

Người làm: Đàm Thùy Linh

Zalo: Đàm Linh - số đt zalo: 0379166296

Email: damthuylinhgvtoan@gmail.com

CD9: TỈ LỆ THỨC VÀ DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

Dạng 1. Tìm số hạng chưa biết dựa vào tỉ lệ thức

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, 2021 - 2022)

Cho hai số x, y biết $\frac{x}{y} = \frac{5}{7}$ và $x + y = 72$. Vậy $2x - 3y$ bằng

A. 30

B. -66

C. -44

D. 40

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{y} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{7}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{x+y}{5+7} = \frac{72}{12} = 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} = 6 \\ \frac{y}{7} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 42 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x - 3y = 2 \cdot 30 - 3 \cdot 42 = -66$$

Vậy $2x - 3y = -66$. Chọn đáp án B

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, 2021 - 2022)

Tìm x, y , biết: $\frac{x-1}{2} = \frac{2y+1}{5} = \frac{3x-4y-5}{2x}$

Lời giải

Ta có: $\frac{x-1}{2} = \frac{2y+1}{5} = \frac{3x-4y-5}{2x}$ ĐK: $x \neq 0$.

$$\text{Từ } \frac{x-1}{2} = \frac{2y+1}{5} = \frac{3x-4y-5}{2x} \Rightarrow \frac{3x-3}{6} = \frac{4y+2}{10} = \frac{3x-4y-5}{2x} = \frac{(3x-3)-(4y+2)}{6-10} = \frac{3x-4y-5}{-4}$$

$$\Rightarrow \frac{3x-4y-5}{2x} = \frac{3x-4y-5}{-4}$$

$$\text{- Nếu } 3x-4y-5=0 \Rightarrow \frac{3x-3}{6} = \frac{4y+2}{10} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-3=0 \\ 4y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{- Nếu } 3x-4y-5 \neq 0 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$$

$$\Rightarrow \frac{-2-1}{2} = \frac{2y+1}{5} \Rightarrow 2y+1 = \frac{-15}{2} \Rightarrow y = \frac{-17}{4}$$

$$(x; y) \in \left\{ \left(1; \frac{-1}{2} \right); \left(-2; \frac{-17}{4} \right) \right\}$$

Vậy giá trị x, y cần tìm là:

Câu 2. (HSG 7 huyện Như Thanh, 2021 - 2022)

Tìm hai số x và y biết:
$$\frac{5x-1}{3} = \frac{7y-6}{5} = \frac{5x+7y-7}{4x}$$

Lời giải

$$\frac{5x-1}{3} = \frac{7y-6}{5} = \frac{5x+7y-7}{4x} \quad \text{Điều kiện: } x \neq 0$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:
$$\frac{5x-1}{3} = \frac{7y-6}{5} = \frac{5x+7y-7}{8}$$

Suy ra:
$$\frac{5x-1}{3} = \frac{7y-6}{5} = \frac{5x+7y-7}{4x} = \frac{5x+7y-7}{8}$$

Hay
$$\frac{5x+7y-7}{4x} = \frac{5x+7y-7}{8}$$

TH1: Nếu $5x+7y-7=0 \Rightarrow \frac{5x-1}{3} = \frac{7y-6}{5} = 0$

$$\Rightarrow 5x-1=7y-6=0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{5}; y = \frac{6}{7}$$

TH2: Nếu $5x+7y-7 \neq 0$ thì $4x=8 \Rightarrow x=2$

$$\Rightarrow \frac{5 \cdot 2 - 1}{3} = \frac{7y - 6}{5} \Rightarrow 3 = \frac{7y - 6}{5} \Rightarrow 7y - 6 = 15 \Rightarrow y = 3$$

Vậy $(x; y) = \left(\frac{1}{5}; \frac{6}{7} \right)$ và $(x; y) = (2; 3)$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Hà Trung, 2021 - 2022)

Tìm x, y biết:
$$\frac{1+2y}{18} = \frac{1+4y}{24} = \frac{1+6y}{6x}$$

Lời giải

$$\frac{1+2y}{18} = \frac{1+4y}{24} = \frac{1+6y}{6x}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{2+4y}{36} = \frac{1+4y}{24} = \frac{2+4y-1-4y}{36-24} = \frac{1}{12} = \frac{2}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1+4y}{24} = \frac{2}{24}$$

$$\Rightarrow 1+4y=2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{4}$$

Với $y = \frac{1}{4}$ ta có $\frac{1+6y}{6x} = \frac{1}{12}$

$$\Rightarrow \frac{1+6 \cdot \frac{1}{4}}{6x} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow 6x = 12 \left(1 + \frac{3}{2} \right)$$

$$\Rightarrow x = 5$$

$$(x; y) = \left(5; \frac{1}{4} \right)$$

Vậy

Câu 4: (HSG 7 huyện Mỹ Đức, 2021 - 2022)

Tìm hai số nguyên dương x và y biết rằng tổng, hiệu và tích của chúng tỉ lệ nghịch với 35; 210; 12

Lời giải

Do tổng, hiệu và tích của x và y lần lượt tỉ lệ nghịch với 35; 210; 12.

Ta có $(x + y).35 = (x - y).210 = 12.xy$

$$\Rightarrow \frac{35(x + y)}{420} = \frac{210(x - y)}{420} = \frac{12xy}{420}$$

$$\Rightarrow \frac{x + y}{12} = \frac{x - y}{2} = \frac{xy}{35} \quad (1)$$

Theo tính chất của dãy tỷ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x + y}{12} = \frac{x - y}{2} = \frac{x}{7} = \frac{y}{5} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{xy}{35} = \frac{x}{7} = \frac{y}{5} = \frac{xy}{7y} = \frac{xy}{5x}$$

$$\text{Vì } x > 0; y > 0 \text{ ta có: } 7y = 35 \Rightarrow y = 5 \text{ và } 5x = 35 \Rightarrow x = 7$$

Vậy hai số phải tìm là: $x = 7$ và $y = 5$

Câu 5: (HSG 7 huyện Ứng Hòa, 2021 - 2022)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ và $a + b + c = 2022$. Tính a, b, c ?

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a + b + c}{b + c + a} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = 1 \\ \frac{b}{c} = 1 \\ \frac{c}{a} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ b = c \\ c = a \end{cases} \Rightarrow a = b = c$$

$$\text{Mà } a + b + c = 2022 \Rightarrow 3a = 2022 \Rightarrow a = 674 \Rightarrow a = b = c = 674$$

$$\text{Vậy } a = b = c = 674$$

Câu 6: (HSG 7 huyện Cao Lộc, 2021 - 2022)

$$\text{Tìm } x, y \text{ biết: } \frac{2 + 3y}{12} = \frac{2 + 5y}{3x} = \frac{2 + 7y}{4x}$$

Lời giải

Theo tính chất dãy tỷ số bằng nhau

$$\frac{2+3y}{12} = \frac{2+5y}{3x} = \frac{2y}{3x-12} \Rightarrow \frac{2+5y}{3x} = \frac{2+7y}{4x} = \frac{2y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{2y}{x} = \frac{2y}{3x-12}$$

$$\Rightarrow x = 3x - 12 \Rightarrow -2x = -12 \Rightarrow x = 6$$

$$\frac{2+3y}{12} = \frac{2+5y}{3x}$$

Lại có

$$\Rightarrow \frac{2+3y}{12} = \frac{2+5y}{18}$$

$$\Rightarrow \frac{2+3y}{2} = \frac{2+5y}{3}$$

$$\Rightarrow 6+9y = 4+10y \Rightarrow y = 2$$

Vậy $x=6; y=2$

Câu 7: (HSG 7 huyện Thanh Thủy, 2021 - 2022)

Tìm x, y biết $\frac{x-1}{2} = \frac{2y+1}{5} = \frac{3x-4y-5}{2x}$ với $x \neq 0$

Lời giải

Ta có $\frac{x-1}{2} = \frac{2y+1}{5} = \frac{3x-4y-5}{2x} = \frac{3x-3}{6} = \frac{4y+2}{10} = \frac{3x-4y-5}{2x}$
 $= \frac{3x-4y-5-3x+3+4y+2}{2x-6+10} = \frac{0}{2x+4}$ (theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau)

TH1. Nếu $x = -2$ thì $\frac{-3}{2} = \frac{2y+1}{5} \Rightarrow y = \frac{-17}{4}$

TH2. Nếu $x \neq -2$ thì $x=1; y = \frac{-1}{2}$

Vậy $x = -2; y = \frac{-17}{4}$ và $x=1; y = \frac{-1}{2}$

Câu 8. (HSG 7 huyện Cửa Lò, 2020 - 2021)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{3} = \frac{y}{6}; \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ và $x+y-z=24$.

Lời giải

$\frac{x}{3} = \frac{y}{6}; \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ và $x+y-z=24$.

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{3} = \frac{y}{6} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{12} \\ \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{15} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta được:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15} = \frac{x+y+z}{6+12+15} = \frac{24}{3} = 8$$

Suy ra: $x=6.8=48$; $y=12.8=96$; $z=15.8=120$

Vậy $x=48$; $y=96$; $z=120$ là các giá trị cần tìm.

Câu 9. (HSG 7 huyện Vũ Thư, 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{6}$ và $x+y+z=27$

Lời giải

Đặt $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{6} = k \Rightarrow x=2k+1; y=4k-3; z=6k+5$

Vì $x+y+z=27 \Rightarrow 2k+1+4k-3+6k+5=27$

$$\Rightarrow 12k+3=27 \Rightarrow 12k=24 \Rightarrow k=2$$

Với $k=2$ ta có: $x=2.2+1=5$; $y=4.2-3=5$; $z=6.2+5=17$

Vậy $(x, y, z) = (5; 5; 17)$

Câu 10. (HSG 7 trường THCS Trần Lâm, 2021 - 2022)

Tìm x, y, z thỏa mãn các điều kiện sau: $\frac{6x-4z}{5} = \frac{5z-6y}{4} = \frac{4y-5x}{6}$ và $3x-2y+5z=96$

Lời giải

Ta có: $\frac{6x-4z}{5} = \frac{5z-6y}{4} = \frac{4y-5x}{6} = \frac{5(6x-4z)}{25} = \frac{4(5z-6y)}{16} = \frac{6(4y-5x)}{36}$
 $= \frac{30x-20z}{25} = \frac{20z-24y}{16} = \frac{24y-30x}{36} = \frac{30x-20z+20z-24y+24y-30x}{25+16+36} = 0$

$$\Rightarrow 6x=4z, 5z=6y, 4y=5x$$

$$\Rightarrow \frac{6x}{24} = \frac{4z}{24}, \frac{5z}{30} = \frac{6y}{30}, \frac{4y}{20} = \frac{5x}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} = \frac{3x}{12} = \frac{2y}{10} = \frac{5z}{30} = \frac{3x-2y+5z}{12-10+30} = \frac{96}{32} = 3$$

$$\Rightarrow x=12; y=15; z=18$$

Vậy $x=12; y=15; z=18$

Câu 11. (HSG 7 huyện Bát Xát, 2021 - 2022)

Tìm các số x, y, z biết $\frac{x}{10} = \frac{y}{6} = \frac{z}{21}$ và $5x+y-2z=28$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{6} = \frac{z}{21} = \frac{5x}{50} = \frac{y}{6} = \frac{2z}{42} = \frac{5x+y-2z}{50+6-42} = \frac{28}{14} = 2$$

$$\frac{x}{10} = 2 \Rightarrow x = 2.10 = 20$$

$$\frac{y}{6} = 2 \Rightarrow y = 6.2 = 12$$

$$\frac{z}{21} = 2 \Rightarrow z = 21.2 = 42$$

Vậy $x=20, y=12, z=42$

Câu 12. (HSG 7 huyện Bá Thước, 2021 - 2022).

Tìm x, y, z biết: $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$ và $x+y+z=18$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$$

$$\frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4}$$

Ta có

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

$$\frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4} = \frac{4(3x-2y)+3(2z-4x)+2(4y-3z)}{16+9+4} = \frac{0}{29} = 0$$

$$\text{Suy ra } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

Do đó $x=4, y=6, z=8$

Câu 12. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2021 - 2022)

Tìm x, y, z biết: $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z} = \frac{y+z+1+x+z+2+x+y-3}{x+y+z} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y+z+1=2x \\ x+z+2=2y \\ x+y-3=2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=2x-1 \\ x+z=2y-2 \\ x+y=2z+3 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x+y+z} = 2 \Rightarrow \frac{1}{x+2x-1} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x+y+z} = 2 \Rightarrow \frac{1}{y+2y-2} = 2 \Rightarrow y = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{x+y+z} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2z+3+z} = 2 \Rightarrow z = \frac{-5}{6}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{2}, y = \frac{5}{6}, z = \frac{-5}{6}$$

Câu 13. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2021 - 2022)

Tìm x, y, z biết: $2x=3y; 4y=5z$ và $4x-3y+5z=7$

Lời giải

Từ $2x=3y; 4y=5z \Rightarrow 8x=12y=15z$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{4x}{60} = \frac{3y}{30} = \frac{5z}{40} = \frac{4x-3y+5z}{60-30+40} = \frac{7}{70} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{4x}{60} = \frac{3y}{30} = \frac{5z}{40} = \frac{4x-3y+5z}{60-30+40} = \frac{7}{70} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow x = 15 \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{2}; y = 10 \cdot \frac{1}{10} = 1; z = 8 \cdot \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$$

Vậy $x = \frac{3}{2}; y = 1; z = \frac{4}{5}$

Câu 14. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Yên Mỹ 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $3x=4y=5z-3x-4y$ và $2x+y=z-38$.

Lời giải

Ta có: $3x=4y=5z-3x-4y$

$$\Rightarrow \frac{3x}{1} = \frac{4y}{1} = \frac{5z-3x-4y}{1} = \frac{3x+4y+5z-3x-4y}{1+1+1} = \frac{5z}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{1} = \frac{4y}{1} = \frac{5z}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{36}$$

Lại có: $2x+y=z-38 \Rightarrow 2x+y-z=-38$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{36} = \frac{2x+y-z}{2 \cdot 20 + 15 - 36} = \frac{-38}{19} = -2$$

Suy ra: $x = -40; y = -30; z = -72$

Vậy: $(x; y; z) = (-40; -30; -72)$

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Như Thanh, 2021 - 2022)

Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa mãn: $\frac{2bz-3cy}{a} = \frac{3cx-az}{2b} = \frac{ay-2bx}{3c}$.

Chứng minh rằng $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$.

Lời giải

$$\frac{2bz-3cy}{a} = \frac{3cx-az}{2b} = \frac{ay-2bx}{3c}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{2bxz-3cxy}{ax} = \frac{3cxy-ayz}{2by} = \frac{ayz-2bxz}{3cz} = \frac{2bxz-3cxy+3cxy-ayz+ayz-2bxz}{ax+2by+3cz} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2bz = 3cy \\ 3cx = az \\ ay = 2bx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{z}{3c} = \frac{y}{2b} \\ \frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Miện, 2021 - 2022)

Cho các số x, y, z khác 0 và $x + y + z \neq 0$ thỏa mãn $\frac{x+y-z}{z} = \frac{y+z-x}{x} = \frac{z+x-y}{y}$.

$$P = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} \right) \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{y} \right)$$

Tính giá trị biểu thức

Lời giải

Với các số x, y, z khác 0 và $x + y + z \neq 0$ áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau có:

$$\frac{x+y-z}{z} = \frac{y+z-x}{x} = \frac{z+x-y}{y} = \frac{x+y+z}{x+y+z} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y-z}{z} = 1 \\ \frac{y+z-x}{x} = 1 \\ \frac{z+x-y}{y} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=2z \\ y+z=2x \\ z+x=2y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=3z \\ y+z+x=3x \\ z+x+y=3y \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x = 3y = 3z \Rightarrow x = y = z$$

$x = y = z$ vào biểu thức P ta có:

Thay

$$P = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} \right) \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{y} \right)$$

$$P = \left(\frac{x}{x} + \frac{y}{y} \right) \left(\frac{y}{y} + \frac{z}{z} \right) \left(\frac{z}{z} + \frac{x}{x} \right)$$

$$P = (1+1)(1+1)(1+1) = 8$$

Vậy giá trị của biểu thức $P = 8$

Câu 3. (HSG 7 huyện Mỹ Đức, 2021 - 2022)

Cho dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{2022a+b+c+d}{a} = \frac{1+2022b+c+d}{b} = \frac{a+b+2022c+d}{c} = \frac{a+b+c+2022d}{d}$$

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$. (Với các mẫu số của các phân số trên khác 0)

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{2022a+b+c+d}{a} &= \frac{1+2022b+c+d}{b} = \frac{a+b+2022c+d}{c} = \frac{a+b+c+2022d}{d} \\ \Rightarrow \frac{2022a+b+c+d}{a} - 2021 &= \frac{a+2022b+c+d}{b} - 2021 = \frac{a+b+2022c+d}{c} - 2021 = \frac{a+b+c+2022d}{d} - 2021 \\ \Rightarrow \frac{a+b+c+d}{a} &= \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d} \quad (*) \end{aligned}$$

TH1: $a+b+c+d=0 \Rightarrow a+b=-(c+d); a+c=-(b+d);$

$a+d=-(b+c)$. Ta có: $P = -1 - 1 - 1 - 1 = -4$

TH2: $a+b+c+d \neq 0$. Từ (*) suy ra $a=b=c=d$

Ta có: $P = 1+1+1+1=4$

Vậy $P \in \{4; -4\}$

Câu 4. (HSG 7 huyện Chương Mỹ, 2021 - 2022)

Cho ba số x, y, z thỏa mãn: $2 \cdot (x+y) = 5 \cdot (y+z) = 3 \cdot (z+x)$.

Chứng minh rằng: $\frac{x-y}{4} = \frac{y-z}{5}$.

Lời giải

Ta có: $2 \cdot (x+y) = 5 \cdot (y+z) = 3 \cdot (z+x)$

$$\text{Suy ra: } \frac{2 \cdot (x+y)}{30} = \frac{5 \cdot (y+z)}{30} = \frac{3 \cdot (z+x)}{30} \Rightarrow \frac{x+y}{15} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{10}$$

$$+) \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{10} = \frac{(z+x) - (y+z)}{10-6} = \frac{x-y}{4} \quad (1)$$

$$+) \frac{x+y}{15} = \frac{z+x}{10} = \frac{(x+y) - (z+x)}{15-10} = \frac{y-z}{5} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{x-y}{4} = \frac{y-z}{5}$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Ứng Hòa, 2021 - 2022)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{3a^6+c^6}{3b^6+d^6} = \frac{(a+c)^6}{(b+d)^6}$ (với $b+d \neq 0$).

Lời giải

Với $b+d \neq 0$ ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^6 = \left(\frac{c}{d}\right)^6 = \left(\frac{a+c}{b+d}\right)^6 \Rightarrow \frac{a^6}{b^6} = \frac{c^6}{d^6} = \frac{(a+c)^6}{(b+d)^6} \Rightarrow \frac{3a^6}{3b^6} = \frac{c^6}{d^6} = \frac{(a+c)^6}{(b+d)^6}$$

$$\Rightarrow \frac{3a^6 + c^6}{3b^6 + d^6} = \frac{(a+c)^6}{(b+d)^6} \quad (\text{đpcm})$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Tam Dương, 2021 - 2022)

Cho a, b, c, d là các số khác 0 thỏa mãn các điều kiện $b^2 = ac; c^2 = bd; b^3 + 27c^3 + 8d^3 \neq 0$. Chứng

minh rằng $\frac{a}{d} = \frac{a^3 + 27b^3 + 8c^3}{b^3 + 27c^3 + 8d^3}$.

Lời giải

Do $b^2 = ac \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{a}{b} \quad (1)$ và $c^2 = bd \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{b}{c} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{3b}{3c} = \frac{2c}{2d}$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{3b}{3c}\right)^3 = \left(\frac{2c}{2d}\right)^3$$

Hay $\frac{a}{d} = \frac{a^3}{b^3} = \frac{27b^3}{27c^3} = \frac{8c^3}{8d^3}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{a}{d} = \frac{a^3}{b^3} = \frac{27b^3}{27c^3} = \frac{8c^3}{8d^3} = \frac{a^3 + 27b^3 + 8c^3}{b^3 + 27c^3 + 8d^3}$$

Vậy $\frac{a}{d} = \frac{a^3 + 27b^3 + 8c^3}{b^3 + 27c^3 + 8d^3}$

Câu 7. (HSG 7 TP Vũng Tàu, 2021 - 2022)

Cho $\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c}$. Chứng tỏ rằng $\frac{x^{2022} + y^{2022} + z^{2022}}{a^{2022} + b^{2022} + c^{2022}} = \frac{(x + y + z)^{2022}}{(a + b + c)^{2022}}$

Lời giải

Ta có $\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c}$

$$\Rightarrow \frac{abz - acy}{a^2} = \frac{bcx - baz}{b^2} = \frac{cay - cbx}{c^2} = \frac{abz - acy + bcx - baz + cay - cbx}{a^2 + b^2 + c^2} = 0$$

$$\Rightarrow bz - cy = cx - az = ay - bx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x + y + z}{a + b + c}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^{2022} = \left(\frac{y}{b}\right)^{2022} = \left(\frac{z}{c}\right)^{2022} = \left(\frac{x + y + z}{a + b + c}\right)^{2022}$$

$$\Rightarrow \frac{x^{2022} + y^{2022} + z^{2022}}{a^{2022} + b^{2022} + c^{2022}} = \frac{(x + y + z)^{2022}}{(a + b + c)^{2022}}$$

Vậy $\frac{x^{2022} + y^{2022} + z^{2022}}{a^{2022} + b^{2022} + c^{2022}} = \frac{(x + y + z)^{2022}}{(a + b + c)^{2022}}$

Câu 8: (HSG 7 huyện Thanh Ba, 2021 - 2022)

Cho 3 số x, y, z thỏa mãn: $\frac{x}{2020} = \frac{y}{2021} = \frac{z}{2022}$.

Chứng minh rằng $(x - z)^3 = 8(x - y)^2 \cdot (y - z)$

Lời giải

$$\begin{aligned}\frac{x}{2020} &= \frac{y}{2021} = \frac{z}{2022} \Rightarrow \frac{x-z}{2020-2022} = \frac{x-y}{2020-2021} = \frac{y-z}{2021-2022} \\ \Rightarrow \frac{x-z}{-2} &= \frac{x-y}{-1} = \frac{y-z}{-1} \\ \Rightarrow \left(\frac{x-z}{-2} \right)^3 &= \left(\frac{x-y}{-1} \right)^3 \\ \Rightarrow \left(\frac{x-z}{-2} \right)^3 &= \left(\frac{x-y}{-1} \right)^2 \cdot \left(\frac{y-z}{-1} \right) \quad \left(\text{vì } \frac{x-y}{-1} = \frac{y-z}{-1} \right) \\ \Rightarrow \frac{(x-z)^3}{(-2)^3} &= \frac{(x-y)^2}{(-1)^2} \cdot \frac{y-z}{-1} \\ \Rightarrow (x-z)^3 &= 8(x-y)^2(y-z) \quad (\text{đpcm})\end{aligned}$$

Câu 9: (HSG 7 huyện Tân Kỳ, 2021 - 2022)

Cho $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$ chứng tỏ rằng: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\begin{aligned}\frac{3x-2y}{4} &= \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2} = \frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4} \\ &= \frac{12x-8y+6z-12x+8y-6z}{16+9+4} = 0\end{aligned}$$

Suy ra
$$\begin{cases} 12x-8y=0 \\ 6z-12x=0 \\ 8y-6z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=2y \\ z=2x \\ 4y=3z \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

Vậy: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

Dạng 3. Chứng minh bất đẳng thức

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy, 2022 - 2023)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 1$$

Lời giải

Vì a, b, c là ba cạnh của tam giác nên ta có

$$0 < \frac{a}{b+c} < 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \left(1 - \sqrt{\frac{a}{b+c}} \right) > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{b+c}$$

Vì a, b, c là các số dương nên $\frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c}$

Do đó $\sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{a+b+c}$

Chứng minh tương tự ta được $\sqrt{\frac{b}{c+a}} > \frac{b}{a+b+c}$; $\sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{c}{a+b+c}$
 Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1$$

Bài toán được chứng minh

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Cho ba số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Lời giải

Ta có $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$

$$\Rightarrow (a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab - a - b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow ab + 1 \geq a + b$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b}$$

Tương tự ta có: $\frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c}$; $\frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c}$

Do đó: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$

$$\Rightarrow \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} \leq 2$$

Dạng 4. Bài toán về dãy tỉ số bằng nhau và chia tỉ lệ

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Nghĩa Hành, 2021 - 2022)

Lớp 7A có 52 học sinh được chia làm ba tổ. Nếu tổ một bớt đi 1 học sinh, tổ hai bớt đi 2 học sinh, tổ ba thêm vào 3 học sinh thì số học sinh tổ một, hai, ba tỉ lệ nghịch với $3; 4; 2$. Tìm số học sinh của mỗi tổ.

Lời giải

Gọi số học sinh tổ một, tổ hai, tổ ba của lớp 7A lần lượt là x, y, z (học sinh)

ĐK: $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, $x, y, z < 52$

+) Lớp 7A có 52 học sinh nên $x + y + z = 52$.

+) Nếu tổ một bớt đi 1 học sinh, tổ hai bớt đi 2 học sinh, tổ ba thêm vào 3 học sinh thì số học sinh tổ một, hai, ba tỉ lệ nghịch với $3; 4; 2$

Nên ta có $3.(x-1) = 4.(y-2) = 2.(z+3)$

$$\Rightarrow \frac{3(x-1)}{12} = \frac{4(y-2)}{12} = \frac{2(z+3)}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)}{4} = \frac{(y-2)}{3} = \frac{(z+3)}{6}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\Rightarrow \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{6} = \frac{x+y+z}{13} = \frac{52}{13} = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=16 \\ y-2=12 \\ z+3=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=17 \\ y=14 \\ z=21 \end{cases} \text{ (Thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy số học sinh tổ một, tổ hai, tổ ba của lớp 7A lần lượt là 17 học sinh, 14 học sinh, 21 học sinh

Câu 2. (HSG 7 huyện Ứng Hòa, 2021 - 2022)

Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tăm từ thiện của hội chữ thập đỏ huyện Ứng Hòa, lúc đầu số gói tăm dự định chia cho ba lớp tỉ lệ với 5, 6, 7 nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4, 5, 6 nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 4 gói. Tính tổng số gói tăm mà ba lớp đã mua.

Lời giải

Gọi tổng số gói tăm mà 3 lớp cùng nhau mua là x (gói) ($x \in \mathbb{N}^*$)

+) Số gói tăm dự định chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là a, b, c (gói)

Điều kiện $a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

Theo đề bài ta có:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18}$$

$$\Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18} = \frac{x}{3}; c = \frac{7x}{18} \quad (1)$$

+) Số gói tăm được chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc sau lần lượt là a', b', c' (gói)

Điều kiện $a', b', c' \in \mathbb{N}^*$.

Theo đề bài ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15}$$

$$\Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15} = \frac{x}{3}; c' = \frac{6x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có:

$a > a'; b = b'; c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn dự định 4 gói.

$$\Rightarrow c' - c = 4 \text{ hay } \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy tổng số gói tăm 3 lớp đã mua là 360 gói.

Câu 3: (HSG 7 huyện Thanh Trì, 2021 - 2022)

Bạn An nghĩ ra một số có ba chữ số, biết số đó chia hết cho 18 và các chữ số của số đó tỉ lệ với ba số 1; 2; 3.

Lời giải

Gọi ba chữ số cần tìm là a, b, c .

Vì chia hết cho 18 nên $a+b+c \in B(9)$, $a+b+c \leq 27$ và c là chữ số chẵn. (1)

Ta có các chữ số a, b, c tỉ lệ với 1; 2; 3 nên ta có tỉ lệ $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a+b+c = 18$ nên $a, b, c \in [3; 6; 9]$.

Từ đó suy ra $c = 6$ và $a, b \in \{3; 9\}$.

Vậy các số có ba chữ số thỏa mãn bài toán là 396; 936.

Câu 4: (HSG 7 huyện Tam Dương, 2021 - 2022)

Cho ba hình chữ nhật, biết diện tích của hình chữ nhật thứ nhất và diện tích của hình thứ hai tỉ lệ với 4 và 5, diện tích của hình thứ hai và diện tích của hình thứ ba tỉ lệ với 7 và 8, hình thứ nhất và hình thứ hai có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là 27 m, hình thứ hai và hình thứ ba có cùng chiều rộng, chiều dài của hình thứ ba là 24 m. Tính diện tích của mỗi hình chữ nhật đó.

Lời giải

Gọi diện tích của hình chữ nhật thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là S_1, S_2, S_3 .

Chiều dài và chiều rộng tương ứng của chúng là $d_1, r_1, d_2, r_2, d_3, r_3$

Theo bài ra ta có $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5}$; $\frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8}$; $d_1 = d_2$; $r_1 + r_2 = 27$; $r_3 = r_2$; $d_3 = 24$

Vì hình thứ nhất và hình thứ hai có cùng chiều dài nên $\frac{S_1}{S_2} = \frac{d_1 r_1}{d_2 r_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{r_1}{4} = \frac{r_2}{5}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\Rightarrow \frac{r_1}{4} = \frac{r_2}{5} = \frac{r_1 + r_2}{4 + 5} = \frac{27}{9} = 3$$

$$\frac{r_1}{4} = 3 \Rightarrow r_1 = 3 \cdot 4 = 12 \quad (m)$$

$$\frac{r_2}{5} = 3 \Rightarrow r_2 = 3 \cdot 5 = 15 \quad (m)$$

Vì hình thứ ba có cùng chiều rộng nên $\frac{S_2}{S_3} = \frac{d_2 r_2}{d_3 r_3} = \frac{d_2}{d_3} = \frac{7}{8}$

$$\Rightarrow d_2 = \frac{7}{8} d_3 = \frac{7}{8} \cdot 24 = 21 \quad (m)$$

Vậy diện tích hình thứ hai là $S_2 = d_2 r_2 = 21 \cdot 15 = 315 \quad (m^2)$

Diện tích hình thứ nhất là $S_1 = \frac{4}{5} S_2 = \frac{4}{5} \cdot 315 = 252 \quad (m^2)$

Diện tích hình thứ ba là $S_3 = \frac{8}{7} S_2 = \frac{8}{7} \cdot 315 = 360 \quad (m^2)$

Câu 5: (HSG 7 TP Vũng Tàu, 2021 - 2022)

Cho một tam giác có chu vi là 48 cm, cạnh thứ nhất với cạnh thứ hai tỉ lệ với 1 và 2, cạnh thứ hai và cạnh thứ ba tỉ lệ với 6 và 7. Tính độ dài các cạnh của tam giác đó.

Lời giải

Gọi độ dài 3 cạnh: cạnh thứ nhất, cạnh thứ 2, cạnh thứ 3 lần lượt là a, b, c

Theo đề bài ta có: $a + b + c = 48$; $\frac{a}{1} = \frac{b}{2}$; $\frac{b}{6} = \frac{c}{7}$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a + b + c}{3 + 6 + 7} = 3$$

$$\Rightarrow a = 9; b = 18; c = 21$$

Vậy độ dài các cạnh của tam giác lần lượt là 9cm; 18cm; 21cm

Câu 6: (HSG 7 TP Vũng Tàu, 2021 - 2022)

Một vật chuyển động trên các cạnh hình vuông. Trên hai cạnh thứ nhất và thứ hai vật chuyển động với vận tốc $14m/s$, trên cạnh thứ ba với vận tốc $22m/s$, trên cạnh thứ tư với vận tốc $2m/s$. Hỏi độ dài cạnh hình vuông biết rằng tổng thời gian vật chuyển động trên bốn cạnh là 106 giây.

Lời giải

Gọi x, y, z là thời gian chuyển động lần lượt với các vận tốc $14m/s, 22m/s, 2m/s$

Theo đề bài ta có $14x = 22y = 2z; x + y + z = 106$

$$\Rightarrow \frac{x}{14} = \frac{y}{22} = \frac{z}{2} = \frac{106}{154} = 154$$

$$\Rightarrow x = 11; y = 7; z = 77$$

Vậy độ dài cạnh hình vuông là $11 \cdot 14 = 154m$.

Câu 7: (HSG 7 huyện Thanh Thủy, 2021 - 2022)

Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tăm từ thiện, lúc đầu số gói tăm dự định chia cho ba lớp tỉ lệ với $5:6:7$ nhưng sau đó chia theo tỉ lệ $4:5:6$ nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 4 gói. Tính tổng số gói tăm mà ba lớp đã mua.

Lời giải

Gọi tổng số gói tăm 3 lớp mua được là x (gói), $x \in N^*$

Gọi số tăm lúc đầu 3 lớp 7A, 7B, 7C mua là a, b, c (gói)

$$\text{Theo bài ra ta có } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{5+6+7} = \frac{x}{18}$$

$$\Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{x}{3}; c = \frac{7x}{18} \quad (1)$$

Gọi số tăm lúc sau ba lớp 7A, 7B, 7C mua lần lượt là a', b', c' (gói)

$$\text{Theo đề bài ta có: } \frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{4+5+6} = \frac{x}{15}$$

$$\Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{x}{3}; c' = \frac{2x}{5} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thấy $a > a', b = b', c < c'$

$$\text{Suy ra lớp 7C nhận nhiều hơn dự định 4 gói. Tức là } \frac{2x}{5} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow x = 360 \quad (\text{thỏa điều kiện})$$

Vậy số gói tăm 3 lớp đã mua là 360 gói.

Câu 8: (HSG 7 huyện Tân Kỳ, 2021 - 2022)

Ba đội máy cày, cày ba cánh đồng có cùng diện tích. Đội thứ nhất cày xong trong 3 ngày, đội thứ hai trong 5 ngày và đội thứ 3 trong 6 ngày. Hỏi mỗi đội có bao nhiêu máy, biết rằng đội thứ hai có nhiều hơn đội thứ ba là 1 máy (năng suất các máy như nhau)

Lời giải

Gọi số máy cày đội I; II; III lần lượt là x, y, z (máy) $(x, y, z \in N^*)$

Vì ba đội máy cày, cày ba cánh đồng có cùng diện tích và năng suất các máy như nhau nên số máy và thời gian hoàn thành công việc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Theo bài ta có: $3x = 5y = 6z; y - z = 2$

$$\text{Khi đó } 3x = 5y = 6z \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} = \frac{y-z}{6-5} = 2$$

Khi đó

Suy ra: $x = 20; y = 12; z = 10$

Vậy số máy cày đội I; II; III lần lượt là 20; 12; 10 máy

Câu 9: (HSG 7 Thái Bình, 2021 – 2022)

Ba tổ công nhân A, B, C phải sản xuất cùng một số sản phẩm như nhau. Thời gian 3 tổ hoàn thành kế hoạch theo thứ tự là 14 ngày, 15 ngày và 21 ngày. Tổ A nhiều hơn tổ C là 10 người. Hỏi mỗi tổ có bao nhiêu công nhân? (Năng suất lao động của các công nhân là như nhau).)

Lời giải

Gọi số công nhân của ba tổ A, B, C lần lượt là x, y, z (người). ĐK: $x, y, z \in \mathbb{N}^*$

Theo đề bài ta có: x, y, z tỉ lệ nghịch với 14, 15, 21

$$\Rightarrow x, y, z \text{ tỉ lệ thuận với } \frac{1}{14}; \frac{1}{15}; \frac{1}{21}$$

$$\frac{x}{\frac{1}{14}} = \frac{y}{\frac{1}{15}} = \frac{z}{\frac{1}{21}} \\ \Rightarrow \frac{x}{14} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21} \text{ và } x - z = 10$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x}{\frac{1}{14}} = \frac{y}{\frac{1}{15}} = \frac{z}{\frac{1}{21}} = \frac{x - z}{\frac{1}{14} - \frac{1}{21}} = \frac{10}{\frac{1}{42}} = 420$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{14} \cdot 420 = 30$$

$$y = \frac{1}{15} \cdot 420 = 28$$

$$z = \frac{1}{21} \cdot 420 = 20$$

Vậy tổ A có 30 công nhân, tổ B có 28 công nhân, tổ C có 20 công nhân.

Câu 10: (HSG 7 huyện Bá Thước, 2021 – 2022)

Nhà trường dự định chia vở viết cho ba lớp 7A, 7B, 7C theo tỉ lệ 7 : 6 : 5. Nhưng sau đó vì có học sinh chuyển chuyển giữa ba lớp nên phải chia lại theo tỉ lệ 6 : 5 : 4. Như vậy có lớp đã nhận được ít hơn theo dự định là 12 quyển vở. Tính số vở của mỗi lớp nhận được.

Lời giải

Gọi số quyển vở 7A, 7B, 7C nhận được theo dự định tương ứng là x, y, z và số quyển vở ba lớp nhận được trong thực tế là a, b, c với x, y, z, a, b, c là các số tự nhiên khác 0

$$\text{Theo đề bài ta có } x : y : z = 7 : 6 : 5 \text{ hay } \frac{x}{7} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{18}$$

$$a : b : c = 6 : 5 : 4 \text{ hay } \frac{a}{6} = \frac{b}{5} = \frac{c}{4} = \frac{a+b+c}{15}$$

$$\text{Suy ra } \frac{x}{35} = \frac{y}{30} = \frac{z}{25} = \frac{x+y+z}{90} \text{ và } \frac{a}{36} = \frac{b}{30} = \frac{c}{24} = \frac{a+b+c}{90}$$

Do số học sinh chỉ chuyển chuyển ở các lớp nên tổng số học sinh không đổi

$$x + y + z = a + b + c \text{ và } \frac{x}{35} = \frac{y}{30} = \frac{z}{25} = \frac{a}{36} = \frac{b}{30} = \frac{c}{24} = k$$

Từ dãy tỉ số bằng nhau trên ta nhận xét $\frac{x}{35} = \frac{a}{36}$ nên $x < a$ hay số quyển vở lớp 7A nhận được nhiều hơn so với dự định. Tương tự, số quyển vở lớp 7B nhận được không thay đổi và số vở lớp 7C nhận được ít hơn dự định.

$$\text{Suy ra } k = \frac{z - c}{25 - 24} = 12$$

Vậy lớp 7A nhận được 432 quyển vở, lớp 7B nhận được 360 quyển vở, 7C nhận được 288 quyển vở.

Câu 11: (HSG 7 huyện Lý Nhân, 2021 – 2022)

Ba lớp $7A, 7B, 7C$ cùng mua tăm từ thiện. Lúc đầu dự định chia số gói tăm cho ba lớp nói trên theo tỉ lệ $4, 5, 6$ nhưng sau đó lại chia theo tỉ lệ $3, 4, 5$ nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 8 gói. Tính tổng số gói tăm ba lớp mua?

Lời giải

Gọi tổng số gói tăm ba lớp cùng mua là x (x là số tự nhiên khác 0)

số gói tăm dự định chia cho ba lớp $7A, 7B, 7C$ lần lượt là a, b, c

$$\text{Ta có } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18} = \frac{x}{3}; c = \frac{7x}{18} \quad (1)$$

Số gói tăm sau đó chia cho ba lớp lần lượt là a', b', c' , ta có

$$\frac{a'}{3} = \frac{b'}{4} = \frac{c'}{5} = \frac{a'+b'+c'}{12} = \frac{x}{12} \Rightarrow a' = \frac{3x}{12}; b' = \frac{4x}{12}; c' = \frac{5x}{12} \quad (2)$$

So sánh (1), (2) ta có $a > a'; b = b'; c < c'$ nên lớp $7C$ nhận nhiều hơn lúc ban đầu

$$\text{Vậy } c' - c = 8 \text{ hay } \frac{5x}{12} - \frac{7x}{18} = 8 \Rightarrow \frac{x}{36} = 8 \Rightarrow x = 288$$

Vậy số gói tăm ba lớp đã mua là 288 gói.

Câu 12: Trong đợt dịch Covid-19, ba xí nghiệp sản xuất khẩu trang y tế trong 7 ngày được 2072 thùng. Biết số thùng xí nghiệp thứ nhất sản xuất trong 4 ngày bằng số thùng xí nghiệp thứ hai sản xuất trong 5 ngày, bằng số thùng xí nghiệp thứ ba sản xuất trong 6 ngày. Hỏi trong một ngày, mỗi xí nghiệp sản xuất được bao nhiêu thùng khẩu trang (coi năng xuất mỗi ngày làm việc của từng xí nghiệp không thay đổi).

Lời giải

Gọi số thùng khẩu trang của xí nghiệp thứ nhất, thứ hai và thứ ba làm trong một ngày lần lượt là: $x; y; z$ (thùng). (ĐK: $x; y; z > 0$).

Vì trong 7 ngày cả ba xí nghiệp sản xuất được 2072 thùng nên:

$$7(x + y + z) = 2072 \Rightarrow x + y + z = 296 \quad (1)$$

$$\text{Theo bài ra ta có: } 4x = 5y = 6z \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{12} = \frac{z}{10} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{12} = \frac{z}{10} = \frac{x+y+z}{15+12+10} = \frac{296}{37} = 8$$

Suy ra: $x = 120; y = 96; z = 80$ (thỏa mãn).

Vậy trong một ngày xí nghiệp thứ nhất làm được 120 (thùng); xí nghiệp thứ hai làm được 96 (thùng); xí nghiệp thứ ba làm được 80 (thùng).

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
<https://www.vnteach.com>