**ĐÁP ÁN CHUYÊN TOÁN TRẦN PHÚ HẢI PHÒNG**

**Bài 1:** a)  với .

Rút gọn . Chứng minh rằng .

**Lời giải**





.

Dấu bằng : vô lý.

b) Biết phương trình  với  có hai nghiệm  thoả mãn . Chứng minh rằng .

**Lời giải**

Điều kiện: .

Theo Vi-ét ta có  với .

Chia cả tử và mẫu cho  ta được



Do  nên , suy ra .

Dấu bằng .

Và .

Do  nên  vì .

Dấu bằng .

**Bài 2:** a) Giải phương trình .

**Lời giải**

Điều kiện: .











Kết luận: phương trình có hai nghiệm là .

b) Giải hệ phương trình .

**Lời giải**



Xét  nên



Thay  vào ta được



Thay  vào  ta được



Kết luận: hệ phương trình có bốn nghiệm là .

**Bài 3:** Cho tam giác  cân  nội tiếp đường tròn . Các đường phân giác trong  của tam giác  cắt nhau tại  cắt  tại . Điểm  đối xứng với  qua . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt  tại .

a) Chứng minh rằng  và  là trung điểm của đoạn thẳng .

b) Kẻ  song song với  với . Chứng minh rằng  đối xứng với  qua 

c) Gọi  là giao điểm của  và  là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác . Chứng minh rằng  cùng nằm trên một đường tròn.

**Lời giải**

a) Do  nên , do đó .

Xét  ta có  nên , và do  là trung điểm  nên  cũng là trung điểm .

b) Do  nên .

Xét  ta có .

Xét  ta có .

Do đó , hay là tứ giác  nội tiếp.

Suy ra  là hình thang cân.

Theo câu a) ta có .

Do đó xét  ta có .

Cuối cùng kết hợp với  ta suy ra  đối xứng với  qua .



c) Gọi  là trung điểm . Theo câu b) ta có



Do đó  cùng nằm trên một đường tròn.

Xét  và theo câu b) ta có .

Mà hai tam giác  và  đều cân tại  và  nên suy ra , hay là  thẳng hàng.

Nên từ  suy ra  cùng nằm trên một đường tròn.

Từ  suy ra  cùng nằm trên một đường tròn (đpcm).

Ghi chú: đường tròn trên còn đi qua cả tâm  của đường tròn .

Vì:  nên  cùng nằm trên một đường tròn.

**Bài 4:** Cho  thoả mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của

.

**Lời giải**

Dựa trên dấu bằng  nên ta đánh giá theo hướng sử dụng ,  và .

Ta có 



Tương tự ta có .

Theo bất đẳng thức Svác (Schwarz) ta có .

Lại có .

Do đó .

Dấu bằng .

**Bài 5:** a) Chứng minh rằng nếu  với thoả mãn  thì .

**Lời giải**

Do  nên các số dư của  khi chia cho 30 là .

Viết  với  thì .

Do đó .

Có các trường hợp .

Các trường hợp này đều suy ra .

b) Viết lên bảng  số tự nhiên liên tiếp . Từ các số đã viết xoá đi bốn số bất kỳ  rồi viết lên bảng số  (các số còn lại trên bảng giữ nguyên). Tiếp tục thực hiện thao tác trên đến khi trên bảng chỉ còn lại đúng một số, gọi số đó là . Chứng minh rằng .

**Lời giải**

Xét tổng của bình phương các số còn lại trên bảng là .

Sau mỗi lần thao tác thì tổng này sẽ không tăng, do  theo bất đẳng thức Bunhiacopski.

Với tổng cuối cùng và tổng đầu tiên ta có  (áp dụng kết quả .

Từ đó suy ra .