

CD12: ĐỒNG DƯ THỨC

Dạng 1. SỬ DỤNG ĐỒNG DƯ THỨC CHỨNG MINH CHIA HẾT

Câu 1. (HSG 7 huyện Hoàng Hoá 2022 - 2023; Cẩm Thụy 2022 - 2023)

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$. Chứng minh $(a + b + c + d) : 3$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Yên Phong, tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $(4^{2n+2} - 1) : 15$ với mọi số tự nhiên n .

Câu 3. (HSG T7 TP Bắc Giang năm học 2022 - 2023)

Cho m, n, t là ba số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn: $m - n = n - t = a$ ($a \in \mathbb{N}^*$). Chứng minh rằng a chia hết cho 6.

Câu 4. (HSG 7 huyện Cẩm Thụy, tỉnh Thanh Hóa, trường 2022 - 2023)

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$. Chứng minh rằng $a + b + c + d$ chia hết cho 3.

Câu 5. (HSG T7 Huyện Nghi Lộc, năm học 2022 - 2023)

Chứng minh rằng số $A = \frac{(17^{2014 \cdot 2016} - 3^{96 \cdot 97})}{2}$ là một số tự nhiên chia hết cho 5.

Câu 6. (HSG 7 Huyện Vĩnh Lộc, Tỉnh Thanh Hóa, năm học 2022 – 2023)

Cho hai số nguyên tố khác nhau p và q . Chứng minh rằng: $p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ chia hết cho $p \cdot q$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Nông Cống 2022 - 2023)

Viết 6 số tự nhiên vào 6 mặt của một con xúc xắc. Chứng tỏ rằng khi ta gieo xúc xắc xuống mặt bàn thì trong 5 mặt có thể nhìn thấy bao giờ cũng tìm được một hay nhiều mặt để tổng các số trên mặt đó chia hết cho 5.

Câu 8. (HSG 7 huyện Cửa Lò, tỉnh Nghệ An, 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh $(p^2 - 1) : 24$.

Câu 9. (HSG 7 huyện Bá Thước, 2022 - 2023)

Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn $\frac{x^2 - 1}{2} = \frac{y^2 - 1}{3}$.

Chứng minh rằng $x^2 - y^2$ chia hết cho 40.

Câu 10. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, trường Đào Duy Từ 2018-2019).

Chứng tỏ rằng $M = 75 \cdot (4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 10^2 .

Câu 11. (HSG 7 trường THCS Hiền Quan 2018-2019).

Chứng minh rằng $7^6 + 7^5 - 7^4$ chia hết cho 55.

Câu 12. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong 2018-2019).

Chứng minh rằng: $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 3^1 .

Câu 13. (HSG 7 huyện Việt Yên 2018-2019).

Cho $S = 17 + 17^2 + 17^3 + \dots + 17^{18}$. Chứng tỏ rằng S chia hết cho 307 .

Câu 14. (HSG 7 huyện Vĩnh Yên năm 2018 - 2019).

Chứng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}$ chia hết cho 120 (với $x \in \mathbb{N}$).

Câu 15. (HSG 7 huyện Văn Bàn 2022 - 2023)

Cho bốn số tự nhiên phân biệt $a > b > c > d$.

Chứng minh rằng: $P = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ chia hết cho 12 .

Dạng 2. Sử dụng đồng dư thức tìm số dư

Câu 1. (HSG 7 trường Hiền Quan 2015 - 2016)

Tìm số dư khi chia 2^{2011} cho 31 .

Câu 2. (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

Tìm số dư khi chia 3^{41} cho 11 .

Câu 3.

a) Tìm số dư trong phép chia của số $A = 3^{2005} + 4^{2005}$ khi chia cho 11 .

b) Tìm số dư trong phép chia của số $B = 2016^{2018} + 2$ khi chia cho 5 .

Dạng 3. Tìm điều kiện của biến để chia hết

Câu 1. (HSG 7 huyện Trục Ninh, 2018-2019)

Tìm các số tự nhiên a, b sao cho: $(2008a + 3b + 1)(2008^a + 2008a + b) = 225$

Câu 2.

Tìm số tự nhiên n sao cho: $(2^{3n+4} + 3^{2n+1}) : 19$

Câu 3.

Tìm số tự nhiên n có bốn chữ số sao cho chia n cho 131 thì dư 112 và chia n cho 132 thì dư 98

Dạng 4. Sử dụng đồng dư tìm chữ số tận cùng

Câu 1. (HSG 7 TP Bắc Ninh, năm học 2022 - 2023)

Tìm chữ số tận cùng của C biết $C = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ với ($n \in \mathbb{N}$).

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Chương năm 2018 - 2019).

Cho $N = 0,7.(2007^{2009} - 2013^{1999})$. Chứng minh rằng N là một số nguyên.

Câu 3.

a) Hãy tìm chữ số tận cùng của $9^{9^{10}}$.

b) Hãy tìm hai chữ số tận cùng của 3^{1000} .

c) Hãy tìm ba chữ số tận cùng của 2^{512} .

Dạng 5. Sử dụng đồng dư trong bài toán về số chính phương

Câu 1. (HSG 7 Huyện Vĩnh Lộc, Tỉnh Thanh Hóa, năm học 2022 – 2023)

Cho $f(x)$ là đa thức hệ số nguyên và thỏa mãn $f(0)=0$ và $f(1)=2$. Chứng minh rằng $f(7)$ không thể là số chính phương.

Câu 2. (HSG 7 Huyện Hiệp Hòa, năm học 2022 - 2023)

Cho p là tích của 2023 số nguyên tố đầu tiên. Chứng minh rằng $p-1$ và $p+1$ không là số chính phương.

Câu 3. (HSG T7 Huyện Quảng Xương, năm học 2022 - 2023)

Cho $A = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$. Chứng tỏ rằng A không phải là số chính phương.

Câu 4. (HSG 7 huyện Quan Sơn 2022 - 2023)

Tìm tất cả các số có hai chữ số $\overline{ab}$ biết rằng $2\overline{ab}+1$ và $3\overline{ab}+1$ đều là số chính phương.

Câu 5.

Chứng minh rằng: $A = 19^k + 5^k + 1995^k + 1996^k$ (với k chẵn) không thể là số chính phương.

Câu 6.

Tìm tất cả các số tự nhiên x, y để $2^x + 5^y$ là số chính phương.

Dạng 6. Sử dụng đồng dư trong bài toán về số nguyên tố hợp số

Câu 1. (HSG 7 Quận Hà Đông 2022 - 2023)

Cho $A = 2^{2^{10n+1}} + 19$. Chứng minh rằng A là hợp số.

Câu 2. (HSG 7 huyện Bình Xuyên, tỉnh Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để số $2^{2023} + 23n$ là một bội số của 31 .

Câu 3. (HSG 7 huyện Nông Cống 2022 - 2023)

Cho số nguyên n ($n > 1$) thỏa mãn $n^2 + 4$ và $n^2 + 16$ là các số nguyên tố. Chứng minh n chia hết cho 5 .

Câu 4. (HSG 7 huyện Hoằng Hóa năm 2018 - 2019).

Cho p, q là các số nguyên tố lớn hơn 3 và thỏa mãn $p = q + 2$. Chứng minh: $(p+q):12$.

Câu 5. (HSG 7 trường THCS Lý Tự Trọng 2018 - 2019)

Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn $2^p + p^2$ là các số nguyên tố

Câu 6.

Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p^2 + 14$ là số nguyên tố.

Câu 7.

Cho $n \in \mathbb{N}^*$ chứng minh rằng: $19 \cdot 8^n + 17$ là hợp số.

Dạng 7. Sử dụng đồng dư trong bài toán tìm nghiệm nguyên

Câu 1. (HSG 7 huyện Thường Xuân, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + x = 3^{2020 \cdot y} + 1$

Câu 2. (HSG 7 huyện Phú Ninh 2018-2019)

Tìm x, y thuộc $\mathbb{Z}$ biết: $25 - y^2 = 8(x - 2015)^2$.

Câu 3. (HSG 7 trường Tôn Đức Thắng 2018-2019).

Tìm các số nguyên x, y biết $x^2 + 2x - 8y^2 = 41$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2015 - 2016)

Tìm số tự nhiên n và chữ số a biết rằng: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \overline{aaa}$

Câu 5.

Chứng minh rằng các phương trình sau không có nghiệm nguyên:

a) $x^2 - y^2 = 1998$

b) $x^2 + y^2 = 1999$

Câu 6.

Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 = 2y^2 - 8y + 3$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>