

Người làm: Tran Giang

Zalo: - số đt zalo:

Email:

CD4: CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH CHIA HẾT

Dạng 1. Chứng minh chia hết.

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Kinh Môn, 2018 - 2019)

CMR với n số nguyên dương thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10

Lời giải

$$3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) = 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5$$

Ta có $\begin{cases} 10 \cdot 3^n : 10 \\ 2^n : 2 \Rightarrow 2^n \cdot 5 : 10 \end{cases}$ với n là số nguyên dương.

$$\Rightarrow (3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5) : 10$$

, với n là số nguyên dương

$$\Rightarrow (3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n) : 10$$

với n là số nguyên dương

$$(3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n) : 10$$

Vậy

với n là số nguyên dương

Câu 2. (HSG 7 trường Hiền Quang, 2018 - 2019)

Chứng minh rằng $7^6 + 7^5 - 7^4$ chia hết cho 55

Lời giải

$$7^6 + 7^5 - 7^4 = 7^4 \cdot (7^2 + 7 - 1) = 7^4 \cdot 55 : 55$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Phú Ninh, 2018 - 2019)

$$3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$$

Chứng minh rằng: chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n

Lời giải

$$3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^n \cdot 9 - 2^n \cdot 4 + 3^n - 2^n$$

Ta có:

$$= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 = 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}) : 10$$

Vậy $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n

Câu 4. (HSG 7 huyện Việt Yên, 2018 - 2019)

$$S = 17 + 17^2 + 17^3 + \dots + 17^{18}$$

Cho

Chứng tỏ rằng S chia hết cho 307.

Lời giải

$$\begin{aligned} S &= 17 \cdot (1 + 17 + 17^2) + 17^4 \cdot (1 + 17 + 17^2) + \dots + 17^{16} \cdot (1 + 17 + 17^2) \\ &= 17 \cdot 307 + 17^4 \cdot 307 + \dots + 17^{16} \cdot 307 \\ &= 307 \cdot (17 + 17^4 + \dots + 17^{16}) : 307 \end{aligned}$$

Câu 5. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong, 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31

Lời giải

Đặt $D = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ (có 100 số hạng)

$$= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + (2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}) + \dots + (2^{96} + 2^{97} + 2^{98} + 2^{99} + 2^{100})$$

(có 20 nhóm)

$$D = 2 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^6 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + 2^{96} \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$$

$$D = 2 \cdot 31 + 2^6 \cdot 31 + \dots + 2^{96} \cdot 31$$

$$D = 31 \cdot (2 + 2^6 + \dots + 2^{96})$$

chia hết cho 31

Vậy $D = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31

Câu 6. (HSG 7 trường Tôn Đức Thắng, 2018 - 2019)

Đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có a, b, c là các số nguyên, và $a \neq 0$. Biết với mọi giá trị nguyên của x thì $f(x)$ chia hết cho 7 . Chứng minh a, b, c cũng chia hết cho 7 .

Lời giải

Với $x = 0 \Rightarrow f(x) = f(0) = c : 7$

Với $x = 1 \Rightarrow f(x) = f(1) = (a + b + c) : 7 \quad (1)$

Với $x = -1 \Rightarrow f(x) = f(-1) = (a - b + c) : 7 \quad (2)$

Từ và $\Rightarrow f(1) - f(-1) = a + b + c - a + b - c = 2b : 7 \Rightarrow b : 7$

$$\begin{cases} (a + b + c) : 7 \\ b : 7 \\ c : 7 \end{cases} \Rightarrow a : 7$$

Ta có

Vậy $a : 7; b : 7; c : 7$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa, 2018 - 2019)

Cho p, q là các số nguyên tố lớn hơn 3 và thỏa mãn $p = q + 2$. Chứng minh rằng: $(p + q) : 12$.

Lời giải

Vì q nguyên tố, $q > 3$ nên q có dạng $6k + 1$ hoặc $6k + 5 (k \in \mathbb{N})$

Nếu $q = 6k + 1$ thì $p = q + 2 = (6k + 3) : 3$ mà $p > 3$ nên p là hợp số (loại)

Nếu $q = 6k + 5 \Rightarrow p = q + 2 = 6k + 5 + 2 = 6k + 7$

Suy ra $p + q = (6k + 7) + (6k + 5) = (12k + 12) : 12$

Câu 8. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên nhỏ nhất a để khi ghép nó vào bên phải số 2019 thì được một số tự nhiên chia hết cho 2018.

Lời giải

Đặt $a = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các chữ số, $a_1 \neq 0$)

Số tự nhiên cần tìm có dạng $\overline{2019 a_1 a_2 \dots a_n}$

Theo giả thiết, ta có: $\overline{2019 a_1 a_2 \dots a_n} : 2018$

$(2019 \cdot 10^n + \overline{a_1 a_2 \dots a_n}) : 2018$

$(2018 \cdot 10^n + 10^n + \overline{a_1 a_2 \dots a_n}) : 2018$

$(10^n + \overline{a_1 a_2 \dots a_n}) : 2018$

Xét các trường hợp:

Với $n = 1$, ta được: $(10 + a_1) : 2018$ nên không tìm được a_1 vì $10 < 10 + a_1 < 20$

Với $n = 2$, ta được $(100 + \overline{a_1 a_2}) : 2018$ nên không tìm được $\overline{a_1 a_2}$ vì $100 < 100 + \overline{a_1 a_2} < 200$

Với $n = 3$, ta được $(1000 + \overline{a_1 a_2 a_3}) : 2018$, không tìm được $\overline{a_1 a_2 a_3}$ vì $1000 < 1000 + \overline{a_1 a_2 a_3} < 2000$

Với $n = 4$, ta được $(10000 + \overline{a_1 a_2 a_3 a_4}) : 2018$

$(10000 + \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} - 5 \cdot 2018) : 2018$

Hay $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4} - 90 = 2018 \Rightarrow \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} = 2108$

Vậy số tự nhiên a nhỏ nhất cần tìm là $a = 2108$

Câu 9. (HSG 7 huyện Thăng Bình, 2018 - 2019)

Chứng tỏ rằng: $M = 75 \cdot (4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 10^2

Lời giải

$M = 75 \cdot (4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$

$= 25 \cdot (4 - 1) (4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$

$= 25 \cdot (4^{2018} + \dots + 4^3 + 4^2 + 4) - 25 \cdot (4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$

$= 25 \cdot 4^{2018} = 25 \cdot 4 \cdot 4^{2017} = 100 \cdot 4^{2017} = 10^2 \cdot 4^{2017} : 10^2$

Vậy $M : 10^2$

Câu 10. (HSG 7 huyện Vĩnh Yên, 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}$ chia hết cho 120 (với $x \in \mathbb{N}$)

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } & 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100} \\
 &= (3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4}) + (3^{x+5} + 3^{x+6} + 3^{x+7} + 3^{x+8}) + \dots + (3^{x+97} + 3^{x+98} + 3^{x+99} + 3^{x+100}) \\
 &= 3^x (3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^{x+4} (3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{x+96} (3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) \\
 &= 3^x \cdot 120 + 3^{x+4} \cdot 120 + \dots + 3^{x+96} \cdot 120 \\
 &= 120(3^x + 3^{x+4} + \dots + 3^{x+96}) : 120 \quad (\text{đpcm})
 \end{aligned}$$

Câu 11. (HSG 7 huyện Kim Thành, 2017 - 2018)

Chứng minh rằng với n nguyên dương thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có:} \\
 & 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n \\
 &= (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n) \\
 &= 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 \\
 &= (3^n - 2^{n-1}) \cdot 10 : 10 \\
 &\text{Vậy } (3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n) : 10
 \end{aligned}$$

Dạng 2. Tìm chữ số tận cùng

Dạng 2.1. Tìm chữ số tận cùng

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Chương, 2018 – 2019)

Cho $N = 0,7 \cdot (2007^{2009} - 2013^{1999})$. Chứng minh rằng N là một số nguyên

Lời giải

Chứng minh N là số nguyên ta cần chứng minh: $2007^{2009} - 2013^{1999}$ có chữ số tận cùng là 0.

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } 2007^{2009} &= 2007 \cdot \left[(2007^2)^2 \right]^{502} = 2007 \cdot \left[(\dots 9)^2 \right]^{502} = 2007 \cdot (\dots 1) \\
 &\text{có chữ số tận cùng bằng } 7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2013^{1999} &= 2013^3 \cdot \left[(2013^2)^2 \right]^{499} = (\dots 7) \cdot \left[(\dots 9)^2 \right]^{499} = (\dots 7) \cdot (\dots 1) \\
 &\text{có chữ số tận cùng bằng } 7
 \end{aligned}$$

Vậy $2007^{2009} - 2013^{1999}$ có chữ số tận cùng bằng 0 $\Rightarrow N$ là một số nguyên

Dạng 2.2. Tìm hai chữ số tận cùng.

Dạng 2.3. Tìm ba chữ số tận cùng. Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>