

Người làm: Phạm Thị Phương

Zalo: Phương Phạm Pt

- số đt zalo: 0967875995

Email: phuongphuongc2ds@gmail.com**CD9: TỈ LỆ THỨC VÀ DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU****Dạng 1. Tìm số hạng chưa biết dựa vào tỉ lệ thức****A. Trắc nghiệm (nếu có)****B. Tự luận****Câu 1. (HSG 7 huyện Hiệp Đức 2018 - 2019)**

Tìm a, b, c biết $\frac{12a - 15b}{7} = \frac{20c - 12a}{9} = \frac{15b - 20c}{11}$ và $a + b + c = 48$.

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{12a - 15b}{7} = \frac{20c - 12a}{9} = \frac{15b - 20c}{11} = \frac{12a - 15b + 20c - 12a + 15b - 20c}{27} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{12a - 15b}{7} = 0 \Rightarrow 12a = 15b \\ \frac{20c - 12a}{9} = 0 \Rightarrow 20c = 12a \end{array} \right\} \Rightarrow 12a = 15b = 20c \Rightarrow \frac{a}{12} = \frac{b}{15} = \frac{c}{20}$$

Và $a + b + c = 48$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{12} = \frac{b}{15} = \frac{c}{20} = \frac{a + b + c}{\frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20}} = \frac{48}{\frac{1}{5}} = 24$$

$$\Rightarrow a = 20, b = 16, c = 12$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Vĩnh Yên 2018 - 2019)

Tìm x, y, z biết: $\frac{5z - 6y}{4} = \frac{6x - 4z}{5} = \frac{4y - 5x}{6}$ và $3x - 2y + 5z = 96$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Từ } \frac{5z - 6y}{4} &= \frac{6x - 4z}{5} = \frac{4y - 5x}{6} \\ \Rightarrow \frac{20z - 24y}{16} &= \frac{30x - 20z}{25} = \frac{24y - 30x}{36} \\ \Rightarrow 10z = 12y = 15x &\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{3x}{12} = \frac{2y}{10} = \frac{5z}{30} \text{ và } 3x - 2y + 5z = 96 \end{aligned}$$

Giải ra ta được $x = 12$; $y = 15$; $z = 18$

Câu 3. (HSG 7 huyện Tân Tạo, huyện Phú Khánh 2018 - 2019)

Tìm x, y, z biết: $2x = 3y$; $4y = 5z$ và $4x - 3y + 5z = 7$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 &2x=3y \quad 4y=5z \quad 8x=12y=15z \\
 &\text{Từ } \frac{x}{\frac{1}{8}} = \frac{y}{\frac{1}{12}} = \frac{z}{\frac{1}{15}} = \frac{4x}{2} = \frac{3y}{4} = \frac{5z}{3} = \frac{4x-3y+5z}{2-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = \frac{7}{\frac{1}{12}} = 12 \\
 &\Rightarrow x = 12 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}; \quad y = 12 \cdot \frac{1}{12} = 1; \quad z = 12 \cdot \frac{1}{15} = \frac{4}{5} \\
 &\text{Vậy } x = \frac{3}{2}; y = 1; z = \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

Câu 4. (HSG 7 trường THCS Hiền Quan 2018 - 2019)

Tìm các số a, b, c biết rằng: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ và $a + 2b - 3c = -20$

Lời giải

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{2b}{6} = \frac{3c}{12} = \frac{a+2b-3c}{2+6-12} = \frac{-20}{-4} = 5 \Rightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=15 \\ c=20 \end{cases}$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Như Xuân 2018 - 2019)

Tìm x, y biết: $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$ và $xy = 40$

Lời giải

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{5} \Leftrightarrow \frac{xy}{2.5} = \frac{y^2}{5^2} \Leftrightarrow \frac{40}{10} = \frac{y^2}{25} \Rightarrow y^2 = 100 \Rightarrow \begin{cases} y=10 \Rightarrow x=4 \\ y=-10 \Rightarrow x=-4 \end{cases}$$

Câu 6. (HSG 7 trường THCS Lê Hồng Phong 2018 - 2019)

Tìm các số x, y, z biết: $\frac{xy}{2y+4x} = \frac{yz}{4z+6y} = \frac{zx}{6z+2x} = \frac{x^2+y^2+z^2}{2^2+4^2+6^2}$

Lời giải

$x=0 \Rightarrow y=0, z=0 \Rightarrow 2y+4x=0$
 Xét (vô lý)

Suy ra $x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0$

Khi đó từ đề suy ra :

$$\begin{aligned}
 &\frac{2y+4x}{xy} = \frac{4z+6y}{yz} = \frac{6x+2z}{zx} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2} \\
 &\Rightarrow \frac{2}{x} + \frac{4}{y} = \frac{4}{y} + \frac{6}{z} = \frac{6}{z} + \frac{2}{x} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2} = 2 \cdot \frac{2}{x} \\
 &\frac{2}{x} = \frac{4}{y} = \frac{6}{z} = \frac{1}{k} \quad (k \neq 0) \quad \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{2}{k}
 \end{aligned}$$

Suy ra : $x=2k; y=4k; z=6k$ và $x^2+y^2+z^2=28k$

Thay $x=2k, y=4k, z=6k$ vào (3) ta được:

$$(2k)^2 + (4k)^2 + (6k)^2 = 28k$$

$$\Rightarrow 56k^2 - 28k = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 (ktm) \\ k = \frac{1}{2} (tm) \end{cases}$$

$$\text{Với } k = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1; y = 2; z = 3$$

$$\text{Vậy } x = 1, y = 2, z = 3.$$

Câu 7. (HSG 7 huyện Thanh Chương 2018 - 2019)

Tìm x, y biết:

$$\text{a) } \frac{x-1}{-15} = \frac{-60}{x-1}$$

$$\text{b) } \frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+3y-1}{6x}$$

Lời giải

$$(x-1)^2 = 900 \Rightarrow \begin{cases} x-1=30 \\ x-1=-30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=31 \\ x=-29 \end{cases}$$

a) Từ gt bài toán ta có:

b) Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau từ 2 tỉ số đầu ta có:

$$\frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+3y-1}{12} \Rightarrow \frac{2x+3y-1}{12} = \frac{2x+3y-1}{6x}$$

Kết hợp với giả thiết

$$+ \text{ Nếu } 2x+3y-1 \neq 0 \Leftrightarrow 6x=12 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=3$$

$$+ \text{ Nếu } 2x+3y-1=0 \Leftrightarrow 2x=1-3y. \text{ Thay vào 2 tỉ số đầu ta tính được } y=\frac{2}{3}; x=-\frac{1}{2}$$

Câu 8. (HSG 7 huyện Hoằng Hoá 2018 - 2019)

$$\text{Tìm } x, y, z \text{ biết: } \frac{x}{y} = \frac{10}{9}, \frac{y}{z} = \frac{3}{4} \text{ và } x-y+z=78$$

Lời giải

$$\frac{x}{y} = \frac{10}{9} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{9} \quad (1)$$

$$\frac{y}{z} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{y}{9} = \frac{z}{12} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{x}{10} = \frac{y}{9} = \frac{z}{12} = \frac{x-y+z}{10-9+12} = \frac{78}{13} = 6 \Rightarrow x=60, y=54, z=72$$

Câu 9. (HSG 7 (đề đề xuất 201) 2018 - 2019)

$$\text{Tìm các số } x, y, z \text{ biết rằng: } 3x=4y, 5y=6z \text{ và } xyz=30$$

Lời giải

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3}; \frac{y}{6} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} = k \Rightarrow x=8k; y=6k; z=5k$$

$$xyz=30 \Rightarrow 8k.6k.5k=30 \Rightarrow 240k^3=30 \Leftrightarrow k=\frac{1}{2} \Rightarrow x=4, y=3, z=\frac{5}{2}$$

Câu 10. (HSG 7 trường THCS Phong Đạt, trường THCS Phương Trung 2018 - 2019)

$$\text{Cho } \frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6} \text{ và } 5a - 3b - 4c = 46. \quad \text{Xác định } a, b, c.$$

Lời giải

$$\frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6} = \frac{5(a-1)}{10} = \frac{-3(b+3)}{-12} = \frac{-4(c-5)}{-24} = \frac{5a-3b-4c-5-9+20}{10-12-24} = -2$$

$$\Rightarrow a = -3, b = -11, c = -7$$

Câu 11. (HSG 7 trường THCS Thanh Mai 2018 - 2019)

Tìm các số x, y, z biết:

a) $\frac{x}{10} = \frac{y}{6} = \frac{z}{21}$ và $5x + y - 2z = 28$

b) $3x = 2y$; $7y = 5z$ và $x - y + z = 32$

c) $\frac{2x}{3} = \frac{3y}{4} = \frac{4z}{5}$ và $x + y + z = 49$

Lời giải

a) $\frac{x}{10} = \frac{y}{6} = \frac{z}{21} = \frac{5x+2-2z}{5 \cdot 10 + 6 - 2 \cdot 21} = \frac{28}{14} = 2$

$$\Rightarrow x = 20; y = 12; z = 42$$

b) $3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15} \quad (1);$

$7y = 5z \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{z}{7} \Rightarrow \frac{y}{15} = \frac{z}{21} \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21} = \frac{x-y+z}{10-15+21} = \frac{32}{16} = 2$

$$\Rightarrow x = 20; y = 30; z = 42$$

c) $\frac{2x}{3} = \frac{3y}{4} = \frac{4z}{5} = \frac{x}{\frac{3}{2}} = \frac{y}{\frac{4}{3}} = \frac{z}{\frac{5}{4}} = \frac{x+y+z}{\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4}} = \frac{49}{\frac{47}{12}} = 12$

$$\Rightarrow x = 18; y = 16; z = 15$$

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Kinh Môn 2018 - 2019)

Cho các số dương a, b, c, d ($c \neq d$) và $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

$$\frac{(a^{2018} + b^{2018})^{2019}}{(c^{2018} + d^{2018})^{2019}} = \frac{(a^{2019} - b^{2019})^{2018}}{(c^{2019} - d^{2019})^{2018}}$$

CMR:

Lời giải

Với $a, b, c, d > 0, c \neq d$, ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a^{2018}}{c^{2018}} = \frac{b^{2018}}{d^{2018}}$

$$\frac{a^{2018}}{c^{2018}} = \frac{b^{2018}}{d^{2018}} = \frac{a^{2018} + b^{2018}}{c^{2018} + d^{2018}} \Rightarrow \frac{(a^{2018})^{2019}}{(c^{2018})^{2019}} = \frac{(a^{2018} + b^{2018})^{2019}}{(c^{2018} + d^{2018})^{2019}} \quad (1)$$

Do đó

Lại có: $a, b, c, d > 0, c \neq d$, ta có:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a^{2019}}{c^{2019}} = \frac{b^{2019}}{d^{2019}} = \frac{a^{2019} - b^{2019}}{c^{2019} - d^{2019}} \Rightarrow \frac{(a^{2019})^{2018}}{(c^{2019})^{2018}} = \frac{(a^{2019} - b^{2019})^{2018}}{(c^{2019} - d^{2019})^{2018}} \quad (2)$$

$$\frac{(a^{2018})^{2019}}{(c^{2018})^{2019}} = \frac{(a^{2019})^{2018}}{(c^{2019})^{2018}} = \frac{a^{2019 \cdot 2018}}{c^{2019 \cdot 2018}} \quad (3)$$

Mà

$$(1) (2) (3) \Rightarrow \frac{(a^{2018} + b^{2018})^{2019}}{(c^{2018} + d^{2018})^{2019}} = \frac{(a^{2019} - b^{2019})^{2018}}{(c^{2019} - d^{2019})^{2018}}$$

Từ

Câu 2. (HSG 7 (đề đề xuất 184) 2018 - 2019)

Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}$.

Lời giải

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow c^2 = ab \Rightarrow \frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2 + ab}{b^2 + ab} = \frac{a}{b}$$

Từ

Câu 3. (HSG 7 huyện Tam Nông 2018 - 2019)

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng ta có tỉ lệ thức sau (giả thiết các tỉ lệ đều có nghĩa)

a) $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$

b) $\left(\frac{a+b}{c+d} \right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$

Lời giải

a) Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ta có: $a = kb, c = kd$;

$$\frac{a}{a+b} = \frac{kb}{kb+b} = \frac{kb}{(k+1)b} = \frac{k}{k+1}$$

$$\frac{c}{c+d} = \frac{kd}{kd+d} = \frac{kd}{(k+1)d} = \frac{k}{k+1}$$

Vậy $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$.

$$b) \left(\frac{a+b}{c+d} \right)^2 = \frac{(kb+b)^2}{(kd+d)^2} = \frac{(k+1)^2 b^2}{(k+1)^2 d^2} = \frac{b^2}{d^2} \quad (1)$$

$$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \frac{(kb)^2+b^2}{(kd)^2+d^2} = \frac{k^2b^2+b^2}{k^2d^2+d^2} = \frac{(k^2+1)b^2}{(k^2+1)d^2} = \frac{b^2}{d^2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\left(\frac{a+b}{c+d} \right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Tân Tạo, huyện Phú Khánh 2018 – 2019)

Cho $\frac{2bz - 3cy}{a} = \frac{3cx - az}{2b} = \frac{ay - 2bx}{3c}$, Chứng minh : $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{2bz - 3cy}{a} &= \frac{3cx - az}{2b} = \frac{ay - 2bx}{3c} \\ \Leftrightarrow \frac{2abz - 3acy}{a^2} &= \frac{6bcx - 2abz}{4b^2} = \frac{3acy - 6bcx}{9c^2} = \frac{2abz - 3acy + 6bcx - 2abz + 3acy - 6bcx}{a^2 + 4b^2 + 9c^2} = 0 \\ \Rightarrow 2bz - 3cy &= 0 \Rightarrow \frac{z}{3c} = \frac{y}{2b} \quad (1); \quad 3cx - az = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{3c} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2018 - 2019)

Cho $\frac{3x - 2y}{4} = \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2}$, Chứng minh rằng: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$.

Lời giải

$$\frac{3x - 2y}{4} = \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2} \Rightarrow \frac{4(3x - 2y)}{16} = \frac{3(2z - 4x)}{9} = \frac{2(4y - 3z)}{4}$$

Ta có:

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{4(3x - 2y)}{16} &= \frac{3(2z - 4x)}{9} = \frac{2(4y - 3z)}{4} = \frac{4(3x - 2y) + 3(2z - 4x) + 2(4y - 3z)}{16 + 9 + 4} = 0 \\ \Rightarrow \frac{4(3x - 2y)}{16} &= 0 \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \quad (1); \quad \frac{3(2z - 4x)}{9} = 0 \Rightarrow 2z = 4x \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{4} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

Câu 6. (HSG 7 trường THCS Tôn Đức Thắng 2018 - 2019)

Cho bốn số dương a, b, c, d thỏa điều kiện $a + c = 2b$ và $c(b + d) = 2bd$.

Chứng minh $\left(\frac{a+c}{b+d} \right)^8 = \frac{a^8+b^8}{b^8+d^8}$.

Lời giải

$$\text{Từ } c(b+d)=2bd \Rightarrow b+d = \frac{2bd}{c}$$

$$\text{Viết } \frac{a+c}{b+d} = \frac{2bc}{2bd} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \Rightarrow \left(\frac{a+c}{b+d} \right)^8 = \frac{a^8+b^8}{b^8+d^8}$$

Câu 7. (HSG 7 huyện Hoàng Hoá 2018 - 2019)

Cho $b^2=ac$, $c^2=bd$. Với $b, c, d \neq 0$, $b+c \neq d$, $b^5+c^5 \neq d^5$.

$$\text{Chứng minh: } \frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3-d^3} = \left(\frac{a+b-c}{b+c-d} \right)^3$$

Lời giải

$$\text{Từ } b^2=ac \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad (1); \quad c^2=bd \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{a+b-c}{b+c-d}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b-c}{b+c-d} \right)^3 = \frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{c^3} = \frac{c^3}{d^3} = \frac{a^3+b^3-c^3}{b^3+c^3-d^3}$$

$$\text{Vậy } \frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3-d^3} = \left(\frac{a+b-c}{b+c-d} \right)^3$$

Câu 8. (HSG 7 trường THCS Phong Đạt 2018 - 2019)

$$\text{Cho } \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}. \quad \left(\frac{a+b+c}{b+c+d} \right)^3 = \frac{a}{d}$$

Chứng minh:

Lời giải

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{a+b+c}{b+c+d}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\text{Do đó: } \left(\frac{a+b+c}{b+c+d} \right)^3 = \frac{a+b+c}{b+c+d} \cdot \frac{a+b+c}{b+c+d} \cdot \frac{a+b+c}{b+c+d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{d}$$

Câu 9. (HSG 7 trường THCS Phương Trung 2018 - 2019)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{2a^2 - 3ab + 5b^2}{2b^2 + 3ab} = \frac{2c^2 - 3cd + 5d^2}{2d^2 + 3cd}$$

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh $\frac{2a^2 - 3ab + 5b^2}{2b^2 + 3ab} = \frac{2c^2 - 3cd + 5d^2}{2d^2 + 3cd}$, với điều kiện mẫu thức xác định.

Lời giải

$$\text{Đặt } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = kb; c = kd$$

Thay vào các biểu thức:

$$\frac{2a^2 - 3ab + 5b^2}{2b^2 + 3ab} = \frac{2c^2 - 3cd + 5d^2}{2d^2 + 3cd} = \frac{k^2 - 3k + 5}{2 + 3k} = \frac{k^2 - 3k + 5}{2 + 3k} = 0$$

$$\text{Vậy } \frac{2a^2 - 3ab + 5b^2}{2b^2 + 3ab} = \frac{2c^2 - 3cd + 5d^2}{2d^2 + 3cd}.$$

Câu 10. (HSG 7 trường THCS Thanh Oai 2018 - 2019)

Chứng minh rằng:

$$\text{Nếu } 2(x+y)=5(y+z)=3(z+x) \text{ thì } \frac{x-y}{4} = \frac{y-z}{5}.$$

Lời giải

$$2(x+y)=5(y+z)=3(z+x)$$

$$\Rightarrow \frac{2(x+y)}{30} = \frac{5(y+z)}{30} = \frac{3(z+x)}{30} \Rightarrow \frac{x+y}{15} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{10}$$

$$\text{Biến đổi: } \frac{z+x}{10} = \frac{y+z}{6} = \frac{x-y}{4} \quad (1); \quad \frac{x+y}{15} = \frac{z+x}{10} = \frac{y-z}{5} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{x-y}{4} = \frac{y-z}{5}.$$

Câu 11. (HSG 7 trường THCS Thanh Thủy 2018 - 2019)

$$\text{Cho } \frac{a}{c} = \frac{c}{b}, \quad \frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}.$$

Chứng minh rằng:

Lời giải

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2 + c^2}{c^2 + d^2} \quad (1)$$

Ta có:

$$\text{Lại có: } \frac{a^2}{c^2} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Dạng 3: Chứng minh bất đẳng thức

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Lộc Hà; trường Lý Tự Trọng 2018 - 2019)

$$\text{Cho ba số dương } 0 \leq a \leq b \leq c \leq 1, \text{ chứng minh rằng } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$$

Lời giải

$$\text{Vì } 0 \leq a \leq b \leq c \leq 1 \text{ nên } (a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab+1 \geq a+b$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b}$$

$$\frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c} \quad (2); \quad \frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c} \quad (3)$$

Tương tự

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \quad (4)$$

Do đó

$$\text{Mà } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Dạng 4: Bài toán về dãy tỉ số bằng nhau và chia tỉ lệ

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, huyện Nam Trà My, huyện Thăng Bình 2018 - 2019)

Học sinh khối 7 của một trường gồm 3 lớp tham gia trồng cây. Lớp 7A trồng toàn bộ 32,5% số cây. Biết số cây lớp 7B và 7C trồng được theo tỉ lệ $1,5$ và $1,2$. Hỏi số cây cả 3 lớp trồng được là bao nhiêu, biết số cây của lớp 7A trồng được ít hơn số cây của lớp 7B trồng được là 120 cây.

Lời giải

Gọi a, b, c ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$) lần lượt là số cây của lớp 7A, 7B, 7C trồng được.
Theo đề ta có: $\frac{b}{1,5} = \frac{c}{1,2}$ (1); $b - a = 120$ (2) và $a = 32,5\%(a+b+c) \Rightarrow a+b+c = \frac{40a}{13}$ (3)
Từ (1) và (2) suy ra a, c theo b ; rồi thay vào (3) để giải.
Vậy cả 3 lớp trồng được số cây là 2400 cây.

Câu 2. (HSG 7 huyện Hiệp Đức 2018 - 2019)

Một công trường dự định phân chia số đất cho ba đội I, II, III tỉ lệ với $7; 6; 5$. Nhưng sau đó vì số người của các đội thay đổi nên đã chia lại tỉ lệ $6; 5; 4$. Như vậy có một đội làm nhiều hơn so với dự định là $6m^3$. Tính tổng số đất đã phân chia cho các đội.

Lời giải

$$x(m^3) (x > 0)$$

Gọi tổng số đất đã phân chia cho các đội là

Số đất dự định chia cho 3 đội I, II, III lần lượt là $a, b, c(m^3)$ ($a, b, c > 0$)

$$\text{Ta có } \frac{a}{7} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{7x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{5x}{18} \quad (1)$$

Số đất sau đó chia cho 3 đội I, II, III lần lượt là $a', b', c'(m^3)$. ĐK: $a', b', c' > 0$

$$\text{Ta có } \frac{a'}{6} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{4} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{6x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{4x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a < a', b = b', c > c'$ nên đội I nhận nhiều hơn lúc đầu.

$$\text{Vì } a - a' = 6 \text{ hay } \frac{7x}{18} - \frac{6x}{15} = 6 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360$$

Vậy tổng số đất đã phân chia cho các đội là 360m^3 .

Câu 3. (HSG 7 trường THCS Hiền Quan 2018 - 2019)

16 20 000 50 000 100 000
Có tờ giấy bạc loại đ, đ, đ. Trị giá mỗi loại tiền trên đều bằng nhau.
Hỏi mỗi loại có mấy tờ?

Lời giải

Gọi số tờ giấy bạc loại 20 000 đ, 50 000 đ, 100 000 đ theo thứ tự là x, y, z ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ra ta có: $x + y + z = 16$ và $20000x = 50000y = 100000z$

Biến đổi $20000x = 50000y = 100000z$

$$\Rightarrow \frac{20000x}{100000} = \frac{50000y}{100000} = \frac{100000z}{100000} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} = \frac{x+y+z}{5+2+1} = \frac{16}{8} = 2$$

Suy ra $x=10, y=4, z=2$.

Vậy số tờ giấy bạc loại 20 000 đ, 50 000 đ, 100 000 đ theo thứ tự là 10; 4; 2

Câu 4. (HSG 7 huyện Lộc Hà, huyện Vĩnh Yên, trường Lý Tự Trọng, trường THCS Phong Đạt 2018 - 2019)

Ba lớp $7A, 7B, 7C$ cùng mua một số gói tăm từ thiện, lúc đầu số gói tăm dự định chia cho ba lớp với tỉ lệ $5:6:7$ nhưng sau đó chia theo tỉ lệ $4:5:6$ nên có một lớp nhận nhiều hơn 4 gói. Tính tổng số gói tăm mà ba lớp đã mua.

Lời giải

$$x (x \in \mathbb{N}^*)$$

Gọi tổng số gói tăm 3 lớp cùng mua là .

Số gói tăm dự định chia cho 3 lớp $7A, 7B, 7C$ lúc đầu lần lượt là a, b, c .

$$\text{Ta có: } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{7x}{18} \quad (1)$$

Số gói tăm sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c' , ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{6x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a > a'; b = b'; c < c'$ nên lớp $7C$ nhận nhiều hơn lúc đầu

$$\text{Do đó } c' - c = 4 \Rightarrow \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow x = 360 \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy số gói tăm 3 lớp đã mua là 360 gói.

Câu 5. (HSG 7 huyện Tiên Phước 2018 - 2019)

Có 3 mảnh đất hình chữ nhật A, B và C . Các diện tích của A và B tỉ lệ với 4 và 5, các diện tích của B và C tỉ lệ với 7 và 8; A và B có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là $27(\text{m})$. B và C có cùng chiều rộng. Chiều dài của mảnh đất C là $24(\text{m})$. Hãy tính diện tích của mỗi mảnh đất.

Lời giải

Gọi diện tích, chiều dài, chiều rộng của các mảnh đất A, B, C theo thứ tự là

$$S_A, d_A, r_A, S_B, d_B, r_B, S_C, d_C, r_C$$

Theo bài ra ta có:

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{4}{5}, \frac{S_B}{S_C} = \frac{7}{8}, d_A = d_B, r_A + r_B = 27(\text{m}), r_B = r_C, d_C = 24(\text{m})$$

Hai hình chữ nhật A và B có cùng chiều dài nên các diện tích của chúng tỉ lệ thuận với các chiều rộng. Ta có:

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{4}{5} = \frac{r_A}{r_B} \Rightarrow \frac{r_A}{r_B} = \frac{r_B}{4} = \frac{r_A + r_B}{4 + 5} = \frac{27}{9} = 3 \Rightarrow \begin{cases} r_A = 12(\text{m}) \\ r_B = 15(\text{m}) = r_C \end{cases}$$

Hai hình chữ nhật B và C có cùng chiều rộng nên các diện tích của chúng tỉ lệ thuận với các chiều dài. Ta có:

$$\frac{S_B}{S_C} = \frac{7}{8} = \frac{d_B}{d_C} \Rightarrow d_B = \frac{7d_C}{8} = \frac{7 \cdot 24}{8} = 21(\text{m}) = d_A$$

Do đó: $S_A = d_A \cdot r_A = 21 \cdot 12 = 252(\text{m}^2)$

$$S_B = d_B \cdot r_B = 21 \cdot 15 = 315(\text{m}^2)$$

$$S_C = d_C \cdot r_C = 24 \cdot 15 = 360(\text{m}^2)$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Lộc Hà, trường Lý Tự Trọng, trường THCS Phong Đạt 2018 - 2019)

Cho a, b, c là ba số thực khác 0 , thỏa mãn điều kiện: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$

Hãy tính giá trị của biểu thức $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$.

Lời giải

+ Nếu $a+b+c \neq 0$, theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

$$\text{Mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2 \Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

Vậy $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$

+ Nếu $a+b+c = 0$, theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 0$$

$$\text{Mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 1 \Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 1$$

Vậy $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \cdot \left(\frac{c+a}{c}\right) \cdot \left(\frac{b+c}{b}\right) = 1$

Câu 7. (HSG 7 huyện Phú Ninh 2018 - 2019)

Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25}$ và $4x^3 - 3 = 29$. Tính $x - 2y + 3z$.

Lời giải

$$4x^3 - 3 = 29 \Rightarrow 4x^3 = 32 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

Ta có:

$$\frac{2+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} \Rightarrow \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} = 2$$

Thay vào tỉ lệ thức ta được:

$$\Rightarrow y = -7, z = 1$$

Vậy $x - 2y + 3z = 2 - 2(-7) + 3 \cdot 1 = 19$

Câu 8. (HSG 7 huyện Như Xuân 2018 - 2019)

Số M được chia thành ba số tỉ lệ với $0,5; 1\frac{2}{3}; 2\frac{1}{4}$. Tìm số M biết rằng tổng bình phương của ba số đó là 4660.

Lời giải

$$0,5 : 1\frac{2}{3} : 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2} : \frac{5}{3} : \frac{9}{4} = \frac{6}{12} : \frac{20}{12} : \frac{27}{12} = 6 : 10 : 27$$

Ta có:

Giả sử M được chia ra thành 3 số x, y, z . Theo bài ra ta có:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{10} = \frac{z}{27} \Leftrightarrow \frac{x^2}{6^2} = \frac{y^2}{10^2} = \frac{z^2}{27^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{6^2 + 10^2 + 27^2} = \frac{4660}{1165} = 4 = 2^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 12^2 \Rightarrow x = \pm 12; y^2 = 40^2 \Rightarrow y = \pm 40; z^2 = 54^2 \Rightarrow z = \pm 54$$

$$\text{Vậy } M = 12 + 40 + 54 = 106 \text{ hoặc } M = -12 - 40 - 54 = -106$$

Câu 9. (HSG 7 huyện Vĩnh Yên 2018 - 2019)

Cho biết $xyz = 1$. Tính giá trị $A = \frac{x}{xy+x+1} + \frac{y}{yz+y+1} + \frac{z}{xz+z+1}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{x}{xy+x+1} + \frac{y}{yz+y+1} + \frac{z}{xz+z+1} \\ &= \frac{xz}{xyz+xz+z} + \frac{xyz}{xyz^2+xyz+xz} + \frac{z}{xz+z+1} \\ &= \frac{xz}{1+xz+z} + \frac{xyz}{z+1+xz} + \frac{z}{xz+z+1} \\ &= \frac{xyz+xz+1}{xyz+xz+1} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = 1$$

Câu 10. (HSG 7 huyện Tiên Phước 2018 - 2019)

Tính giá trị biểu thức:

$$A = \frac{(a+b)(-x-y) - (a-y)(b-x)}{abxy(xy+ay+ab+by)} \quad \text{với } a = \frac{1}{3}; b = -2; x = \frac{3}{2}; y = 1$$

Lời giải

$$A = \frac{(a+b)(-x-y) - (a-y)(b-x)}{abxy(xy+ay+ab+by)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a(-x-y) + b(-x-y) - a(b-x) + y(b-x)}{abxy(xy+ay+ab+by)} \\
 &= \frac{-ax - ay - bx - by - ab + ax + by - xy}{abxy(xy+ay+ab+by)} \\
 &= \frac{-ay - bx - ab - xy}{abxy(xy+ay+ab+by)} \\
 &= \frac{-xy + ay + ab + by}{abxy(xy+ay+ab+by)} \\
 &= \frac{-1}{abxy}
 \end{aligned}$$

Với $a = \frac{1}{3}; b = -2; x = \frac{3}{2}; y = 1$ ta có $A = \frac{-1}{\frac{1}{3} \cdot (-2) \cdot \frac{3}{2} \cdot 1} = -1$.

Câu 11. (HSG 7 huyện Xuân Trường 2018 - 2019)

Cho x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Gọi x_1 và x_2 là hai giá trị của x , y_1, y_2 là hai giá trị tương ứng của y

- a) Tính $\frac{x_1}{y_1}$ và $\frac{2x_1}{5y_1}$ biết $\frac{2x_1}{5y_1} = 12$ và $\frac{x_1}{y_1} = 2x_2$ và $y_2 = 10$
- b) Tính $\frac{x_1}{y_1}$ biết $\frac{x_1}{y_1} = 2x_2$ và $y_2 = 10$

Lời giải

a) Vì $\frac{2x_1}{5y_1} = 12$ và $\frac{x_1}{y_1} = 2x_2$ và $y_2 = 10$ nên

$$\frac{2x_1}{5y_1} = 12 \Rightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{3y_1}{2} \Rightarrow \frac{2x_1}{5y_1} = \frac{3y_1}{2} \Rightarrow \frac{2x_1}{10} = \frac{3y_1}{6} = \frac{2x_1 - 3y_1}{10 - 6} = \frac{12}{4} = 3$$

b) Vì $\frac{x_1}{y_1}$ và $\frac{x_2}{y_2}$ là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên $x_1 y_1 = x_2 y_2$

Mà $x_1 = 2x_2$ và $y_2 = 10$ nên $2x_2 y_1 = x_2 \cdot 10 \Rightarrow y_1 = \frac{10x_2}{2x_2} = 5$

Câu 12. (HSG 7 huyện Kim Thành 2018 - 2019)

Cho $a+b+c+d=2000$ và $\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{c+d+a} + \frac{1}{d+a+b} = \frac{1}{40}$

Tính giá trị của $S = \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c}$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c} \\
 S+4 &= \frac{a+b+c+d}{b+c+d} + \frac{a+b+c+d}{c+d+a} + \frac{a+b+c+d}{d+a+b} + \frac{a+b+c+d}{a+b+c} \\
 S &= -4 + 2000 \cdot \frac{1}{40} = 46
 \end{aligned}$$

Do đó

Câu 13. (HSG 7 trường THCS Thanh Oai 2018 - 2019)

30;120; 16.

Tìm hai số dương biết tổng, hiệu, tích của chúng tỉ lệ nghịch với ba số

Lời giải

a, b .

Gọi 2 số đó là Ta có:

$$30(a+b)=120(a-b)=16ab$$

Từ điều kiện: $30(a+b)=120(a-b) \Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{3}$

Từ điều kiện: $120(a-b)=16ab \Rightarrow \frac{a-b}{2} = \frac{ab}{15}$

Từ đó tìm được $a=5, b=3$.

Câu 15. (HSG 7 trường THCS Thanh Thủy, đề đề xuất 184 2018 - 2019)

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}.$$

Số A được chia thành 3 số tỉ lệ theo 24309.

Biết tổng các bình phương của ba số đó bằng

Tìm số

Lời giải

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6} = \frac{24}{60} : \frac{45}{60} : \frac{10}{60} = 24 : 45 : 10$$

Ta có:

Giả sử số A được chia thành 3 phần x, y, z

Theo đề bài ta có : $\frac{x}{24} = \frac{y}{45} = \frac{z}{10} \Rightarrow x, y, z$ cùng dấu

$$\text{Và } \frac{x^2}{24^2} = \frac{y^2}{45^2} = \frac{z^2}{10^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{24^2 + 45^2 + 10^2} = \frac{24309}{2701} = 9 = 3^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 24^2 \cdot 3^2 = 72^2 \Rightarrow x = \pm 72$$

$$\text{Học sinh tính tương tự: } y = \pm 135; z = \pm 30$$

Vậy $A = 237$ hoặc $A = -237$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>