

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP TỔNG HỢP

Chuyên đề 2: CHUYỂN ĐỘNG THẲNG BIẾN ĐỔI ĐỀU, SỰ RƠI TỰ DO

14. Một vật chuyển động chậm dần đều. Xét ba đoạn đường liên tiếp bằng nhau trước khi dừng lại thì đoạn ở giữa vật đi trong thời gian $1s$. Tìm tổng thời gian vật đi ba đoạn đường bằng nhau kể trên.

(Trích đề thi Olympic 30/4, 1998)

Bài giải

Gọi ba quãng đường liên tiếp là AB, BC và CD ; a là gia tốc chuyển động của vật. Ta có: $AB = BC = CD = s$; $v_3 = 0$.

- Trên đoạn AB : $v_1^2 - v_0^2 = 2as$ (1).
- Trên đoạn BC : $v_2^2 - v_1^2 = 2as$ (2).
- Trên đoạn CD : $0 - v_2^2 = 2as$ (3).
- Mặt khác, trên đoạn BC : $a = \frac{v_2 - v_1}{t}$; với $t = 1s$ nên $a = v_2 - v_1$ (4).
- Từ các phương trình trên, ta được: $v_0 = v_2\sqrt{3}$; $v_1 = v_2\sqrt{2}$; $a = v_2(1 - \sqrt{2})$.
- Thời gian đi hai quãng AB và CD là:

$$t_1 = \frac{v_1 - v_0}{a} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{6} + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{2} (s)$$

$$t_3 = \frac{-v_2}{a} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 (s)$$

- Thời gian đi tổng cộng trên cả quãng đường AD là $t = t_1 + t_2 + t_3$.

$$\Rightarrow t = \sqrt{6} + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} + 1 = \sqrt{6} + \sqrt{3} (s).$$

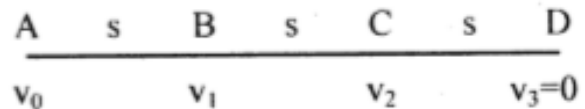
Vậy: Tổng thời gian đi ba đoạn đường trên là $t = \sqrt{6} + \sqrt{3} (s)$.

15. Một xe tải cần chuyển hàng giữa hai điểm A và B cách nhau một khoảng $L = 800m$. Chuyển động của xe gồm hai giai đoạn: khởi hành tại A chuyển động nhanh dần đều và sau đó tiếp tục chuyển động chậm dần để dừng lại B . Biết rằng độ lớn gia tốc của xe trong suốt quá trình chuyển động không vượt quá $2m/s^2$. Hỏi phải mất ít nhất bao nhiêu thời gian để xe đi được quãng đường trên?

(Trích đề thi Olympic 30/4, 1999)

Bài giải

Gọi s là quãng đường đi trong chuyển động nhanh dần đều; a, b lần lượt là độ lớn gia tốc của xe trong 2 giai đoạn (a và $b > 0$).



- Trong giai đoạn đầu, ta có: $s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2s}{a}}$ (1); $v_1^2 = 2as$ (2)
- Trong giai đoạn sau, ta có: $v_1^2 = 2b(L - s)$ (3); $v_1 = bt_2$ (4).
- Từ (2) và (3) suy ra: $2as = 2b(L - s) \Rightarrow s = \frac{bL}{a+b}$ (5) và $L - s = \frac{aL}{a+b}$ (6).
- Từ (1) và (5) suy ra: $t_1 = \sqrt{\frac{2bL}{(a+b)a}}$ (7).
- Từ (3), (4) và (6) suy ra: $t_2 = \sqrt{\frac{2aL}{(a+b)b}}$ (8).
- Thời gian tổng cộng xe đi từ A đến B: $t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2bL}{(a+b)a}} + \sqrt{\frac{2aL}{(a+b)b}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2L}{a+b}} \left[\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}} \right]$.
- Theo bất đẳng thức Cô-si: $\left[\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}} \right] \geq 2$.

Dấu “=” xảy ra khi: $\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \Rightarrow a = b$.

Lúc đó: $t = t_{\min} = 2\sqrt{\frac{L}{a}} \geq 2\sqrt{\frac{L}{a_0}} = 2\sqrt{\frac{800}{2}} = 40s$.

Vậy: Thời gian ngắn nhất để xe đi hết quãng đường trên là $t_{\min} = 40s$.

16. Một chất điểm chuyển động trên một đường thẳng từ A đến B cách nhau đoạn $d = AB = 8m$ thông qua hai giai đoạn: Bắt đầu khởi hành tại A chuyển động nhanh dần đều và sau đó tiếp tục chuyển động chậm dần đều để dừng lại tại B. Cho biết độ lớn của các gia tốc trong suốt quá trình chuyển động không vượt quá $2cm/s^2$. Tính thời gian ngắn nhất để chất điểm đi được quãng đường trên.

(Trích đề thi Olympic 30/4, 2013)

Bài giải

Chọn chiều (+) là chiều chuyển động của chất điểm.

Gọi s_1 là quãng đường đi trong chuyển động nhanh dần đều, s_2 là quãng đường còn lại; a_1 và a_2 là gia tốc của chất điểm trong 2 giai đoạn chuyển động.

- Trong giai đoạn đầu ứng với thời gian t_1 , ta có: $s_1 = \frac{1}{2}a_1t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a_1}}$; $v_1^2 = 2a_1s_1$ (1)
- Trong giai đoạn sau ứng với thời gian t_2 , ta có: $v_1 = -a_2t_2$; $v_1^2 = -2a_2s_2 = -2a_2(d - s_1)$ (2)

- Từ (1) và (2) ta được: $s_1 = \frac{a_2}{a_2 - a_1} d; s_2 = \frac{a_1}{a_1 - a_2} d$ (3).

- Thời gian chuyển động của chất điểm trong mỗi giai đoạn:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2a_2}{(a_2 - a_1)a_1}} d; t_2 = \sqrt{\frac{2a_1}{(a_2 - a_1)a_2}} d \quad (4).$$

- Thời gian chất điểm đi từ A đến B: $t = t_1 + t_2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2}{a_2 - a_1}} d \cdot \left[\sqrt{\frac{-a_2}{a_1}} + \sqrt{\frac{a_1}{-a_2}} \right]$ (5).

- Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\sqrt{\frac{-a_2}{a_1}}, \sqrt{\frac{a_1}{-a_2}}$ ta được: $\sqrt{\frac{-a_2}{a_1}} + \sqrt{\frac{a_1}{-a_2}} \geq 2$.

Dấu “=” xảy ra khi $a_1 = -a_2$.

- Từ (5) suy ra: $t_{\min} = 2\sqrt{\frac{d}{a_1}} \geq 2$ ($d = 8m; a_0 = 2cm/s^2 = 0,02m/s^2$) $\Rightarrow t_{\min} = 2\sqrt{\frac{8}{0,02}} = 40s$.

Vậy: Thời gian ngắn nhất để chất điểm đi được quãng đường AB là $t_{\min} = 40s$.

17. Trên quãng đường nhất định, một chất điểm chuyển động nhanh dần đều không vận tốc đầu với gia tốc a mất thời gian T . Nếu chuyển động của chất điểm là luân phiên giữa chuyển động với gia tốc a trong thời gian $T_1 = \frac{T}{10}$ và chuyển động đều trong thời gian $T_2 = \frac{T}{15}$ thì để đi hết quãng đường chất điểm phải trải qua mấy lần chuyển động đều?

(Trích đề thi 30/4, 2015)

Bài giải

- Quãng đường chất điểm phải đi: $S = \frac{1}{2} a T^2$ (1).

- Gọi n là số lần chất điểm chuyển động với thời gian T_2 , ta có:

$$S = \left[\frac{1}{2} a T_1^2 + a T_1 T_2 \right] + \left[\left(\frac{1}{2} a T_1^2 + a T_1 T_1 \right) + 2a T_1 T_2 \right] + \left[\left(\frac{1}{2} a T_1^2 + 2a T_1 T_1 \right) + 3a T_1 T_2 \right] \\ + \dots + \left[\left(\frac{1}{2} a T_1^2 + (n-1)a T_1 T_1 \right) + na T_1 T_2 \right]$$

$$S = \frac{T_1^2 a}{2} [1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)] + T_1 T_2 a (1 + 2 + \dots + n) \quad (2)$$

- Từ (1) và (2) ta được:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}aT^2 &= \frac{T_1^2 \cdot a}{2} [1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)] + T_1 T_2 \cdot a (1 + 2 + \dots + n) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}aT^2 &= \frac{1}{2}a \cdot \frac{T^2}{10^2} \cdot n^2 + \frac{T}{10} \cdot \frac{T}{15} \cdot a \frac{n(n+1)}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= \frac{1}{200}n^2 + \frac{1}{150} \frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow 5n^2 + n - 200 = 0 \Rightarrow n = 7,5\end{aligned}$$

- Sau 7 lần chất điểm chuyển động thẳng đều với thời gian T_2 , quãng đường vật đi được là:

$$S = T^2 \cdot a \left(\frac{1}{2 \cdot 100} \frac{2 \cdot 7 \cdot 7}{2} + \frac{1}{150} \frac{(7+1)7}{2} \right) = \frac{259}{600} T^2 \cdot a.$$

- Quãng đường còn lại là: $\Delta S = \frac{1}{2}T^2 \cdot a - \frac{259}{600}T^2 \cdot a = \frac{41}{600}T^2 \cdot a.$
- Quãng đường chất điểm đi được trong thời gian T_1 lần thứ 8: $S_1 = \left(\frac{1}{2}a \frac{T^2}{100} + 7 \cdot a \frac{T^2}{100} \right) = \frac{3}{40}aT^2 > \Delta S.$

Vậy: Chất điểm đi hết quãng đường trải qua 7 lần chuyển động thẳng đều.

18. Trên trục Ox , một chất điểm chuyển động biến đổi đều có hoành độ ở các thời điểm t_1, t_2, t_3 lần lượt là x_1, x_2, x_3 . Biết rằng: $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t$.

Hãy tính gia tốc của chuyển động theo x_1, x_2, x_3, t và cho biết tính chất của chuyển động.

Bài giải

Giả sử tại thời điểm ban đầu (chọn $t_0 = 0$), chất điểm có tọa độ x_0 , vận tốc v_0 và gia tốc a (không đổi).

$$x_1 = x_0 + v_0 t_1 + \frac{at_1^2}{2} \quad (1)$$

- Từ phương trình chuyển động, ta có: $x_2 = x_0 + v_0 t_2 + \frac{at_2^2}{2} \quad (2)$

$$x_3 = x_0 + v_0 t_3 + \frac{at_3^2}{2} \quad (3)$$

- Lấy (2) - (1): $x_2 - x_1 = v_0(t_2 - t_1) + \frac{a}{2}(t_2^2 - t_1^2) = v_0 t + \frac{at}{2}(t_1 + t_2) \quad (4).$

- Lấy (3) - (2): $x_3 - x_2 = v_0(t_3 - t_2) + \frac{a}{2}(t_3^2 - t_2^2) = v_0 t + \frac{at}{2}(t_2 + t_3) \quad (5)$

- Lấy (5) - (4): $x_3 + x_1 - 2x_2 = \frac{at}{2}(t_3 - t_1) = \frac{at}{2} \cdot 2t \Rightarrow a = \frac{x_3 + x_1 - 2x_2}{t^2}.$

- Tính chất của chuyển động:

$$+ \frac{x_3 + x_1}{2} > x_2 \Rightarrow a > 0: \text{ chất điểm chuyển động nhanh dần đều.}$$

$$+ \frac{x_3 + x_1}{2} < x_2 \Rightarrow a < 0 : \text{chất điểm chuyển động chậm dần đều.}$$

Vậy: Gia tốc của chất điểm là $a = \frac{x_3 + x_1 - 2x_2}{t^2}$; nếu $\frac{x_3 + x_1}{2} > x_2$ thì chất điểm chuyển động nhanh dần đều, nếu $\frac{x_3 + x_1}{2} < x_2$ thì chất điểm chuyển động chậm dần đều.

19. Một đoàn tàu bắt đầu rời ga chuyển động nhanh dần đều. Xét trên 2010 ray đầu (kể từ khi tàu rời ga) ở đoạn ray thứ 2009 tàu đi mất thời gian t_0 . Hãy tính thời gian tàu đi qua ray thứ 2010 và cả 2010 đoạn ray. Cho rằng các đoạn ray có chiều dài bằng nhau và đặt sát nhau.

Bài giải

Gọi a là gia tốc đoàn tàu; $v_1, v_2, \dots, v_n$ là vận tốc đoàn tàu cuối các đoạn ray thứ 1, thứ 2, ..., thứ n , chiều dài các đoạn ray là l .

Ta có: $v_1^2 = 2al$; $v_2^2 = 4al$; ...; $v_n^2 = 2nal$.

Suy ra: $v_2 = \sqrt{2}v_1$; $v_3 = \sqrt{3}v_1$; ...; $v_n = \sqrt{n}v_1$.

- Thời gian tàu đi hết đoạn ray thứ 2009 là:

$$t_{2009} = t_0 = \frac{t_{2009} - v_{2008}}{a} = \frac{(\sqrt{2009} - \sqrt{2008}) \cdot v_1}{a} \Rightarrow \frac{v_1}{a} = \frac{t_0}{\sqrt{2009} - \sqrt{2008}}.$$

- Thời gian tàu đi hết đoạn ray thứ 2010 là:

$$t_{2010} = \frac{v_{2010} - v_{2009}}{a} = \frac{(\sqrt{2010} - \sqrt{2009}) \cdot v_1}{a} = \frac{t_0 \cdot (\sqrt{2010} - \sqrt{2009})}{\sqrt{2009} - \sqrt{2008}}.$$

- Thời gian tàu đi hết 2010 đoạn ray là: $t = \frac{v_{2010}}{a} = \frac{\sqrt{2010} \cdot v_1}{a} = \frac{t_0 \sqrt{2010}}{\sqrt{2009} - \sqrt{2008}}.$

Vậy: Thời gian tàu đi qua đoạn ray thứ 2010 và cả 2010 đoạn ray là $t_{2010} = \frac{t_0 \cdot (\sqrt{2010} - \sqrt{2009})}{\sqrt{2009} - \sqrt{2008}}$ và

$$t = \frac{t_0 \sqrt{2010}}{\sqrt{2009} - \sqrt{2008}}.$$

20. Hai vật chuyển động trên cùng một đường thẳng với các vận tốc đầu $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ ngược chiều nhau, hướng đến nhau, độ lớn v_1, v_2 . Gia tốc của chúng là $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ không thay đổi và ngược chiều với các vận tốc đầu tương ứng $\vec{v}_1, \vec{v}_2$. Khoảng cách ban đầu giữa hai vật phải có giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu để chúng không gặp nhau khi chuyển động?

Bài giải

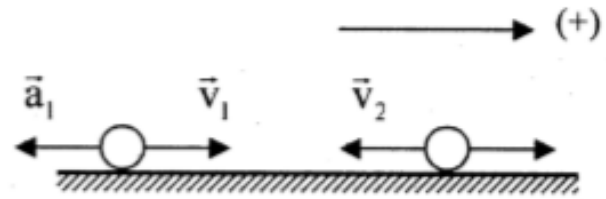
Chọn hệ quy chiếu gắn với vật 2, chiều (+) là chiều chuyển động của vật 1; gọi mặt đất là vật 0.

- Vận tốc ban đầu tương đối:

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_{10} + \vec{v}_{02} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \Rightarrow v_{12} = v_1 + v_2.$$

- Gia tốc tương đối:

$$\vec{a}_{12} = \vec{a}_{10} + \vec{a}_{02} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \Rightarrow a_{12} = -(a_1 + a_2).$$



- Gọi s là quãng đường vật 1 đi được cho đến khi dừng lại so với vật 2. Ta có:

$$0^2 - v_{12}^2 = 2a_{12}s \Leftrightarrow 0^2 - (v_1 + v_2)^2 = -2(a_1 + a_2)s \Rightarrow s = \frac{(v_1 + v_2)^2}{2(a_1 + a_2)}.$$

- Để hai vật không gặp nhau, khoảng cách ban đầu giữa chúng là d phải thỏa: $d \geq s$.

$$\Leftrightarrow d \geq \frac{(v_1 + v_2)^2}{2(a_1 + a_2)} \Rightarrow d_{\min} = \frac{(v_1 + v_2)^2}{2(a_1 + a_2)}.$$

Vậy: Để hai vật không gặp nhau trong quá trình chuyển động thì khoảng cách ban đầu giữa hai vật phải có

giá trị nhỏ nhất là $d_{\min} = \frac{(v_1 + v_2)^2}{2(a_1 + a_2)}.$

21. Một chất điểm bắt đầu chuyển động từ điểm $A_0(x_0, 0)$ theo chiều dương của trục Ox với gia tốc không đổi a_1 . Cùng lúc đó, chất điểm thứ hai từ điểm $B_0(y_0, 0)$ cũng bắt đầu chuyển động theo chiều dương của trục Oy với gia tốc không đổi a_2 .

- Hỏi sau bao lâu hai chất điểm lại gần nhau nhất và tính khoảng cách giữa chúng lúc đó?
- Với điều kiện nào của a_1, a_2, x_0, y_0 thì chúng có thể gặp nhau?

Bài giải

- Sau bao lâu hai chất điểm lại gần nhau nhất và khoảng cách giữa chúng lúc đó.

- Phương trình chuyển động của các chất điểm:

+ Chất điểm 1: $x = x_0 + \frac{1}{2}a_1t^2$ (1).

+ Chất điểm 2: $y = y_0 + \frac{1}{2}a_2t^2$ (2).

- Khoảng cách d giữa hai chất điểm ở thời điểm t :

$$d^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2)t^4 + (a_1x_0 + a_2y_0)t^2 + x_0^2 + y_0^2 \text{ (với } k = t^2 \text{)}.$$

$$\Rightarrow d_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2)(x_0^2 + y_0^2) - (a_1x_0 + a_2y_0)^2}{4 \cdot \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2)} = \frac{(a_1y_0 - a_2x_0)^2}{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\Rightarrow d_{\min} = \frac{|a_1y_0 - a_2x_0|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \quad (3)$$

$$\text{- Từ đó: } k = t^2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{a_1x_0 + a_2y_0}{2 \cdot \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2)} = -\frac{2(a_1x_0 + a_2y_0)}{a_1^2 + a_2^2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{-2(a_1x_0 + a_2y_0)}{a_1^2 + a_2^2}} \quad (4).$$

Vậy: Sau thời gian $t = \sqrt{\frac{-2(a_1x_0 + a_2y_0)}{a_1^2 + a_2^2}}$ hai chất điểm lại gần nhau nhất và khoảng cách giữa chúng

$$\text{lúc đó là } d_{\min} = \frac{|a_1y_0 - a_2x_0|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}.$$

b) Điều kiện của a_1, a_2, x_0, y_0 để chúng có thể gặp nhau

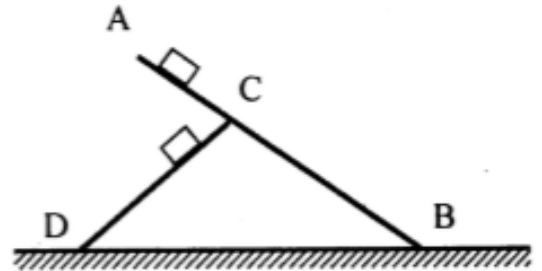
$$\text{- Từ (4), để bài toán có nghiệm: } -2(a_1x_0 + a_2y_0) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x_0}{a_2} + \frac{y_0}{a_1} \leq 0.$$

$$\text{- Để hai chất điểm gặp nhau thì: } d_{\min} = 0 \Leftrightarrow a_1y_0 - a_2x_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{x_0}{y_0}.$$

Vậy: Điều kiện của a_1, a_2, x_0, y_0 để chúng có thể gặp nhau là $\frac{x_0}{a_2} + \frac{y_0}{a_1} \leq 0$ và $\frac{a_1}{a_2} = \frac{x_0}{y_0}$.

22. Hai máng rất nhẵn AB và CD cùng nằm trong một mặt phẳng thẳng đứng và cùng hợp với phương ngang một góc như nhau, $CD = CB$. Hai vật nhỏ được thả đồng thời không vận tốc đầu từ A và C .

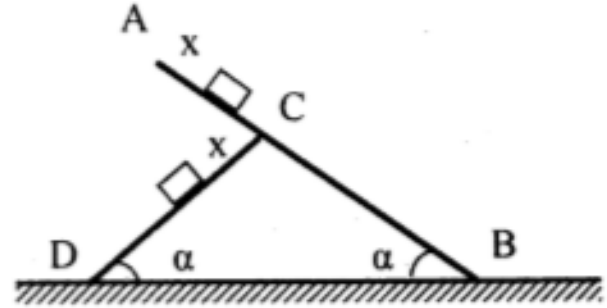
Thời gian để vật trượt từ A đến B là t_1 và thời gian để vật trượt từ C đến D là t_2 . Sau bao lâu kể từ khi thả, khoảng cách giữa hai vật là ngắn nhất?



Bài giải

Gia tốc của mỗi vật khi trượt không ma sát: $a = g \sin \alpha$. Do đó, sau thời gian t chúng đi được quãng đường x bằng nhau. Gọi khoảng cách giữa chúng là L . Ta có:

$$\begin{aligned} L^2 &= x^2 + (AC - x)^2 - 2x(AC - x)\cos 2\alpha \\ \Leftrightarrow L^2 &= x^2 + AC^2 + x^2 - 2xAC - 2x(AC - x)\cos 2\alpha \\ \Leftrightarrow L^2 &= AC^2 - 2x(AC - x) - 2x(AC - x)\cos 2\alpha \\ \Leftrightarrow L^2 &= AC^2 - 2x(1 + \cos 2\alpha)(AC - x) \\ \Rightarrow L &= L_{\min} \Leftrightarrow X = x(AC - x)_{\max} \end{aligned}$$



- Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không

âm: x và $(AC - x)$, ta được: $X = x(AC - x) \geq 2\sqrt{x(AC - x)}$.

Dấu “=” xảy ra khi: $x = AC - x \Rightarrow x = \frac{AC}{2}$.

- Mà: $AB = AC + CB = 2x + CD \Rightarrow x = \frac{AB - CD}{2}$.

- Mặt khác: $AB = \frac{1}{2}at_1^2$, $CD = \frac{1}{2}at_2^2$, $x = \frac{1}{2}at^2$.

Thay vào $x = \frac{AB - CD}{2}$ ta được: $\frac{1}{2}at^2 = \frac{\frac{1}{2}at_1^2 - \frac{1}{2}at_2^2}{2} \Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{2}(t_1^2 - t_2^2) \Rightarrow t = \sqrt{\frac{t_1^2 - t_2^2}{2}}$.

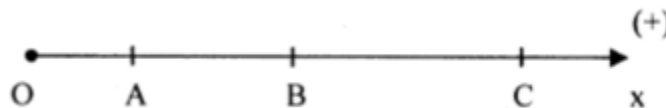
Vậy: Sau thời gian $t = \sqrt{\frac{t_1^2 - t_2^2}{2}}$ thì khoảng cách giữa hai vật là ngắn nhất.

23. Một vật chuyển động chậm dần đều cho đến khi dừng lại. Biết quãng đường đi được trong giây đầu tiên dài gấp 15 lần quãng đường đi được trong giây cuối cùng và tổng quãng đường vật đi được là $25,6m$. Tìm vận tốc đầu của vật.

Bài giải

Gọi quãng đường mà vật đi được trong giây đầu là s_{OA} ; quãng đường mà vật đi được trong giây cuối là s_{BC} .

Ta có:



$$s_{OA} = v_0 \cdot 1 + \frac{a}{2} \cdot 1^2 = v_0 + \frac{a}{2} \quad (1)$$

$$v_C = v_B + a \cdot 1 = 0 \Rightarrow v_B = -a \quad (2)$$

$$s_{BC} = v_B \cdot 1 + \frac{a}{2} \cdot 1^2 = -a + \frac{a}{2} = -\frac{a}{2} \quad (3)$$

- Theo đề: $s_{OA} = 15s_{BC} \Leftrightarrow v_0 + \frac{a}{2} = 15 \left(-\frac{a}{2} \right) \Rightarrow v_0 = -8a$.

- Quãng đường vật đi được: $s = \frac{v_C^2 - v_0^2}{2a}$.

$$\Leftrightarrow 25,6 = \frac{0^2 - (-8a)^2}{2a} = -32a \Rightarrow a = -0,8m/s^2 \Rightarrow v_0 = -8 \cdot (-0,8) = 6,4m/s.$$

Vậy: Vận tốc đầu của vật là $v_0 = 6,4m/s$.

24. Một ô tô chở khách giữa hai địa điểm A và B cách nhau một khoảng $l = 800m$. Chuyển động của ô tô gồm hai giai đoạn: khởi hành tại A chuyển động nhanh dần đều và sau đó tiếp tục chuyển động chậm dần đều để dừng lại ở B . Biết rằng độ lớn gia tốc của ô tô trong suốt quá trình chuyển động không vượt quá $a_0 = 2m/s^2$. Phải mất ít nhất bao nhiêu thời gian để ô tô đi từ A đến B ?

Bài giải

Gọi s là quãng đường ô tô đi được trong giai đoạn chuyển động nhanh dần đều; a, b là độ lớn gia tốc của ô tô trong giai đoạn chuyển động nhanh dần đều và chuyển động chậm dần đều ($a, b > 0$).

- Trong giai đoạn chuyển động nhanh dần đều, ta có: $s = \frac{1}{2}at_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2s}{a}}$; $v_1^2 = 2as$ (1).

- Trong giai đoạn chuyển động chậm dần đều, ta có: $v_1^2 = 2b(l - s)$; $v_1 = bt_2$ (2).

- Từ (1) và (2), ta được: $2as = 2b(l - s) \Rightarrow s = \frac{bl}{a+b}$; $l - s = \frac{al}{a+b}$ (3).

- Từ (1) và (3), ta được: $t_1 = \sqrt{\frac{2bl}{a(a+b)}}$ (4)

- Từ (2) và (3), ta được: $t_2 = \sqrt{\frac{2al}{b(a+b)}}$ (5).

- Thời gian ô tô đi từ A đến B là: $t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2bl}{a(a+b)}} + \sqrt{\frac{2al}{b(a+b)}} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2l}{(a+b)}} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$.

- Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm $\sqrt{\frac{a}{b}}, \sqrt{\frac{b}{a}}$ ta được $\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \geq 2$.

Mặt khác: $\sqrt{\frac{2l}{(a+b)}} \geq \sqrt{\frac{1}{a_0}}$ với $a_0 = 2m/s^2$.

$$\Rightarrow t \geq \sqrt{\frac{1}{a_0}} \cdot 2 = 2\sqrt{\frac{1}{a_0}} \Rightarrow t_{\min} = 2\sqrt{\frac{1}{a_0}} = 2\sqrt{\frac{800}{2}} = 40s.$$

Vậy: Phải mất ít nhất $40s$ để ô tô đi từ A đến B .

25. Một chất điểm chuyển động từ A đến B cách A một đoạn s . Cứ chuyển động được $3s$ thì chất điểm lại nghỉ $1s$. Trong $3s$ đầu chất điểm chuyển động với tốc độ $v_0 = 5m/s$. Trong các khoảng $3s$ tiếp theo chất điểm chuyển động với tốc độ $2v_0, 3v_0, \dots, nv_0$. Tính tốc độ trung bình của chất điểm trên quãng đường AB trong các trường hợp:

a) $s = 315m$.

b) $s' = 325m$.

Bài giải

Đặt $t_1 = 3s$; gọi s là quãng đường mà chất điểm đi được sau $nt_1 (s) (n > 1)$; $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ là quãng đường đi được của chất điểm trong $3s$ đầu tiên và trong các khoảng $3s$ kế tiếp... Ta có:

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n$$

$$\Leftrightarrow s = v_0 t_1 + 2v_0 t_1 + \dots + nv_0 t_1 = v_0 t_1 (1 + 2 + \dots + n)$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{n(n+1)}{2} v_0 t_1 = \frac{n(n+1)}{2} \cdot 5 \cdot 3 = 7,5n(n+1)$$

a) Khi $s = 315m$, ta có: $7,5n(n+1) = 315 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 6 \\ n = -7 \end{cases}$ (loại $n = -7$).

- Thời gian chuyển động của chất điểm trên quãng đường $s = 315m$ là:
 $t = nt_1 + n - 1 = 6 \cdot 3 + 6 - 1 = 23s$.

- Tốc độ trung bình của chất điểm trên quãng đường $s = 315m$: $\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{315}{23} = 13,7m/s$.

b) Khi $s' = 325m$, ta có:

- Thời gian chất điểm đi quãng đường $s = 315m$ đầu là $t = 23s$.

- Thời gian chất điểm đi quãng đường $\Delta s = 10m$ cuối là: $\Delta t = \frac{\Delta s}{v_{n+1}} = \frac{\Delta s}{(n+1)v_0} = \frac{10}{7,5} = 0,29s$.

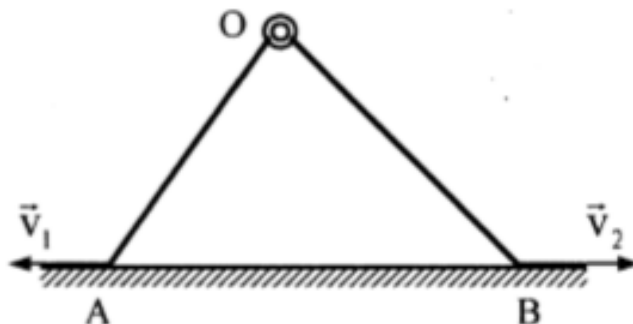
- Tốc độ trung bình của chất điểm trên quãng đường $s' = 325m$ là:

$$\bar{v}' = \frac{s'}{t'} = \frac{s'}{t + \Delta t + 1} = \frac{325}{23 + 0,29 + 1} = 13,38m/s$$

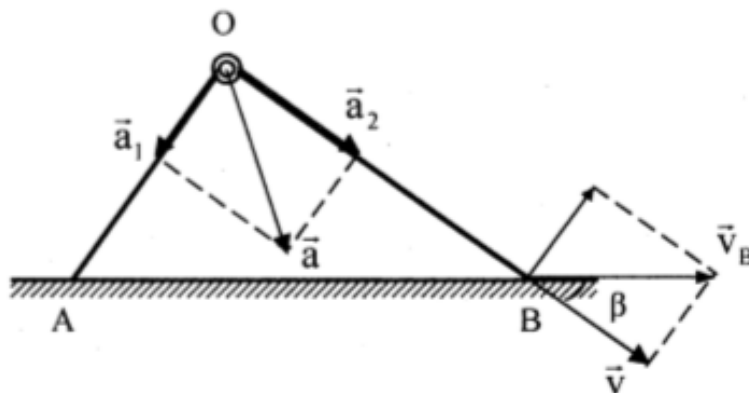
Vậy: Tốc độ trung bình của chất điểm trên các quãng đường $s = 315m$ là $\bar{v} = 13,7m/s$ và $s' = 325m$ là $\bar{v}' = 13,38m/s$.

26. Hai thanh cứng bằng kim loại có chiều dài $OA = l_1, OB = l_2$, liên kết với nhau bởi khớp nối O , được đặt trên mặt bàn nhẵn nằm ngang. Người ta kéo hai đầu A, B của thanh theo cùng phương AB nhưng ngược

chiều nhau với vận tốc không đổi lần lượt là v_1 và v_2 . Tìm gia tốc của khớp nối O lúc hai thanh vuông góc nhau.



Bài giải



Xét hệ quy chiếu gắn với A . Ta có:

- Vận tốc của B đối với A : $\vec{v}_B = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \Rightarrow v_B = v_1 + v_2$.
- Vận tốc của khớp nối O đối với A : $v = v_B \cos \beta = (v_1 + v_2) \frac{l_2}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}$.
- Gia tốc toàn phần của khớp nối O : $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \Rightarrow a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ (a_1, a_2 là gia tốc thành phần của khớp nối O theo OA và OB).
- Thành phần gia tốc a_1 của khớp nối O (gia tốc hướng tâm A): $a_1 = \frac{v^2}{l_1} = \frac{(v_1 + v_2)^2 l_2^2}{(l_1^2 + l_2^2) l_1}$.

Tương tự, nếu chọn hệ quy chiếu gắn với B , ta có:

- Vận tốc của khớp nối O đối với B : $v = (v_1 + v_2) \frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}$.
- Thành phần gia tốc của khớp nối O (gia tốc hướng tâm B): $a_2 = \frac{v^2}{l_2} = \frac{(v_1 + v_2)^2 l_1^2}{(l_1^2 + l_2^2) l_2}$.

Gia tốc toàn phần của khớp nối O là: $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \frac{(v_1 + v_2)^2 \sqrt{l_1^6 + l_2^6}}{l_1 l_2 (l_1^2 + l_2^2)}$.

Vậy: Độ lớn gia tốc khớp nối O là $a = \frac{(v_1 + v_2)^2 \sqrt{l_1^6 + l_2^6}}{l_1 l_2 (l_1^2 + l_2^2)}$.

27. Từ ban công lần lượt các viên bi được thả rơi tự do cách nhau những khoảng thời gian bằng nhau. Khi viên bi đầu tiên chạm đất thì viên bi tiếp theo đã rơi được đúng một nửa quãng đường. Hỏi lúc này viên bi thứ ba đã rơi được bao nhiêu phần của quãng đường? Bao nhiêu viên bi đã được thả cho đến khi viên bi đầu tiên chạm đất? Cho $g = 10 \text{ m/s}^2$.

(Trích đề thi Olympic 30/4, 2012)

Bài giải

Gọi h là độ cao nơi thả các viên bi.

- Thời gian rơi của một viên bi: $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.
- Khoảng thời gian viên bi rơi nửa đoạn đường đầu: $t_2 = \sqrt{\frac{h}{g}}$.
- Khoảng thời gian giữa hai lần các viên bi rơi: $\Delta t = t_1 - t_2 = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{h}{g}}$.
- Thời gian viên bi thứ 3 đã rơi: $t_3 = t_2 - \Delta t = 2t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{h}{g}}(2 - \sqrt{2})$.
- Quãng đường mà viên bi thứ ba rơi được khi viên bi thứ nhất chạm đất:

$$h_3 = \frac{1}{2} g t_3^2 = \frac{1}{2} g \frac{h}{g} (2 - \sqrt{2})^2 = h(3 - 2\sqrt{2}) \text{ và } n = \frac{t}{\Delta t} = \frac{\sqrt{\frac{2h}{g}}}{(\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{h}{g}}} \approx 3,4.$$

Vậy: Quãng đường rơi của viên bi thứ ba là $h_3 = h(3 - 2\sqrt{2})$ và số viên bi đã thả là 4.

28. Một quả cầu đàn hồi, được thả rơi tự do từ độ cao $h = 20 \text{ m}$ xuống mặt sàn nằm ngang. Sau khi chạm sàn, quả cầu nảy lên thẳng đứng, lại rơi xuống, cứ như thế ... cho đến lúc dừng lại. Biết tốc độ lúc nảy lên bằng $\frac{9}{10}$ tốc độ lúc chạm sàn trước đó. Tìm thời gian chuyển động của quả cầu. Lấy $g = 10 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

Bài giải

- Thời gian rơi lần 1: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{10}} = 2 \text{ s}$.

- Tốc độ chạm sàn lần 1: $v_1 = \sqrt{2gh}$.
- Tốc độ nảy lên lần 1: $v'_1 = k\sqrt{2gh}$ với $k = \frac{9}{10}$.
- Thời gian đi lên lần 1: $t_1 = k\sqrt{\frac{2h}{g}} = kt$.
- Độ cao cực đại nảy lên lần 1: $h_1 = \frac{v'^2_1}{2g} = k^2h$.
- Thời gian rơi lần 2: $t' = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = k\sqrt{\frac{2h}{g}} = kt = t_1$.
- Tốc độ nảy lên lần 2: $v'_2 = k^2\sqrt{2gh}$.
- Thời gian đi lên lần 2: $t_2 = k^2\sqrt{\frac{2h}{g}} = k^2t$.
- Độ cao cực đại nảy lên lần 2: $h_2 = \frac{v'^2_2}{2g} = k^4h$.
- Thời gian rơi lần 3: $t'' = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = k^2\sqrt{\frac{2h}{g}} = k^2t = t_2$.
- ...
- Thời gian đi lên lần n : $t_n = k^n\sqrt{\frac{2h}{g}} = k^nt$.
- Thời gian chuyển động của quả cầu: $\tau = t + 2t_1 + 2t_2 + \dots + 2t_n$.

$$\Leftrightarrow \tau = t + 2(k + k^2 + \dots + k^n)t = t + 2\frac{k}{1-k}t = 2 + 2\frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{9}{10}} \cdot 2 = 38s.$$

Thời gian chuyển động của quả cầu là $\tau = 38s$.

29. Một quả cầu nhỏ rơi từ độ cao $h_0 = 180m$. Sau khi chạm đất quả cầu nảy lên và lại rơi xuống. Mỗi lần quả cầu va chạm với mặt đất vận tốc nảy lên của nó chỉ bằng $\frac{1}{n}$ lần ($n=2$) vận tốc của nó trước lúc va chạm. Hỏi thời gian từ lúc quả cầu rơi cho đến khi dừng hẳn là bao nhiêu? Tính tổng quãng đường mà nó đã đi được. Lấy $g = 10m/s^2$.

Chú ý: Cấp số nhân là một dãy số thỏa mãn $\forall n \geq 2$ thì $u_n = u_{n-1} \cdot q$, với u_n là số hạng thứ n của dãy số, q là một số không đổi gọi là công bội của cấp số nhân. Tổng của n số hạng đầu của cấp số nhân:

$$S_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}, q \neq 1.$$

Bài giải

- Quả cầu từ độ cao h_0 khi rơi xuống đất có vận tốc là: $v_0 = \sqrt{2gh_0} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 180} = 60 \text{ m/s}$.
- Vận tốc quả cầu nảy lên lần thứ nhất và lại rơi xuống đất là: $v_1 = \frac{v_0}{n}$.
- Vận tốc quả cầu nảy lên lần thứ hai và lại rơi xuống đất là: $v_2 = \frac{v_0}{n^2}$.
- Vận tốc quả cầu nảy lên lần thứ m và lại rơi xuống đất là: $v_m = \frac{v_0}{n^m}$.
- Độ cao quả cầu mỗi lần nảy lên là: $h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{h_0}{n^2}$; $h_2 = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{h_0}{n^4}$; ...; $h_m = \frac{v_m^2}{2g} = \frac{h_0}{n^{2m-2}}$; ...
- Tổng quãng đường mà quả cầu đi được là: $s = h_0 + 2h_1 + 2h_2 + \dots + 2h_m + \dots$
 $\Leftrightarrow s = h_0 + \frac{2h_0}{n^2} \left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + \dots + \frac{1}{n^{2m-2}} + \dots \right)$.
- Áp dụng công thức tính tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân trong ngoặc (...), với $u_1 = 1$ và $q = \frac{1}{n^2}$, ta được:

$$s = h_0 + \frac{2h_0}{n^2} \cdot u_1 \cdot \frac{1 - q^m}{1 - q} = h_0 + \frac{2h_0}{n^2} \cdot 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{n^2}\right)^m}{1 - \frac{1}{n^2}}$$

$$\Leftrightarrow s = h_0 + \frac{2h_0}{n^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2}} = h_0 + \frac{2h_0}{n^2 - 1} = 180 + \frac{2 \cdot 180}{2^2 - 1} = 300 \text{ m}$$

- Tổng thời gian quả cầu rơi và nảy lên là: $t = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_m + \dots$
 $\Leftrightarrow t = \frac{v_0}{g} + \frac{2v_1}{g} + \dots + \frac{2v_m}{g} + \dots = \frac{v_0}{g} + \frac{2v_0}{g} \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^m} + \dots \right]$.

- Áp dụng công thức tính tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân trong ngoặc [...] với $u_1 = \frac{1}{n}$ và

$$q = \frac{1}{n}, \text{ ta được:}$$

$$t = \frac{v_0}{g} + \frac{2v_0}{g} \cdot u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{v_0}{g} + \frac{2v_0}{g} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^n}{1 - \frac{1}{n}}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{v_0}{g} + \frac{2v_0}{g} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{v_0}{g} \left(\frac{n+1}{n-1} \right) = \frac{60}{10} \left(\frac{2+1}{2-1} \right) = 18s$$

Vậy: Thời gian từ lúc quả cầu rơi cho đến khi dừng hẳn và tổng quãng đường mà nó đã đi được là $t = 18s$ và $s = 300m$.