

CD4: CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH CHIA HẾT

Dạng 1: Chứng minh chia hết

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2021 - 2022)

Cho $S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2021} + 2^{2022}$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $S : 2^{2022}$.
 B. $S + 1$ là số chính phương.
 C. $(S + 1) : 2^{2022}$.
 D. $S = 2^{2023} + 1$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Nguyễn Tông Quai, 2022 - 2023)

Một số tự nhiên a , sao cho a chia cho 3 dư 2 , chia cho 5 dư 3 , chia cho 7 dư 4 . Khi a chia cho 105 có số dư là:

- A. 100 .
 B. 53 .
 C. 52 .
 D. 10 .

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 Thanh Hóa 2022 - 2023)

Chứng tỏ rằng: $9^{1945} - 2^{1930}$ chia hết cho 5 .

Câu 2. (HSG 7 huyện Lương Tài 2022 - 2023)

Biết $a+1$ và $2a+1$ đồng thời là các số chính phương. Chứng minh rằng $a : 12$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Bình Xuyên – Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Cho n là số tự nhiên, chứng minh rằng $9 \cdot 10^n + 18$ chia hết cho 27

Câu 4. (HSG 7 huyện Liên Trường 2022 - 2023; huyện Thanh Ba 2021 - 2022)

Chứng minh với mọi n nguyên dương ta luôn có $4^{n+3} + 4^{n+2} - 4^{n+1} - 4^n$ chia hết cho 300 .

Câu 5. (HSG 7 huyện Diễn Châu 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 , biết $p+2$ cũng là số nguyên tố. Chứng tỏ rằng $p+1$ chia hết cho 6 .

Câu 6. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy 2022 – 2023; huyện Như Thanh 2021 - 2022)

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$. Chứng minh $a+b+c+d$ chia hết cho 3 .

Câu 7. (HSG 7 huyện Thanh Miện 2021 - 2022)

Chứng minh rằng nếu $\overline{abcd} : 29$ thì $a+3b+9c+27d$ chia hết cho 29

Câu 8. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2021 - 2022)

Cho p, q là các số nguyên tố lớn hơn 5 . Chứng minh rằng $p^2 + 2039q^2$ chia hết cho 24

Câu 9. (HSG 7 huyện Cửa Lò 2021 - 2022)

Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn: $(x-y)^2 + 2xy$ chia hết cho 4 . Chứng minh rằng: x và y đều chia hết cho 2 .

Câu 10. (HSG 7 huyện Cửa Lò 2021 - 2022)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh $(p^2 - 1) : 24$

Câu 11. (HSG 7 huyện Vũ Thư 2020 - 2021)

Cho x, y, z, t là các số nguyên thỏa mãn: $x^3 + y^3 = 7.(2z^3 - 13t^3)$

Chứng minh rằng: $(x + y + z + t) : 3$

Câu 12. (HSG 7 huyện Bát Xát, Lào Cai 2021 - 2022)

Chứng minh rằng số có dạng $\overline{abcabc}$ luôn chia hết cho 11 .

Câu 13. (HSG 7 huyện Bá Thước, Thanh Hóa 2021 - 2022)

Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn $\frac{x^2 - 1}{2} = \frac{y^2 - 1}{3}$. Chứng minh $x^2 - y^2$ chia hết cho 40

Câu 14. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy, Thanh Hóa 2021 - 2022; huyện Thiệu Hóa 2022 - 2023)

Cho a, b, c là ba số nguyên thỏa mãn $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chứng minh abc chia hết cho 4

Câu 15. (HSG 7 huyện Mường La 2021 - 2022)

Với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng $7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19 .

Câu 16. (HSG 7 huyện Quảng Trạch 2021 - 2022)

Chứng minh rằng: $10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27 với mọi số tự nhiên n .

Câu 17. (HSG 7 Thị xã Kinh Môn, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Cho a, b là các số nguyên thỏa mãn: $(7a - 14b + 5)(a - 3b + 1) : 7$

Chứng minh rằng $(29a + 18b + 36) : 7$

Câu 18. (HSG 7 huyện Tương Dương, Nghệ An 2022 - 2023; huyện Hoài Nhơn; huyện Thăng Bình 2018 - 2019; huyện Lâm Thao 2016 - 2017)

Chứng tỏ rằng $M = 75.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 10^2 .

Câu 19. (HSG 7 huyện Ninh Giang, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Cho các số tự nhiên x, y thỏa mãn $(2x + 3y) : 17$. Chứng minh $(9x + 5y) : 17$.

Câu 20. (HSG 7 huyện Hà Trung, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho $a, b \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $M = (9a + 11b)(5b + 11a)$ chia hết cho 19 . Chứng minh: $M : 361$.

Câu 21. (HSG 7 TP Bắc Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Cho m, n, t là ba số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn: $m - n = n - t = a$ ($a \in \mathbb{N}^*$). Chứng minh rằng a chia hết cho 6.

Câu 22. (HSG 7 thị xã Bỉm Sơn, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho các số nguyên dương a, b, c sao cho: $a^2 + b^2 = c^2$. Chứng minh: $ab : (a + b + c)$.

Câu 23. (HSG 7 huyện Lạng Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Cho bốn số tự nhiên phân biệt $d < c < b < a$.

Chứng minh rằng: $P = (a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d) : 12$

Câu 24. (HSG 7 huyện Quốc Oai, Hà Nội 2022 - 2023)

Cho P là số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn $10P + 1$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng $5P + 1$ chia hết cho 6.

Câu 25. (HSG 7 huyện Gia Viễn, Ninh Bình 2022 - 2023)

Chứng tỏ rằng tích của hai số nguyên lẻ liên tiếp cộng thêm 9 thì chia hết cho 4.

Câu 26. (HSG 7 thành phố Bắc Ninh, tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)

Chứng minh rằng số $B = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Câu 27. (HSG 7 huyện Nghi Lộc, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Chứng minh rằng số $A = \frac{(17^{2014^{2016}} - 3^{96^{97}})}{2}$ là một số tự nhiên chia hết cho 5.

Câu 28. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho a, b là các số nguyên thỏa mãn $(7a + 5 - 21b)(a + 1 - 3b) : 7$. Chứng minh rằng: $(11b + 15 + 43a) : 7$.

Câu 29. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho hai số nguyên tố khác nhau P và q . Chứng minh rằng: $P^{q-1} + q^{p-1} - 1$ chia hết cho $P \cdot q$.

Câu 30. (HSG 7 huyện Hưng Hà, 2022 - 2023)

Tìm một số có ba chữ số biết rằng số đó chia hết cho 7^2 , các chữ số của nó sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn tỷ lệ với 2; 3; 4.

Câu 31. (HSG 7 huyện Mỹ Đức Hà Nội năm 2022 - 2023)

Cho đa thức $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Biết $Q(x)$ chia hết cho 5 với mọi $x \in \mathbb{Z}$. Chứng tỏ các hệ số a, b, c, d đều chia hết cho 5.

Câu 32. (HSG 7 huyện Nông Công, 2022 - 2023)

Cho số nguyên n ($n > 1$) thỏa mãn $n^2 + 4$ và $n^2 + 16$ là các số nguyên tố. Chứng minh n chia hết cho 5.

Câu 33. (HSG 7 huyện Thường Xuân 2022 - 2023)

Cho m, n là hai số chính phương lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng: $mn - m - n + 1$ chia hết cho 192 .

Câu 34. (HSG 7 huyện Hiệp Hòa 2022 – 2023 lần 2)

Tìm số nguyên a để $a^2 + a + 3$ chia hết cho $a + 1$.

Câu 35. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Trần Thủ Độ 2022 - 2023)

Cho $A = 16(1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2020}) + 4$. Chứng minh: $A : 100$.

Câu 36. (HSG 7 huyện Kim Sơn, tỉnh Ninh Bình, 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31 .

Câu 37. (HSG 7 huyện Trực Ninh, tỉnh Ninh Bình, 2021 - 2022)

Chứng minh rằng $\frac{10^{2021} + 539}{9}$ có giá trị là một số tự nhiên.

Câu 38. (HSG 7 huyện Quan Hóa, tỉnh Thanh Hóa, 2021 - 2022)

Cho các số nguyên dương n thỏa mãn $n+1$ và $2n+1$ đều là số chính phương. Chứng minh rằng $n:24$

Câu 39. (HSG 7 huyện Thị xã An Nhơn, 2021 - 2022)

Chứng minh rằng: Với mọi n nguyên dương thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 .

Câu 40. (HSG 7 trường THCS Quang Trung Cát Tiên 2018 - 2019)

Chứng minh rằng:

a) $10^6 - 5^7$ chia hết cho 59 .

b) $313^5 \cdot 229 - 313^6 \cdot 36$ chia hết cho 7 .

Câu 41. (HSG 7 trường Hiền Quang, 2018 - 2019)

Chứng minh rằng $7^6 + 7^5 - 7^4$ chia hết cho 55

Câu 42. (HSG 7 huyện Việt Yên, 2018 - 2019)

Cho $S = 17 + 17^2 + 17^3 + \dots + 17^{18}$. Chứng tỏ rằng S chia hết cho 307 .

Câu 43. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa, 2018 - 2019)

Cho p, q là các số nguyên tố lớn hơn 3 và thỏa mãn $p = q + 2$. Chứng minh: $(p+q):12$.

Câu 44. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên nhỏ nhất a để khi ghép nó vào bên phải số 2019 thì được một số tự nhiên chia hết cho 2018 .

Câu 45. (HSG 7 trường Tôn Đức Thắng, 2018 - 2019)

Đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có a, b, c là các số nguyên, và $a \neq 0$. Biết với mọi giá trị nguyên của x thì $f(x)$ chia hết cho 7 . Chứng minh a, b, c cũng chia hết cho 7 .

Câu 46. (HSG 7 huyện Krông Ana 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+996}$ chia hết cho 120 (với $x \in \mathbb{N}$)

Câu 47. (HSG 7 Tp Lào Cai 2022 - 2023)

Chứng minh $A = 8 \cdot 5^{2n} + 11 \cdot 6^n$ chia hết cho 19 với $n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 48. (HSG 7 huyện Vĩnh Yên, 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}$ chia hết cho 120 (với $x \in \mathbb{N}$)

Câu 49. (HSG 7 huyện)

Chứng minh rằng: Số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133 , với mọi $n \in \mathbb{N}$

Câu 50. (HSG 7 huyện Nam Sách 2017 - 2018; huyện Tân Lạc; Ngọc Lặc 2022 - 2023; Ngọc Lặc 2015 - 2016)

Chứng minh rằng $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n .

Câu 51. (HSG 7 Phòng GD&ĐT Tam Dương 2022 - 2023)

Cho ba số chính phương x, y, z . Chứng minh $A = (x - y)(y - z)(z - x)$ chia hết cho 12 .

Câu 52. (HSG 7 thị xã Sầm Sơn và trường THCS Trường Sa, 2017 - 2018)

Cho $P(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn: $P(x) \vdots 7 \quad \forall x \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng a, b, c đều chia hết cho 7 .

Câu 53. (HSG 7 thị xã Sầm Sơn 2017 - 2018)

Chứng minh rằng: $333^{555777} + 777^{555333}$ chia hết cho 10 .

Câu 54. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2017 - 2018)

Cho a, b là các số tự nhiên thỏa mãn: $a + 4b$ chia hết cho 13 . Chứng minh rằng $10a + b$ cũng chia hết cho 13 .

Câu 55. (HSG 7 trường Nghĩa Điền 2017 - 2018)

Chứng minh rằng: $(81^7 - 27^9 - 9^{13}) \vdots 405$

Câu 56. (HSG 7 huyện Cẩm Khê 2017 - 2018; huyện Tân Kỳ 2015 - 2016)

Chứng minh với mọi số nguyên dương n ta luôn có: $5^{n+2} + 3^{n+2} - 3^n - 5^n$ chia hết cho 25 .

Câu 57. (HSG 7 huyện Nam Sách 2017 - 2018; huyện Tân Lạc; Ngọc Lặc 2015 - 2016)

Chứng minh rằng $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n .

Câu 58. (HSG 7 trường Hồng Thái, Sơn Dương 2017 - 2018; huyện Thái Thụy 2015 - 2016)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Biết $f(1) \vdots 3; f(0) \vdots 3; f(-1) \vdots 3$. Chứng minh rằng a, b, c đều chia hết cho 3 .

Câu 59. (HSG 7 trường Lê Quý Đôn 2016 - 2017; huyện Việt Yên 2016 - 2017)

Chứng minh rằng: $(3a + 2b) \vdots 17$ khi và chỉ khi $(10a + b) \vdots 17 \quad (a, b \in \mathbb{Z})$.

Câu 60. (HSG 7 trường Hiền Quan 2015 - 2016)

Với a, b là các số nguyên dương sao cho $a + 1$ và $b + 2007$ chia hết cho 6 . Chứng minh rằng: $4^a + a + b$ chia hết cho 6 .

Câu 61. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2015 - 2016)

Chứng minh rằng: Số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133 , với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Dạng 2: Tìm chữ số tận cùng

Câu 1. (HSG 7 TP Bắc Ninh, năm học 2022 - 2023)

Tìm chữ số tận cùng của C biết $C = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ với $(n \in \mathbb{N})$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Yên Thế, 2022 - 2023)

Cho hàm số $f(x) = x + \frac{1}{2}$ và

$$S = f(0) + f\left(\frac{1}{2001}\right) + f\left(\frac{2}{2001}\right) + \dots + f\left(\frac{1999}{2001}\right) + f\left(\frac{2000}{2001}\right) + f(1)$$

Tìm hai chữ số tận cùng của S^{2023} .

Câu 3. (HSG 7 huyện Tiền Hải, tỉnh Thái Bình 2022 - 2023)

Cho tích $A = 1.2.3.4.5.....398.399.400$. Hỏi tích A có tận cùng bao nhiêu chữ số 0?

Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Chương năm 2018 - 2019).

Cho $N = 0,7.(2007^{2009} - 2013^{1999})$. Chứng minh rằng N là một số nguyên.

Câu 5. a) Hãy tìm chữ số tận cùng của $9^{9^{10}}$.

b) Hãy tìm hai chữ số tận cùng của 3^{1000} .

c) Hãy tìm ba chữ số tận cùng của $2^{5^{12}}$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>