

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

Môn thi: TOÁN LỚP 8

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. (3,0 điểm)

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $12x^3 + 16x^2 - 5x - 3$

b) $(x^2 - x + 1)^2 - 5x(x^2 - x + 1) + 4x^2$

Câu 2. (3,0 điểm)

a) Chứng minh rằng: Nếu $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ thì $x = y = z$

b) Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa mãn : $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$
Chứng minh rằng $a = b = c$

Câu 3. (4,0 điểm)

Giải các phương trình:

a) $|2x - 1| + |2x - 5| = 4$ (1)

b) $\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 + 6\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 - \frac{7(x^2-9)}{x^2-4} = 0$

Câu 4. (4,0 điểm)

a) Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y = 2$. Chứng minh rằng : $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq 8$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{2015}{|x| - 3}$, với x là số nguyên.

Câu 5. (6,0 điểm)

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD, AB < CD$). Qua A vẽ đường thẳng song song với BC cắt BD ở E và cắt CD ở K. Qua B kẻ đường thẳng song song với AD cắt AC ở F và cắt CD ở I. Chứng minh rằng:

a) $DK = CI$

b) $EF \parallel CD$

c) $AB^2 = CD \cdot EF$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a)

$$\begin{aligned} & 12x^3 + 16x^2 - 5x - 3 \\ &= 12x^3 - 6x^2 + 22x^2 - 11x + 6x - 3 \\ &= 6x^2(2x - 1) + 11x(2x - 1) + 3(2x - 1) \\ &= (2x - 1)(6x^2 + 11x + 3) \\ &= (2x - 1)(6x^2 + 9x + 2x + 3) \\ &= (2x - 1)[3x(2x + 3) + (2x + 3)] \\ &= (2x - 1)(3x + 1)(2x + 3) \end{aligned}$$

b) $A = (x^2 - x + 1)^2 - 5x(x^2 - x + 1) + 4x^2$

Đặt $x^2 - x + 1 = y$, ta có:

$$\begin{aligned} A &= 4x^2 - 5xy + y^2 = (4x - y)(x - y) \\ &= (4x - x^2 + x - 1)(x - x^2 + x - 1) \\ &= (x^2 - 5x + 1)(x^2 - 2x + 1) = (x - 1)^2(x^2 - 5x + 1) \\ &= (x - 1)^2 \left(x - \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \right) \left(x - \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \right) \end{aligned}$$

Câu 2.

a) Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 &= 2xy + 2yz + 2zx \\ \Rightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2) &= 0 \\ \Rightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có: $(x - y)^2 \geq 0, (y - z)^2 \geq 0, (z - x)^2 \geq 0$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ z - x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z$$

Do đó

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$$

b) Ta có: $\Leftrightarrow a^4c^2 + b^4a^2 + c^4b^2 = abc(a^2c + c^2a + b^2c)$

Đặt $x = a^2c, y = b^2a, z = c^2b$. Ta được: $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$

Áp dụng kết quả câu a ta được:

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0 \Rightarrow x = y = z$$

$$\Rightarrow a^2c = b^2a = c^2b \Rightarrow ac = b^2; bc = a^2; ab = c^2$$

$$\Rightarrow a = b = c (dpcm)$$

Câu 3.

a) $|2x - 1| + |2x - 5| = 4 \quad (1)$

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow |2x - 1| + |5 - 2x| = |2x - 1 + 5 - 2x|$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)(5 - 2x) \geq 0$$

(Áp dụng tính chất: $|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

b) $\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 + 6\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 - \frac{7(x^2-9)}{x^2-4} = 0 \quad (1)$

ĐKXĐ: $x \neq \pm 2$

$$\begin{aligned}
(1) &\Rightarrow (x+3)^2(x+2)^2 + 6(x-3)^2(x-2)^2 - 7(x^2-9)(x^2-4) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x^2+6x+9)(x^2+4x+4) + (6x^2-36x+54)(x^2-4x+4) \\
&\quad - (7x^2-63)(x^2-4) = 0 \\
&\Leftrightarrow 50x^3 - 350x^2 + 300x = 0 \\
&\Leftrightarrow x^3 - 7x^2 + 6x = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & (tm) \\ x=1 & (tm) \\ x=6 & (tm) \end{cases}
\end{aligned}$$

Câu 4.

a) Bài toán phụ : Chứng minh rằng $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$ (1)

Chứng minh $(1) \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

Áp dụng bài toán phụ (1) ta có:

$$\begin{aligned}
\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 &\geq \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right)^2 \quad (2) \\
\text{Mà } \left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right)^2 &= \left(2 + \frac{x+y}{xy}\right)^2 = \left(2 + \frac{2}{xy}\right)^2 \quad (\text{vì } x+y=2)
\end{aligned}$$

Với $x, y > 0$ ta có: $0 < xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$ (vì $(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{1}{xy} &\geq \frac{4}{(x+y)^2} \Rightarrow \frac{2}{xy} \geq \frac{8}{(x+y)^2} \\
\Rightarrow \left(2 + \frac{2}{xy}\right)^2 &\geq \left(2 + \frac{8}{(x+y)^2}\right) \geq (2+2)^2 = 16 \quad (\text{vì } x+y=2)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} \right)^2 \geq 16 \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3) suy ra : } \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + \left(y + \frac{1}{y} \right)^2 \geq 8$$

$$\text{b) } B = \frac{2015}{|x| - 5} \text{ với } x \text{ là số nguyên}$$

$$\text{Xét } |x| > 3 \Rightarrow |x| - 3 > 0 \Rightarrow B > 0$$

$$\text{Xét } |x| < 3 \text{ thì do } x \in \mathbb{Z} \text{ nên } |x| \in \{0; 1; 2\}$$

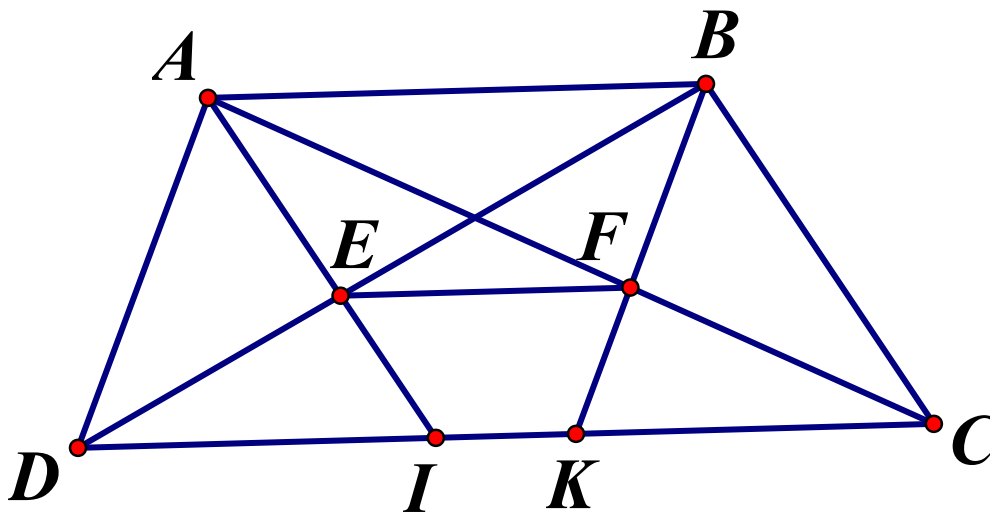
$$+\text{Khi } |x| = 0 \Rightarrow B = -403$$

$$+\text{Khi } |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow B = -503,75$$

$$+\text{Khi } |x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow B = -2015$$

$$\text{Vậy } \min B = -2015 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Câu 5.



a) Tứ giác ABCK có:

$$AB \parallel CK (AB \parallel CD, K \in CD), AK \parallel BC (gt)$$

$$\Rightarrow ABCK \text{ là hình bình hành} \Rightarrow CK = AB$$

$$\Rightarrow DK = CD - CK = CD - AB \quad (1)$$

Chứng minh tương tự, ta có: $DI = AB$
 $\Rightarrow IC = CD - DI = CD - AB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DK = IC$

b) $\triangle DEK$ có $AB \parallel DK$, theo hệ quả định lý Ta let ta có: $\frac{AE}{EK} = \frac{AB}{DK}$ (3)

$\triangle FIC$ có $AB \parallel IC$, theo hệ quả định lý Ta let ta có: $\frac{AF}{FC} = \frac{AB}{IC}$ (4)

Mà $DK = IC$ (câu a) (5)

Từ (3) (4) (5) suy ra $\frac{AE}{EK} = \frac{AF}{FC}$

$\triangle AKC$ có $\frac{AE}{EK} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow EF \parallel KC$ (Định lý Ta let đảo) $\Rightarrow EF \parallel CD$

c) Ta có: $\frac{AB}{CD} = \frac{CK}{CD}$ (vì $AB = CK$) (6)

$\triangle BCD$ có $EK \parallel BC$, theo định lý Ta let ta có: $\frac{CK}{CD} = \frac{BE}{BD}$ (7)

$\triangle BDI$ có $EF \parallel DI$, theo định lý Ta let $\frac{BE}{BD} = \frac{EF}{DI}$ mà $DI = AB$

Suy ra $\frac{BE}{BD} = \frac{EF}{AB}$ (8)

Từ (6), (7), (8) $\Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{EF}{AB} \Rightarrow AB^2 = CD \cdot EF$