UBND THÀNH PHỐ SẦM SƠN
TRƯỜNG THCS NGUYỄN HỒNG LỄ

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ KHẢO SÁT ĐỘI TUYỂN HSG CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2023-2024
MÔN: TOÁN
Lần thứ sáu (ngày 10/11/2023)
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I: (4,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức:

$$P=\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{b}{b-\sqrt{ab}}+\frac{a}{\sqrt{ab}+a}\right)-\frac{\sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}}{2}\quad \text{Với } a>0, b>0, a\neq b$$

2. Biết rằng $\sqrt{(3-a)(4-a)}+\sqrt{(4-a)(5-a)}+\sqrt{(5-a)(3-a)}=a.$

Tính giá trị biểu thức $B=\sqrt{3-a}+\sqrt{4-a}+\sqrt{5-a}$.

Câu II: (*4,0 điểm*).

1. Giải phương trình $7x^2-13x+8=2x^2\sqrt[3]{x\left(1+3x-3x^2\right)}$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\dfrac{(x-y)^2}{2}\\(3x+2y)(y+1)=4-x^2\end{cases}$

Câu III: (*4,0 điểm*).

1. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $a+b^2$ chia hết cho a^2b-1.

2. Cho x là số nguyên dương. Tìm tất cả số nguyên dương n để $4x^n+(x+1)^2$ là số chính phương

Câu IV: (*6,0 điểm*).

Cho tam giác ABC có đường tròn (I; r) là đường tròn nội tiếp. Qua I vẽ đường thẳng vuông góc với IA cắt AB, AC lần lượt tại M và N.Gọi S, L, V lần lượt là giao điểm của AI, BI, CI với BC, CA vàAB. Chứng minh rằng:

1. $\dfrac{BM}{CN}=\dfrac{BI^2}{CI^2}$

2. $\dfrac{IA^2}{AB.AC}+\dfrac{IB^2}{BC.AB}+\dfrac{IC^2}{AC.BC}=1$

3. $\sqrt{\dfrac{SI}{AI}}+\sqrt{\dfrac{IL}{BI}}+\sqrt{\dfrac{IV}{CI}}>2$

Câu V: (*2,0 điểm*).

Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn xyz =1. Tìm GTNN của biểu thức:

$$A=\frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

…………………… HẾT ……………………

Họ và tên:…………………..………….......... Số báo danh: ……………
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	NỘI DUNG	Điểm
I **4,0 điểm**	**1. Rút gọn biểu thức:** $P=\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{b}{b-\sqrt{ab}}+\dfrac{a}{\sqrt{ab}+a}\right)-\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}}{2}$ Với $a>0,b>0,a\neq b$	**2,0**
	Với $a>0,b>0,a\neq b$, ta có: $P=\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left[\dfrac{a+b}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right).\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}+\dfrac{b}{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}+\dfrac{a}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\right]-\dfrac{\left\|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right\|}{2}$ $P=\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left[\dfrac{a+b}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right).\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}+\dfrac{\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}+\dfrac{\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\right]-\dfrac{\left\|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right\|}{2}$	0,5
	$P=\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left[\dfrac{a+b+\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right).\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}\right]-\dfrac{\left\|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right\|}{2}$ $P=\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\dfrac{a+b+\sqrt{ab}+b+a-\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right).\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}-\dfrac{\left\|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right\|}{2}$	0,5
	$P=\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\dfrac{2(a+b)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right).\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}-\dfrac{\left\|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right\|}{2}$ $P=\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right).\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{2(a+b)}-\dfrac{\left\|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right\|}{2}$	0,5
	$P=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}-\dfrac{\left\|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right\|}{2}$ Nếu $a>b$ thì $P=0$ Nếu $a<b$ thì $P=\sqrt{a}-\sqrt{b}$	0,5
	2. Biết rằng $\sqrt{(3-a)(4-a)}+\sqrt{(4-a)(5-a)}+\sqrt{(5-a)(3-a)}=a.$ **Tính giá trị biểu thức** $B=\sqrt{3-a}+\sqrt{4-a}+\sqrt{5-a}$ **.**	2,0
	ĐKXĐ: $a\leq 3.$ Đặt: $x=\sqrt{3-a};y=\sqrt{4-a};z=\sqrt{5-a}.$	0,5

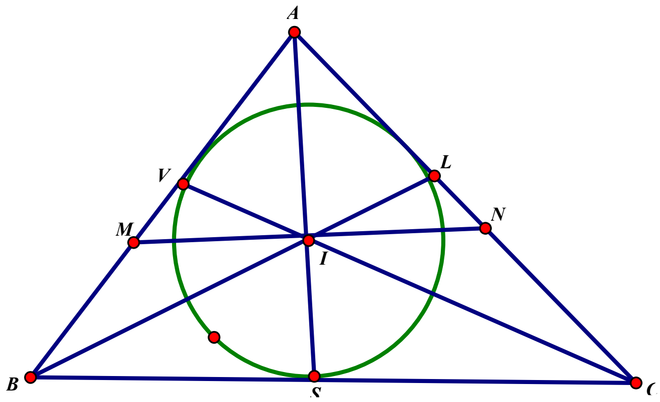
Chú ý:

	Ta có: $\begin{cases} a=xy+yz+zx \\ x^2+a=3 \\ y^2+a=4 \\ z^2+a=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=xy+yz+zx \\ x^2+xy+yz+zx=3 \\ y^2+xy+yz+zx=4 \\ z^2+xy+yz+zx=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=xy+yz+zx & (1) \\ (x+y)(x+z)=3 & (2) \\ (y+z)(y+x)=4 & (3) \\ (z+x)(z+y)=5 & (4) \end{cases}$	
	Nhân theo vế các phương trình (2), (3), (4) ta được: $\left[(x+y)(y+z)(z+x)\right]^2=60 \Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x)=2\sqrt{15}$ (vì x, y, z không âm) (5)	0,5
	Kết hợp (2), (3), (4), (5) ta được: $y+z=\dfrac{2\sqrt{15}}{3};\ z+x=\dfrac{\sqrt{15}}{2};\ x+y=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$	0,5
	$B=\dfrac{\dfrac{2\sqrt{15}}{3}+\dfrac{\sqrt{15}}{2}+\dfrac{2\sqrt{15}}{5}}{2}=\dfrac{47\sqrt{15}}{60}.$	0,5
II **4,0 điểm**	**1. Giải phương trình:** $7x^2-13x+8=2x^2\sqrt[3]{x\left(1+3x-3x^2\right)}$	**2,0**
	ĐKXĐ : $x\in R$ a. Nhận thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình: Chia hai vế phương trình cho x^3 ta thu được: $\dfrac{7}{x}-\dfrac{13}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}=2\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}-3}$.	0,5
	Đặt $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}-3}$ ta thu được hệ sau: $\begin{cases} \dfrac{7}{x}-\dfrac{13}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}=2y \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}-3=y^3 \end{cases}$. Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta có: $\dfrac{8}{x^3}-\dfrac{12}{x^2}+\dfrac{10}{x}-3=y^3+2y \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{x}-1\right)^3+2\left(\dfrac{2}{x}-1\right)=y^3+2y$ (*)	0,5
	Đặt $z=\dfrac{2}{x}-1$ ta thu được: $z^3+2z=y^3+2y \Rightarrow (z-y)\left(z^2+yz+y^2+2\right)=0 \Leftrightarrow z=y$	0,5
	$\Leftrightarrow y=\dfrac{2}{x}-1 \Leftrightarrow \dfrac{7}{x}-\dfrac{13}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}=\dfrac{4}{x}-2 \Leftrightarrow \dfrac{8}{x^3}-\dfrac{13}{x^2}+\dfrac{3}{x}+2=0$. Suy ra $x=1,\ x=\dfrac{-5\pm\sqrt{89}}{4}$ Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=1,\ x=\dfrac{-5\pm\sqrt{89}}{4}$	0,5
	2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\dfrac{(x-y)^2}{2} \\ (3x+2y)(y+1)=4-x^2 \end{cases}$	**2,0**
	ĐKXĐ: $x,y\ge -\dfrac{1}{2}$	0,5

	Ta có $(3x + 2y)(y + 1) = 4 - x^2 \Leftrightarrow 3xy + 3x + 2y^2 + 2y + x^2 - 4 = 0$ $\Leftrightarrow x(x + y - 1) + 2y(x + y - 1) + 4(x + y - 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 2y + 4)(x + y - 1) = 0$ Vì $x, y \geq -\frac{1}{2}$ nên $x + 2y + 4 > 0$. Do đó $x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 - x$.	
	Thay vào phương trình $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} = \frac{(x-y)^2}{2}$ được $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x} = \frac{4x^2-4x+1}{2}$. Với ĐKXĐ $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$. Đặt $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x} = t > 0 \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{(2x+1)(3-2x)}$ $\Rightarrow \sqrt{-4x^2+4x+3} = \frac{t^2-4}{2} \Rightarrow -4x^2+4x-1 = \left(\frac{t^2-4}{2}\right)^2 - 4$ $\Rightarrow \frac{4x^2-4x+1}{2} = -\frac{t^4-8t^2}{8}$	0,5
	Do đó ta có phương trình $t = -\frac{t^4-8t^2}{8} \Leftrightarrow t(t^2 - 8t + 8) = 0$ $\Leftrightarrow t(t-2)(t^2 + 2t - 4) = 0$ Vì $t > 0$ nên $t = 2$ hoặc $t = \sqrt{5} - 1$	0,5
	* Xét $t = 2$ ta có $\sqrt{-4x^2+4x+3} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow (2x-3)(2x+1) = 0$ + Với $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$ + Với $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$ * Xét $t = \sqrt{5} - 1 \Rightarrow \sqrt{-4x^2+4x+3} = \frac{(\sqrt{5}-1)^2 - 4}{2}$ $\Leftrightarrow \sqrt{-4x^2+4x+3} = 1 - \sqrt{5} < 0$ (vô lý) Đối chiếu điều kiện đề bài thì hệ phương trình có nghiệm là: $(x;y) \in \left\{\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)\right\}$	0,5
III **4,0 điểm**	**1. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $a + b^2$ chia hết cho $a^2b - 1$.**	**2,0**
	Ta có $(a + b^2) \vdots (a^2b - 1)$ suy ra: $a + b^2 = k(a^2b - 1)$, với $k \in \mathbb{N}^*$ $\Leftrightarrow a + k = b(ka^2 - b)$ hay $mb = a + k$ (1) với $m = ka^2 - b \in \mathbb{N}^*$ $\Leftrightarrow m + b = ka^2$ (2) Từ (1) và (2) suy ra: $mb - m - b + 1 = a + k - ka^2 + 1$	0,5

	$\Leftrightarrow (m-1)(b-1) = (a+1)(k+1-ka)$ (3) Do $m, b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (m-1)(b-1) \ge 0$ Vì thế từ (3) suy ra: $(a+1)(k+1-ka) \ge 0$.	
	Lại do $a > 0$ nên suy ra: $k + 1 - ka \ge 0 \Rightarrow 1 \ge k(a-1)$ Vì $a - 1 \ge 0$, $k > 0$ nên $1 \ge k(a-1) \ge 0$ vµ $k(a-1) \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k(a-1)=0 \\ k(a-1)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ \begin{cases} a=2 \\ k=1 \end{cases} \end{array}\right.$	0,5
	Với $a = 1$. Thay vào (3) ta được: $(m-1)(b-1) = 2$. $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m-1=2 \\ b-1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} m-1=1 \\ b-1=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \Rightarrow k.a^2=5 \Rightarrow a=1 \\ b=3 \Rightarrow k.a^2=5 \Rightarrow a=1 \end{array}\right.$ Vậy, trường hợp này ta được hai cặp $a = 1$; $b = 2$ và $a = 1$; $b = 3$.	0,5
	Với $a = 2$ và $k = 1$. Thay vào (3) ta có: $(m-1)(b-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ m=1 \end{array}\right.$. Khi $b = 1$, ta được: $a = 2$, $b = 1$. Khi $m = 1$: từ (1) suy ra $a + k = b \Rightarrow b = 3$. Khi đó: $a = 2$, $b = 3$. Vậy có 4 cặp số $(a; b)$ thỏa mãn là: $(1; 2)$, $(1; 3)$, $(2; 3)$, $(2; 1)$.	0,5
	2. Cho x là số nguyên dương. Tìm tất cả số nguyên dương n để $4x^n + (x+1)^2$ là số chính phương	**2,0**
	Ta có $4x^n + (x+1)^2 = y^2 \Leftrightarrow (y-x-1)(y+x+1) = 4x^n$ (*) Nhận thấy $(y-x-1)+(y+x+1) = 2y$ suy ra $(y-x-1),(y+x+1)$ cùng tính chẵn lẻ Hơn nữa $(y-x-1),(y+x+1) \mid 4x^n$. Suy ra $(y-x-1),(y+x+1)$ cùng chẵn	0,5
	Đặt $y-x-1=2a \Rightarrow y+x+1=2(a+x+1)$, thay vào (*) ta có : $a(a+x+1)=x^n$ Giả sử d là một ước nguyên tố chung của a và $a+x+1$. Khi đó ta có : $\begin{cases} a \vdots d \\ a+x+1 \vdots d \end{cases}$ Từ đó $x^n \vdots d$ dẫn tới $1 \vdots d$ (vô lý). Vậy $(a, a+x+1)=1$	0,5
	Suy ra $a=u^n, a+x+1=v^n$ với $x=uv$ và do đó $uv+1=v^n-u^n$ Dễ thấy với $n=1$ thì $(u-1)(v-1)>0 \Rightarrow uv+1>v-u$ nên không có x thỏa mãn	0,5
	Với $n \ge 3$ thì $v^n-u^n=(v-u)(v^{n-1}+v^{n-2}u+.....+u^{n-1}) \ge uv+2$, suy ra n chỉ có thể bằng 2	0,5

Chú ý:

	Khi $n = 2$ ta có : $4x^2 + (x+1)^2 = y^2\,(*)$, dễ thấy $x = 2, y = 5$ thỏa mãn	
IV 4,0 điểm	**Cho tam giác ABC có đường tròn (I; r) là đường tròn nội tiếp. Qua I vẽ đường thẳng vuông góc với IA cắt AB, AC lần lượt tại M và N. Gọi S, L, V lần lượt là giao điểm của AI, BI, CI với BC, CA và AB.** 	
	1. Chứng minh rằng: $\frac{BM}{CN} = \frac{BI^2}{CI^2}$	2,0
	Vì (I; r) nội tiếp ΔABC nên AI là tia phân giác góc A mà $MN \perp AI$ nên $\triangle AMN$ cân tại A suy ra $AM = AN$ và $\widehat{AMI} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2}$	0,5
	Lại có: $\widehat{AMI} = \frac{\widehat{B}}{2} + \widehat{MIB}$. Do đó: $\widehat{MIB} = \frac{\widehat{C}}{2} = \widehat{ICB}$ Ta được $\Delta MIB \sim \Delta ICB\,(g.g) \Rightarrow \frac{BM}{BI} = \frac{BI}{BC} \Rightarrow BI^2 = BM.BC \quad (1)$	0,5
	Tương tự, ta được: $CI^2 = CN \times CB \quad (2)$	0,5
	Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{BM}{CN} = \frac{BI^2}{CI^2}$	0,5
	2. Chứng minh rằng: $\frac{IA^2}{AB.AC} + \frac{IB^2}{BC.AB} + \frac{IC^2}{AC.BC} = 1$	**2,0**
	$\Delta BMI \sim \Delta INC \Rightarrow \frac{BM}{IN} = \frac{MI}{NC} \Rightarrow BM.CN = MI.NI$ ΔAMN cân tại A, do đó: $IM = IN \Rightarrow BM.CN = IM^2$	0,5

Chú ý:

	$\frac{IA^2}{AB.AC}=\frac{AM^2-MI^2}{AB.AC}=\frac{AM.AN-BM.CM}{AB.AC}$ $=\frac{(AB-BM).(AC-CN)-BM.CN}{AB.AC}$ $=\frac{AB.AC-AB.CN-BM.AC+BM.CN-BM.CN}{AB.AC}$ (1)	0,75
	$\frac{IB^2}{AB.BC}+\frac{IC^2}{AC.BC}=\frac{BM.BC}{AB.BC}+\frac{CN.BC}{AC.BC}=\frac{BM}{AB}+\frac{CN}{AC}=\frac{BM.AC+CN.AB}{AB.AC}$ (2)	0,5
	Từ (1) và (2) ta được $\frac{IA^2}{AB.AC}+\frac{IB^2}{BC.AB}+\frac{IC^2}{AC.BC}=1$	0,25
	3. **Chứng minh rằng:** $\sqrt{\frac{SI}{AI}}+\sqrt{\frac{IL}{BI}}+\sqrt{\frac{IV}{CI}}>2$	**2,0**
	Vì BI là tia phân giác của $\widehat{ABC}$ $\Rightarrow \frac{BS}{AB}=\frac{SI}{AI}$ và CI là tia phân giác của $\widehat{SCA}$ nên $\frac{CS}{AC}=\frac{SI}{AI}$. Từ đó suy ra $\frac{SI}{AI}=\frac{BS}{AB}=\frac{CS}{AC}=\frac{BC}{AB+AC}$	0,5
	Đặt BC = a, AC = b, AB = c.Ta có $\frac{SI}{AI}=\frac{a}{b+c}\Rightarrow\sqrt{\frac{SI}{AI}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b+c}}=\frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}$ Áp dụng BĐT Côsi cho 2 số dương ta có: $\sqrt{a(b+c)}\le\frac{a+b+c}{2}\Rightarrow\sqrt{\frac{SI}{AI}}=\frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}\ge\frac{2a}{a+b+c}$ (1)	0,5
	Chứng minh tương tự ta có $\sqrt{\frac{LI}{BI}}\ge\frac{2b}{a+b+c}$ (2) , $\sqrt{\frac{IV}{CI}}\ge\frac{2c}{a+b+c}$ (3) Cộng các BĐT (1), (2), (3) ta được: $\sqrt{\frac{SI}{AI}}+\sqrt{\frac{IL}{BI}}+\sqrt{\frac{IV}{CI}}\ge\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$	0,5
	Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+c\\b=c+a\\c=a+b\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=0$. Mà a, b, c là độ dài của các cạnh của tam giác ABC nên a, b, c khác 0. Do đó dấu "=" không xảy ra. Vậy: $\sqrt{\frac{SI}{AI}}+\sqrt{\frac{IL}{BI}}+\sqrt{\frac{IV}{CI}}>2$ $\Rightarrow$ đpcm.	0,5
V	**Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn xyz =1. Tìm GTNN của biểu thức:**	**2,0**

<u>Chú ý:</u>

<table>
<tr><td rowspan="5">2,0 điểm</td><td>$$A=\frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$</td><td></td></tr>
<tr><td>Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $y+z\ge 2\sqrt{yz}; x+y\ge 2\sqrt{yz}; x+z\ge 2\sqrt{yz}$. Suy ra :
$$A\ge\frac{x^2.2\sqrt{yz}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{y^2.2\sqrt{zx}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{z^2.2\sqrt{xy}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$
$$A\ge\frac{2x\sqrt{x}\sqrt{xyz}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{2y\sqrt{y}\sqrt{yzx}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{2z\sqrt{z}\sqrt{zxy}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$
$$A\ge\frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Đặt: $\begin{cases}a=y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}\\ b=z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}\\ c=x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\sqrt{x}=\frac{1}{9}(-2a+4b+c)\\ y\sqrt{y}=\frac{1}{9}(a-2b+4c)\\ z\sqrt{z}=\frac{1}{9}(4a+b-2c)\end{cases}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Khi đó
$$A\ge\frac{2}{9}\left(\frac{-2a+4b+c}{a}+\frac{a-2b+4c}{b}+\frac{4a+b-2c}{c}\right)$$
$$A\ge\frac{2}{9}\left[-6+4\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\right]$$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>$$A\ge\frac{2}{9}\left(-6+4.3.\sqrt[3]{\frac{b}{a}.\frac{a}{c}.\frac{c}{b}}+3.\sqrt[3]{\frac{c}{a}.\frac{a}{b}.\frac{b}{c}}\right)=\frac{2}{9}(-6+12+3)=2$$
Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1\Rightarrow$ x=y=z =1
Vậy GTNN của A là 2 khi x=y=z =1.</td><td>0,5</td></tr>
</table>

<u>Chú ý:</u>

- Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa, điểm thành phần giám khảo tự phân chia trên cơ sở tham khảo điểm thành phần của đáp án.
- Đối với câu 4 (Hình học): *Không vẽ hình, hoặc vẽ hình sai cơ bản thì không chấm.*
- Các trường hợp khác tổ chấm thống nhất phương án chấm.