**ĐỀ 86**

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP HỒ CHÍ MINH**

**CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 CẤP THÀNH PHỐ**

**Năm học 2023-2024**

**Bài 1.** (3 điểm):

Cho các số a, b thỏa mãn điều kiện:$2a^{2}+7ab-3b^{2}=0$, $b\ne 2a$, $b\ne -$2a

Tính giá trị của biếu thức: M = $\frac{8a-3b}{2a-b}$ $-$ $\frac{2a-5b}{2a+b}$

**Bài 2.** (3 điểm):

Cho ba số a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=2022$. Chứng minh:

$\frac{\sqrt{a^{2}+2022}+\sqrt{b^{2}+2022}+\sqrt{c^{2}+2022}}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}$ $\geq $ 2

**Bài 3.** (3 điểm):

Giải phương trình: $\frac{4x}{\sqrt{x+1}+1}$ + $\frac{5}{x}$ = $x$

**Bài 4**. (5 điểm):

Cho đường tròn (O), đường kính AB cố định. Gọi C là điểm di động trên (O), (C khác A và B), vẽ đường kính CD của đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt hai đường thẳng AC, AD lần lượt tại E và F. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BF; K là giao điểm của hai đường thẳng OE và AH.

1. Chứng minh năm điểm E, C, D, F, K cùng thuộc một đường tròn.
2. Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác ECDF. Chứng minh điểm I luôn thuộc một đường thẳng cố định khi C di động trên đường tròn (O).

**Bài 5.** (3 điểm):

Qua điểm M thuộc cạnh BC của ∆ABC ta kẻ các đường thẳng song song với cạnh AB, AC, chúng tạo thành với hai cạnh ấy một hình bình hành. Tìm vị trí M để hình bình hành đó có diện tích lớn nhất.

**Bài 6.** (3 điểm):

Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (m; n) với m$ \geq $ n sao cho $A=\left(m+n\right)^{3}$ là ước của

B = $2n.\left(3m^{2}+n^{2}\right)+8$

**-----------HẾT-------------**

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Bài 1.** (3 điểm):

Cho các số a, b thỏa mãn điều kiện:$2a^{2}+7ab-3b^{2}=0$, $b\ne 2a$, $b\ne -$2a

Tính giá trị của biếu thức: M = $\frac{8a-3b}{2a-b}$ $-$ $\frac{2a-5b}{2a+b}$

**Giải**

M = $\frac{8a-3b}{2a-b}$ $-$ $\frac{2a-5b}{2a+b}$ = $\frac{\left(8a-3b\right)\left(2a+b\right)-\left(2a-5b\right)\left(2a-b\right)}{\left(2a-b\right).\left(2a+b\right)}$

= $\frac{16a^{2}+8ab-6ab-3b^{2}-4a^{2}+2ab+10ab-5b^{2}}{4a^{2}-b^{2}}$

= $\frac{12a^{2}+14ab-8b^{2}}{4a^{2}-b^{2}}$ = $\frac{12a^{2}+2.7ab-8b^{2}}{4a^{2}-b^{2}}$

= $\frac{12a^{2}+2.\left(3b^{2}-2a^{2}\right)-8b^{2}}{4a^{2}-b^{2}} $= $\frac{8a^{2}-2b^{2}}{4a^{2}-b^{2}}$ = $\frac{2\left(4a^{2}-b^{2}\right)}{4a^{2}-b^{2}}$ = $2$

**Bài 2.** (3 điểm):

Cho ba số a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=2022$. Chứng minh:

$\frac{\sqrt{a^{2}+2022}+\sqrt{b^{2}+2022}+\sqrt{c^{2}+2022}}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}$ $\geq $ 2

**Giải**

**Ta có** a + $\frac{bc}{a}$ $\geq $ 2$\sqrt{ab}$ $⇒$ $a+b+c+\frac{bc}{a}$ $\geq $ $b+c+2\sqrt{bc}$ = $\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^{2}$

$⇒$ $\sqrt{a^{2}+2022}$ $\geq $ $\sqrt{a}\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$ (1)

**Ta có** $b$+ $\frac{ac}{b}$ $\geq $ 2$\sqrt{ac}$ $⇒$ $a+b+c+\frac{ac}{b}$ $\geq $ $a+c+2\sqrt{ac}$ = $\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)^{2}$

$⇒$ $\sqrt{b^{2}+2022}$ $\geq $ $\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)$ (2)

**Ta có** $c$+ $\frac{ab}{c}$ $\geq $ 2$\sqrt{ab}$ $⇒$ $a+b+c+\frac{ab}{c}$ $\geq $ $a+c+2\sqrt{ab}$ = $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{2}$

$⇒$ $\sqrt{c^{2}+2022}$ $\geq $ $\sqrt{c}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ (2)

**Từ (1); (2); (3)**

$⇒\sqrt{a^{2}+2022}$+$\sqrt{b^{2}+2022}$+$\sqrt{c^{2}+2022}\geq \sqrt{a}\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$+$\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)+\sqrt{c}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$

$⇒\sqrt{a^{2}+2022}$+$\sqrt{b^{2}+2022}$+$\sqrt{c^{2}+2022}$ $\geq $ 2$\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\right)$

$⇒$ $\frac{\sqrt{a^{2}+2022}+\sqrt{b^{2}+2022}+\sqrt{c^{2}+2022}}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}$ $\geq $ 2

**Bài 3.** (3 điểm):

Giải phương trình: $\frac{4x}{\sqrt{x+1}+1}$ + $\frac{5}{x}$ = $x$

**Giải**

ĐK $x\ne 0; x\geq -1$

$\frac{4x}{\sqrt{x+1}+1}$ + $\frac{5}{x}$ = $x$ $⇔$ $\frac{4x\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{(\sqrt{x+1}+1)\left(\sqrt{x+1}-1\right)}$ + $\frac{5}{x}$ = $x$

$⇔$ $4\left(\sqrt{x+1}-1\right)$+ $\frac{5}{x}$ = $x$

$⇔$ $4x\sqrt{x+1}-4x+5=x^{2}$

$⇔$ $x^{2}-4x\sqrt{x+1}+4x-5=0$

$⇔$ $\left(x-2\sqrt{x+1}\right)^{2}-3^{2}=0$

$⇔$ $\left[\left(x-2\sqrt{x+1}\right)-3\right]\left[\left(x-2\sqrt{x+1}\right)+3\right]=0$

$⇔$ $\left[\begin{array}{c}\left(x-2\sqrt{x+1}\right)-3=0\\\left(x-2\sqrt{x+1}\right)+3=0\end{array}\right.$

Trường hợp 1:

$\left(x-2\sqrt{x+1}\right)-3=0$

$⇔$ $2\sqrt{x+1}=x-3$

**ĐK** $x\geq 3$ Bình phương hai vế ta được

$4\left(x+1\right)=x^{2}-6x+9$

$⇔$ $x^{2}-10x+5=0$

$∆$ = $b^{2}-4ac=10^{2}-4.5=80>0$

$x\_{1}=\frac{-b+\sqrt{∆}}{2a}=\frac{10+\sqrt{80}}{2}$ $=5+2\sqrt{5}$ (N)

$x\_{2}=\frac{-b-\sqrt{∆}}{2a}=\frac{10-\sqrt{80}}{2}$ $=5-2\sqrt{5}$ (L)

Trường hợp 2:

$\left(x-2\sqrt{x+1}\right)+3=0$

$⇔$ $2\sqrt{x+1}=x+3$

**ĐK** $x\geq -3$ Bình phương hai vế ta được

$4\left(x+1\right)=x^{2}+6x+9$

$⇔$ $x^{2}+2x+5=0$

$∆$ = $b^{2}-4ac=2^{2}-4.5=-16<0 $Vô nghiệm

Vậy phương trình có nghiệm $x\_{1}=5+2\sqrt{5}$

**Bài 4**. (5 điểm):

Cho đường tròn (O), đường kính AB cố định. Gọi C là điểm di động trên (O), (C khác A và B), vẽ đường kính CD của đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt hai đường thẳng AC, AD lần lượt tại E và F. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BF; K là giao điểm của hai đường thẳng OE và AH.

1. Chứng minh năm điểm E, C, D, F, K cùng thuộc một đường tròn.
2. Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác ECDF. Chứng minh điểm I luôn thuộc một đường thẳng cố định khi C di động trên đường tròn (O).

**Giải**

****

a) **Ta có** $\hat{ADC}$ = $\hat{ABC}$ **(góc nội tiếp cùng chắn cung** AC **của** (O)**)**

**Mà** $\hat{ABC}$ = $\hat{BEC}$ **(cùng phụ với góc CAB)**

$⇒$ $\hat{ADC}$ = $\hat{BEC}$ hay $\hat{ADC}$ = $\hat{FEC}$

Do đó tứ giác **CDFE** nội tiếp (góc ngoài bằng đối góc trong) (1)

Ta có OB = OD = R

$⇒$ DH = BH

Suy ra OH là đường trung trực của BD

Suy ra OH vuông góc với BD

Ta chứng minh tứ giác ADBC là hình chữ nhật suy ra BD song song với AC

Nên OH vuông góc với AC

Xét ∆AEH ta có

AB là đường cao của ∆AEH

HO là đường cao của ∆AEH

O là giao điểm của hai đường cao AB và HO của ∆AEH

Suy ra O là trực tâm của ∆AEH

Suy ra EO là đường cao thứ ba

Nên EO vuông góc với AH tại K

Xét ∆OBE và ∆OKA ta có:

$\hat{EOB}$ = $\hat{KOA}$ (đối đỉnh)

$\hat{OKA}$ = $\hat{OBE} $= 90°

**Suy ra** ∆OBE $\~$ ∆OKA (g.g)

$⇒$ $\frac{OB}{OK}$ = $\frac{OE}{OA}$ (**tỉ số đồng dạng)**

$⇒$ OB.OA = OE.OK

Mà tứ giác ADBC là hình chữ nhật có 2 đường chéo CD và AB cắt nhau tại O nên

OB.OA = OC.OD

$⇒$ OB.OA = OE.OK = OC.OD

$⇒$ $\frac{OE}{OD}$ = $\frac{OC}{OK}$

Xét ∆OEC và ∆ODK ta có:

$\hat{EOC}$ = $\hat{KOD}$ (đối đỉnh)

$\frac{OE}{OD}$ = $\frac{OC}{OK}$ **(chứng minh trên)**

∆OEC $\~$ ∆ODK (c.g.c)

$⇒\hat{OEC}$ = $\hat{ODK}$ (hai góc tương ứng)

Xét tứ giác ECKD ta có

$\hat{OEC}$ = $\hat{ODK}$

Suy ra tứ giác ECDK nội tiếp ( hai góc kề đỉnh bằng nhau cùng nhìn xuống đoạn CK (2)

Từ (1);(2) suy ra 5 điểm **E, C, D, F, K** cùng thuộc một đường tròn)

b) Gọi P và Q thứ tự là giao điểm của đường tròn (I) với đường thẳng AB và OA = R

Ta chứng minh được OP.OQ = OC.OD = $R^{2}$ (3)

Ta chứng minh được AP.AQ = AC.AE = $AB^{2}$ = 4$R^{2}$

Ta có: AP.AQ = (AO $-$ OQ).(AO + OP) = $R^{2}$ + AO.(OP $-$ OQ) $-$ OP.OQ = R(OP $-$ OQ)

Suy ra OP $-$ OQ = 4R (4)

Từ (3); (4) suy ra OP, OQ không đổi hay P, Q là các điểm cố định. Do đó I di động trên đường thẳng cố định là trung trực của PQ.

**Bài 5.** (3 điểm):

Qua điểm M thuộc cạnh BC của ∆ABC ta kẻ các đường thẳng song song với cạnh AB, AC, chúng tạo thành với hai cạnh ấy một hình bình hành. Tìm vị trí M để hình bình hành đó có diện tích lớn nhất.

**Giải**

****

Gọi $S\_{0}; S\_{1}; S\_{2}; S$ lần lượt là diện tích của hình bình hành MEAF; ∆MFB; ∆MCE; ∆ABC

Đặt BM = $x$; CM = y; BC = a

Ta có $x$; y; a > 0 và $x$ + y = a

Ta có $\frac{S\_{0}+S\_{1}+S\_{2}}{S}$ = 1 $⇒$ $\frac{S\_{0}}{S}$ = 1 $-$ $\left(\frac{S\_{1}}{S}+\frac{S\_{2}}{S}\right)$ (1)

Ta có ∆MBF $\~$ ∆CBA (g.g)

$\frac{S\_{1}}{S}$ = $\frac{\left(BM\right)^{2}}{\left(BC\right)^{2}}$ = $\frac{x^{2}}{a^{2}}$ (2)

Ta có ∆MCE $\~$ ∆BCA (g.g)

$\frac{S\_{2}}{S}$ = $\frac{\left(CM\right)^{2}}{\left(BC\right)^{2}}$ = $\frac{y^{2}}{a^{2}}$ (3)

Từ (1); (2); (3) $⇒$ $\frac{S\_{0}}{S}$ = 1 $-$ $\left(\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{a^{2}}\right)$

$\frac{S\_{0}}{S}$ = 1 $-$ $\left(\frac{x^{2}+y^{2}}{a^{2}}\right)$ = 1 $-$ $\left(\frac{(x+y)^{2}+(x-y)^{2}}{2a^{2}}\right)$ = 1 $-$ $\left(\frac{a^{2}+(x-y)^{2}}{2a^{2}}\right)$

$\frac{S\_{0}}{S}$ = 1 $-$ $\frac{a^{2}}{2a^{2}}$ $-$ $\frac{(x-y)^{2}}{2a^{2}}$ = $\frac{1}{2}$ $-$ $\frac{(x-y)^{2}}{2a^{2}}$ $\leq $ $\frac{1}{2}$

$⇒$ $S\_{0}$ $\leq $ $\frac{1}{2}$ S

Dấu bằng xảy ra khi $x$ = y $⇒$ BM = CM

Vậy giá trị lớn nhất của $S\_{0}$ là $\frac{1}{2}$ S khi M là trung điểm của **BC**.

**Bài 6.** (3 điểm):

Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (m; n) với m$ \geq $ n sao cho $A=\left(m+n\right)^{3}$ là ước của

B = $2n.\left(3m^{2}+n^{2}\right)+8$

**Giải**

A là ước của B $⇒$ A $\leq $ B $⇒$ $\left(m+n\right)^{3}$ $\leq $ 2$n.\left(3m^{2}+n^{2}\right)+8$

$⇒$ $\left(m-n\right)^{3}$ $\leq $ 8 $⇒$ $m-n$ $\leq $ 2 $⇒m-n\in ${0;1;2}

Trường hợp 1: $m-n$ = 0 ta có

$\left(2n\right)^{3}$ là ước của 2$n.\left(3n^{2}+n^{2}\right)+8$ $⇒$ 8$n^{3}$ là ước của 8$n^{2}+8⇒$ $n$ = 1

Trường hợp 2: $m-n$ = 1 ta có

$\left(2n+1\right)^{3}$ là ước của 2$n.\left(3\left(n+1\right)^{2}+n^{2}\right)+8$ $⇒\left(2n+1\right)^{3}$ là ước của $\left(2n+1\right)^{3}$ + 7

$⇒$ n = 0

Trường hợp 3: $m-n$ = 2 ta có

$\left(2n+2\right)^{3}$ là ước của 2$n.\left(3\left(n+2\right)^{2}+n^{2}\right)+8$ $⇒\left(2n+2\right)^{3}$ là ước của

$8n^{3}+24n^{2}+24n+8$ $⇒$ $\left(n+1\right)^{3}$ là ước của $\left(n+1\right)^{3}$ $⇒$ n = k, $∀$k $\in $ N

**-----------HẾT-------------**