trụ có thể nhận được là

A. $16\pi (\text{cm}^3)$.

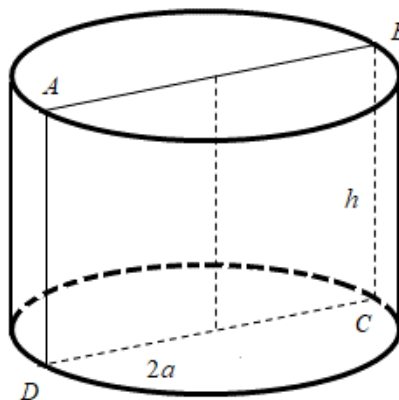
B. $64\pi (\text{cm}^3)$.

C. $32\pi (\text{cm}^3)$.

D. $8\pi (\text{cm}^3)$.

Lời giải

Chọn D



Giả sử hình trụ có bán kính đáy là a và chiều cao h ($a, h > 0$).

Thiết diện qua trục là hình chữ nhật $ABCD$ (như hình vẽ).

Theo giả thiết ta có: $2(2a + h) = 12 \Leftrightarrow h = 6 - 2a \Rightarrow 0 < a < 3$ (vì $h > 0$).

Thể tích khối trụ là: $V = \pi a^2 h = \pi a^2 (6 - 2a) = 2\pi a^2 (3 - a)$

Xét hàm số: $f(a) = a^2 (3 - a) \Leftrightarrow f(a) = -a^3 + 3a^2, a \in (0; 3)$.

$$\Rightarrow V_{M.AA'B'B}^2 = \frac{4}{9} R^2 (R+x)^2 (R^2 - x^2).$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} (R+x)^2 (R^2 - x^2) &= \frac{1}{3} (R+x)(R+x)(R+x)(3R-3x) \\ &\leq \frac{1}{3} \left(\frac{R+x+R+x+R+x+3R-3x}{4} \right)^4 = \frac{27R^4}{16}. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} R+x=3R-3x \\ x \in (0; R) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{R}{2}.$$

$$\text{Vậy } \max V = \frac{2}{3} R \left(R + \frac{R}{2} \right) \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2} \right)^2} = \frac{R^3 \sqrt{3}}{2}.$$

Câu 38. (THPT Phan Đình Phùng - Quảng Bình - 2021) Một nhà máy sản xuất các hộp hình trụ kín cả hai đầu có thể tích V cho trước. Mỗi quan hệ giữa bán kính đáy R và chiều cao h của hình trụ để diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất là

- A. $h = R$. B. $h = 3R$. C. $h = 2R$. D. $R = 2h$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $R = x$, điều kiện $x > 0$.

$$V = \pi x^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi x^2} \Rightarrow \frac{h}{R} = \frac{V}{\pi x^3}.$$

$$S_{TP} = 2\pi R(h + R) = 2\pi x \left(\frac{V}{\pi x^2} + x \right) = \frac{2V}{x} + 2\pi x^2.$$

Xét hàm số: $f(x) = \frac{2V}{x} + 2\pi x^2$ với $x > 0$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = -\frac{2V}{x^2} + 4\pi x = \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2}.$$

$$\text{Khi đó: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Ta có BBT:

x	0	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

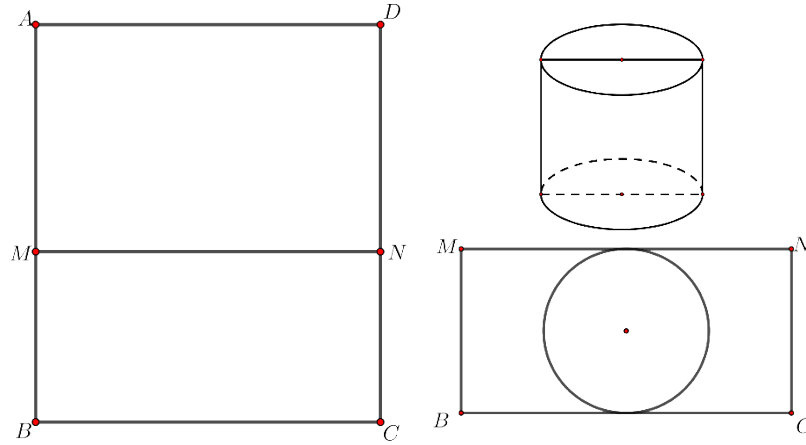
$f\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)$

Từ BBT trên ta thấy S_{TP} nhỏ nhất khi $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

$$\text{Khi đó: } \frac{h}{R} = \frac{V}{\pi \frac{V}{2\pi}} = 2 \Leftrightarrow h = 2R.$$

Câu 39. Sử dụng mảnh inox hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 1m^2 và cạnh $BC = x(\text{m})$ để làm một thùng đựng nước có đáy, không có nắp theo quy trình như sau: Chia hình chữ nhật $ABCD$ thành 2 hình chữ nhật $ADNM$ và $BCNM$, trong đó phần hình chữ nhật $ADNM$ được gò thành phần

xung quanh hình trụ có chiều cao bằng AM ; phần hình chữ nhật $BCNM$ được cắt ra một hình tròn để làm đáy của hình trụ trên (phần inox thừa được bỏ đi). Tính gần đúng giá trị x để thùng nước trên có thể tích lớn nhất (coi như các mép nối không đáng kể).



A. $0,97m$.

B. $1,37m$.

C. $1,12m$.

D. $1,02m$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $AB \cdot BC = 1 \Rightarrow AB = \frac{1}{BC} = \frac{1}{x} (m)$.

Gọi $r (m)$ là bán kính đáy hình trụ inox gò được, ta có chu vi hình tròn đáy bằng $BC = x (m)$. Do đó $2\pi r = x \Leftrightarrow r = \frac{x}{2\pi} (m)$.

Như vậy $BM = 2r = \frac{x}{\pi} \Rightarrow AM = AB - BM = \frac{1}{x} - \frac{x}{\pi} (m)$.

Thể tích khối trụ inox gò được là $V = \pi r^2 h = \pi \cdot \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{\pi}\right) = \frac{1}{4\pi^2} x (\pi - x^2)$.

Xét hàm số $f(x) = x(\pi - x^2)$ với $x > 0$.

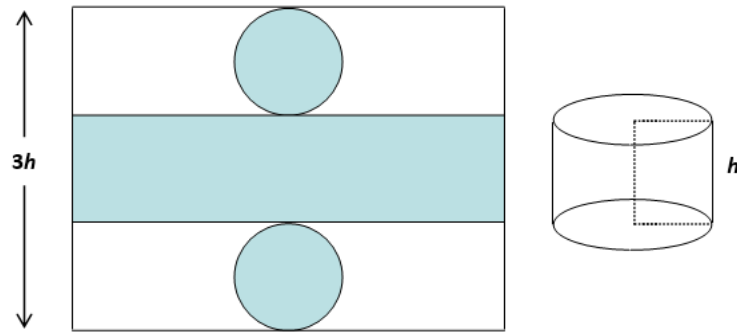
$f'(x) = \pi - 3x^2$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$;

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(0; \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}; +\infty\right)$.

Bởi vậy $f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}; +\infty\right)$.

Suy ra $\max_{(0; +\infty)} f(x) = f\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{2\pi\sqrt{3\pi}}{9} \Rightarrow V_{\max} \Leftrightarrow f(x)_{\max} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{\pi}{3}} \approx 1,02 (m)$.

Câu 40. Từ một tấm thép phẳng hình chữ nhật, người ta muốn làm một chiếc thùng đựng dầu hình trụ bằng cách cắt ra hai hình tròn bằng nhau và một hình chữ nhật (phần tô đậm) sau đó hàn kín lại, như trong hình vẽ dưới đây. Hai hình tròn làm hai mặt đáy, hình chữ nhật làm thành mặt xung quanh của thùng đựng dầu (vừa đủ). Biết rằng đường tròn đáy ngoại tiếp một tam giác có kích thước là $50cm, 70cm, 80cm$ (các mối ghép nối khi gò hàn chiếm diện tích không đáng kể. Lấy $\pi = 3,14$). Diện tích của tấm thép hình chữ nhật ban đầu gần nhất với số liệu nào sau đây?



- A. $6,8 \text{ (m}^2\text{)}$. B. $24,6 \text{ (m}^2\text{)}$. C. $6,15 \text{ (m}^2\text{)}$. D. $3,08 \text{ (m}^2\text{)}$.

Lời giải

Chọn C

Đổi: $50\text{cm} = 0,5\text{m}$; $70\text{cm} = 0,7\text{m}$; $80\text{cm} = 0,8\text{m}$.

Xét tam giác nội tiếp đường tròn đáy có kích thước lần lượt là $0,5\text{m}$; $0,7\text{m}$; $0,8\text{m}$ nên bán kính đường tròn đáy của thùng đựng dầu là

$$R = \frac{0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,8}{4\sqrt{1(1-0,5)(1-0,7)(1-0,8)}} = \frac{7\sqrt{3}}{30}.$$

Ta có $h = 2R$

Diện tích hình chữ nhật ban đầu gấp 3 lần diện tích xung quanh của hình trụ.

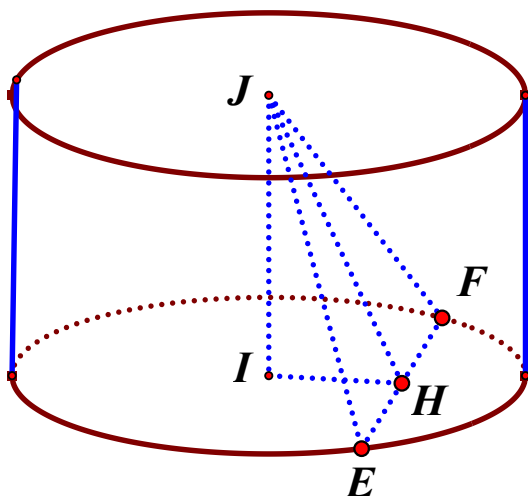
$$\text{Vậy } S = 3 \cdot 2\pi R h = 6 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot R^2 = 6 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot \left(\frac{7\sqrt{3}}{30}\right)^2 = \frac{7693}{1250} = 6,1544 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Câu 41. (THPT Lê Thánh Tông - HCM-2022) Cho hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai hình tròn $(I; \sqrt{7})$ và $(J; \sqrt{7})$. Biết rằng tồn tại dây cung EF của đường tròn $(I; \sqrt{7})$ sao cho tam giác JEF là tam giác đều và mặt phẳng (JEF) hợp với mặt đáy của hình trụ một góc bằng 60° . Thể tích V của khối trụ đã cho là

- A. $V = 21\pi$. B. $V = 7\sqrt{6}\pi$. C. $V = 14\pi$. D. $V = 28\pi$.

Lời giải

Chọn A



♦ Gọi H là trung điểm EF , có $\angle IHJ = 60^\circ$.

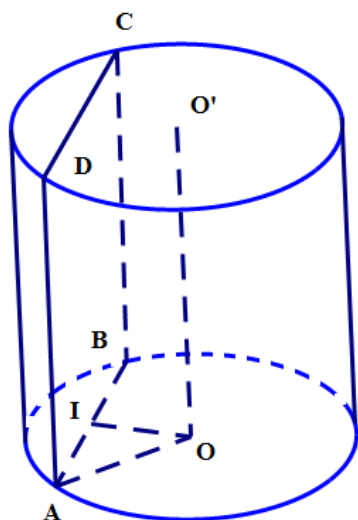
- ♦ Đặt $IJ = h$, tam giác vuông JIH có $\tan \angle JIH = \frac{IJ}{IH} \Leftrightarrow IH = \frac{h}{\tan 60^\circ} = \frac{h\sqrt{3}}{3}$, và $\sin \angle JHI = \frac{IJ}{JH} \Leftrightarrow JH = \frac{h}{\sin 60^\circ} = \frac{2h\sqrt{3}}{3}$.
- ♦ Tam giác đều JEF có $JH = \frac{EF\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow EF = \frac{2JH}{\sqrt{3}} = 2 \cdot \frac{2h\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{4h}{3}$.
- ♦ Tam giác vuông IHE có $IH^2 + HE^2 = IE^2 \Leftrightarrow \frac{h^2}{3} + \frac{4h^2}{9} = 7 \Leftrightarrow h = 3$.
- ♦ Vậy $V_{(T)} = r^2 \cdot \pi \cdot h = 7\pi \cdot 3 = 21\pi$.

Câu 42. (Sở Phú Thọ 2022) Cho hình trụ có bán kính đáy bằng $a\sqrt{3}$. Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với trục, cách trục một khoảng bằng a ta được thiết diện là một hình vuông. Thể tích khối trụ đó bằng:

- A. $2\pi a^3\sqrt{2}$. B. $4\pi a^3\sqrt{2}$. C. $6\pi a^3\sqrt{2}$. D. $3\pi a^3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C



Dựng $OI \perp AB$ khi đó I là trung điểm AB .

Ta có $IA = \sqrt{OA^2 - IO^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

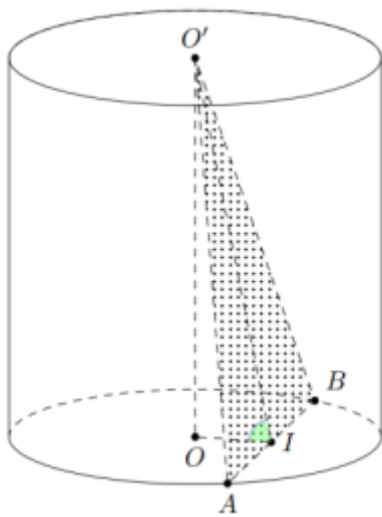
Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AB = 2a\sqrt{2}$.

Thể tích hình trụ: $V = \pi R^2 h = 6\pi a^3\sqrt{2}$ (đvtt).

Câu 43. (Chuyên Hạ Long 2022) Cho hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai hình tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$. Tồn tại dây cung AB thuộc đường tròn (O) sao cho $\triangle O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ hợp với mặt phẳng chứa đường tròn (O) một góc 60° . Khi đó diện tích xung quanh S_{xq} hình trụ là

- A. $S_{xq} = \frac{4\pi R^2}{7}$.
 B. $S_{xq} = \frac{3\pi R^2}{\sqrt{7}}$.
 C. $S_{xq} = \frac{3\pi R^2\sqrt{7}}{7}$.
D. $S_{xq} = \frac{6\pi R^2\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm AB . Khi đó $OI \perp AB$.

Xét tam giác $O'OI$ vuông tại O có $OI = \frac{O'O}{\tan 60^\circ} = \frac{O'O}{\sqrt{3}}$ và $O'I = \frac{O'O}{\sin 60^\circ} = \frac{2O'O}{\sqrt{3}}$. Mặt khác xét

tam giác OIA vuông tại I có $AI^2 = R^2 - OI^2 = R^2 - \frac{OO'^2}{3} \Rightarrow AB^2 = 4\left(R^2 - \frac{OO'^2}{3}\right)$.

Vì tam giác $O'AB$ đều nên

$$O'I = AB \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow O'I^2 = \frac{3}{4} AB^2 \Leftrightarrow \frac{4}{3} O'O^2 = 3R^2 - O'O^2 \Leftrightarrow O'O = \frac{3R}{\sqrt{7}}.$$

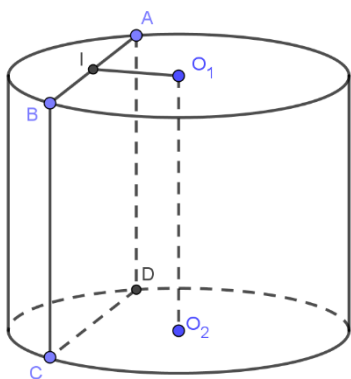
$$\text{Diện tích xung quanh hình trụ } S_{xq} = 2\pi R \cdot O'O = \frac{6\pi R^2 \sqrt{7}}{7}.$$

Câu 44. (THPT Kim Liên - Hà Nội - 2022) Cắt hình trụ (T) có bán kính R bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng a ($0 < a < R$) ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích $16a^2$. Diện tích xung quanh của hình trụ (T) bằng

A. $4\pi a^2 \sqrt{5}$. B. $\pi a^2 \sqrt{5}$. C. $8\pi a^2 \sqrt{5}$. D. $16\pi a^2 \sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C



Hình trụ có hai tâm của hai đường tròn đáy là O_1, O_2 . Mặt phẳng thiết diện là hình vuông $ABCD$.

Hình vuông thiết diện $ABCD$ có diện tích là $16a^2$ nên cạnh $AB = BC = 4a$.

Gọi I là trung điểm của AB , suy ra $IB = \frac{AB}{2} = 2a$.

Mặt khác, khoảng cách từ trục đến mặt phẳng thiết diện là a nên $O_1I = a$.

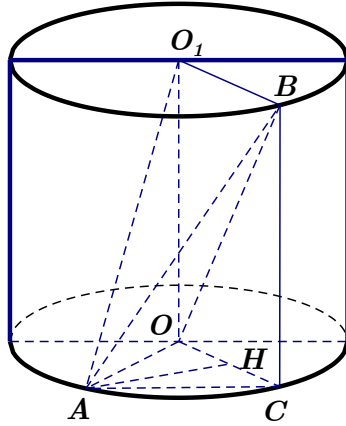
Tam giác O_1IB vuông tại I nên $R = O_1B = \sqrt{O_1I^2 + IB^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$.

Diện tích xung quanh hình trụ (T) là $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot R \cdot BC = 2\pi \cdot a\sqrt{5} \cdot 4a = 8a^2\pi\sqrt{5}$.

- Câu 45. (THPT Yên Lạc - Vĩnh Phúc - 2022)** Cho hình trụ (T) chiều cao bằng $2a$, hai đường tròn đáy của (T) có tâm lần lượt là O và O_1 , bán kính bằng a . Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A , trên đường tròn đáy tâm O_1 lấy điểm B sao cho $AB = \sqrt{5}a$. Thể tích khối tứ diện OO_1AB bằng
- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.**

Lời giải

Chọn D



Gọi C là điểm trên đường tròn tâm O sao cho $BC \parallel OO_1$. Khi đó tứ giác $OCBO_1$ là hình chữ nhật và có diện tích là $S_{OCBO_1} = 2a^2$.

Xét tam giác vuông ABC có $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = a$ nên tam giác OAC đều.

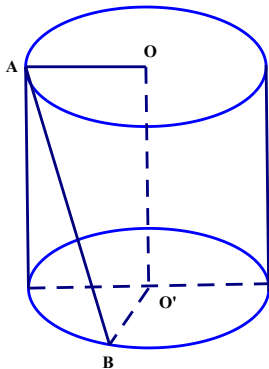
Gọi H là trung điểm của OC , ta có $AH \perp OC$ và $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mặt khác $(ACO) \perp (OCBO_1)$ nên $AH \perp (OCBO_1)$.

Thể tích khối chóp $A.OCBO_1$ là $V_{A.OCBO_1} = \frac{1}{3}AH.S_{O.ACBO_1} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Thể tích khối tứ diện OO_1AB bằng thể tích khối chóp $A.OBO_1 \Rightarrow V_{AOBO_1} = \frac{1}{2}V_{A.OCBO_1} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

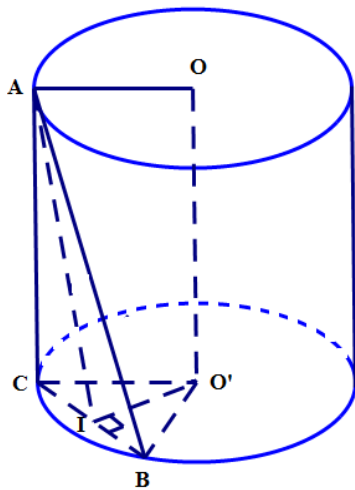
- Câu 46. (Sở Nam Định 2022)** Cho hình trụ (T) có hai đáy là hai hình tròn $(O); (O')$ và thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông. Điểm A thuộc đường tròn (O) , điểm B thuộc đường tròn (O') sao cho $AB = 2$ và khoảng cách giữa AB và OO' bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (thao khảo hình bên). Khối trụ (T) có thể tích bằng:



- A. $\frac{7\sqrt{14}}{8}\pi$. B. $\frac{7\sqrt{14}}{2}\pi$. C. $\frac{28\sqrt{14}}{27}\pi$. **D. $\frac{7\sqrt{14}}{16}\pi$.**

Lời giải

Chọn D



Dựng $AC \parallel OO'$, $O'I \perp CB$.

Ta có $\begin{cases} O'I \perp CB \\ O'I \perp AC \end{cases} \Rightarrow O'I \perp (ACB)$

$$\Rightarrow d(OO', AB) = d(O', (ABC)) = O'I = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Gọi $OO' = 2x, (x > 0)$.

$$\text{Khi đó } IB = \sqrt{O'B^2 - O'I^2} = \sqrt{x^2 - \frac{3}{4}} \Rightarrow CB = 2IB = 2\sqrt{x^2 - \frac{3}{4}}.$$

$$\text{Mà } AC = OO' = 2x \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 - CB^2} = \sqrt{4 - 4\left(x^2 - \frac{3}{4}\right)} = 2x$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 7 - 4x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{7}{8}} \text{ vì } x > 0 \text{ nên } x = \sqrt{\frac{7}{8}}.$$

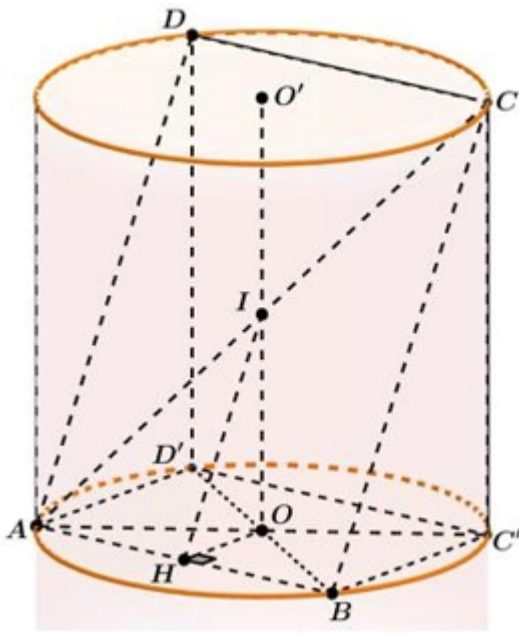
$$\text{Thể tích khối lăng trụ: } V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot \frac{7}{8} \cdot 2\sqrt{\frac{7}{8}} = \frac{7\sqrt{14}\pi}{16}.$$

Câu 47. (THPT Phụ Dực - Quảng Bình 2022) Cho hình trụ có đường kính đáy bằng $\sqrt{5}$. Hình vuông $ABCD$ nội tiếp hình trụ với hai điểm A, B thuộc đường tròn là đáy trên và C, D thuộc đường tròn đáy dưới của hình trụ và $AB < 3$. Biết diện tích hình chiếu của hình vuông $ABCD$ trên mặt đáy bằng 2 (đơn vị diện tích). Tính thể tích của khối trụ đó.

- A. $\frac{5\pi\sqrt{3}}{12}$
 B. $\frac{5\pi\sqrt{6}}{6}$
 C. $\frac{5\pi\sqrt{6}}{2}$
D. $\frac{5\pi\sqrt{3}}{4}$

Lời giải

Ta có hình vẽ như sau:



Ta kẻ lần lượt các đường sinh CC' và DD' với $C', D' \in \left(O; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ sao cho $S_{ABC'D'} = 2$

Khi đó với $ABC'D'$ là hình chữ nhật ta có: $S_{ABC'D'} = AB \cdot BC' = 2$

Mà $AB^2 + BC'^2 = (2R)^2 = 5$ nên ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} AB \cdot BC' = 2 \\ AB^2 + BC'^2 = 5 \end{cases}$$

Do $AB < 3$ nên hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} AB = BC = 1 \\ BC' = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} AB = BC = 2 \\ BC' = 1 \end{cases}$

Trường hợp 1: $\begin{cases} AB = BC = 1 \\ BC' = 2 \end{cases} \Rightarrow CC' = h = \sqrt{BC^2 - BC'^2}$ không tồn tại nên loại.

Trường hợp 2: $\begin{cases} AB = BC = 2 \\ BC' = 1 \end{cases} \Rightarrow CC' = h = \sqrt{BC^2 - BC'^2} = \sqrt{3}$

Vậy ta suy ra thể tích khối trụ là: $V = \pi R^2 h = \pi \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \sqrt{3} = \frac{5\pi\sqrt{3}}{4}$.

Câu 48. (Sở Nghệ An 2022) Ống thép mạ kẽm (độ dày ống thép là hiệu số bán kính mặt ngoài và bán kính mặt bên trong của ống thép).



Nhà máy quy định giá bán cho các ống thép dựa trên cân nặng của các ống thép đó. Biết rằng thép ống có giá 24700 đồng/kg và khối lượng riêng của thép là 7850 kg/m^3 . Một đại lý thép mua về 1000 ống loại có đường kính ống ngoài là 108 mm , độ dày là 3 mm và có chiều dài 6 m . Hãy tính số tiền mà đại lý bỏ ra để mua 1000 ống thép nói trên (làm tròn đến ngàn đồng).

- A.** 1151273000.
- B.** 1113789000.
- C.** 1223867000.
- D.** 1124980000.

Lời giải

Vì độ dày ống thép là hiệu số bán kính mặt ngoài và bán kính mặt bên trong của ống thép nên ta có thể tích thép của mỗi ống bằng $\pi(r_1^2 - r_2^2) \cdot h$

$$= \pi(0,054^2 - 0,051^2) \cdot 6(m^3)$$

$$= \pi \cdot 1,89 \cdot 10^{-3} (m^3) \cdot (r_1, r_2 \text{ lần lượt là bán kính ống ngoài và trong})$$

Vậy số tiền phải trả để mua 1000 ống thép nói trên là

$$\pi \cdot 1,89 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 \cdot 7850 \cdot 24700 \approx 1151272913 \approx 1151273000 \text{ (đồng)}$$

Câu 49. (Chuyên ĐHSPT Hà Nội 2022) Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$. Gọi AB là một dây cung của đường tròn $(O; R)$ sao cho tam giác $O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng (OAB) tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $(O; R)$ một góc 60° . Tính theo R thể tích V của khối trụ đã cho

A. $V = \frac{3\pi\sqrt{5}R^3}{5}$.

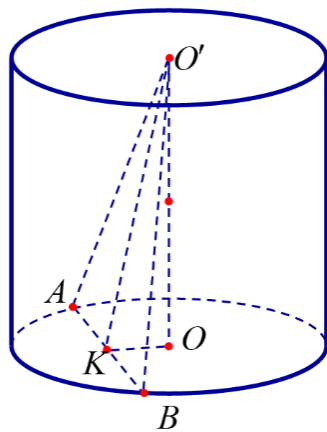
B. $V = \frac{\pi\sqrt{7}R^3}{7}$.

C. $V = \frac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}$.

D. $V = \frac{\pi\sqrt{5}R^3}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi K là trung điểm AB , đặt $AB = 2a$.

Ta có : $AB \perp OK$ và $AB \perp OO'$ nên :

$$\widehat{OKO'} = 60^\circ \Rightarrow O'K = 2OK \Rightarrow O'K^2 = 4OK^2 \Rightarrow 3a^2 = 4(R^2 - a^2) \Rightarrow a^2 = \frac{4R^2}{7}$$

$$\text{Mặt khác : } OO'^2 = O'B^2 - OB^2 = 4a^2 - R^2 = 4 \cdot \frac{4R^2}{7} - R^2 = \frac{9R^2}{7} \Rightarrow OO' = \frac{3\sqrt{7}R}{7}$$

$$\text{Vậy thể tích khối trụ là: } V = \pi R^2 h = \frac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}.$$